博士論文

関数指導におけるグラフの読解に関する研究

～関数と解析幾何の視点から～

2019 年

兵庫教育大学大学院
連合学校教育学研究科

西村　徳寿

目　次

第１章　問題の所在と目的・方法

1.1　関数指導の現状と課題

中学校の関数指導では，具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，関数関係を見いだし表現し考察する能力を育成する必要がある（文部科学省，2008)。しかし，具体的な事象とグラフを結びつけて理解することに生徒は困難を抱えている（Clement，1989；Dyke，1994；宮川，1998；久保，2000)。

これまでも実在の量の変化から変量を捉えて，その変量の変化の解析に重点をおいた研究（中原，1964；安藤他，1970；山田，1971；中西他，2009）は行われてきた。事象の中の変量を意識する上で，例えば，安藤他（1970）は，高校生に微積分を指導するには，実数を線分として顕在化することが必要であると述べている。そのために，中学校では，水槽の水の蓄積現象について，それを正比例関数のモデルとして扱い，時間や流量の線分化を試みている（安藤他，1970)。

このように変量の変化の解析に重点をおいた研究は，中学校の関数の学習内容には，2元１次方程式のグラフのように，事象ではなく図形を対象にした課題など，本来は解析幾何の内容にあたるものが含まれており，教師や生徒の理解のなかに，グラフに対する関数的読解と解析幾何的読解との混同が生じていることを指摘した（菊池，1960*a*；遠山他，1965；山田，1971；新海，1981*a*)。

中高連携の視点から見れば，中学校の関数学習は，高校の数学Iの「二次関数」,「鈍角の三角比」及び高校の数学IIの「図形と方程式」につながるものであり，従って中学校数学のグラフに対して関数的読解と解析幾何的読解という２つの視点が含まれていることは，ある意味で自然なことかもしれない。

しかしながら，関数を初めて学ぶ中学生にとって，この２つの読解の混在は，事象とグラフを結びつけ，グラフから事象の動きを読解したり，さらに，図形の問題に対してグラフを使って考えたりする力を培うという点で果たして有益なことなのだろうか。本研究では，グラフに対する関数的読解と解析幾何的読解との相違点を明確にした研究の視点を引き継ぎつつ，それぞれの読解の混同の整理と区別に向けた研究を行うものである。

一方で，日常事象の中から変化する量を見いだして，それを測定して，表・式・グラフと結びつけていく研究が長年にわたって行われてきた（例えば，遠藤，1972；東京都教育研究員中学校関数研究グループ，1974)。しかし，全国学力学習状況調査などの各種調査では，グラフ上の数値（座標）が読めない，グラフを通した人や物の動きが捉えられない，グラフの傾きぐあいと速さの関係が理解できていないなど，グラフ読解のミス

コンセプションを含めて多くの困難が残されている（Clement，1989；Dyke，1994；宮川，1998；久保，2000)。グラフの指導については，グラフを試行錯誤してかく活動（土方，2008）や，グラフの考察を具体的な事象にもどして考えること（風間他，2012）の重要性が述べられている。

さらに，室山（2010）は，中島（2015）のいう「関数の考え」[1)]をもって問題解決を進めていく場合の意志決定を関数感覚とよび，グラフ読解の場面に焦点をあてて，その感覚がどのように表出されるのかをインタビュー調査に基づいて明らかにしている。また，小野田・岡崎（2014）は，グラフから事象を読みとるジェスチャーの意味と役割に焦点をあてた研究を行っている。一次関数のグラフから事象を読みとるインタビュー調査には，グラフ上の点を指し示して事象の瞬間の場面を説明する場面や，x の増加量と y の増加量を線分として見出して量と関連させて捉えている場面が示されている（小野田・岡崎，2014，pp.202-205)。

本研究では，以上のような事象からグラフをつくる場面やグラフから事象を読みとる場面に注目した研究の視点を引き継ぎつつ，事象の中から変化する量を捉えさせて，事象とグラフを量の視点から結びつけて理解するための指導プロセスについて考えたい。

一方，教具の動きから変量を取り出してグラフ読解を行う研究（林，2001；高橋，2002，2003；大滝，2009；久保・岡崎，2013）やコンピュータによって事象の動きを捉えてグラフ読解を行う研究（土田，1998，2001；上田，2009；日野，2016）も行われてきた。しかし，実際の動きをともなった事象のグラフをかいたり，考察したりする活動のなかで，例えば，教師や生徒がその事象の中にある変量をどのように表現すればよいのか，どの変量とどの変量とを対応させてグラフ上の点を読み取ればよいのかなど，実際の動きとグラフとを結びつける指導という点からは，十分な知見がまだ得られていない。

また，中学校数学の教科書等では，関数の導入で動きのある事象の観察や実験が行われている。この場面では，実際の事象の動きから読み取られる変量の大きさを測定する必要がある。算数・数学教育において，基本となる量の概念やその分類は銀林（1957）によって行われている。しかし，正比例関数や一次関数のグラフ読解の場面において，変量の変化の向きを考慮し，変量の大きさを負の数で捉える必要のある場合では，変量の認識は，いわゆるベクトル的に拡張されていく必要があろう。こうした点で，量の認識体系が拡張して捉えられる必要がある（小島，1980，p.140)。つまり，負の数の導入に伴う量の認識の点からは，量の概念の拡張という理論的視点が要請されている。

さらに，関数の種類，特に正比例関数と一次関数の違いによって，動きに伴う変量（Δy）と y 軸から読み取られるものが異なる場合があることが指導されていない。つまり，正比例関数のグラフでは，事象における動きの出発点をグラフの原点として考えるので，

動きに伴う変量（Δy）とグラフの y 軸から読み取られるものが一致しているが，一次関数のグラフではこの両者が一致しない（西村・岡崎，2017）。例えば，地上 20 階から下降するエレベータの動きを，地面を原点としてグラフにする場合，エレベータの軌跡は，地上 20 階をスタートして下降した変量として示されるが，グラフの y 軸から読み取られるものは，地面からの高さ（位置）であって，エレベータの軌跡としての変量ではない。

以上から，関数指導の現状と課題を事象とグラフの関連性という視点から捉えた場合，その課題を研究上の視点，指導上の視点，理論上の視点のそれぞれの視点から整理してまとめる。

(1) 研究上の課題として，

①中学校の関数の学習内容には，2 元 1 次方程式のグラフのように，事象ではなく図形を対象にした課題など，本来は解析幾何の内容にあたるものが含まれており，教師や生徒の理解のなかに，関数的読解と解析幾何的読解との混同が生じる要因になっていると考えられる。関数的読解と解析幾何的読解の相違を明確化し，この混同の整理と区別に向けた研究が必要であると筆者は考える。

②生徒の認識の中に関数的読解と解析幾何的読解のそれぞれが独立して定まったうえで，両者の融合的・統合的読解が進められるべきであると筆者は考えている。①の研究を基礎として，関数的読解と解析幾何的読解との融合的・統合的読解をめざす研究が必要となると筆者は考える。

(2) 中学校の関数指導上の課題として，

①事象のグラフをかいたり，考察したりする活動のなかで，生徒が具体的な事象の中から変量を取り出し，事象とグラフを結びつけて量の視点から理解するための指導プロセスが解明されていない。

②関数の種類，特に正比例関数と一次関数の違いと，負の数の導入に伴う量の認識の点からは，動きに伴う変量（Δy）とグラフの y 軸から読み取られるものが異なることが指導されていない。

(3) 理論上の課題として，

①負の数の導入に伴う量の認識の点からは，量の概念の拡張という理論的視点が要請されている。

本研究は，前述の研究上の課題の(1)の①，(2)，(3)に焦点をあてて行うものであり，(1)の②は本研究の対象外として考える。また，これまでは，関数的読解と解析幾何的読解について，それぞれの内容を明確化してこなかった。本研究の目的の一つが，この相違を明確化することであるので，次節において，その内容を明確化する。

1.2 研究の目的及び方法

本研究の目的は，量の視点から，中学校の関数指導における関数的読解と解析幾何的読解の混在を解きほぐし，それぞれの読解の相違を明確化し，グラフを関数的に読解する力とグラフを解析幾何的に読解する力のそれぞれの育成をめざす指導の基本設計を探究することである。

本研究では，生徒のグラフ読解力とは，グラフから変量を読みとって事象の動きと結びつけることのできる能力（グラフを関数的に読解する力）であるとともに，グラフから数式を読みとって図形の空間的性質（かたち，位置，大きさ）と結びつけることのできる能力（グラフを解析幾何的に読解する力）と考える。

ただし，本研究では，数学的に関数概念と幾何の概念は異なるものであるゆえ，当初はグラフを関数的に読解する力と解析幾何的に読解する力はそれぞれが独立して育成されるべき対象と考えている。そして，それぞれの読解力が確立したあとで，それぞれの読解力が融合的に機能するように育成されるべきであると考えている。

なお，本研究の関数的読解と解析幾何的読解は，ともにグラフに「表す」活動と一体と考えている。なぜならば，関数の対象と解析幾何の対象のそれぞれをグラフに「表す」活動により，それぞれのグラフの意味が明確になると考えているからである。ここで，関数の対象は「変化している事象及び変化するものと捉えられる事象の中の，伴って変化する 2 つの数量の変化の関係」であると捉え，解析幾何の対象は図形であると捉える。

次に，前述の研究目的を達成するために，本研究における研究方法を述べる。本研究では，関数分野のグラフ読解を捉えるための理論を概括的理論と個別的理論の 2 つの観点から述べる。概括的理論とは，前節で述べた研究上の課題に対して学習者の認識の観点から捉えるためのものである。一方，個別的理論とは，前節で述べた関数指導上の課題や理論上の課題に対して数学の観点から捉えるためのものである。

前者の概括的理論は 3 つの理論で構成されている。1 つ目は，関数概念の認識に関わる Vinner （1981）などの概念定義と概念イメージの理論である。2 つ目は，幾何の概念（解析幾何）の認識に関わる Fischbein（1993）の形的概念の理論である。3 つ目は，視覚的表現であるグラフと認識に関わる Gibson（1985）のアフォーダンス理論である。

後者の個別的理論としては 3 つある。1 つ目は，中学校数学の範囲での関数のグラフと解析幾何のグラフの相違を明確化するために，それぞれのグラフが構成される基盤となる概念を明らかにするための視点である。2 つ目は，事象から変量を把握してグラフに結びつけて捉えていくための視点である。3 つ目は，数学教育における基本となる量の概念を明確化し，負の数の導入に伴う量の認識の点から，この基本となる量の概念を拡張するための理論的視点である。

そして，関数分野のグラフ読解を捉えるための理論を用いて，生徒が具体的な事象の中から変量を取り出し，事象とグラフを量の視点から結びつけて理解するため指導プロセスを解明し，負の数の導入に伴う量の認識と量の概念の拡張の課題も含めて量感覚を高める関数指導の基本設計を考える。また，解析幾何的読解の具体例を提示しつつ，関数的読解と解析幾何的読解の区別に向けた視点を提示したいと考える。

したがって，本研究の意義は，グラフを関数的に読解する力とグラフを解析幾何的に読解する力のそれぞれの育成をめざすために，前述した関数分野のグラフ読解を捉えるための理論から，関数的読解と解析幾何的読解の相違を明確化し，教師の指導の基本設計を問い直すことにあると考える。

1.3　本論文の構成

第１章では，まず，事象とグラフの関連性という視点から，これまでの中学校数学の関数分野の関数指導の現状と課題を捉えて，3 つの面から整理し，研究上の課題，関数指導上の課題，理論上の課題としてまとめている。そして，関数分野のグラフに対する２つの種類の読解―関数的読解と解析幾何的読解―の内容を明らかにして，研究の目的と方法並びに本研究の意義を述べている。その後，本論文の構成を述べている。

第２章では，中学校数学の関数分野のグラフ読解に関して，関数的読解と解析幾何的読解の違いを明確化して先行研究を概観して,研究課題の整理し,課題をまとめている。

第３章では，関数分野のグラフ読解を捉えるための理論について，グラフ読解を捉えるための理論を概括的理論と個別的理論の 2 つの面から述べている。概括的理論とは，関数概念と幾何の概念と学習者の認知の関係を捉え，そして，視覚的表現であるグラフと学習者の認知の関係を捉えるための理論である。一方，個別的理論とは，主として数学の立場から，関数的読解と解析幾何的読解の相違を明確化し，関数的読解に関して，事象とグラフを結びつけて量の視点から理解するための指導するプロセスや変量（変化量）と動きの関係を捉えていくための視点である。個別的理論のなかで，本研究で対象とする基本となる量の概念と，その量の概念の拡張に関しても述べている。

第４章では，変量の線分化に焦点をあてた指導の基本設計について述べる。変量の認識を高めるための視点を明らかにし,変量の認識を高めるための授業過程について述べ，その授業過程の意義をまとめている。

第５章では，中学校の関数のグラフに対する読解について，関数の種類，特に正比例関数と一次関数のそれぞれのグラフに対する読解の相違を述べ，区分的一次関数のグラフ読解の意義についても述べている。

第６章では， 中学校の解析幾何のグラフに対する読解について述べる。ただし，高校の解析幾何に連携する視点から中学校の解析幾何を位置づけ，本研究では，その指導を中学校の解析幾何的視点を考慮した指導とよぶものとする。その指導の基本設計を具体的な教授活動を示しながら述べ，知見を明らかにする。

第７章では，本研究の総括について，各章ごとに振り返り，研究の成果と今後の課題を述べている。

注

1) 中島（2015）は，関数を学ぶ意義に関して，「法則」を捉えようとする考察の方法としての「関数の考え」を次のように示している。

「新しく考察の対象としている未確定の，または複雑なことがら（これを y として）を，よくわかった，または，コントロールのしやすいことがら（x）をもとにして，簡単にとらえることはできないか。このために，何を（変数 x）として用いたらよいか。また，そのときに，対応のきまり（法則）f はどんなになるか」というような考えに立つことが，「関数の考え」の基盤として考えられる（中島，2015，p.181）。

第２章　関数分野のグラフ読解に関わる先行研究

関数分野のグラフ読解には関数的読解と解析幾何的読解の 2 種類がある。本章では，この 2 つの読解の違いを明確化し,関数分野のグラフ読解に関する先行研究を概観して，研究課題の整理を行う。

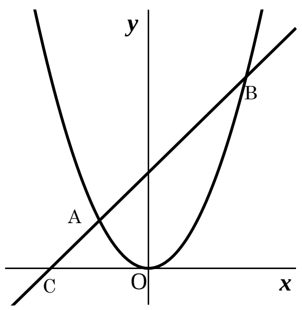
2.1　関数分野のグラフの 2 種類の読み

中学 2 年では，一次関数の学習の中で，二元一次方程式を学習し，その中で二元一次方程式のグラフが直線になることを学習している。ゆえに，二元一次方程式の学習においては，事象を対象とするのではなく，直線という図形を対象にしている。

島田（1972）は，一次関数の学習のなかで，x，y の二元一次方程式の解の集合が直線になるという見方と二元一次方程式の見方を変えれば一次関数とみなすことができるという見方が相互に移行できることは必要としながらも，逆に混乱のもとにもなっていると述べている。

また，中学 3 年の教科書には，放物線と直線を対象にした，いわゆる解析幾何の問題が記載されている（岡本他，2012，p.105）。

右の図のように，関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフ上に，2 点 A，B があります。A，B の x 座標が，それぞれ，－2，4 であるとき，次の問いに答えなさい。



(1) 2 点 A，B の座標を求めなさい。

(2) 2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

(3) A，B を通る直線が x 軸と交わる点を C とするとき，△BCO の面積を求めなさい。

図 2-1 岡本他（2012，p.105）

図 2-1 の問題は，関数の問題というより，グラフを図形として捉えて関数の式を利用する解析幾何の課題であり，中学校教科書の中にも両者の記述が混在している。

関数では，具体的な事象の中から変量を取り出し，その変量の変化の様子を視覚的に表現するためにグラフを用いる。つまり，関数のグラフは「2 変量の組」（高畑，1966，p.85）を表したものである。

一方，「座標」は，空間上の点の位置を表すものである。解析幾何のグラフは，方程式の解を「座標」に置き換え，解の集合を視覚的に点の集合として表したものである。

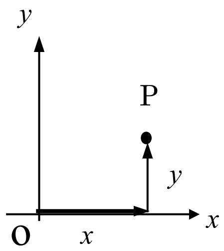


図 2−2

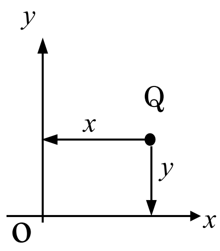


図 2−3

図 2-2 は，関数の 2 変量 x，y の組がグラフ上の点 P を決定していることを示している。点 P は変量 x に対応した変量 y の線分化の結果として決定される。一方，図 2-3 は，x 軸および y 軸までのそれぞれの距離 x，y がグラフ上の点 Q を決定していることを示している（菊池，1962，pp.89-90)。

図 2-2 の関数の「2 変量の組」では，点 P は変量 x に対応した変量 y の線分化（量を向きと長さをもつ対象に変換すること）の結果として決定される。また，2 変量はそれぞれ異なる量なので，x 軸と y 軸の 1 単位目盛りの大きさは互いに異なっていてよい。

一方，図 2-3 の解析幾何の「座標」では，まず，空間上に点 Q が存在し，その点 Q を x 軸や y 軸までの距離によって決定するのである。x 軸，y 軸からの距離を測る場合，1 単位目盛りの大きさは等しくなければならない。

以上から，関数分野のグラフ読解の研究は，関数的側面と解析幾何的側面の 2 つの側面から行う必要がある。

2.2　関数分野のグラフ読解に関わる先行研究の整理

関数分野のグラフ読解に関わる先行研究は，グラフをどのように作成させるのかというグラフをつくる段階の研究と不可分であることは議論の余地がないものと考えられる。そこで，本研究では，グラフを作成する段階からグラフ読解の研究を始めるものとする。

関数分野のグラフの読解には，関数的読解と解析幾何的読解があることを前節で明らかにした。先行研究には，この 2 種類の読解を明確に分けて指導する立場をとる研究がある。

その代表的なものとして，菊池（1960b），遠山他（1965），熊倉（2003）の研究がある。次に，関数は事象の動きを捉えて表・式・グラフの 3 つの表現を用いて考察するためのツールであるとするならば，事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて，その改善に資するための研究がある。その代表的なものとして，Clement（1989），Dyke（1994），宮川（1998）がある。

さらに，関数を事象からどのように取り出すのか，それを表・式・グラフなどの表現にどのように結びつけていくのかという関数の学習過程に関する研究がある。本研究では，これらの研究のうち，事象とグラフの関係を述べた部分に焦点をあてて考察する。対象とする研究は，林（2001），高橋（2002，2003），大滝（2009），久保・岡崎（2013），土田（1998，2001），上田（2009），日野（2016）である。

2.2.1　関数分野のグラフの関数的側面と解析幾何的側面を区別した指導的立場をとる研究

(1) 菊池の研究

菊池（1960b）は，現行の学習指導要領（文部科学省，2008）の関数分野で指導されている内容である座標や傾きには解析幾何的概念が含まれていることを調査問題の誤答から指摘している。資料 1，資料 2，資料 6 は菊池の調査問題である。それぞれの調査に対する誤答のうち特徴的な内容は以下の通りである。

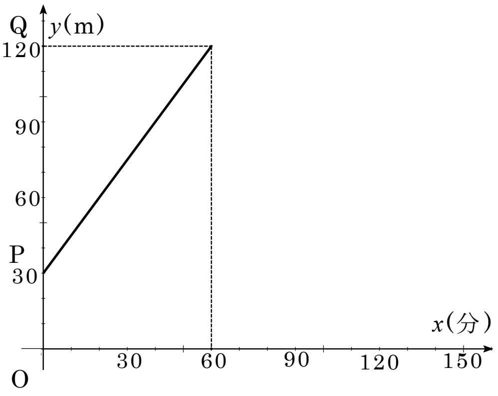
① 資料 1 の調査:ローラーが原点 O まで引き返すときのグラフとして，原点と座標（60，120）を結ぶ線分をかいた者が 24％いた。

② 資料 2 の調査：直線の傾きを 1 と答えた者が 22％いた。また，直線グラフの傾きと単位重量あたりのバネののびとの両者を同じ数値で表している者は 21％にしか過ぎなかった。

③ 資料 6 の調査：増加・減少の記入を誤ってもグラフが右上がりか右下がりかの正答を出している者が 21％いた。

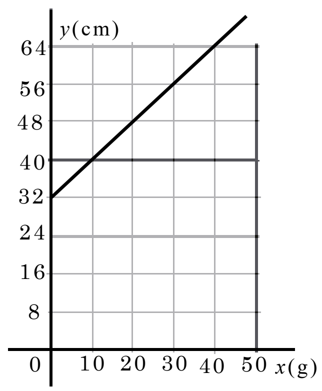
(資料 1)

東西に通ずる工事中の道路 OQ がある。右図のグラフはこの道路の西端 O から東の方へ 30m はなれた地点 P に置いてあったローラーが Q まで進んだときの時間 x(分)と O からの距離 y(km)との関係を示したものである。Q についてから直ちに毎分 2m の速さで O まで引き返すときのグラフを右図に記入せよ。



(正答率 11%)

(資料 2)



バネにおもりをつるして，おもりの重さ x(g)とそのときのバネ全体の長さ y(cm)との関係を実験によってしらべたら左図のようなグラフになった。これについて次の問に答えよ。

(1)　この直線の傾きを求めよ。　(正答率　28%)

(2)　このバネは，おもりを 1g 変化させるごとに長さはどれだけずつ変化するか。　(正答率　51%)

(資料 6)

$y=ax-3$ について次の問の $\boxed{}$ 内に上・下，減少・増加のいずれかを入れよ。

(1) a が負の数ならば x の値がしだいに増加するとそれに伴って y の値は $\boxed{}$ し，グラフは右 $\boxed{}$ りになる。

(2) a が正の数ならば x の値がしだいに増加するとそれに伴って y の値は $\boxed{}$ し，グラフは右 $\boxed{}$ りになる。　(正答率　62%)

資料 1，2，6 の出典：菊池(1960b，pp.118-119)

菊池（1960b）は，①の誤答の原因として，「点の位置・場所の位置を示す数として座標が導入された結果，座標面が物体の位置を表すものとして印象づけられたためであろう」(p.118) と述べている。また，②の誤答の原因として，「単位の長さを常に等しくと

った座標平面上で単に式とグラフの対応関係というような解析幾何的内容が扱われているため」(pp.118-119) であり,「『傾き』の持つ性格から考えても変化率のように具体量とは結びつかない」(p.121) ためであると述べている。さらに,③の誤答の原因として,「『傾き』が増加や減少などの変化の状態とは結びつかず単に直線グラフと x 軸とのなす角の関係として印象づけられている結果であろう」(p.121) と述べている。

そこで,菊池 (1960b) は,中学校の関数分野のなかに混在している関数的内容と解析幾何的内容を一度は分離して,微積分を扱う高校数学において統合を図るべきであると主張している。特に,座標の指導に関しては,単位となる線分の長さを数 1 に対応させることによって,変数を線分におきかえる指導を行っている。例えば,変数 (3,4) を 1 つの点として表す手順を説明する。図 2-4 のように,まず,y 軸を設定せずに x 軸に相当する数直線の原点から出発して右方向に長さ 3 の矢線をとる (右方向を正,左向きは負)。次に,矢線の終点から上向きに垂直に長さ 4 の矢線をとる (上向きを正,下向きを負)。このような変数 (変量) の線分化は,その大きさを視覚化し,自変数 x から従属変数 y への対応も明確化されると考えられる。

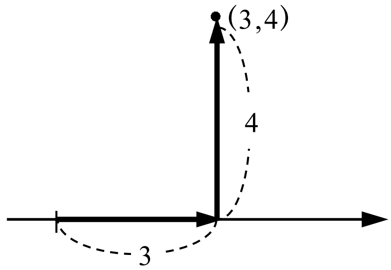


図 2-4 菊池 (1960b, p125)

しかし,このように菊池 (1960b) では,事象からすでに取りだされた変数 (変量) をグラフに結びつけるための指導については記述されているが,事象そのものから変数 (変量) がどのように取り出されるのかについては何も記述されていない。つまり,事象と変数 (変量) がどのようにして結びつくのかについては明確化されていないのである。

(2) 遠山他の研究

遠山他 (1964) は,「関数を主としてグラフを手段とする関数的な部分 (§1)」と,「グラフ (図形) を主として関数を手段とする解析幾何学的部分 (§2〜§3)」(遠山他, 1965, p.78) とに分けて構成されている。つまり,遠山他 (1964) では,中学校の関数分野における関数的な部分と解析幾何学的な部分が分けて記述がなされている。

次の 2 つの事例は,遠山他 (1965) が上記の 2 つの部分の混在が原因と考える誤答である (pp.80-81)。

> 例 1 「1 時間に 4km 歩く人が A 地を出発して 2 時間歩き,B 地について 10 分休み,ふたたび A 地に引き返した」ときのグラフで「A 地に引き返した」というので,グラフは A 地へもどっている。ていねいに,矢印までつけてあるものもある。

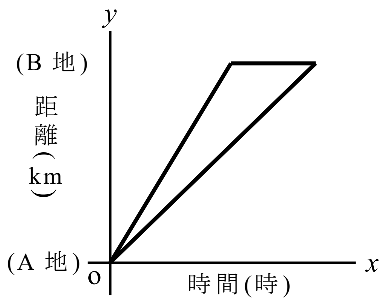


図 2-5 遠山他 (1965, p80)

例 2　「高い所から石を落としたとき，x 秒間に落ちた距離を ym とすると，$y=5x^2$ という関係がある。」で，このときのグラフを，次ページの(1)のように示したところ，生徒は「変だ」という。石を落としたのだから，グラフは，(2)のように，まっすぐになるはずだという。

こうした混乱は，位置や形を示すための軌跡と，関数のグラフとを区別できないところから起こる。

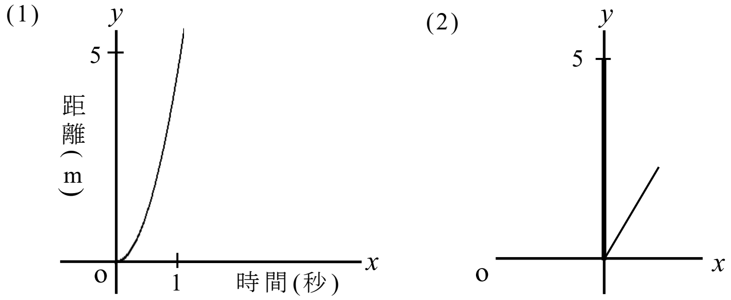


図 2-6　遠山他(1965,p81)

次に，遠山他（1965）は，関数のグラフの指導について次のように述べている。

関数のグラフのかき方を指導するとき，従来は「点の位置を表わすのに，(x,y)の組を使う」ということから始めた。これは，生徒に，グラフは，位置や方向を示すものと受けとられ，誤りをおかす生徒がしばしば見られた。その上，このような導入法は，「x の変化に対応して y が変化する」という考え方ではなく，「x と y との関数関係は，どちらを独立変数と考えてもよい」という扱い方である。これでは，陰関数を考えさせることになるわけで，関数の定義にも相違し，生徒に混乱を生じさせるばかりである。そこでこの教科書では，関数のグラフ指導にあたっては，x に対応する y の値の変化を示すグラフとして，右のようなかき方から始めることにした（遠山他，1965，p.80)。

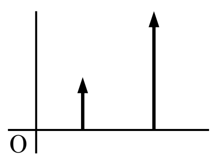


図 2-7 遠山他(1965,p80)

さらに，遠山他（1964）では，正比例関数 $y=1.5x$ のグラフをかかせる場合には，図 2-8～図 2-11 のように 4 段階にわけて指導すべきであると述べられているが，その指導の詳細は記述されていない。筆者は，この 4 段階の特徴を下記のようにまとめた。

(1) 独立変数 x が整数などの離散的な値のみをとって変化すると仮定し，独立変数 x の変化に対応する従属変数 y の値をそれぞれに線分化して,棒グラフをかかせる(図 2-8)。

(2) (1)のそれぞれの x の値に対して，その間隔を細かくとった場合の x の変化に対応

する従属変数 y の値をそれぞれに線分化して，棒グラフをかかせる（図 2-9）。

(3) 独立変数 x の連続的な変化に対応する従属変数 y の値をそれぞれ線分化して表れる領域をかかせる（図 2-10）。

(4) 独立変数 x の連続的な変化に対応する従属変数 y の値をそれぞれ線分化して表れる領域のうち，x の値と y の値の組で表される点のみでつくられる図形として，直線のグラフをかかせる（図 2-11）。

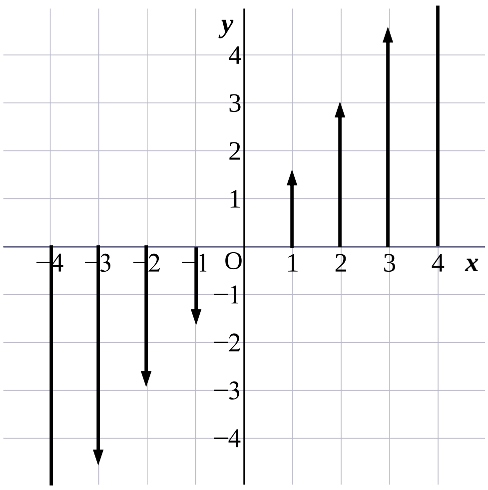


図 2-8　遠山他（1964，p.116）

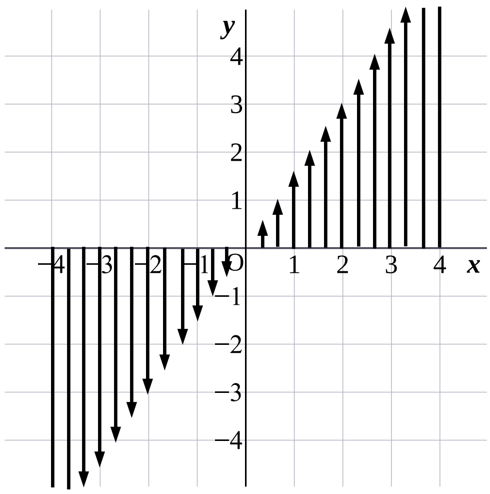


図 2-9　遠山他（1964，p.116）

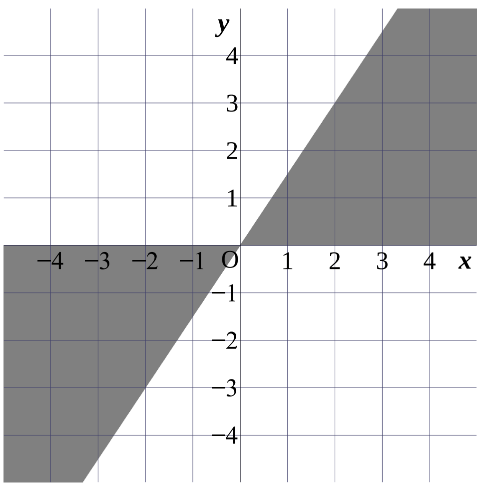


図 2-10　遠山他（1964，p.117）

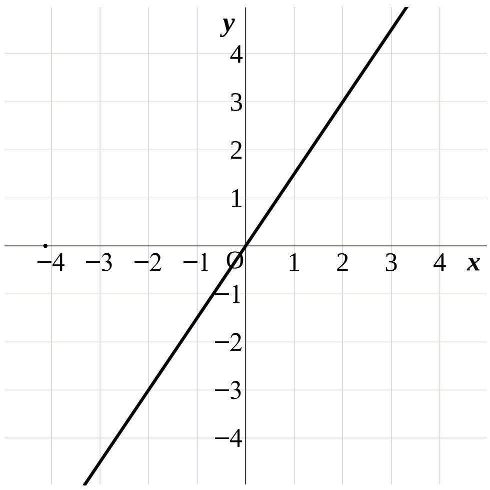


図 2-11　遠山他（1964，p.117）

遠山他（1964）では，ある対象が 1.5km/分の速度で x 分間に進んだときの距離を $y$km としており，事象の動きを表すグラフとして示されている。この 4 段階の指導は，x の連続的な変化に対応する y の連続的な変化を視覚化しているが，事象と動きとの関係が明確化されていない。しかも，グラフには距離 y は線分として表現されているが，時間 x が変量として視覚化されていない。

さらに，棒グラフとして表されている y の値と事象との関係や変量を矢線で表現することの意味について，遠山他（1964）では記述がなく，明確化されていない。本研究で

は，事象と動きの関係や事象と変量の関係，さらには，変量を矢線で表すことの意味について明確化する必要がある。

(3)　熊倉の研究

熊倉（2003）は，中高あわせて最大 6 年間もかけて指導されている割に課題の多い関数の指導について，関数を学ぶ意義を実感させることができていないことを指摘している。熊倉（2003）は，関数を学ぶ意義について，変化する 2 つの量の関係を調べることを通して未知の部分を予測することであり，この意義が理解されることが関数学習の目標であると述べている。そのための手順としては，熊倉（2003）は 2 つの量の変化を表やグラフを利用して分析し，式を使って未知なる部分を予測していくことであると述べている。熊倉（2003）は，この手順に基づいて関数学習を終えた中学校 3 年生の生徒たちに，日常の事象の中から，関数を見つけ出し，表とグラフを作成して，可能ならば式で表してみるという課題を与えている。そのレポートの 1 つが資料として掲載されており，そのレポートのなかに，ある事象を関数の対象として捉えていく様子が記述されている。

> 日常の事象の中から関数を見つけるというのは，結構むずかしい。べつに何でもよいのだ，と思っても，なかなか見つけることができない．僕は関数を見つけることに疲れ，父の買ってきてくれたケーキを食べ始めた．すぐに食べ終わったが，僕はなぜか満腹感のようなものを感じていた．「むむむ，大して大きくなかったのになぜだ！」と 1 人で悩んだ末，見つけた答えはこうだった．僕は図のようにケーキをほぼ等間隔で 1 回ずつフォークを入れて切って食べていたのだ．そのため，食べる毎に大きな切れはしを食べることとなり，そのどんどん増えていくような感覚が僕を圧倒していたらしいのだ．
> （よく考えるとばかばかしい.）それを知った僕はそれを関数化してやろうと考えた（熊倉，2003，p.48)．（以下，略）

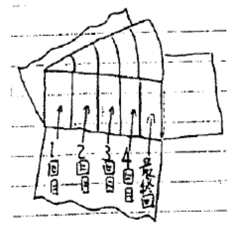


図 2-12 熊倉 (2003, p.48)

筆者はこの生徒のレポートの「食べる毎に大きな切れはしを食べることとなり，そのどんどん増えていくような感覚が僕を圧倒していた」という部分に注目した。つまり，この感覚を対象化することにより，生徒はケーキにフォークを入れる回数が変わればケーキの量（この場合は体積）が変わることに気づくことができたのである。このように事象の中に変化する 2 量を取り出すためには，量の大きさを数値化する前段階としての事象と量を結びつける感覚が顕在化される必要がある。そして，この感覚が顕在化さ

れていくプロセスを明確化する必要がある。

また，熊倉（2006）は，中 2 で取り扱われている「2 元 1 次方程式とグラフ」の単元は高校の「図形と方程式」の学習の準備であり，しかも，この「図形と方程式」の学習内容は解析幾何の一部であると述べている（pp.51-52）。さらに，解析幾何については，「幾何の問題を座標平面上で考えて代数的に処理することができることに，そのよさがある」（熊倉，2006，p.52）と述べられている。図 2-13 は熊倉（2006）が解析幾何のよさを示したものである。

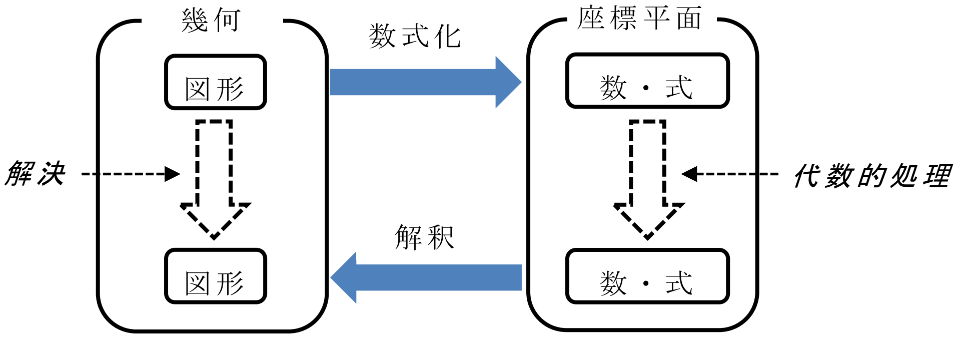


図 2-13　解析幾何のよさ（熊倉，2006，p. 52）

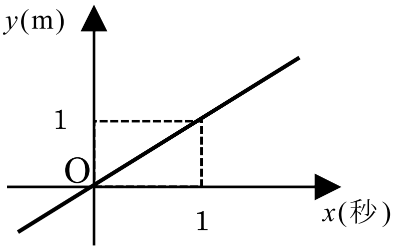
熊倉（2006）は，高校の「図形と方程式」の単元の指導の改善として，「関数のグラフ」と「方程式が表す図形」の違いを丁寧に指導する必要があると述べている。表 2-1 は関数のグラフと方程式の表す図形の違いを示す。

表 2-1　関数のグラフと方程式の表す図形（熊倉，2006，p. 62）

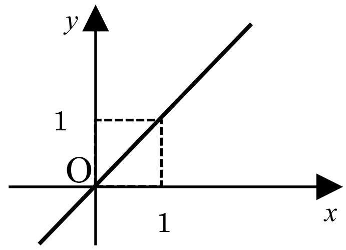
	関数	方程式
式	$y = f(x)$	$f(x,y) = 0$
座標	関数の対応する x，y	方程式の解 x，y
グラフ	関数のグラフ	方程式が表す図形

また，熊倉（2006）は，図 2-14 を用いて，関数と解析幾何の関数のグラフと解析幾何のグラフの相違点を述べている。

このとき，関数の場合は，グラフをかく場合に，x 軸と y 軸の 1 目盛りの大きさを必ずしも同じにする必要はないが，方程式が表す図形をかく場合は，1 目盛りを同じにする必要があることなどにも触れるとよい。関数の場合は，x 軸，y 軸に異なる種類の量（例えば，時間と距離）をとるので，1 目盛りを同じにする意味はないからである（熊倉，2006，p.62）。



〈関数 $y=x$ のグラフ〉



〈方程式 $x-y=0$ が表す直線〉

図 2-14　熊倉（2006, p.62）

本研究では，中高連携の視点として，高校の「図形と方程式」につながる中学校の「2 元 1 次方程式とグラフ」の単元において，その学習内容のねらいを明確化し，具体的な指導の基本設計を検討したい。

2.2.2 事象のグラフ化におけるミスコンセプションに関する研究

具体的な事象の中から変量を取り出し，事象とグラフを結びつけて理解することに生徒は困難を抱えている（Clement，1989；Dyke，1994；宮川，1998；久保，2000）。特に，宮川（1998）は，ミスコンセプションとは「教師から見れば正しくはないが，子どもには正しいと信じるにたる根拠のある考え」（p.10）とし，事象のグラフ化におけるミスコンセプションを Dyke（1994）の調査問題を使って同定している。それは，運動の実際の映像や様子をそのままグラフに投影して解釈してしまうものである。

宮川（1998）は，ミスコンセプションを生み出す背景にあるのは，斜面を等速で移動するケーブルカーの動きや投げ上げたボールの動きなど，その動きの軌跡とグラフが一致してしまう事象を学習した経験ではないかと指摘している。このミスコンセプションの解決策として，宮川（1998）は，動きの軌跡を捉えるための時間認識が重要であるとして，時間に伴って位置や距離が変化していることを理解させる必要があると述べている。ミスコンセプションの改善に向けた授業では，生徒や物の動きの軌跡とグラフが異なる場合を体験させるために，CBL（Calculator Based Laboratory）によって表示されるグラフが時間の進行に伴って位置が変化しているという様子を観察させている（宮川，1998）。

宮川（1998）は，生徒が対象の動きをその軌跡と混同しないでグラフ読解を正しく行うためには，時間に伴った位置の変化の把握が課題となることを示唆している。

Clement（1989）は，グラフを絵のようにみたり，グラフの傾きぐあい（速さ）の相違を高さ（グラフ上の位置）の相違と混同して捉えたりするようなミスコンセプションを理解するためのモデル（competence model）として，静止モデル（static model）と動的

モデル（dynamic model）の 2 つに分けて示している。静止モデルは 2 変量とグラフとの関係を捉えるためのものであり，動的モデルは 2 変量の変化量とグラフとの関係を捉えるためのものである。Clement（1989）は，何れのモデルも下記のような 4 つのレベルに分けて示している。図 2-15 は competence model を示している。図 2-15 の左側が static model を示し，その右側が動的モデル dynamic model を示している。

(1)現実的表現のレベル

(2)独立変数を対応させるレベル

(3)独立変数を長さモデルに変換するレベル

(4)長さモデルをグラフに適応するレベル

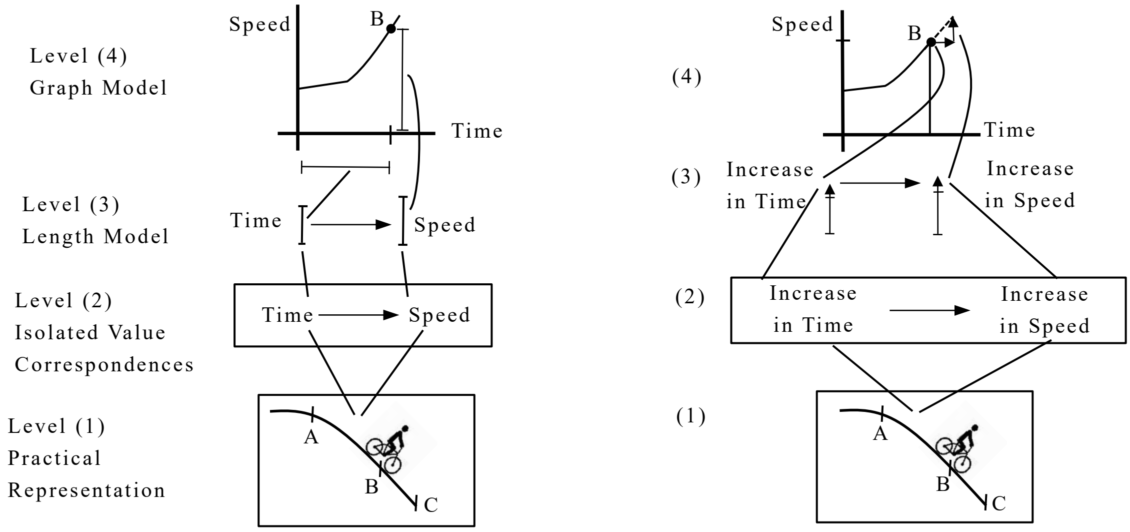


図 2-15　competence model（Clement, 1989, p.3）

Clement（1989）は，傾きと高さを混同するような誤りに関しては，レベル(3)からレベル(4)への移行段階に課題があるとし，また，グラフを絵のようにみる誤りに関しては，レベル(2)と(3)のプロセスを短絡化して，レベル(1)とレベル(4)をうわべだけで捉えてしまっていることに原因があると述べている。宮川（1998）が述べているように，事象とグラフを結びつける鍵は，生徒が時間の変化に伴った位置の変化を実際の動きと結びつけられるようになることである。つまり，Clement のモデルのレベル(1)からレベル(2)の移行過程を解明する必要がある。

したがって，事象からどのように変量を取り出すのか，その指導過程が研究の対象となる。

2.2.3 関数のグラフ表現への表現プロセスに関する研究

事象の中にある動きから変量を取り出して，表・式・グラフに結びつけ，関数概念の

理解の促進をめざす研究がある。それらの研究のなかで，グラフ表現への表現プロセスに焦点をあてると，それらの研究は大きく 2 つに分けられる。一つは，教具の動きから変量をとりだして,グラフを作成したのちにグラフ読解を行うものである。もう一つは，生徒自らの動きを CBL（Calculator Based Laboratory）に検出させてその動きをグラフ化したり, SimCalc などのコンピュータソフトを使用して事象をグラフ化したり, つまり, グラフの作成がコンピュータによって行われたのちに，そのグラフ読解を行うものである。前者の研究としては, 林 (2001), 高橋 (2002, 2003), 大滝 (2009), 久保・岡崎 (2013) がある。後者の研究としては，土田（1998，2001），上田（2009），日野（2016）がある。

(1) 教具の動きから変量を取り出してグラフ読解を行う研究

林（2001）は，導入時における状況に依存したモデル，つまり，生徒の学習の基盤となるような考えをつくりだすために，Greeno の一次関数装置（図 2-16）を教具として活用し，変量を取り出す指導を行っている。

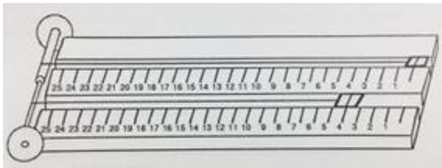


図 2-16　Greeno の一次関数装置
（Greeno, 1991, p.89）

この Greeno の教具は，ハンドルを回転させることにより，2 つのブロックの動きを比較できるように考えられており，回転数から位置への関数を捉えさせるねらいをもっている。林（2001）は事象から変量を取り出す際に 2 つの動きを比較させることの重要性を示唆している。

高橋（2003）は，林（2001）の研究では注目されてはいない点，つまり，生徒が変数を取り出す際の表やグラフなどの形式的な表現以外の絵や図のような生徒が自ら書くものに注目した研究を行っている。高橋（2003）は，抽出生徒が一定の幅の回転数ごとに，2 つの対象（ウサギとカメ）の動いた長さに焦点をあてた図を書いていることを報告している。このことから，この生徒は見えやすい変量（長さ）を手がかりにして見えにくい変量（時間）を見出していると考えられる。

次に，この生徒は 2 つの対象の動いた長さに注目した表を書いており，時間に相等する変量である回転数には注目していない。その後， 2 つの対象に対して回転数と動いた長さの関係をグラフに表す課題の場面では，この生徒は，回転数を縦軸に 2 つの対象の動いた長さを横軸にとり，表の値をそのまま写した図をグラフとして書いている。

このことから，前出の生徒にとって，2 つの変量（回転数と動いた長さ）をグラフ用紙という 2 次元平面上にどのように表せばよいのかが明確化されていないことがわかる。それゆえに，この生徒は「書きながら変化をみたり傾きを調べるという事はしていない」（高橋，2003）と述べられているのである。したがって，事象から取りだされた変量が何らかの図的表現と結びついたとしても，その図的表現をグラフに結びつけていく手立

てが必要である。

大滝（2009）は，Greeno の装置を参考にして作られた「簡易式関数探求装置」（図 2-16）を使って，事象から変数を取り出し，表や式，グラフに結びつけようとする指導を行っている。この簡易式関数探求装置について，大滝（2009）は次のように述べている。

簡易式関数探求装置は，封筒状の台紙 A に自由にスライドさせることができる紙 B を通してある。A には 3 本のスリット（切れ目）が縦方向に入っており，0～30 の目盛がついている。B にもスリットが入っている。A と B のスリットを 2 つのリベット（留め具）で連結しており，B を左右に動かすことにより，2 つの点（リベット）がそれぞれ上下に移動するようになっている。B のスリットの形状と A のスリットの位置により，任意の 2 つの関数を作り出すことができる。Greeno の装置は回転数でブロックの位置を捉える仕組みであるが，この装置は B の動きで点の位置をとらえることになる（大滝，2009，p.56）。

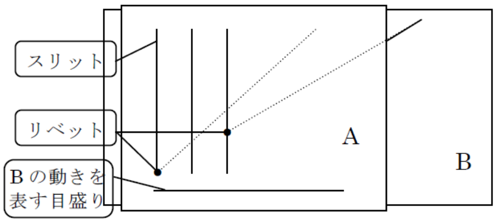


図 2-16　簡易式関数探求装置
（大滝，2009，p.56）

大滝（2009）では，2 つの対象（ウサギとカメ）のうち，1 つの対象（ウサギ)が動く様子をイメージする擬態語（ぴょん）を使って，時間の経過を「ぴょん数」（大滝，2009，p.60）として捉えさせている。

したがって，この簡易式関数探求装置は， 垂直方向に動く A の動きによって，2 つの対象の動きが意識され，その動いた長さは変量として意識されやすい反面，B を動かすだけでは時間が変量として意識されにくいことがわかる。その原因として，大滝（2009）は，「簡易式関数探求装置は Greeno の装置でハンドルを回したときのように音が生じないということも原因であると考えられる」（p.63）と述べており，擬態語や音などによって，簡易式関数探求装置の B の動いた長さを時間経過として捉えさせるための手立ての必要性を示唆している。

久保・岡崎（2013）は，うさぎとかめの動きではなく，速度の異なるエレベータの動きを捉えさせる「スライダー」（図 2-17）とよばれる教具を用いて，比例の授業を分析している。この「スライダー」の基本的なしくみは簡易式関数探求装置とほぼ同じであるが，エレベータの動きを考えさせることによって，時刻と位置の 2 変量の


図 2-17　スライダー
（久保・岡崎，2013，p.178）

取り出しが容易になっている。

この教具の利用により，生徒が変量を取り出すプロセスには 2 段階あり，最初の段階は横軸方向のスリットのなかの可動部を連続的に動かすこと（「アナログな動かし方」）によって縦軸方向のスリットの可動部がアナログ的に動いていく様子をみる段階である。その次の段階は横軸方向のスリットのなかの可動部を 1 秒ごとに止めながら動かすこと（「デジタルな動かし方」）によって縦軸方向のスリットの可動部がデジタル的に動いていく様子をみる段階であることが明らかになっている（久保・岡崎，2013，pp.178-179）。

図 2-18　直角読み

（久保・岡崎，2013，p.179）

また，この比例の授業では，座標を読み取らせる際に，教師は指を使って空中に直角をつくるような手の動き（指先を横軸方向に一定動かしてから，一度止めて，指先を垂直方向に一定の長さだけ動かす）を繰り返し行っており，その手の動きから生徒がグラフから変量を読みとる「直角読み」（図 2-18；x 軸上の目盛を読んでから垂直方向に直線との交点まで進んでから，水平方向に進んで y 軸上の目盛を読む）につなげるような指導がなされている（久保・岡崎，2013，p.179）。

ここでは，久保・岡崎（2013）は，「スライダー」から取りだされた時間と長さという 2 変量と「直角読み」によって生徒が読み取った 2 変量との繋がりを意識させている。本研究では，事象から変量をとりだす際に，アナログ的な見方の段階からデジタル的な見方の段階に注目し，デジタル的な段階の 2 変量をグラフとどのように結びつけるべきなのかを明らかにしていく。

(2) コンピュータによって事象の動きを捉えてグラフ読解を行う研究

土田（1998）は，「グラフを絵として捉える」（p.378）という生徒の実態を報告している。それは，時刻が変化しても距離が変化しないグラフ（図 2-19)を再現するのに CBL センサーの前から真っ直ぐに歩いてみたり，台形型のグラフ（図 2-21）を再現するのにセンサー前の床を台形を描くようにして歩いたり，さらには，図 2-19 や図 2-22 のようなグラフを再現するのに，斜めに歩く生徒の姿である（p.378）。

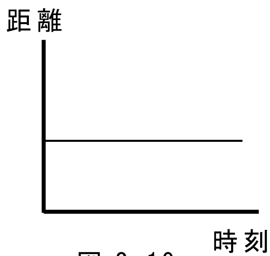


図 2-19

（土田，1998，p.377）

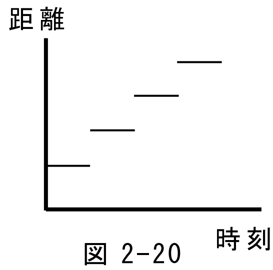


図 2-20

（土田，1998，p.377）

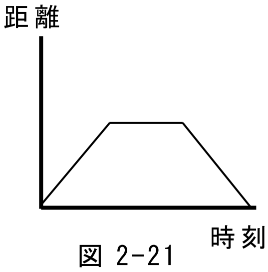


図 2-21

（土田，1998，p.377）

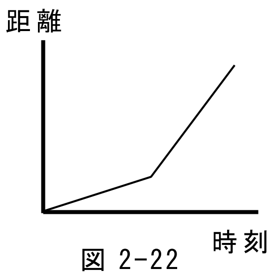


図 2-22

（土田，1998，p.377）

土田（2001）では，図 2-20 のような静止状態が繰り返される時刻と距離のグラフを再現する中学校 2 年生の生徒たちの会話分析が行われている。この生徒たちは，最初は，自分とセンサーまでの距離，歩く向きや歩く速さに注目をしていたが，歩く時間には注目できていなかった。そのため，途中から，土田らが介入して，止まっていたら図 2-19 のような静止状態のグラフができることに気づかせることによって，この生徒たちは，図 2-20 のような静止状態が繰り返されるグラフを再現することができたという（土田，2001，pp.442-443）。

このことから，土田（2001）は，動かない静止状態にある対象を時間と距離で測定した場合に，特に，時間が変量であることが理解されにくいと述べている。したがって，グラフに量を表す段階の指導として，対象の動きが止まっていても，時間は経過していることが明確化されるような手立てが必要になってくる。

上田（2009）は，事象とグラフを結びつける上で，動きを時系列に沿って捉えていく動的な見方の重要性を述べている。上田（2009）は，この動的な見方について，シローという抽出生徒のグラフ読解の様子を次のように説明している。図 2-23 は，シローが読み取ったグラフである。

この「2 秒分」をシローが見つけるときに行ったのは，グラフ用紙の x 軸にペン先を置き，3，4，5，6，7，8 と x 軸の格子点を押さえながら右方向に動かして，次に 9，10 と動かす行為であった。8 秒で一度止めて，9 秒 10 秒と時間差「2 秒分」を見つけているのである。これは時系列に沿ってグラフを動的に見て，レースを再現している姿と見ることができる。青がゴールしたグラフ上の（8,20）の点から時間の差や距離の差を見つけるのではなく，時間の流れに沿って魚達の様子をコマ送りのように追っていき，青がゴールしてから「9，10」と 2 秒後に遅れて紫がゴールしていることを確認しているのだと考えられる。

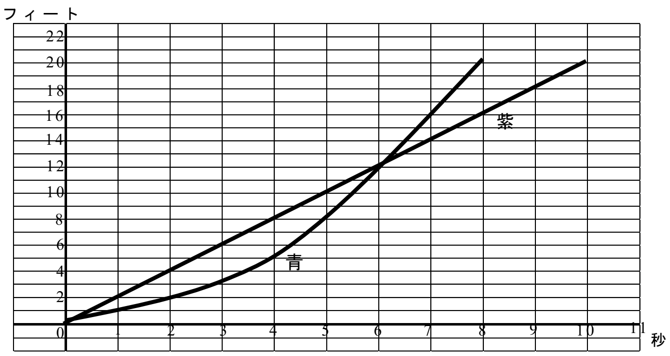


図 2-23 シローの読み取ったグラフ（上田，2009，p. 45）

上田（2009）は，シローは，変量を時系列に沿って捉えることから始めて，徐々に全体的な変化の特徴を把握していったと述べている。また，上田（2009）は，グラフに慣れていない生徒にとって，このようなグラフの読み方は発想しやすい方法であるとも述べている。つまり，グラフを時系列に捉える動的な見方を促す語りが事象とグラフの関連性を引き出していると考えられる。

日野（2016）は，風呂に水を入れる事象やエレベータの上下する事象を GeoGebra で表示された動点の動きでイメージさせる授業を分析している。このとき，時間は GeoGebra ではスライダー（図 2-24 の ）の軌跡として表示され，一方，水の深さあるいはエレベータの高さは時間のスライダーとは異なる直線上を動く動点の軌跡として表示されていた。

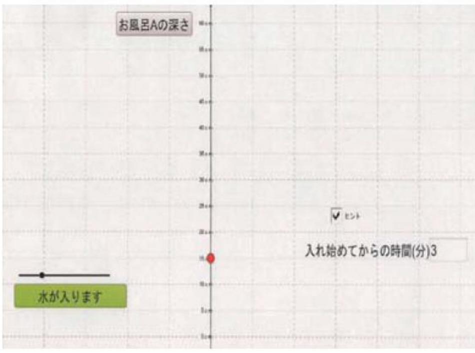


図 2-24 日野（2016,p.148)の図 1：風呂 A における時間と深さの表示

この研究では，それぞれの動きに対するグラフを方眼用紙に作成する場面が用意され，その動きを読み取る生徒や教師の語り（談話）に焦点があてられていた。つまり，動点の動きによって，時間と水の高さを変量として意識させ，グラフと結びつけようとしている。

2.3 第2章のまとめ

本章では，関数分野のグラフ読解に関して，関数的読解と解析幾何的読解の違いを明確化し，関数分野のグラフ読解に関する先行研究を概観して，本研究への示唆を明らかにした。

(1) 関数分野のグラフの関数的側面と解析幾何的側面を区別した指導的立場をとる研究としては，菊池（1960b），遠山他（1964），熊倉（2006）がある。このような研究からの示唆を関数的側面から述べると，事象から2量をとりだすプロセスと，取りだされた2量をどのように対応させるのか，そして，変量を線分や矢線で表現することの必要性を明確にすることであると考える。また，解析幾何的側面から研究の示唆を述べると，中学校数学の「2元1次方程式とグラフ」の単元が高校数学の「図形と方程式」の単元に接続されるような中高連携の視点を考慮していくことであると考える。

(2) 事象のグラフ化におけるミスコンセプションに関する研究としては，Clement（1989），Dyke,（1994），宮川（1998），久保（2000）などがあるが，そのミスコンセプションとは運動の実際の映像や様子をそのままグラフに投影して解釈してしまうものである。そのようなミスコンセプションへの対策としては，時間の変化に伴った位置や距離などの変量の認識を高めることであり，事象から変量が取り出されるプロセスを解明する必要性が示唆される。

(3) 関数のグラフ表現への表現プロセスの研究は大きく2つに分けられる。一つは，教具の動きから変量を取り出し，グラフを作成したのちにグラフ読解を行うものである。もう一つは，コンピュータによって事象の動きを捉えてグラフ読解を行う研究である。前者の研究としては，林（2001），高橋（2002，2003），大滝（2009），久保・岡崎（2013）がある。後者の研究としては，土田（1998，2001），上田（2009），日野（2016）がある。これらの研究は，事象から変量を取り出し，どのようにしてグラフと結びつけていくのかを解明しようとしている。本研究への示唆として，教具の動きやICTで支援された動点の動きから，変量としての認識を高めて表やグラフへと結びつけていく指導プロセスの必要性が考えられる。

第３章　関数分野のグラフ読解を捉えるための理論

本章では，グラフ読解を捉えるための理論を概括的理論と個別的理論の 2 つの面から述べる。概括的理論とは，関数概念と幾何の概念と学習者の認知の関係を捉え，そして，視覚的表現であるグラフと学習者の認知の関係を捉えるための理論である。一方，個別的理論とは，主として数学の立場から関数のグラフと解析幾何のグラフの相違を明確化し，関数のグラフ読解に関して，変量の量化のプロセスや変量（変化量）と動きの関係を捉えていくための視点である。

3.1　概括的理論

3.1.1 において，関数概念の認識に関わる理論として，Vinner（1981）などの概念定義と概念イメージの理論を概観し，3.1.2 において，幾何の概念（解析幾何）の認識に関わる理論として，Fischbein（1993）の形的概念の理論を概観する。さらに，3.1.3 において，グラフの意味を捉えるための理論として，Gibson（1985）のアフォーダンス理論を概観する。

3.1.1　概念定義と概念イメージの理論の解釈

Tall&Vinner（1989）などの関数概念に対するイメージと定義に関する調査から，数学的概念を規定する定義（概念定義）よりも，その概念から連想されるイメージに基づく判断（概念イメージ）が行われ，定義に基づいて図やグラフなどの視覚的表現を操作する場合に困難性が生じるということが明らかになっている。概念イメージと概念定義の関係について，Vinner（1981）は次のように述べている。

> これは，各概念に対して，その認知構造の中に 2 つの異なる細胞が存在することを仮定する（混乱を回避するために言っておくが，我々は生物学的な細胞を意味しているのではない）。1 つの細胞は概念の定義に対するものであり，2 つめのものは概念イメージに対するものである。一つの細胞もしくは両方の細胞すら空っぽのこともある。それらは独立して形成され得るけれども，2 つの細胞の間に相互作用が存在するだろう（Vinner，1981，p.294）。

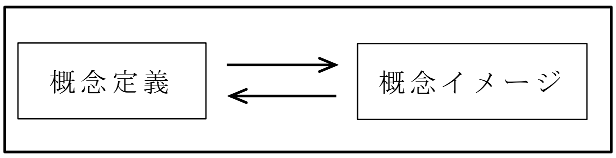


図 3-1 Vinner（1981，p.294）

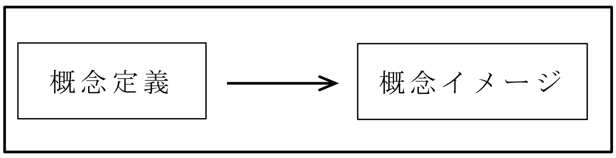


図 3-2 Vinner（1981，p.295）

図 3-1 は概念定義と概念イメージの関係を示したものである。Vinner（1981）は，概

念形成のある段階で，多くの教師は概念定義によって概念イメージを形成し，コントロールできること（図 3-2）を期待しているが，それは簡単な話ではないと述べている。

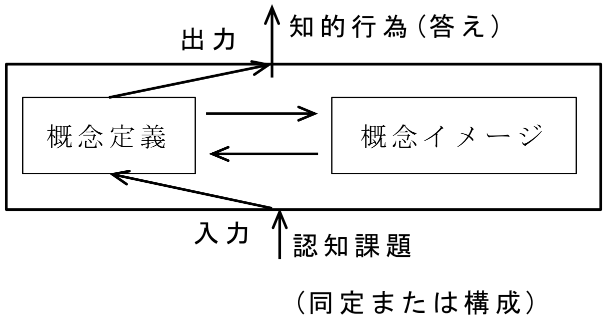


図 3-3 Vinner（1981, p.295）

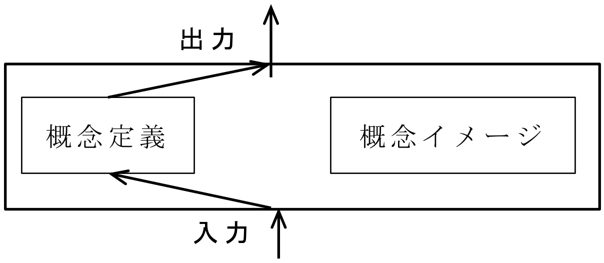


図 3-4 Vinner（1981, p.295）

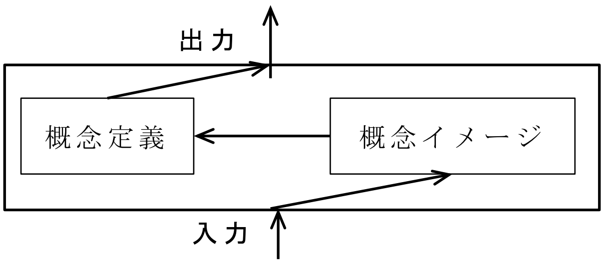


図 3-5 Vinner（1981, p.296）

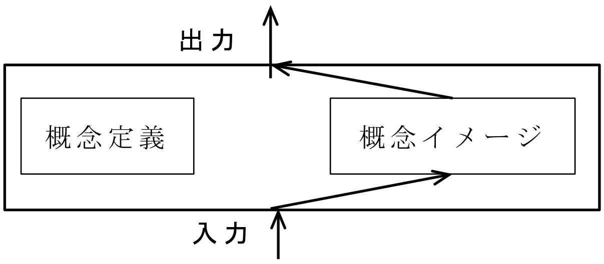


図 3-6 Vinner（1981, p.296）

また，Vinner（1981）は，課題を処理する段階では，概念イメージを使いながら概念定義を使用したり（図 3-3），概念定義だけで課題を処理したり（図 3-4），概念イメージと概念定義を順に使用する（図 3-5）の 3 つの場合のみ，多くの教師は想定していないため，概念イメージだけで与えられた課題を処理する場合（図 3-6）が生じていると述べている。

その理由として，「概念イメージを形成するためか，認知的タスクを取り扱うためのどちらかのために，定義を使用せざるをえない認知構造へ導く方法がない」（Vinner, 1981, p.295）と述べられており，図 3-7 と図 3-8 の 2 つの場合が想定されていないことが課題であると考えられる。

・概念形成の段階で，概念イメージによって概念定義を構成させる（図 3-7）。

・課題を処理する段階で，概念定義を使いながら概念イメージを操作させる（図 3-8）。

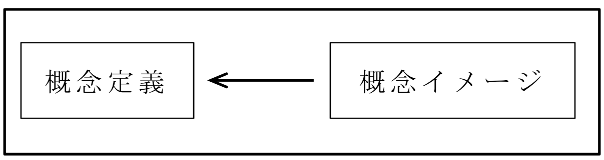


図 3-7

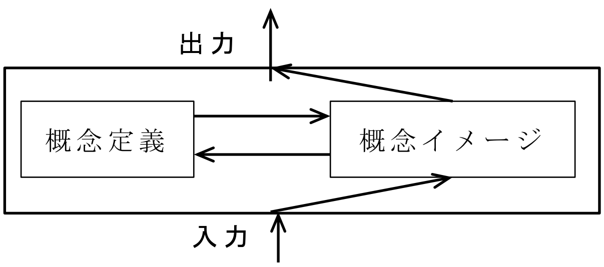
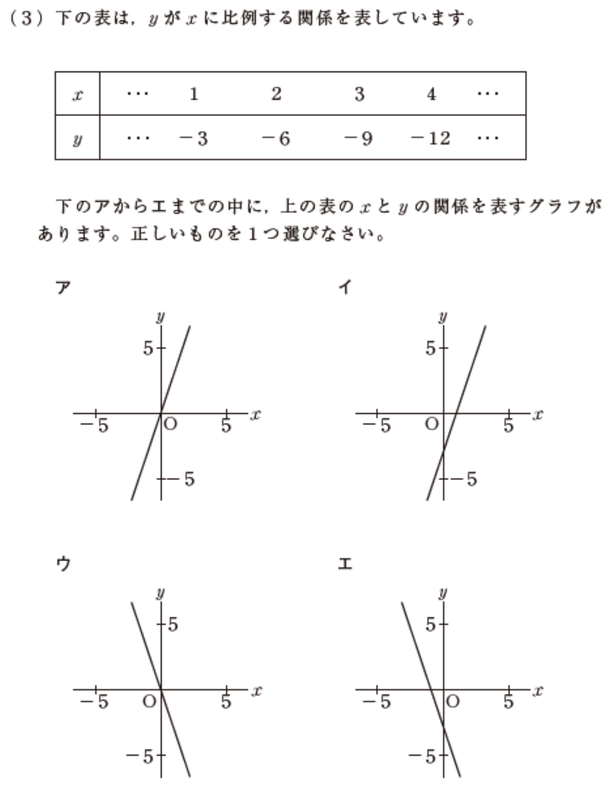


図 3-8

では，概念定義と概念イメージの理論を具体例に適用してみたい。具体例として，2013 年度の全国学力学習状況調査・数学 A$\boxed{10}$(3)の問題（図 3-9）をとりあげる。その調査の報告書・中学校数学（国立教育研究所，2013）によれば，y が x に比例する関係を表した対応表が与えられ，その対応表をよみとってグラフを選択する問題に対して，単調増加や単調減少の一次関数のグラフを選んだ生徒があわせて 35.9％も存在する。


（3）下の表は，y が x に比例する関係を表しています。

x	…	1	2	3	4	…
y	…	-3	-6	-9	-12	…

下のアからエまでの中に，上の表の x と y の関係を表すグラフがあります。正しいものを１つ選びなさい。

図 3-9（国立教育研究所，2013）

この問題の意図は，「比例のグラフは原点を通る直線であり，比例定数の符号によってグラフの傾きが変わることを理解しているかどうかをみる」ことであった。中学校の全国学力学習状況調査の対象は，中学 3 年生であり，実施時期が年度当初の 4 月であることから，中学 2 年で学習した一次関数のグラフの方が中学 1 年で学習した比例のグラフよりも記憶に残っていることは想像に難くない。また，これらの生徒は，おそらく，$x=0$ のときの y の値を求めるために，x の変化量に対応した y の変化量を対応表から読みとることもなく（一次関数の対応表からグラフをかいてきた経験が生かされず），原点を通らない直線である一次関数のグラフを選択したと考えられる。中学校の比例の定義は，変数の関係式が $y=ax$ で表されることであり，$x=0$ のとき，$y=0$ は定義から導かれることである。

ここまでを概念定義と考えると，この定義は忘れ去られたまま，一次関数の学習の際にグラフを書いたり，見たりして，原点を通らない直線のグラフが概念イメージとして記憶に残っており，この概念イメージだけで回答を選択したのではないかと考えられる。つまり，この事例は図 3-6 のように概念定義を用いず概念イメージのみで課題を処理した場合といえる。

以上から，関数のグラフ読解において，概念定義と概念イメージの理論からは，関数概念の定義とそのイメージに関して，下記の 2 点が示唆される。

・関数概念の形成段階で，関数概念のイメージによって関数概念の定義を構成させる。

・課題を処理する段階で，関数概念の定義を使いながら関数概念イメージを操作させる。

3.1.2　形的概念の理論の解釈

関数分野のグラフ読解において，グラフを座標平面に表された幾何学的図形として捉えて代数的な表現に置き換えたり，その幾何学的図形の特徴や性質を言語的な表現に表したりする場合がある。この場合，グラフの形としてのイメージの理解とグラフの代数的表現や言語的表現の理解との相互関係を捉えるために，形的概念の理論（Fischbein，1993）を適用する。

Fischbein（1993）は，概念的特質と空間的性質を同時にあわせもつ心的実体を形的概念とよび，その概念的特質として，理想性，抽象性，一般性，完全性をあげ，その空間的性質としては，かたち，位置，大きさがあげており，幾何学的な証明において利用されている形的概念の性質を以下のように説明している。

・数学的推論において，物質的な対象や図として言及されない。
・概念的意味においてのみ，幾何学的実体としての直線，円，正方形，立方体などの絶対的な完全さを有する。
・幾何学的実体は純粋に物質的な対応物を持たない。点（0 次元の対象），直線（一次元の対象），平面（二次元の対象）は存在せず，実際に存在することはできない。
・すべてのこれらの構成物は，任意性のある概念のような，一般的な表象であり，特定の具体的な対象の心的コピーでは決してない。
・ある公理系の領域における定義によって決定されたり，導かれたりする概念的性質をもっており，それは幾何学的図形を特徴づけるような視覚的イメージをもつものである。（Fischbein，1993，pp.140-141）

さらに，Fischbein（1993）は幾何学的図形を定義・イメージ・形的概念の 3 つの視点から論じている。幾何学的図形は，空間的イメージとしてある構造をもったゲシュタルトであるが，これは経験的に培われたイメージとは異なり，数学的定義によってコントロールされるべき心的イメージである。この心的イメージは数学的推論を進める際に，操作されるべき対象であり，形的概念として機能する。一方，図は幾何学的図形を具象化したものと捉えている。例えば，幾何学的図形である直線の空間的なイメージは，ぴんと張った糸のように，見通すと 1 つの点にみえる対象と考えられるが，座標平面上で，$ax+by=c$（a，b，c は実数）を満たす点（x,y）の集合として定義できる。清水（2001）は，直線や曲線が点の集合体であることを把握させるために，運動場に座標平面を描き，その平面上の点にあたるところに一人ひとりの生徒を立たせ，その様子を校舎から俯瞰させる実践を行っているが，この実践は，生徒はすでに直線や曲線のイメージを持って

いたとしても，それが式で表現されることをなかなか実感としては捉えがたく，「中学生においては式とグラフは別もので，『式からグラフへ』『グラフから式へ』というのはあくまで考えてからわかることと言える．…いわば，中学生が式とグラフを別のスキーマで認識している」（礒田他，1990，p.53）といえる。

解析幾何のよさは幾何の問題を座標平面上で代数的な処理を行うことである（熊倉，2006，p.52）。解析幾何では，図形のイメージをコントロールするのは数式であり，この数式を定義と考えれば，解析幾何で取り扱うことできる図形も形的概念で操作される対象と考えることができる。例えば，軸に平行な直線を除くと，2 つの直線が平行であることを考える場合には，屋根の傾斜やスロープなどからイメージされる傾きという概念が必要となり，その傾きは，前述の式の－b/a で定義される定数である。また，軸に平行な 2 直線を考える場合は，定数 c に着目しなければならない。したがって，幾何学では，数学的定義は主として言語的表現によって記述されるが，解析幾何では，言語的表現を数式表現に置き換える必要があり，解析幾何で操作される形的概念は言語性と代数性の両面から捉えていく必要がある。

最後に，Fischbein（1993）は，形的概念の教授学的な困難性について下記のように述べている。

> 形的概念は，単一の実体（形的に表現される概念）から成るが，それは潜在的には，関連する 2 つの体系―概念的体系と形的体系―の，二面的で，時として矛盾する影響下にある。理想的には，図形の意味，関係，性質を絶対的にコントロールすべきなのは，概念的体系である。実際，非常にしばしば，形は概念の指示に従わず，その性質の解釈は形的なゲシュタルトのパターンによって形作られる。
>
> 幾何学的推論において生徒が犯す多くの間違いは，形的概念の概念的側面と形的側面の間のこの種の分裂（あるいは一致の欠如）によって説明されるであろう。形の構造は，対応する形式的制約によってコントロールされる代わりに，推論の力動性を支配するだろう。結果として，多くの生徒は，幾何学的証明の真の本質を理解せず，それを経験的検証で補足する必要性を経験する傾向がある（Fischbein，1993，p.24）。

つまり，視覚から受け取る情報の解釈によって論理的な概念操作が困難になる。それゆえ，Fischbein（1993）は，形的概念の概念的側面と形的側面が融合するまで，2 つの側面が同時に機能する教授学的状況を創り出していく必要性を述べている。したがって，解析幾何的読解において，対象となる図形の空間的性質（かたち，位置，大きさ）の言語的表現や数式表現とそれとの融合をめざす教授活動が必要となる。

3.1.3　アフォーダンス理論の解釈

分散認知の理論では，知識は，個々の人間の頭の中だけでなく，集団や社会に分散され，ネットワーク化していると考えられている。Pea（2004）は，知識が社会的に構成されているのと同様に，知能（intelligence）も，「複雑な課題に対する，物理的道具，ダイヤグラムのような表象,そしてコンピュータとユーザの間のインターフェースのような，デザインされた種々の人工物のなかに分散して使用されているといえよう」（p.69）と述べている。

私たちは，この人工物のなかに分散している知識をどのようにして知覚しているのだろうか。知覚の中心となるのが視覚である。アフォーダンスは，視覚と行為を結びつける，Gibson（1985）の生態学的視覚論の中心的概念である。Gibson（1985）は，環境のアフォーダンスを，「動物に提供する(offers)もの，良いものであれ悪いものであれ，用意したり備えたりする(provide or furnish)もの」（p.137）として考えている。例をあげると，「ドアの取っ手は，回す“ためにあり”，台車の取っ手は，引く“ためにある”」（Pea，2004，p.73）と考えるのである。

このように，私たちは，視覚を通して知識も含めた人工物を利用しているが，その利用の仕方はそれぞれの人工物に対応するアフォーダンスを探索し，発見する過程ともいえる。

まず，関数のグラフという人工物について考える。関数では，変量の変化を記述する表現の一つとしてグラフが利用される。変量の変化も環境から得られる情報の一つと考えれば，関数のグラフはその情報を視覚化し且つ概念化していく過程のなかで使用されている。いわば，関数のグラフは変化の様相を瞬時にアフォードする価値や意味を内包しているといえる。

一方，関数のグラフは変化の様相をかたちとして概念化する。つまり，形的概念を形成する装置のようにも機能する。この機能は座標概念に支えられて，環境に存在する具体物や抽象的な図形などのかたちそのものを平面上や空間上で捉えたり描いたりすることをも可能にする。したがって，関数のグラフはかたちを通して変化の様相を概念化するが，解析幾何のグラフはかたちそのものを座標概念によって概念化するといえる。いずれにしても，私たちはグラフを用いて変量の変化や対象のかたちを視覚化している。すなわち，グラフは環境の情報を取り出して数学的な概念として意味づける鏡のような役割をもっている。

しかし，視覚を通して利用される形の面が正の影響を与えるばかりでなく，負の影響を及ぼす場合がある。例えば，一次関数 $y=2x+3$ のグラフとして原点を通るグラフをかく生徒のなかでは，一次関数の定義の面とそのイメージの面が乖離していると考えられ

る。また，方程式 $x=3$ で示される図形として x 軸に平行な直線をかく生徒のなかでは，直線の形の面と概念の面が乖離していると考えられる。

では，このような乖離がなぜ生じるのかについて，Gibson（1985）のいう生態学的実在の世界と物理的・数学的実在の世界との相違という視点から考える。Gibson（1985）は「我々が知覚したものが物理学や数学の存在であったとすれば，意味はこれらの学問領域に付与されなければならないであろう。しかし，知覚するものが環境科学の存在であるならば，その意味は新たに見出され（discovered）得るものである」(p.35)と述べ，環境を捉えるための面の幾何学（surface geometry)を創り出した。Gibson（1985)は，面の幾何学（surface geometry)と抽象的幾何学（abstract geometry)とを比較して，その違いを論じている。表 3-1 はその違いを筆者がまとめたものである。

表 3-1　面の幾何学と抽象幾何学との比較

面の幾何学（surface geometry）	抽象的幾何学（abstract geometry）
・面は実体のあるもので，「肌理」[2]がある。 ・面は現実に見えるものであって，決して透明であることはない。 ・面は媒質と物質の界面または境界であって一方の側だけをさす。 ・面には凸状や凹状のものが存在する。 ・2 つの平坦な面の接合部は縁か隅である。 ・面は光源や観察点に面するという性質がある。	・平面は実体のないもので，「肌理」がない。 ・平面は心的に描かれるもので透明である。 ・平面は空間内の非常に薄いシートと考えて，両側が存在する。 ・平面は一方の側が凸状であれば，その反対側は必ず凹状である。 ・2 つの平面の交叉部は線である。 ・平面は光源や観察点に面するという性質はない。
・対象と囲みが区別される。	・対象と囲みを区別することはできない。
・対象の位置は上下という固有の極をもつ媒質における重力および地面との関係で特定される。	・物体の位置は等方性の空間の 3 つの選ばれた軸ないしは 3 次元の座標によって特定される。
・対象の運動は常に面の配置全体の変化であり，またある意味で，環境の形（shape）の変化である。その変化とは，伸張，圧縮，ねじれ，流動などの面の動きを伴うものである。	・物体の運動とは空間の 1 次元ないし数次元上での位置の変化，またはこれらの軸上の物体の回転（回旋）である。

また，Gibson（1985）の面の幾何学において，人間が人工的に作り出して視覚情報を表示する具体物には「工夫をこらした物（device）」（p.45）という用語を当て，そのな

かでも，彫刻や絵画などの何らかの人工的な記録という情報が残されている面を包括する用語として，ディスプレイ（display）という用語を当てている。つまり，ディスプレイ（display）は，何らかの知識や情報をアフォードするための面である。

このように，Gibson（1985）の知見からは，生態学的実在の世界と物理的・数学的実在の世界とを結ぶ架橋の必要性であり，生徒が目の当たりにしている具体物から何らかの知識や情報を探索し，発見し，それを物理的・数学的なレベルへと抽象化する過程の重要性である。つまり，グラフ読解という数学的な活動（行為）を考えた場合，生徒がグラフという視覚的表現からのアフォーダンスを探索させる過程のなかで，生徒の認識が数学的・物理的な概念と照応される。

本研究では，この過程を通して，生態学的実在の世界と物理的・数学的実在の世界とが対応づけられると考える。

注

2) Gibson（1985）は，面の肌理（texture）に関して「面の基礎にある物質の構造とは区別され，むしろ面の構造と考え得るものである」（p.27）と述べている。例えば，砂と雪で覆われた土地とでは，構成されている物質が異なるのでそれぞれの土地の形状が異なって見える。また，地層には粘土層や礫層などが見受けられ，岩石という物質であっても，その粒子の大きさが異なるので，それぞれの層の形状は異なって見える。

3.2　個別的理論

本節では，グラフ読解を捉えるための個別的理論として，まず，関数のグラフと解析幾何のグラフの相違を明確にするための対応の概念を明確化する。その次に，関数指導における変量を捉えるための視点を定める。

3.2.1 対応の概念と対応のグラフ

3.2.1 では，関数のグラフまたは解析幾何のグラフの違いを明確化するために対応の概念を吟味する。松坂は，以下のように対応の概念を定義して，具体例をあげて説明している。

> A,B を 2 つの集合とし，ある規則 Γ によって，A の各元 a に対してそれぞれ 1 つずつ B の部分集合 $\Gamma(a)$が定められているとする．（$\Gamma(a)$のうちには同じものがあってもよい．すなわち $a \neq a'$ に対して，$\Gamma(a) = \Gamma(a')$となることがあってもよい．また $\Gamma(a) =$ $\emptyset$となるような a があってもよい．）そのとき，その規則 Γ のことを A から B への対応といい，A の元 a に対して定まる B の部分集合 $\Gamma(a)$を，Γ による a の像という．また，A,B をそれぞれ対応 Γ の始集合，終集合という．
>
> Γ が A から B への対応であることを，しばしば
>
> $$\Gamma : A \to B \quad （または\ A \xrightarrow{\Gamma} B)$$
>
> のように書き表わす（松坂，1968，pp.23-24).

> いま，ある選挙で，各選挙人に候補者の一覧表を記載した投票用紙が配られているとして，各選挙人は，自分が信任する候補者（何人あってもよく，また 1 人もなくてもよい)の氏名にだけ○印をつけて記名投票するものとする．この場合，各選挙人は，信任する候補者の氏名に○印をつけることによって，結局，候補者全体の集合のある部分集合を指定することになる．したがって，選挙人全体の集合を X，候補者全体の集合を Y とし，選挙人 x が信任する候補者の集合を $\Gamma(x)$とすれば，この投票の結果として，X の元 x，x'，…に対し，それぞれ 1 つずつ Y の部分集合 $\Gamma(x)$，$\Gamma(x')$，…が定められる．(もし, 2 人の選挙人 x, x'が全く同じ候補者を信任しているならば, $\Gamma(x) = \Gamma(x')$である. また, ある選挙人 x がすべての候補者を信任しないならば, $\Gamma(x) = \emptyset$である. ）――このように，1 つの集合の各元に対して，もう 1 つの集合の部分集合が 1 つずつ定められた状態が，いわゆる‘対応’にほかならないのである（松坂，1968，p.23）.

次に，対応のグラフを松坂（1968）により定義し，対応の概念と対応のグラフとの関

係を考察する。

Γ を A から B への対応とするとき，直積 $A \times B$ の部分集合

$$\{(a,b) | a \in A,\ b \in \Gamma(a)\}$$

を，Γ のグラフといい，$G(\Gamma)$ と書く．

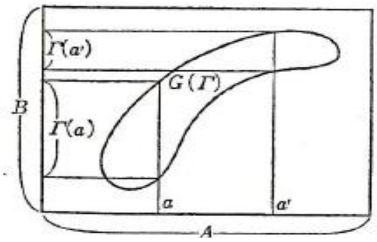


図 3-10 松坂（1968，p.24）の第 4 図

定義によって，$a \in A$，$b \in B$ に対し，$(a,b) \in G(\Gamma)$ と $b \in \Gamma(a)$ とは同等である．
したがって，A の任意の元 a に対して

(3.1) $$\Gamma(a) = \{b \mid (a,b) \in G(\Gamma)\}$$

が成り立つ．(第 4 図参照.)

(3.1)から，対応 $\Gamma : A \to B$ は，そのグラフ $G(\Gamma)$ によって一意的に定められることがわかる．すなわち，Γ とともに Γ' も A から B への対応であるとき，$G(\Gamma) = G(\Gamma')$ ならば，$\Gamma = \Gamma'$ となる．実際，その場合は，(3.1)により，任意の $a \in A$ に対して $\Gamma(a) = \Gamma'(a)$ となるからである．（逆に，$\Gamma = \Gamma'$ ならば，$G(\Gamma) = G(\Gamma')$ であることはいうまでもない．）（松坂，1968，pp.24-25）

したがって，対応の規則を 1 つ決めれば，対応のグラフが 1 つ決まる。また，逆に，対応のグラフが 1 つ決まれば，対応の規則が 1 つ決まる。これを命題化すると，次の松坂の定理 1 となり，その証明とあわせて引用しておく。

定理 1　$A \times B$ の任意の部分集合 G に対し，$G = G(\Gamma)$ となるような A から B への対応 Γ が（ただ 1 つ）存在する．

証明　そのような対応が 1 つより多くはないことは，すでに示した．

また，A の各元 a に対し，B の部分集合 $\Gamma(a)$ を

$$\{b \mid (a,b) \in G\}$$

と定めて，対応 $\Gamma : A \to B$ を決めれば，

$$(a,b) \in G \Leftrightarrow b \in \Gamma(a) \Leftrightarrow (a,b) \in G(\Gamma)$$

であるから，$G = G(\Gamma)$ となる．（証明終）（松坂，1968，p.25）

以上から，A から B への対応 Γ があれば，対応のグラフ $G(\Gamma)$をつくることができ，逆に，対応のグラフ G があれば，G を決めるような A から B への対応 Γ をつくることができるのである。つまり，対応のグラフが対応の規則の表現として同一視できるのである。一般に，対応のグラフを単にグラフとよんでいる。

3.2.2 関数のグラフと解析幾何のグラフの相違

3.2.2 では，3.2.1 で吟味した対応の概念によって，関数のグラフと解析幾何のグラフの相違について検討する。

まず，関数のグラフについて，対応の内容を考える。関数のグラフは，写像のグラフのうち，始集合 A，終集合 B ともに実数の場合を関数のグラフとよんでいる。松坂（1968）は写像の定義を以下のように述べている。

> A から B への対応 Γ は，次の性質(*)をもつとき，特に A から B への写像とよばれる．
> (*)　A の任意の元 a に対して，$\Gamma(a)$は B のただ 1 つの元から成る集合である．
> （中略）
> f を A から B への写像とすれば，A のどの元 a に対しても，その f による像 $f(a)$は B の 1 つの元 b からなる集合$\{b\}$となっているわけであるが，この場合は，通常，($\{b\}$ のかわりに)b を f による a の像といい，また，$f(a)=\{b\}$と書くかわりに，単に，$f(a)=b$ と書く（松坂，1986，p.27）．

例えば，x に $3x+2$ を対応させる写像を f とする。$x\in\mathrm{R}$ ならば，$3x+2\in\mathrm{R}$ であるから，すべての $x\in\mathrm{R}$ に対して

$$f(x)=3x+2$$

である。このように，R またはその部分集合からの R への写像は，一般的には関数と定義されている。

本研究では，関数学習において，具体的な事象から取り出された変量を数値化された測定対象（既測量）として捉えるのではなく，数値化される以前の測定対象（未測量）から捉える立場をとる。中西（2015）は次のように述べている。

> 学習指導要領の関数の領域で書かれている関数教育の目標にはどの学年にも「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，‥‥」が共通する。「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し」とあるが，具体的な事象は未測定な量（未測量）であり，事象には未測量がいくつか存在している。ゆ

> えに「変化や対応を調べる」ために，いくつかの未測量から 2 つを取り出し，その 2 つの量を測定し数値化する必要がある。本稿の立場で言い換えると，具体的な事象の中から取り出す二つの量は一般的な集合 X，Y にあたり，X の要素$\tilde{x}$（未測定な量），Y の要素$\tilde{y}$（未測定な量）を測定することにより数値化された集合 $\mathrm{R_X}$，$\mathrm{R_Y}$を作り，それぞれの要素の対応を考えることを意味する（中西，2015，p.44）。

つまり，数値化される以前の測定対象（未測量）を対象にしたグラフは写像のグラフであり，数値化された測定対象（既測量）を対象にしたグラフは関数のグラフである。前者のグラフは後者のグラフを含むものと考えている。

関数のグラフの軸については，「y 軸は，単に $x=0$ に対応するもので，$x=3$ に対応する直線等と比べて特別な意味をもつものではない」（島田，1972，p.56）のであって，x の変量に対する y の変量の大きさを読みとるための目盛りの役割をもつものである。

したがって，目盛りの役割を持たせる必要がない場合には，y 軸は必要がなく，x 軸を示すだけでもよい。また，y 軸の 1 単位を示す大きさ（長さ）は測定対象をどの単位で測定するかによって異なる。

次に，解析幾何のグラフについて，その対応の内容を考える。そもそも，解析幾何学とは，岩波数学辞典第 4 版（日本数学会，2007）によれば，「幾何学の問題を座標によって数の間の問題に帰着して，代数的に処理する方法である」と述べられている。

また，中西（2015）は次のように述べている。

> まず，最初に平面や空間（ユークリッド空間）がある。この段階では数はまだ存在していない。平面や空間があるだけである。そこに直交座標を入れる。すなわち，量と方向を決めるのである。1m の長さは縦軸，横軸とも同じ長さである。
>
> その結果，平面上の点は R×R の点と同一視できる。
>
> $$\text{平面} \xrightarrow{\text{1対1の写像}} \mathrm{R}\times\mathrm{R}$$
>
> 平面上の部分集合である図形を T とする。R×R の部分集合を S とする。座標を入れることで，T から S への対応($\dashrightarrow$)が定義できる。
>
> $$\begin{tikzcd} \text{平面} \arrow[r, "\text{1対1の写像}"] & \mathrm{R}\times\mathrm{R} \\ \cup & \cup \\ \mathrm{T} \arrow[r, dashed] & \mathrm{S} \\ & (x, y) \end{tikzcd}$$
>
> （中西, 2015, p.45）

つまり，解析幾何のグラフは，そもそもユークリッド空間内の平面上や空間上の図形

を対象にした対応のグラフの一種であって，関数のグラフのように事象（測定対象として考える 2 つの集合）を対象にしたものではない。そこでは，座標軸を用いて，対象の図形を空間内の部分集合（x,y）として表現している。

解析幾何のグラフの軸について，対象の図形を空間内の部分集合として表現するために複数の軸が不可欠であり，それぞれの軸の 1 単位を表す大きさ（長さ）によって異なってはならない。さらに，$\{(x,y) \mid x^2+y^2=r^2,\ x\in \mathrm{R},\ y\in \mathrm{R}\}$を満たす集合を円として座標平面上に表す場合は，$x$ 軸，y 軸の両軸が直交する必要がある。

表 3-3 は，関数のグラフと解析幾何のグラフの相違をまとめたものである。

表 3-3 関数のグラフと解析幾何のグラフの相違

	関数のグラフ	解析幾何のグラフ
基盤となる概念とその式表現	対応 $y=f(x)$	平面・空間（ユークリッド空間）の部分集合， $f(x,y)=0$
対応する集合	伴って変化する数値化された測定対象（既測量）の 2 つの集合	平面・空間（ユークリッド空間)の部分集合と実数の集合
グラフ上の軸	2 軸の場合はそれぞれの軸上の 1 単位を示す大きさ(長さ)は同じである必要はない	2 軸の場合はそれぞれの軸上の 1 単位を示す大きさ（長さ）は同じ

次に，関数のグラフ上の点 P が「2 変量の組」によって決定される理由を明確化する。銀林（1957）は，量と「座標」との関係を 1 次元座標から説明している。

(1)　まず前もって長さという量が与えられている。

(2)　長さを利用して，特定の点（原点）からの変位を測る。(たとえば O から点 P までズーっと 9cm といった具合)

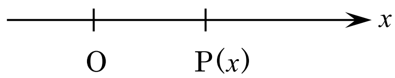


図 3-11　銀林（1957，p.96）

(3)　原点からの変位によって，点の位置を示す。これが座標に他ならない。

(4)　座標が導入されたら，今度は任意の変位が座標の差として，つまり変化量として求められる（変位の第 1 用法）:

$$\mathrm{Q}-\mathrm{P}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}。$$

(5)　第 2 用法：　$\mathrm{P}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\mathrm{Q}$。

(6)　第 3 用法：　$\mathrm{Q}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\mathrm{P}$。(銀林，1957，p.96)

また，量は単位を定めて数値化される以前の量の段階である未測量と数値化された段階の既測量（遠山，1969；関沢，1983）にわけて考えることができる。そこで，本研究では，変量についても，未測量と既測量の 2 段階に分け，前述した銀林（1957）の(1)～(3)に対応する段階の関数のグラフを考える（図 3-12，図 3-13）。

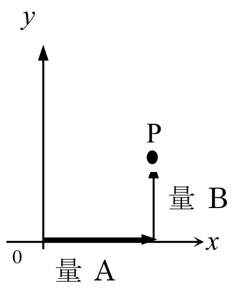


図 3-12

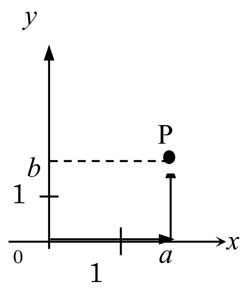


図 3-13

図 3-12 は未測量の変量のグラフで，未測量の量 A と量 B の線分化により，点 P が決まることを示している。図 3-13 は既測量の変量のグラフで，量 A の測定値 a と量 B の測定値 b により点 P が決まることを示している。

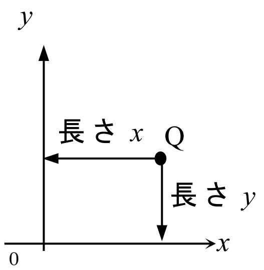


図 3-14

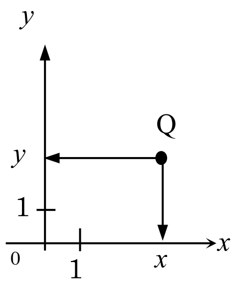


図 3-15

次に，解析幾何のグラフ上の点 Q が「座標」によって決定される理由を明確化する。

本研究では,空間の中の点の位置を,量で表す段階(図 3-14)と数で表す段階(図 3-15)にわけて考える。

図 3-14 は，点 Q の位置が両軸までの長さの線分化により決定されていることを示している。図 3-15 は，両軸上の単位長さが決められたあとで，両軸までの長さを数値化した x と y により点 Q の位置が決定されている。

以上をまとめると，関数のグラフでは，事象の変化があって，その変化の分析から取り出された「2 変量の組」からグラフ上の点の位置を確定している。一方，解析幾何のグラフでは，グラフ上の点の位置の確定がなされていて，その位置を「座標」で表現している。

なお，表 3-4 は，関数と解析幾何の学習内容の相違について本研究の立場から考え，それぞれの取り扱う対象，グラフ及び式に関する点から整理したものである。

表 3-4：本研究の立場から考えた関数と解析幾何の学習内容の相違

	関数	解析幾何
対象	自然現象や社会現象などの変化と対応，関数関係	直線，円，楕円，双曲線，放物線などの図形
式	関数 $y = f(x)$ x は独立変数，y は従属変数 一次関数 $y = ax + b$ の場合， a は変化の割合（変化の激しさを表す） b は初期値（x=0 の時の y の値）	方程式 F $(x,y) = 0$ x と y は互いに独立 直線の式 $mx + ny + p = 0$ かつ $n≠0$ の場合， $-\frac{m}{n}$は傾き（勾配）または方向係数（黒田，1955，p.21） $-\frac{p}{n}$は y 切片
グラフ	量の変化を対象にしているため，x 軸と y 軸の目盛り単位が等しい必要はない。 y 軸に平行な直線のグラフはない。	x 軸と y 軸の目盛り単位が等しくなければならない。 y 軸に平行な直線のグラフはある。$\mathrm{x} = -\frac{p}{m}$（$n = 0$，$m \neq 0$）

3.2.3 事象とグラフのアフォーダンス

本研究では，前述したように，変量を数値化される以前の測定対象（未測量）と数値化された測定対象（既測量）の２種類で捉える立場をとっている。ただし，普遍単位の目盛りがついていない測定器（例えば，目盛りのない時計や目盛りのない上皿ばかりなど）を使って，変量を数値化せず線分として捉えている場合も数値化される以前の測定対象（未測量）の変量と考える。

ここでは，数値化される以前の測定対象（未測量）の変量の必要性をアフォーダンスの理論から明確化したい。Gibson（1985）は，「画像は面であり，それは，もとの構造の基礎にある不変項を含んだ拘束された構造についての，光の配列が得られるように処理された面である」（p.287）と述べている。関数のグラフも１つの画像であり，面である。つまり，関数のグラフの基礎にある不変項とは２変量の組であり，関数のグラフはこの不変項により構成される面と考える。関数のグラフのアフォーダンスを考えるとき，2 変量がアフォードされ，その 2 変量がグラフの軸を構成するようなしかけとしての学習過程が必要になってくる。つまり，グラフの意味や価値を考えさせるのに，最初から，グラフ用紙を与え，グラフの目盛りを与えることは得策ではない。

では，グラフの意味や価値がアフォードされるためにはどうすればよいのか。知覚と行為を結びつけるアフォーダンス理論からは，グラフという人工物のなかに，事象から

取り出された 2 変量が記録されているという活動が必要になってくる（Pea，2004，pp.72-73）。Gibson（1985）は，時間や距離などの変量について，環境のなかに何かしらの意味が付与された対象としてそれらは知覚されると考えている（p.153）。例えば，時間は,「事象を基礎的現実として，また時間を事象からの抽象概念 ── 時間が時を刻んでいくような, 規則的に繰り返される事象から主として導かれる概念」(Gibson, 1985, p.109）とし，また，距離は,「地面の特徴の減少していく光学的大きさの勾配および増大していく光学的密度の勾配として投影される」ものであり，つまり,「空気中を通ってではなく地面に沿って広がっているもの」（Gibson，1985，p.127）と述べている。つまり，Gibson（1985）の言葉を借りて言うなれば,「環境内の持続性と変化によって意味されるもの」（p.13）として，変量は直接知覚される。例えば，人が走るという事象から，走った時間と走った長さ（距離）として，直接知覚される。つまり，事象の中の変量は，私たちが測定により数値化する前の段階から存在している。

したがって，事象から変量を取り出す際に，その変量の意味が顕在化されるような学習過程が必要である。そのために，変量の意味を顕在化させるには，時間や距離などの変量を「測る」ための人工物，つまり，それぞれの測定器のしくみが理解される必要がある。

測定器には，変量を捉えるためのしくみとその変量を数値化するための普遍単位で目盛られた目盛りが備えられている。例えば，アナログ式のストップウォッチについて考えると，等速に動く針がスタートの位置からある位置に動くことによって，経過した量を知ることができ，さらに，目盛によってその経過量が数値化される。変量の意味を顕在化させるためには，数値化される前の変量，すなわち未測量の変量が重要である。つまり，未測量の変量は，変量の意味をアフォードする役割をもつ必要がある。

3.2.4 基本となる量の概念と量の線分化

銀林（1957）の理論は，算数・数学教育において，量の大きさを数値化する操作，つまり測定を意味づける基本的な役割をもっている（川嵜，2003）。ここでは，まず算数・数学教育で基本となる量とはどのようなものかを確認し，関数との関わりについて述べる。

銀林（1957）は，互いに比較可能でかつ比較した際の違いがさらに比較できるような，物体の 1 つの側面を量として捉えると述べている（p.28）。我々は，例えば，運動場の広さと教室の広さという 2 つの広さを面積として数値化する前に「広い ― 狭い」という根源的な感覚によって比較することは可能である（銀林，1957）。

本研究では，このように比較可能性をもつ物体の 1 側面を量と考える。一方，運動場

の美しさと教室の美しさは，一般的には，個人によって美しさの感覚が異なるため，比較することは難しい。このように物体の比較が困難な側面を質と考える。

銀林（1957）によれば，量は比較可能性をもち，かつ差の比較が可能であること（差異の相等化），さらにアルキメデスの公理という 3 つの条件を満たす対象である。

(1) 量の比較可能性

銀林（1957）はその大きさを比較してその順序を決めることができるかどうかという序数性を吟味することから量の概念を論じている。そのために，銀林（1957）は，物体 A を 1 つの集合と考え，その 1 側面を対応させる写像 m を以下のように定義している。

$$m : \mathrm{A} \longmapsto m(\mathrm{A})$$

本研究では，m による A の像 $m(\mathrm{A})$を数値化される前の量，つまり未測量として捉えている。

まず，異なる任意の物体 A と B に対して同じ側面を対応させる写像 m を考え，それぞれの像を $m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$とする。このとき，

$$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{B})$$

が成立すれば，$m(\mathrm{A})$や $m(\mathrm{B})$は序数性をもつ対象となるが，このような比較は，「感覚に直接訴えて判断がくだせる」場合であって，直接比較と言われるものである（銀林, 1957, p.21）。

次に，直接比較ができない場合，$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{B})$となるような第 3 者の $m(\mathrm{C})$を仲介させることが可能ならば，推移律により，$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{B})$が得られるが，このような比較は間接比較と言われるものである（銀林，1957，p.24）。

(2) 量の差異の相等化（差の比較可能性）

(1)の間接比較では，$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{B})$となるような $m(\mathrm{C})$を仲介させることができない場合，例えば，$m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{B})$の場合，$m(\mathrm{A})$と $m(\mathrm{B})$の大小関係は不明である。そこで，銀林（1957）は量の概念に対して，算数・数学教育における加減の演算の意味づけを行うとともに，量の大きさの差の比較から個別単位による測定可能性を論じている（pp.28-32）。

筆者はこの測定可能性を銀林（1957，pp.28-32）に従って，以下のように述べる。

任意の物体 A，B，C，D に対して，それぞれの同じ 1 側面を対応させる写像 m を考え，それぞれの像を $m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{D})$とする。このとき，任意の像の差を比較したときに（差の意味は定義せずに便宜的に用いる），

$$m(\mathrm{B}) - m(\mathrm{A}) = m(\mathrm{D}) - m(\mathrm{C}) \qquad \cdots(1)$$

が成立したとする。この(1)の原理を差異の相等化とよぶ。このとき，物体 A がないと

きは，$m(ø)=0$ と書けば，

$$m(\mathrm{B})=m(\mathrm{D})-m(\mathrm{C}) \quad \cdots(2)$$

$$m(\mathrm{C})+m(\mathrm{B})=m(\mathrm{D}) \quad \cdots(3)$$

と書くことができる。

図 3-16 は $m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{D})$を線分化して(2)と(3)の関係を示すものである。

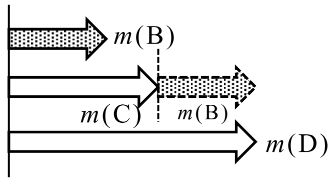


図 3-16

この図から，(2)の減法，(3)の加法を算数・数学教育の演算の意味と関連づければ，(2)の減法は求差，(3)の加法は添加と捉えることができる。つまり，$m(\mathrm{D})$と $m(\mathrm{C})$の差に等しい $m(\mathrm{B})$を取ってくることが可能であり，$m(\mathrm{C})$と $m(\mathrm{D})$の大小関係は $m(\mathrm{C})<m(\mathrm{D})$である。

次に，$m(\mathrm{A})\neq 0$ の場合を考える。このとき，任意の物体 X，Y に対して，それぞれの物体の同じ 1 側面を対応させる写像 m を考え，それぞれの像を $m(\mathrm{X})$, $m(\mathrm{Y})$とする。このとき，$m(\mathrm{X})<m(\mathrm{Y})$ならば，$m(\mathrm{Y})$と $m(\mathrm{X})$の差に等しい $m(\mathrm{Z})$を $m(\mathrm{A})$に添加した場合，$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{X})$と $m(\mathrm{A})+m(\mathrm{Y})$の大小関係は変化しないことを示しておく。

(2)，(3)と同様にして，(4)と(5)が成立する。

$$m(\mathrm{Z})=m(\mathrm{Y})-m(\mathrm{X}) \quad \cdots(4)$$

$$m(\mathrm{X})+m(\mathrm{Z})=m(\mathrm{Y}) \quad \cdots(5)$$

$m(\mathrm{A})$に $m(\mathrm{Y})$を添加すれば，

$$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{Y})=m(\mathrm{A})+(m(\mathrm{X})+m(\mathrm{Z})) \quad \cdots(6)$$

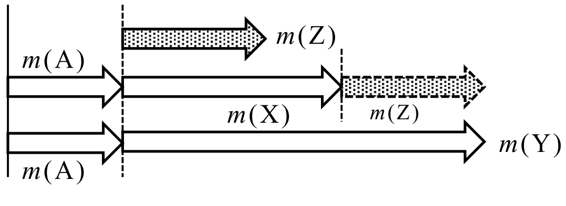


図 3-17

図 3-17 は(6)の関係を表したものである。この図からみてとれるように，(6)の右辺を変形すれば，(7)の右辺となる。

$$m(\mathrm{A})+(m(\mathrm{X})+m(\mathrm{Z}))=(m(\mathrm{A})+m(\mathrm{X}))+m(\mathrm{Z}) \quad \cdots(7)$$

つまり，加法は結合律をみたすものと考える。

(6)，(7)より

$$(m(\mathrm{A})+m(\mathrm{X}))+m(\mathrm{Z})=m(\mathrm{A})+m(\mathrm{Y})$$

したがって，$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{Y})$と$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{X})$の差に等しい$m(\mathrm{Z})$を取ってくることが可能であり，

$$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{X})<m(\mathrm{A})+m(\mathrm{Y}) \quad \cdots(8)$$

が成り立つ。つまり，$m(\mathrm{X})<m(\mathrm{Y})$ならば，任意の$m(\mathrm{A})$を添加しても大小関係は不変である。

以上から，(1)の差異の相等化の原理は任意の$m(\mathrm{A})$に対して成立する。

次に，$m(\mathrm{C})<m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})$の場合，差異の相等化の原理が成立していれば，$m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$のそれぞれと$m(\mathrm{C})$との差を取ってくることが可能になる。このとき，$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})$と$m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})$の間に$m(\mathrm{C})$が存在すれば，

$$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}),\ \text{つまり}\quad m(\mathrm{A})<2m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})$$

であると仮定する。このとき，$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})$であるから(8)より，

$$m(\mathrm{C})+(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))<m(\mathrm{C})+(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})) \quad \cdots(9)$$

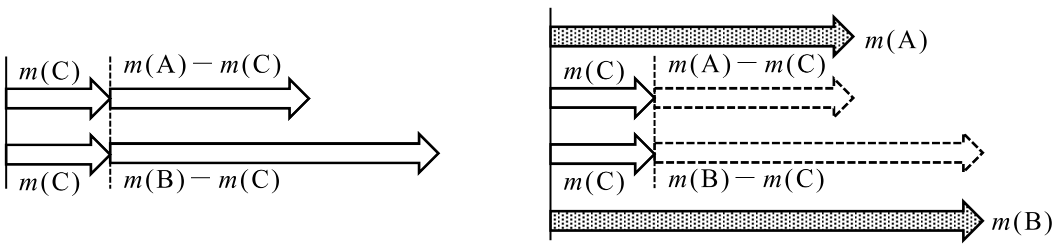


図 3-18

が成立する。図 3-18 は$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})$のそれぞれに$m(\mathrm{C})$を添加した状況を示している。(9)の左辺は$m(\mathrm{A})$，(9)右辺は$m(\mathrm{B})$に等しいので，

$$m(\mathrm{A})<m(\mathrm{B})$$

が成立し，$m(\mathrm{A})$と$m(\mathrm{B})$の比較が終了する。

では，$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})$と$m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})$の間に$m(\mathrm{C})$が存在しない場合，つまり，$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{C})$，$m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{C})$の場合は，$(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})$，$(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})$を取り，後者と前者の間に$m(\mathrm{C})$が存在すれば，

$$(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{C})<(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C}),\ \text{つまり}\quad m(\mathrm{A})<3m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})$$

であると仮定する。このとき，$(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})<(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})$であるから(8)より，

$$m(\mathrm{C})+\{(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})\}<m(\mathrm{C})+\{(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})\}$$

$$m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C})$$

$$m(\mathrm{C})+(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))<m(\mathrm{C})+(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))$$

(9)と同様にして，$m(\mathrm{A})<m(\mathrm{B})$が成立し，$m(\mathrm{A})$と$m(\mathrm{B})$の比較が終了する。

以上から，$m(\mathrm{A})<3m(\mathrm{C})<m(\mathrm{B})$の場合は，

$$2m(\mathrm{C})+\{(m(\mathrm{A})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})\}<2m(\mathrm{C})+\{(m(\mathrm{B})-m(\mathrm{C}))-m(\mathrm{C})\}$$

より，$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{B})$が成立する。

以下，同様にして，

$$m(\mathrm{A}) < n \cdot m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{B}) \qquad \cdots(10)$$

となるような自然数 n が存在すれば，

$$(n-1)m(\mathrm{C}) + \{m(\mathrm{A}) - m(\mathrm{C}) \ \cdots - m(\mathrm{C})\} < (n-1)m(\mathrm{C}) + \{m(\mathrm{B}) - m(\mathrm{C}) \ \cdots - m(\mathrm{C})\}$$

より，$m(\mathrm{A}) < m(\mathrm{B})$が成立する。

しかし，このように $m(\mathrm{A})$と $m(\mathrm{B})$の比較が終了するためには，$m(\mathrm{A}) < n \cdot m(\mathrm{C})$を満たすような自然数が必ず存在する必要がある。$n \cdot m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{B})$については，$n = 0$ とすれば，$m(\mathrm{B}) > 0$ であれば問題なく成立する。

ここで，$m(\mathrm{C})$の意味を確認しておく。銀林（1957）によれば，$m(\mathrm{C})$は個別単位であって普遍単位と区別されており，普遍単位は標準化された個別単位としての意味をもっている（p.32）。量の概念は個別単位または普遍単位によって基数性をもつ測定可能な対象となると述べられている（p.28）。

(3) アルキメデスの公理

(10)の左辺がアルキメデスの公理に相当するものである。銀林（1957）に従って，$m(\mathrm{A}) = a$，$m(\mathrm{C}) = c$ として書き直すと，任意の量 a，c に対して，

$$a < nc \qquad \cdots(11)$$

を満たす自然数 n が存在する。

銀林（1957）は，a として無限大の大きさの量を考えるならば，どのような n に対しても $a > nc$ となり，測りえないという事態の可能性について言及している（p.32）。しかし，銀林（1957）は，量を対象とする限りにおいて測りえないという事態を想定することは避けるべきであり，アルキメデスの公理の成立を前提として量の概念を考えるべきだと述べている（p.32）。

本研究で対象とする量は算数・数学教育で取り扱われる量であり，測定によって数値化されることを前提にしており，測りえないという事態は想定していない。そのため，本研究もアルキメデスの公理の成立を前提として量の概念を考える立場をとる。

したがって，上記の 3 つの条件を満たす量概念に基づいて，「集合（ある法則をもったものの集まり）を構成している各要素（個々のもの）の質的差違を無視し，等質化すること」（中原，1970，p.7）により，変量の各要素の結合関係を法則として捉えることが可能となる。

次に，量の分類について述べる。量は，自然数で数える分離量と，実数を用いて表現する連続量に分けられる。さらに，連続量は，外延量と内包量の 2 種類に分類される（銀

林，1957；遠山，1969）。ここで，物の 1 側面としての量 $m(A)$ についての加法性の定義を，

$$A \cap B = \emptyset \text{なら，} m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

とすれば，加法性が成り立つ量を外延量といい，一般的には加法性が成り立たない量を内包量という（銀林，1957，pp.46-47）。

内包量は「2 つの外延量によって数値化（評価）される量」（銀林，1957，p.101）であり，内包量 m は，2 つの外延量 x，y を用いて

$$m = y / x$$

と定義される（銀林，1957）。例えば，外延量には，長さ，重さ，時間などがあり，内包量には，密度，濃度，速度などがある。

ここで，x と y を変量と考えると，上述の式から

$$y = mx$$

が導かれる．内包量 m が一定ならば，これは正比例関数の式を表現することとなり，つまり，「内包量は正比例関数を媒介する」（銀林，1957，p.145）といえる。

(4) 量の線分化

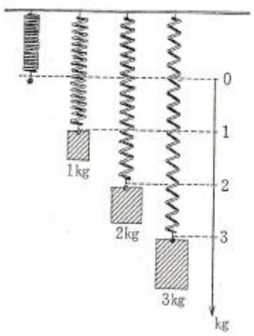


図 3-19 重さの線分化の具体例
（銀林，1957，p.70）

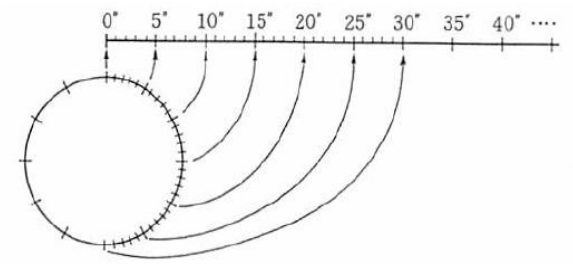


図 3-20 時間の線分化の具体例
（佐藤，1983，p.271）

本研究では，グラフから外延量である時間や距離という量を読みとる際に，量の線分化が重要と考える。量の線分化とは，量を長さに変換することである（銀林，1957）。例えば，ばねばかりにつるされたおもりの重さは目盛りという長さに変えて測定している。

また，アナログ時計の時間の目盛りは円周上に作られているが，時間の線分化とは時計の目盛りを直線上に移して線分として捉えさせることである。つまり，重さや時間などの外延量は長さに変換され，その大きさは負でない実数に対応する。

図 3-19 と図 3-20 は，それぞれ重さと時間の線分化の具体例を表している。

3.2.5 基本となる量の概念の拡張とその表現

(1) 有向量

中学校の関数指導において変量を捉えるためには，負の実数も含めて扱うことのできる量の理論が必要である。基本的な量である長さを例に取って，その変化を考えよう。例えば，ある人の現在の身長が 150cm で，ちょうど 1 年後に 155cm になり，50 年後に 149cm になったとする。現在の身長よりも伸びる長さとは逆に縮む長さに－をつけて考えると，50 年後の身長は－1cm と表現できる。この場合，身長は前述の負でない実数でその大きさが表される量となる。つまり，長さには，例えば伸びに対しての縮みのような,基準となる位置からの方向性を考えた場合,変化した長さというものが考えられる。

このように量の変化を考えた場合，量の概念は向きと大きさをもつ対象として拡張される必要がある。銀林（1957）は，次のような変化量の 3 用法を規定している。

・第 1 用法：（位置 y）－（位置 x）＝（変化量 a）

・第 2 用法：（位置 x）＋（変化量 a）＝（位置 y）

・第 3 用法：（位置 y）－（変化量 a）＝（位置 x）

ただし，位置 x と位置 y に関して，$x<y$ とする。ある量が x から y へ変化するときの変化量 a に対して，その逆向き（y から x への変化）のとき，$-a$ と表す。ここで，位置は量的な大きさはもたないが,量の大きさを決める序数的目盛りの役割をもつといえる。

また，森（2006）は，変化と位置の関係を捉える力を「相対感覚」とよび，次のように述べている。

時刻 b から時刻 t までの時間 s というのは

$$s=t-b$$

ないしは

$$t=b+s$$

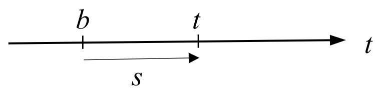


図 3-21

森(2006, p.32)の図 2.4

という形になる（図 2.4).これは単純な加減のようだが，「時刻」と「時間」が使いわけられていることに注意してほしい．それは

（変化）＝（位置）－（位置）

（位置）＝（位置）＋（変化）

という〈変位〉型の加法である．b という時刻の“目盛り”は，たしかに 0 から b という時間の経過したことを語ってはいるが,いまの場合の“過去は忘れられているの”のだ．そして，b から“始まった時間”として s が考えられている．

これは，小学校で「時刻と時間」を扱って以来の当然のことなのだが，ここで強調しておきたいことは，このように理解された加減というのは，もはや〈合併・除去〉の

ような原初の加減感覚からはかなり遠くなっていることである．中学校以後に「数学についての違和感」を持つ人のなかには，たとえばこのような加減などについての自覚しない違和感があるようだ。それで，この種の加減における新しい〈相対感覚〉をあえて強調しておく（森，2006，p.32）.

森（2006）の「（変化）」は変化量と同じ意味で使われていると考えると[3)]，矢線がその感覚のイメージを表現するものである。

次に，田村（1978）は長さの 4 つの公理（大小に関する公理，加法に関する公理，等分に関する公理，連続性に関する公理）とアルキメデスの原理を満たす対象をユークリッド式量とよんでいる。それは，面積，時間，重さ，質量，速さ，力の大きさ，熱量などである（p.14）。また，田村（1978）はユークリッド式量とは異なり，大きさと方向をもつ量を有向量とよんでいる。それは，平面図形の回転（一般角），時刻の変化，速度，加速度などである（p.63）。有向量の大きさを表す数は，負の実数まで拡張される（田村，pp.125-128）。

以上から，量の変化や動きの軌跡を表す量を捉えるためには，量の概念は田村の有向量の理論として拡張されていく必要がある。

(2) 量の 1 次元線型空間

小島（1980）は，ユークリッド式量と有向量を区別せず，両者を量の 1 次元線型空間とよび，数は量の倍変換とみなしている（pp.138-140）。時間を例にあげると，「時間 x を単位秒で測った“数”ξ が秒という枠に関する x の座標である」（小島，1976，p.44）と考えるのである。ここで，枠とは量を測る単位のことであり，0 でない時間はみな枠となる。例えば，過去から未来へ向かう 1 秒を u とすれば，未来から過去へ向かう 1 秒は $-u$ となる。未来への 5 秒は $5u$ であり， 過去への 5 秒は $-5u$ である。ここで，u は単位量であり時間の線型空間 X のベクトルであり，実数の -1 は時間の反転という X への作用を意味する（小島，1980，p.139）。また，基準の時刻 O からの変位 $5u$ を考えると，$5u$ の終点 P は基準の時刻からの 5 秒後の時刻を表す。このように，$5u$ のように特に基準点となる始点を定めずに変化量を表すベクトルを変位ベクトルといい，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$のように基準点からの変化量を表すベクトルを位置ベクトルという（安藤他，1968，p.40）。点 O や点 P を含む時間軸を考えると，点 P は点 O からの変化量の終点という意味よりも時間軸上の位置を表す点という意味が顕在化する。

小島（1980）は，「時間に対する時刻，変化に対する位置のような，一般に“ベクトル”に対する“点”が構成する空間をアフィン空間」（p.149）とよんでいる。また，アフィン空間では原点を定めることによって，線型構造を与えることができ，アフィン空

間と 1 次元線型空間が同一視できると述べている（小島，1976，pp.134-137）。

変化量を“ベクトル”とみたときの“点”にあたる質量（あるいは体積）そのもの全体 X は，もし，負の質量として質量の不足分のようなものを考えるならば，1 次元のアフィン空間だが，この場合，X には標準的な原点があり，標準的な線型構造がはじめから備わっている。そして X と $\vec{X}$ は標準的に同型な線型空間となる。結局，これらの場合には X と $\vec{X}$ を区別する必要はあまりないわけである（小島，1976，p.137）。

線分が量の大きさを表現し，矢線が有向量の大きさや向きを表現することは前述してきたが，小島（1976，1980）の 1 次元線型空間の概念では，例えば，時間に対する時刻や距離に対する位置も，大きさのない量として捉えていくことが可能となり，点も量の表現の一つとなる。

3.2.6 共変推論

そもそも何かが動いて見えるとは，その対象がある一定の経過時間に対して，直線運動ならある一定の長さを移動することであり，回転運動ならある一定の角度を動くことである。また，逆に何かが静止して見えるとは，ある一定の経過時間に対して対象の移動距離や回転角が変化しないということである。このように，動きを捉えるということは，経過時間という変量を移動距離ないし回転角という変量に対応させて事象を捉えることであり，「関数の考え」（中島，2015，p.181）の基盤となる。

また，Thompson et al.（2017）は，次の課題（藤井他，2010，p.24）について，「“変化する”，“共変する”，“変量”，“関数”という言葉を全く使わずに，このような考えのすべてをはっきりと示している」（p.39）と述べている。

右のように，直方体のたての長さと高さを変えないで，横の長さを 2 倍，3 倍にします。体積は，横の長さに比例しますか。

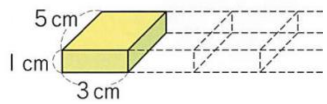


図 3-22 藤井他（2010，p.24）

この課題の特徴は，Thompson et al.（2017）が述べているように，「体積は横の長さに比例しますか」という質問に至るまでに，たての長さと高さが不変なまま，横の長さが 2 倍, 3 倍…に変化することによってできる新しい直方体がイメージできるような図が添えられていることである。教師はこの図を使って，実際に横の長さが 2 倍，3 倍になった直方体をかかせることができる。このとき，横の長さの変化をどのようなレベルでイメージできているのかが課題となる。Thompson et al.（2017）は，量の大きさの変化に

関する推論を変量推論（variational reasoning）とよんでいる。

また，変量と変量を対応させて考えるという共変的なものの見方について，Saldanha & Thompson（1998）は，「共変とは，同時に 2 つの量の値（大きさ）を維持させるイメージをもつことをいう。それは，2 つの量を 1 組にするという，いわば 2 つの量からなる乗法的な対象として理解することである」（p.299）と述べている。また，Thompson et al.（2017）は，「乗法的対象を概念化することが共変推論にとって本質的なことである」（p.21）と述べている。例えば，時間と距離のグラフから速さを読みとることが可能であるが，速さが乗法的対象として共変推論（covariational reasoning）によりグラフから速さを読みとることができるのである。表 3-5 は共変推論の主要なレベルである（Thompson et al.，2017，p.23）。

表 3-5　共変推論の主要なレベル（Thompson et al.，2017，p.23；レベルの数字は筆者）

レベル	内容
Ⅵ：なめらかな連続的共変	一つの量のまたは変量の大きさ（以下，変量）が増えたり，減ったりする（以下，変化する）ことが別の変量の大きさの変化と同時に起きていることや，2 変量がなめらかに連続変化していることを捉えている。
Ⅴ：区分的な連続的共変	一つの変量の大きさの変化がもう一つの変量の大きさの変化と同時に起きていることや，2 変量が区分的に連続変化していることを捉えている。
Ⅳ：変量の対応	離散的に変量の組（x,y）をつくって，ひとつの変量（x）の大きさと別の変量（y）の大きさとを対応させている。
Ⅲ：変量の大雑把な対応	「この量はあの量が減るときには増えるというように」，量の大きさがともに変わるイメージを大雑把には捉えている。量の個々の大きさがともに変化していることまでは捉えてはいないが，そのかわりに，2 量の大きさの変化すべてに対する緩い，非相乗的なつながりは捉えている。
Ⅱ：変量の初期的な対応	一方の変量が変化して別の変量が変化する，そして，また一方の変量が変化して…というように，2 変量の大きさが変わっていることを捉えてはいるが，同期していない。つまり，変量のペアを相乗的対象として捉えることはできていない。
Ⅰ：変量の対応なし	変量がともに変わるイメージを全く持てていない。ある変量またはもう一つの変量の変化に焦点化していて，変量相互を対応させて捉えていない。

次に，Thompson et al.（2017）の変量の捉え方については記述されていないが，変量を未測量として線分化して，表 3-5 の共変推論の主要なレベルを解釈する。本研究では，表 3-5 にレベルごとに数字をつけている。図 3-23～図 3-28 は，それぞれのレベルの解釈を説明したものである。

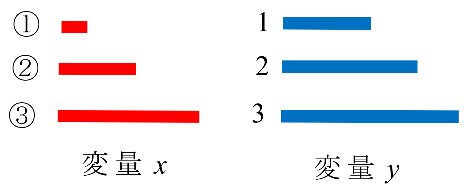


図 3-23　レベルⅠ

①と 1 など番号のついた変量は対応していない。変量 x の変化①→②→③と変量 y の変化 1→2→3 はそれぞれ別々に理解している。

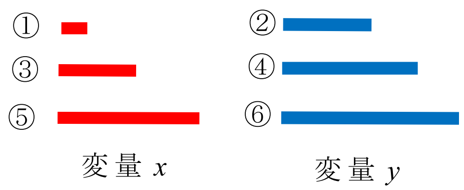


図 3-24　レベルⅡ

①→②→③→④→⑤→⑥という順番に各変量が変化することを理解している。→の間に時間経過がある。

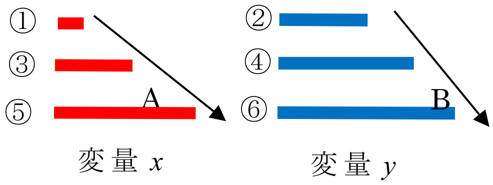


図 3-25　レベルⅢ

変量 x に関する変化の様子 A と変量 y に関する変化の様子 B は理解できている。A と B に何らかのつながりがあることは理解できている。

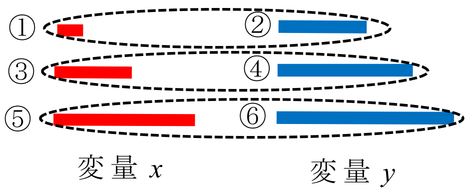


図 3-26　レベルⅣ

①と②，③と④，⑤と⑥のように各 2 変量をそれぞれ 1 組のものとして理解している。

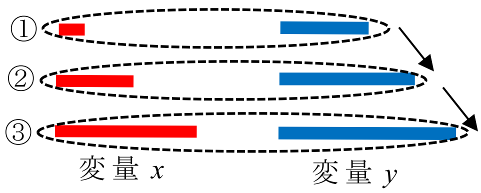


図 3-27　レベルⅤ

①～③の各組の 2 変量が同時に変化していることを理解している。①，②，③のそれぞれの変化の間にも同じように，2 変量が同時に連続的に変化していることは意識されていない。

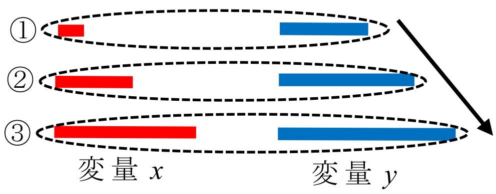


図 3-28　レベルⅥ

①～③の各組の 2 変量が同時に変化していることを理解している。①，②，③のそれぞれの変化の間にも同じように，2 変量が同時に連続的に変化していることを理解している。

以上のように，変量の線分化によって，共変推論の主要なレベルを具体的に説明することができた。Thompson et al.（2017）は，「生徒が変化率を概念化するためには共変的に推論することが必要である」（p.22）と述べているが，速さや速度などの変化率をグラフから読み取らせるためには，変量を線分や矢線で表現するなど，変量を視覚化して変化の様子を語らせることが必要であるということが示唆されている。

注

3) 森（1976）は，「『ベクトル』とか『空間』とかいうことばには，当然のことに幾何的イメージがつきまとう。ここで,『方向と大きさを持った量』というのも連想されよう」と述べており，例えば，点 A から点 B への移動を表すときには「東へ 2 ㎞，北へ 3 ㎞」という数値を使って移動のイメージを矢線で表していることにもふれている。

3.3 第３章のまとめ

本章では，グラフ読解を捉えるための理論を概括的理論と個別的理論の 2 つの面から述べた。概括的理論から，以下の点が明確化された。

(1) 概念定義と概念イメージの理論からは，関数のグラフ読解の指導過程の中に，関数概念のイメージによって関数の定義を構成させたり，関数の定義を使いながら関数概念のイメージを操作させたりすることが必要である。

(2) 解析幾何のグラフ読解においては，視覚から受け取る情報の解釈によって論理的な概念操作が困難になるゆえ，形的概念の概念的側面と形的側面が融合するまで，2 つの側面が同時に機能する教授学的状況を創り出していく必要がある。

(3) グラフ読解という数学的な活動（行為）を考えた場合，生徒がグラフという視覚的表現からのアフォーダンスを探索させる過程のなかで，生徒の認識が数学的・物理的な概念と照応される。その結果として，関数のグラフ読解の場合は，変量の意味や変量の変化がアフォードされ，解析幾何のグラフ読解の場合は，対象のかたちやその特徴がアフォードされると考えられる。

次に，個別的理論からは，以下の点が明らかになった。

(4) 関数のグラフの対象は事象のなかにある測定対象(未測量)であり，解析幾何のグラフの対象は，平面や空間の部分集合としての図形である。

(5) 変量の意味を顕在化させるためには，数値化される前の変量，すなわち未測量の変量が重要である。未測量の変量は，変量の意味をアフォードする役割をもつ。

(6) 算数・数学教育で基本となる量とは，比較可能性をもつ物体の一側面であり,「比較可能性」および「通約性」（一定の尺度で測定可能であること）をもつ対象である。そして，量は，自然数で数える分離量と，実数を用いて表現する連続量に分けられ，さらに，加法性の有無により外延量と内包量の 2 種類に分類される。本研究で対象とする量は,主として時間や距離などの外延量であり,グラフから外延量を読みとる際に，量の線分化が重要と考える。外延量は長さに変換され，その大きさは負でない実数に対応する。

(7) 田村（1978）は長さの 4 つの公理（大小に関する公理，加法に関する公理，等分に関する公理，連続性に関する公理）とアルキメデスの原理を満たす対象をユークリッド式量とよんでいる。一方，方向と大きさをもつ量をユークリッド式量と区別して有向量とよんでいる。関数指導において，量の変化や動きの軌跡を表す量はユークリッド式量から有向量として拡張され，矢線として視覚化される。一方，量を 1 次元線型空間と捉えると，例えば，時間に対する時刻や変化に対する位置も，大きさのない量として捉えていくことが可能となり，点も量の表現の一つとなる。

(8) Thompson et al.（2017）の共変推論の主要なレベルの吟味からは，速さや速度などの変化率をグラフから読み取らせるためには，変量を線分や矢線で表現するなど，変量を視覚化して変化の様子を語らせることが必要であるということが示唆される。

第４章　変量の線分化に焦点をあてた指導の基本設計

本章では，事象の中の 2 変量への認識を高めていくための視点を明確にする。ここでは，有向量を取り扱う前の段階で，そもそもグラフとは何であるのかというグラフに対する基本的な認識をもたせるための指導の枠組みを提示する。また，本研究では，中西（2015）をもとに，変量 x および変量 y から関数 f が決定される以前に，動きのある測定対象 $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ の間には，対応関係 $\tilde{f}$ が存在していると捉える。

4.1　変量の認識を高めるための視点

(1) 変量の把握と対応関係の明確化

渡邊（2007）は，現象を定量的に捉えるためには，変量を把握して対応関係を明確化することが大変重要であると述べている。例えば，中西（1995）は，実験を始める前には必ず,変量の把握とその対応関係を捉えさせるために,「○○が変わると□□が変わる」という文章の空欄に変量名を記入させている。しかし，変量が測定されたのち数値化され，それぞれの変量のもつ意味の吟味はなされていない。本研究では，変量のもつ意味を把握させるために，動きのある測定対象に着目して，変量の把握と対応関係の明確化を行う。また，時間と時刻，距離と位置など，変量の意味の相違を明確化する。

(2) 動きのある測定対象の線分化

変量の視覚的表現として，その線分化は有効な手段になると考える。一般的に，量の線分化とは，すべての連続量を長さという典型的な量に還元することである（銀林，1957；竹内，1978b)。

ここで，$\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$ はそれぞれ $\tilde{y}_1$，$\tilde{y}_2$ に対応して，図 4-1 のように線分化する。

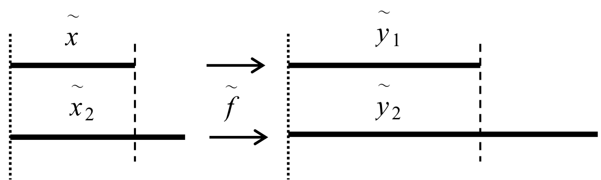


図 4-1

このとき，$\tilde{x}_1$ と $\tilde{x}_2$，$\tilde{y}_1$ と $\tilde{y}_2$ は，それぞれ比較可能であって，比較する場合は，「比較される両者の一方の端を揃えて他方の端の出っぱり具合を調べなければならない（銀林，1957，p.58)」つまり，線分の長さの直接比較により，それぞれの測定対象が増加しているのか，減少しているのか，不変であるのか，測定対象の変化が視覚化される。

(3) 動きのある測定対象のグラフ化

次に，動きのある測定対象である $\tilde{x}$，$\tilde{y}$ の変化のイメージを視覚化するためにグラフをつくらせる。$\tilde{x}$ は一方の端を揃えて同一直線上に並べつつ，それぞれの $\tilde{x}$ の上にそれに

対応する $\tilde{y}$ をたてるという操作（図 4-2）を複数回行い（図 4-3），$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$，…の左端を一致させて同一直線上に並べて，$\tilde{f}(\tilde{x})$ をグラフ化する（図 4-4）。

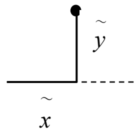


図 4-2

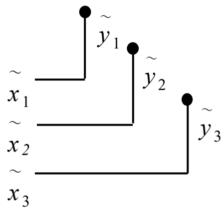


図 4-3

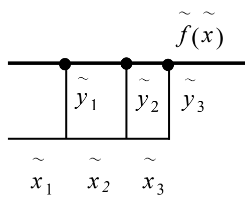


図 4-4

(4) 動きのある測定対象の数値化とそのグラフ化

個別単位や普遍単位による測定でもって，線分化された動きのある測定対象を数値化する。ここでは，事象からとりだされた動きのある測定対象を直接測定しており，測定後の 2 変量との関係は維持される。

ここで，長さという量が実数に対応することを示す。竹内（1978b）に倣い，1 つの直線上にある任意の 2 つの線分の「長さ」l，m（$l<m$）について，その「長さ」を比較する。

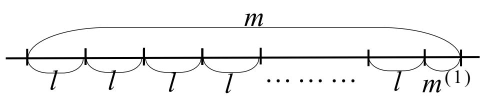


図 4-5

図 4-5 のように，m のなかに l を k_1 個とった残りを $m^{(1)}$ とすれば，$m=k_1 l+m^{(1)}$ が成立して，アルキメデスの公理により，$k_2 m^{(1)} \leqq l < (k_2+1)m^{(1)}$ となる整数 $k_2 \geqq 0$ が存在する。

$k_2 m^{(1)}=l$ ならば，$m^{(1)}=\frac{l}{k_2}$ より，$m=\left(k_1+\frac{1}{k_2}\right) l$ となる。

$k_2 m^{(1)}<l$ ならば，l のなかに $m^{(1)}$ を k_2 個とった残りを $m^{(2)}$ とすれば，$l=k_2 m^{(1)}+m^{(2)}$ が成立して，アルキメデスの公理により，$k_3 m^{(2)} \leqq m^{(1)} < (k_3+1)m^{(2)}$ となる整数 $k_3 \geqq 0$ が存在する。

$k_3 m^{(2)}=m^{(1)}$ ならば，$m^{(2)}=\frac{m^{(1)}}{k_3}$ より，$l=\left(k_2+\frac{1}{k_3}\right) m^{(1)}$ となるから，$m=\left(k_1+\frac{1}{k_2+\frac{1}{k_3}}\right) l$

$k_3 m^{(2)}<m^{(1)}$ ならば，$m^{(1)}$ のなかに $m^{(2)}$ を k_3 個とった残りを $m^{(3)}$ とすれば，
$m^{(1)}=k_3 m^{(2)}+m^{(3)}$ が成立して，アルキメデスの公理により，$k_4 m^{(3)} \leqq m^{(2)} < (k_4+1)m^{(3)}$ となる整数 $k_4 \geqq 0$ が存在する。

以下，同様にして，m と l の関係は，$m=\alpha l$，ただし，$\alpha=k_1+\frac{1}{k_2+\frac{1}{k_3+\cdots}}$ という形に表すことができる。

竹内（1978b）は，量を線分化するというプロセスを通じて，線分が「実体」的な意味

を持ち，αが１つの「実数」として，実体的概念を表すことが可能になると述べている（p.80）。

そして，実数と単位線分（単位量）を用いて，変量を線分化して，前節の(3)と同様な方法によりグラフ化が可能となる。

4.2　変量の認識を高めるための授業過程

(1) 授業の位置づけ

本授業のねらいは，量感覚を重視し，2 変量の対応を明確化するプロセスを通じて，事象とグラフとの結びつきを高めることである。

本授業は中学校 1 年の関数の単元内に位置づけ，正比例関数を対象とし，まっすぐに設置されたレール上を動くおもちゃの列車の動きをとりあげる。この列車はほぼ等速で走ることが知られている。

そして，本授業が対象とする事象においては，その変量は負でない範囲にあることから，変量の範囲が負の場合を扱うために，本授業のあとに時間の変化とともに水の深さが変化していく事象をとりあげる（中西他，2009）。ただし，グラフについては，有向量としてグラフをかかせる。また，座標は解析幾何の学習内容であるから，反比例を扱ったあとに指導する。

本章で述べる授業プロセスは，すでに筆者が実践してきたものであり，その意味での実現可能性はあるが，本章では，前章で述べた変量の認識を高めるための視点の実現可能性を考えていく。つまり，理論的な視点と筆者の実践の間を埋めるよう，実践と相互作用する可能性のある仮想の授業プロセスを構想し，理論的に吟味する。

(2) 授業過程への実現

①変量の把握と対応関係の明確化

まず，列車の動きの中から，変量を取り出させるために列車をレール上で走らせる。変量を取り出して対応関係を捉えさせるために,「列車の動きから，どの量が変化すればどの量が変化するのか」と尋ねる。生徒からは,「時間が変われば距離（長さ）が変わる」,「時刻が変われば位置が変わる」,「列車が走ると電池が減る」などといった意見が出る。このとき，時間と時刻，距離と位置の意味の違いを明らかにし，線分化できるものとできないものとの区別を行う。

次に，教師は，紙テープを使って，列車の動きを表現する方法を生徒に考えさせる。時間については，長針・短針および目盛りを隠した秒針だけの円形の時計を提示し，針の動きに注目させて時間を視覚化する方法を尋ねる。生徒からは針の動きを角として捉える意見が出てくるので，教師は，角が大きくなるにつれてどの部分が変わっていくのかと尋ねると，生徒は針の動きが円弧の長さとして捉えられることに気づいてくる（図 4-6)。さらに，列車の動いた距離を線分として表す方法を尋ねると,同様に,紙テープにうつしとる意見が出てくる。

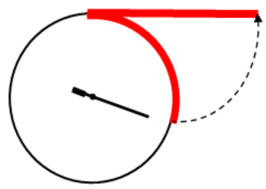


図 4-6
実験に使用する時計

以上から，生徒は，時間の変量や距離の変量を数値化するこ

となく，長さとして捉えることができると考えられる。

②動きのある測定対象の線分化

おもちゃの列車の動いた時間が変われば距離がどのように変化するのかを調べる実験を行う。実験の場所については，予備実験を行った後に，つまり，列車の速さを事前に測定し，調べる時間の範囲を考慮して決める。

次に，実験の手順を述べる。生徒に列車の動く距離を予想させるために，いくつかの時刻だけを知らせながら，列車の動きを観察させる。その後，再度，列車を走らせて，時刻ごとに列車が通過した地点に付箋で印をつけさせる。ここでは，スタートからの列車の距離の測定対象は列車の先頭を目印に決める。教師が，時間の測定対象を紙テープにうつしとり，生徒は，教師がうつしとった時間の測定対象に対応する列車の動いた距離の測定対象を紙テープにうつしとる作業を行う（図 4-7)。

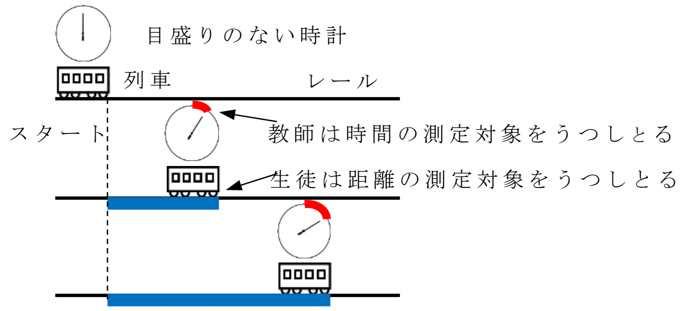


図 4-7

うつしとる測定対象の数については，グラフ化を考慮して，それぞれ 6 から 10 程度とする。次に，教師は，時間が変わると距離がどのように変化しているのかを考えさせるために，時間と距離の測定対象がそれぞれ対応するように紙テープを並べさせる(図 4-8)。

図 4-8　時間と距離の測定対象の線分化

③動きのある測定対象のグラフ化

教師は，動きのある測定対象のグラフ化を促すために，測定対象の対応関係がさらに明確になるような並べ方を考えさせる。つまり,「時間が変われば距離が変わる」ことが明確化されるテープの並べ方を考えさせ, 図 4-2 のような並べ方を導く。そして，

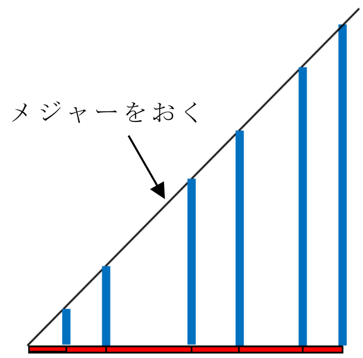


図 4-9　動きのある測定対象のグラフ化

図 4-3 のように時間と距離の組を複数つくらせてから，各組の変化の様子がわかるよう

にする方法を考えさせ，時間の測定対象を一直線上に並べることを導く（図 4-9）。

ただし,時間の測定対象の変化が見えるように並べよという条件をつけ加えておけば，他のものより長い紙テープが順に下になるように重ねられて，横軸が形成される。

次に，時間と距離の組の紙テープを並べ終わったら，グラフはどこに表れているのかと尋ねると，距離のテープの一番先の点を連ねた直線という意見が出てくるので，メジャーをおいて直線のグラフをつくらせる。さらに，グラフを見てわかることを尋ねて，時間が増えると距離が増えているという意見や，小学校で既習事項であるが，距離は時間に比例しているという意見を導き，変化の法則を定性的に捉えさせる。

以上から，生徒は，測定対象により列車の動きを表すグラフをつくれること，そのグラフから距離と時間は比例していること，さらに，時間の測定対象が横軸を形成することを理解できると考えられる。

④ **動きのある測定対象の数値化とそのグラフ化**

実験で得た列車の時間の測定対象を数値化するために，実験で使った円形の時計の目盛りを使って，別の紙テープに時間を目盛って，時間のものさしをつくる。この紙テープを黒板等にはり，実験で得た列車の時間の測定対象の紙テープを並べて比較して数値化する。また，実験で得た列車の距離の測定対象は，メジャーで直接測定して数値化する。

次に，上記の 2 変量をグラフ用紙にうつしとるために，グラフ用紙の横軸と縦軸に普遍単位で目盛りをつけさせ，両軸はそれぞれ，時間と長さという量で目盛られていることを意識化させる。ここで，測定対象のグラフとの比較から，縦軸の役割を考えさせ，縦軸が距離の変量をよみとる目盛りになっていることを理解させる。ただし，教師は生徒によって目盛りの幅が異なることのないようにするために，目盛りの幅を指定する。

次に，教師は時間の変量と距離の変量をグラフ用紙にうつすにはどうすればよいかと尋ねて，それぞれ線分で表せばよいという意見を導いてグラフをかかせる。グラフをかかせる際には，実験には誤差が含まれていることを確認させてから，距離を示す線分の先端をできるだけたくさん通るように，0 から始まる直線をひかせる（図 4-10）。

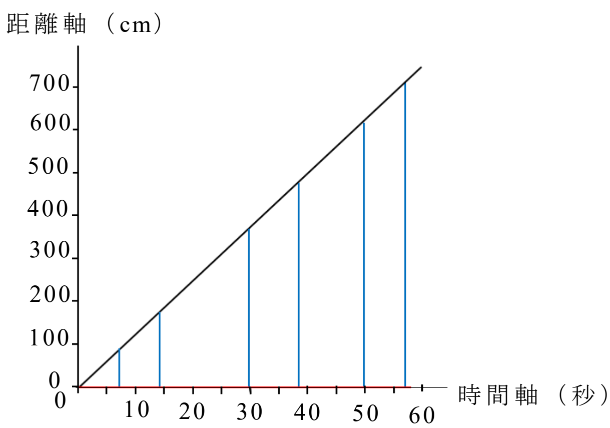


図 4-10　変量のグラフ

以上から，生徒は，時間や距離の変量は，それぞれ普遍単位をもとに測りとられた量であり，横軸と縦軸の 2 軸は普遍単位で等間隔に目盛られていることを理解できると考えられる。

4.3 授業過程の意義

この授業過程で，グラフと事象との関係をどのように生徒がとらえることができるかを，変量の認識を高める視点から振り返り，その意義を下記のようにまとめる。

・変量の把握とその対応関係の明確化の視点からは，時間と時刻，距離と位置の意味の違いを明らかにし，量であるものとそうでないものの区別を行い，変量の対応関係に着目させることができる。

・動きのある測定対象の線分化の視点からは，時間が変わると距離がどのように変化しているのかを視覚的に捉えさせ，量感覚をもたせることができる。

・動きのある測定対象のグラフ化の視点からは，2 つの測定対象を 1 組の対象として捉えさせることを通して，関数の対応の考えを意識化させることができる。また，動きのある測定対象により事象の動きを表すグラフが形成されること，そのグラフから事象の定性的な変化の特徴を捉えられること，さらに，2 つの動きのある測定対象がそれぞれの軸を形成することを把握させることができる。

・動きのある測定対象の数値化とそのグラフ化の視点からは，時間や距離の変量は，それぞれ普遍単位をもとに測りとられた量であり，横軸と縦軸の 2 軸は普遍単位で等間隔に目盛られていることを把握させることができる。

4.4　第４章のまとめ

本章では，事象とグラフが結びつくためには，事象の中の変量がグラフを形成しているという認識を高めることが不可欠であること，そのためには，事象から取り出される変量の意味を把握させるために，動きのある測定対象を数値化せずに線分として捉えさせ，グラフをつくる段階が必要であることを明らかにした。そして，グラフの指導は，次の４つの視点から構成し，変量の認識を高めるべきであることを指摘した。

それは，

(1) 変量の把握と対応関係の明確化

(2) 動きのある測定対象の線分化

(3) 動きのある測定対象グラフ化

(4) 動きのある測定対象の数値化とそのグラフ化

である。

そして，この４つの視点により構想された授業過程により，変量が事象とグラフを結びつけ，変量の認識を高めていく可能性を明らかにした。

第５章　関数としてのグラフ読解

本章では，中学校の関数のグラフに対する読解について，関数の種類，特に正比例関数と一次関数の違いと,負の数の導入に伴う量の認識の点からは,動きに伴う変量(Δy) とグラフの y 軸から読み取られるものが異なることを明らかにする。また，区分的一次関数のグラフ読解の意義についても述べる。

5.1　正比例関数と一次関数の相違

一次関数のグラフを正比例関数のグラフと比較して，一次関数のグラフ読解の特徴を明確化する。森（2006）は，次のように一次関数の変化には本質的に正比例関数の変化が背景にあると述べている。

ここで，f の相対的 $x(s)$は

$$f(t)=c+x(s)$$

の形になるわけで，この x が正比例関数に

$$x(s)=as$$

であることから，

$$f\ =c+as$$

もとへ戻すと

$$f\ =c+a(t-b)$$

となる。これが一次関数の一般的形態である。

これは，グラフでいうならば，（t，f）のグラフ上で，（b，c）を原点として正比例関数 $x=as$ のグラフが描かれた形になっている（図 2.5)。b という任意の時点から出発して正比例が観察されていること，ここに一次関数の本質がある（森，2006，pp.32-33)。

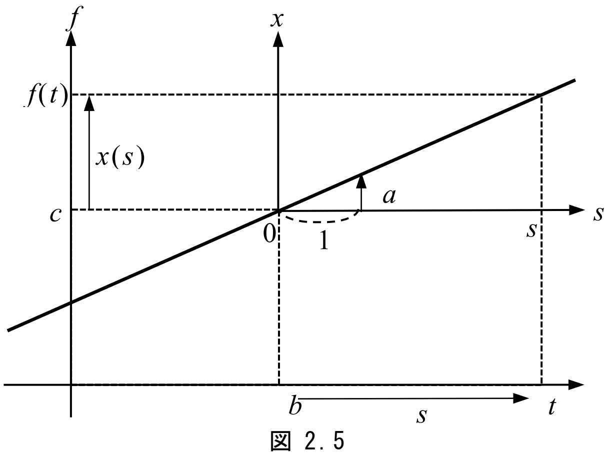


図 2.5

図 5-1 森（2006，p.23）の図 2.5

次に，一次関数の変化には本質的に正比例関数の変化が背景にあるということを変量の視点から両者を比較する。図 5-1 より，正比例関数 $x(s)=as$ について考えると，有向量 s を有向量 $x(s)$へ対応させている。一方，一次関数 $f(t)=c+a(t-b)$ について考えると，ある位置 c に有向量 $a(t-b)$を加えることによって別の位置 $f(t)$を決定して対応させている。

正比例関数：有向量 $s \longmapsto$ 有向量 $x(s)$

一次関数：位置 $t \longmapsto$ 位置 $f(t)$

であり，正比例関数と一次関数とでは対応させている対象が異なっている。

したがって，一次関数のグラフ読解では，事象の動きを時間軸上の 1 点である時刻と距離軸上の 1 点である位置から捉える必要がある。

5.2　事象の動きと一次関数のグラフとの関係

事象の動きが正比例関数 $y=ax$ のグラフで表される場合は，グラフから読み取られる y の変量から事象の動きを捉えることは容易である。なぜならば，その動きの基準点が，$x=0$，$y=0$ で示される点であることさえ理解できれば，その基準からの y の変量の大きさを時系列（x の変量の大きさが増加する方向）に読み取れば，その動きを捉えることができるからである。一方，事象の動きが一次関数 $y=ax+b$ のグラフで表される場合は，その基準となる動きが $y=ax$ のグラフに示されていることの理解が不可欠である。このことを具体例を用いて述べる。

(1)2 つの対象とも動いていて，一方が他方を追いかける場合

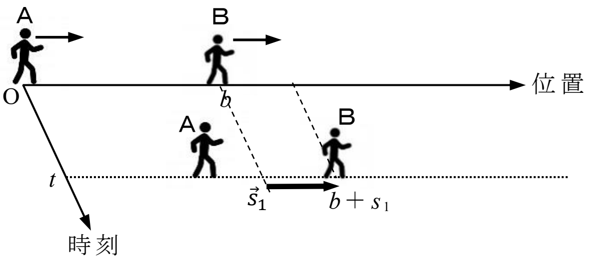


図 5-2

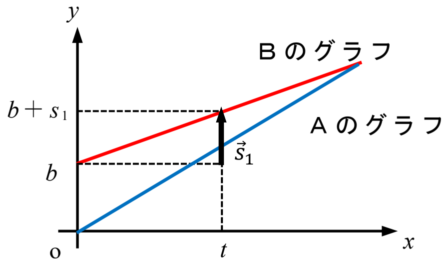


図 5-3　A と B の動きのグラフ

例えば，一直線の道路上を等速で動いている B と A がいて，B は A の位置より b の長さだけ前方にいるとする（図 5-2）。ただし，A の動く速さは B よりも大きいとする。また，A が動き始めた時刻と位置を基準にとる。このとき，基準となる原点は B の出発時刻と出発地になるので，基準の時刻での A の位置 b とする。時刻 t に対して B の動いた距離を s_1 とすれば，B の位置は $b+s_1$ となる。B の動いた距離がそのまま B の位置に反映されていない。グラフにも特別の読み方が要請される（図 5-3）。つまり，時刻 t に対する B の位置は基準の位置（初期値）と変量（実際に動いた距離）の和として読まれなければならない。

(2) 2 つの対象とも動いていて，お互いがどこかで出会う場合

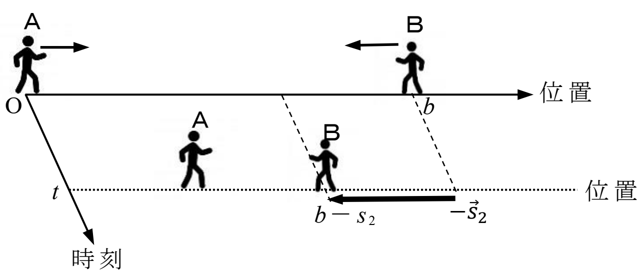


図 5-4

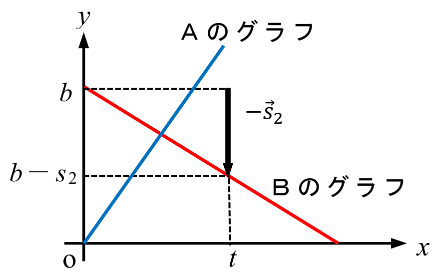


図 5-5　A と B の動きのグラフ

b の長さだけ離れている A と B がいて，この 2 人が同時に出発して出会う場面を考えよう（図 5-4）。A の動きを基準にした B の動きを考える。ここで，A が B に向かう向き

を正の向き，逆にBがAに向かう向きを負の向きとし，A，Bはどちらも等速で動いているものとする。時刻 t までにBの動いた量を $-\vec{s_2}$（$|\vec{s_2}|=s_2$）とすれば，Bの位置は $b-s_2$ になる（図 5-5）。この場合も，時刻 t に対するBの位置は基準の位置（初期値）と変量の和として読まれなければならない。

(3) 2つの対象のうちどちらかが静止している場合

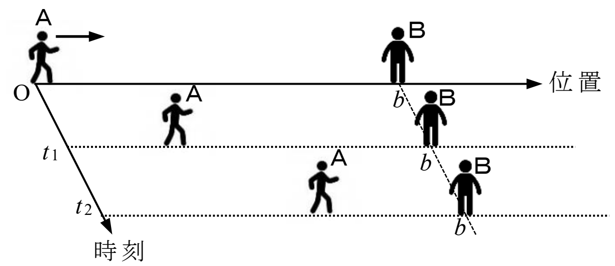


図 5-6

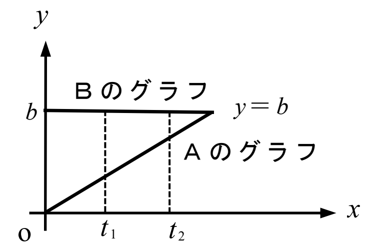


図 5-7　姉と妹のグラフ

例えば，一直線の道路上を等速で動いているAが，Aの位置より b の長さだけ前方の地点でBと待ち合わせをする場面を考えよう（図 5-6）。ただし，基準となる原点はAの出発時刻と出発地になるので，基準の時刻でのBの位置 b とする。図 5-6 でBは動かないので，変量は0であり，AがBに追いつくまでの時間では，Bの位置は常に b となる。つまり，Bのグラフは定数関数 $y=b$ となる（図 5-7）。

(4) 2つの対象とも動いていて，一方が他方とは逆の方向に進む場合

b（>0）の長さだけ離れているAとBがいて，この2人が同時に出発してBがAとは逆の方向に進む場合出会う場面を考えよう（図 5-8）。Aの動きを基準にしたBの動きを考えると，Bの最初の位置は $-b$ となる。Aが進む向きを正の向き，逆にBが進む向

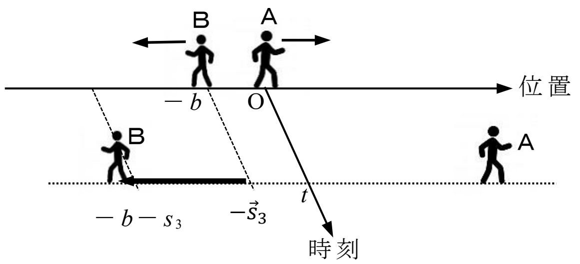


図 5-8

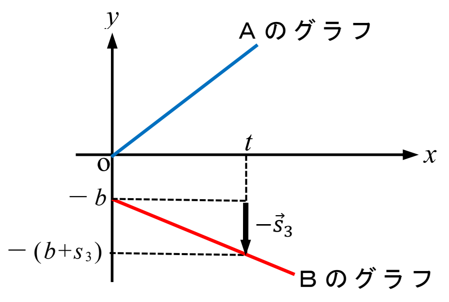


図 5-9　AとBの動きのグラフ

きを負の向きとし，A，Bはどちらも等速で動いているものとする。時刻 t までにBの動いた量を $-\vec{s_3}$（$|\vec{s_3}|=s_3$）とすれば，Bの位置は $-(b+s_3)$ になる（図 5-9）。この場合も，時刻 t に対するBの位置は基準の位置（初期値）と変量の和として読まれなければならない。

さらに，1つの動点の往復運動を考えても，折り返し点までの往路の動きが正比例関数で表された場合，折り返し点からの復路の動きは一次関数で表される。その動点の折

り返し点からの復路の動きは，y の変量を時系列的に読みとるだけでは，その動きをイメージするのは難しい。なぜならば，この動点の実際の動きは，折り返し点からの y の変量の増加量 Δy（Δy の大きさは負数で表される）を時系列に読み取ることによってイメージされるからである。

以上から，事象の動きが一次関数 $y=ax+b$ のグラフで表される場合は，その動きの基準点が変量 $x=0$ のときの y の変量の大きさ b（初期値または基準量）で示される点であり，その点からの y の変量の増加量 Δy を時系列に読み取らなければ事象の動きを捉えることは難しい。

このように事象の動きが一次関数のグラフで表される場合は，その動きの基準に関する情報の読み取りが必要となってくる。本研究では，これを一次関数のグラフ読解に関する「動きと基準性」とよび，一次関数のグラフ読解では，「動きと基準性」に関する理解が重要である。

5.3 斉次一次関数のグラフ読解

前節で述べた具体例では，正比例関数のグラフの読解には言及せずに，一次関数のグラフの読解のみ考えた。しかし，関数指導の場面において，正比例関数のグラフの場合には有向量から有向量への対応としての読み取りを指導し，一次関数のグラフの場合には位置から位置への対応としての読み取りを指導するというように，関数の種類によって読み取り方の指導が異なるというのは，生徒に混乱を与える可能性があり得策ではない。したがって，一方を他方に統合する方法を考えてみたい。

$y=ax+b$ において，$b=0$ の場合を特に斉次一次関数というが，本節では，正比例関数を一次関数の特殊型と考えた場合のグラフ読解について考える。

有向量 a が 2 つの位置 x と位置 y（$x<y$）から決まる場合，

（位置 x） ＋ （有向量 a） ＝ （位置 y）

の関係が成り立つ。

正比例関数の場合は，基準を原点とみているので，位置 $x=0$ となり，（有向量 a）＝（位置 y）が成り立つ。つまり，位置と有向量をダブらせて捉えることができるのである（岡本，1981，p.114）。岡本は次のように述べている。

> 「位置」というのはもともと「原点からの変位」をひきずっているわけで，「位置としての x」とは言っても，下図で言えば点 P とともに矢線$\overrightarrow{OP}$をもダブらせて思い浮かべているというのが普通だと思う（岡本，1981，p.114）。

図 5-10 岡本（1981，p. 114）

したがって，正比例関数のグラフを斉次一次関数のグラフとして読み取るということは，線分化された変量を点として捉える指導場面にも成り得る可能性をもっている。

5.4 区分的一次関数のグラフ読解

1 つの動点の往復運動を考えると，その動きを表すグラフは正比例関数のグラフと一次関数のグラフがつながった形のものになる。このような一次関数を区分的一次関数とよび，「有限個の特異点を除いて各区間で一次関数になる関数」（森，2006，p.43）のことである。この区分的一次関数のグラフの読解について，具体例をあげて説明する。

ただし，ここでは，速さの向きも考えているので，速度という言葉を使用する。

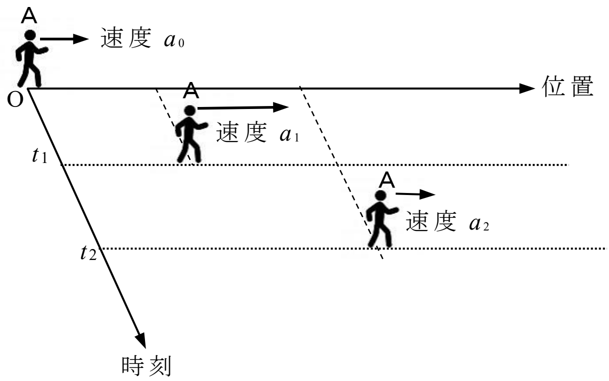


図 5-11

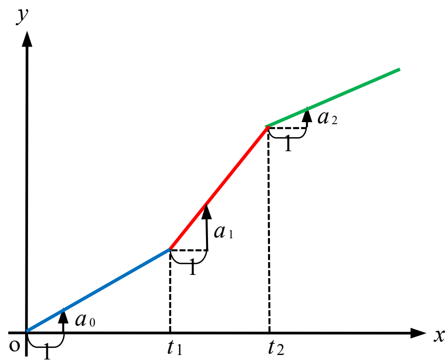


図 5-12 A の動きのグラフ

(1) 1つの対象が同一方向に動いていて，速度の大きさが変化する場合

A さんがある地点を別の地点まで等速で同じ方向に移動している。その移動の速度については，0 秒後から t_1 秒後までの速度は a_0，t_1 秒後から t_2 秒後までの速度は a_1，t_2 秒後以降の速度は a_2 とする。ただし，3 つの速度の大きさについて，$|a_2|<|a_0|<|a_1|$とする。図 5-11 と図 5-12 は，A さんの動きとそのグラフをそれぞれ表す。

このとき，A さんの動きは，途中から加速，その次は減速というものになる。ここで，グラフ読解として重要なのは，グラフの変化率が動きの速度と一致するということが理解できているか否かである。そして，同時に，動きの速度が時間と長さという 2 量によって数量化される以前に 1 つの量（内包量）として存在しているという理解も重要である。

(2) 1つの対象の動きに往復運動が含まれていて，速度の大きさも向きも変化する場合

この往復運動という言葉には，ある運動方向に対してその逆の方向に移動する運動が含まれている。必ずしも，出発点から移動した対象が同じ出発点に戻ってくる運動のみをさすのではない。具体例をあげると，以下のような場合である。

T さんが O 地点から A 地点まで速度 a_0 で移動していたが，A 地点で落し物に気がついて少しの間，その場に立ち止まって動かなかったとする。また，落し物は O 地点と A 地点の間にある B 地点に置かれた状態であるとする。その後，T さんは来た道を B 地点ま

で速度 a_1 で引き返し，B 地点で落し物を発見し，直ちに A 地点をめざして速度 a_2 で進むとする。ただし，B 地点で落し物を拾う時間は考えないものとする。図 5-13 と図 5-14 は，T さんの動きとそのグラフをそれぞれ表す。

ここでのグラフ読解の中心は，速度の向きが変化することによってグラフの傾き具合も変化するということ，速度が 0 になったときにはグラフが x 軸に平行になるということになる。

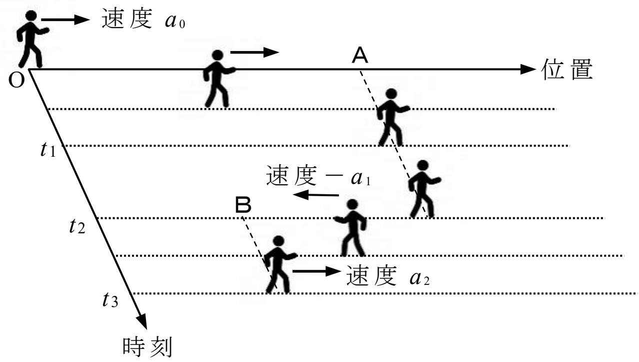


図 5-13

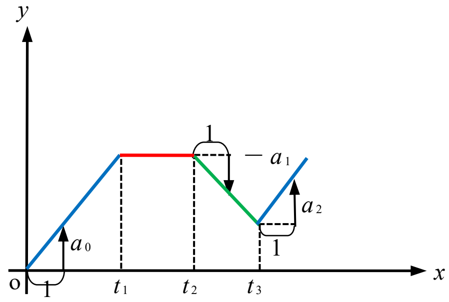


図 5-14　T の動きのグラフ

以上から，区分的一次関数の読解については，各区間の速度が一定であることに着目させる必要がある。なぜなら，この区間の幅を限りなく小さくしていくと 1 点となり，それは瞬間の速度としての理解が必要になってくるからである。

つまり，区分的一次関数の読解は，微分係数の意味としての瞬間速度の概念の形成の素地活動に相当する（森，2006，pp.43-44）。

5.5　第５章のまとめ

本章では，まず，一次関数のグラフを正比例関数のグラフと比較することにより，一次関数のグラフ読解では，事象の動きを時間軸上の 1 点である時刻と距離軸上の 1 点である位置から捉える必要があるということを明らかにした。

次に，事象の動きが一次関数のグラフで表される場合は，その動きの基準に関する情報の読み取りの理解，すなわち，「動きと基準性」に関する理解が重要である。

さらに，正比例関数のグラフを斉次一次関数のグラフとして読み取るということは，線分化された変量を点として捉える指導場面にも成り得る可能性をもっている。

最後に，区分的一次関数のグラフ読解については，高校数学で微分係数の意味を瞬間速度として捉えさせるためにも，各区間の速度が一定であることに着目させる必要がある。

以上から，事象の動きが一次関数 $y=ax+b$ のグラフで表される場合，その基準となる動きは正比例関数 $y=ax$ のグラフで表される。両者の動きはともに，時間軸上の 1 点である時刻と距離軸上の 1 点である位置から捉えさせる指導が必要である。ただし，この場合は $y=ax$ は斉次一次関数として捉えている。また，高校数学との関係では，事象の動きが区分的一次関数のグラフで表される場合については，動きの速度に注目させ，区間ごとに速度が一定になっていることや区間ごとの速度の推移にも気づかせていく指導が必要である。

第６章　解析幾何としてのグラフ読解

本章では，中学校の解析幾何のグラフに対する読解について述べる。ただし，高校の解析幾何に連携する視点から中学校の解析幾何を位置づけ，本研究では，その指導を中学校の解析幾何的視点を考慮した指導とよぶものとする。そのために，高校の解析幾何の内容を概観し，その指導のねらいを明確化したのち，中学校における解析幾何的視点を考慮した指導のねらいを定める。そして，中学校における解析幾何的視点を考慮した指導のねらいを実現するために，第 3 章の概括的理論をもとにした基本的な授業構想を考え，その構想をふまえた教授活動を指導の視点を明確化して記述する。

6.1 中高連携の視点

高校の解析幾何は数Ⅱの「図形と方程式」で中心的に取り扱われている。高校の 2009 年学習指導要領の解説書（文部科学省，2009）には,「図形と方程式」の指導目標について,「座標や式を用いて, 直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し，その有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。」（p.30）と述べられ, 学習の対象は,「平面図形とそれを表す方程式や不等式の関係」（文部科学省，2009，p.31）であると明記されている。

そして，具体的な指導項目は，直線と円及び軌跡と領域の 2 つある。直線と円では，解析幾何学の方法を学び，軌跡と領域では，条件を満たす点の集合として図形を捉える考え方を学ぶものとされている。表 6-1 は，各項目の具体的内容である。これは，S 社の教科書（山本，2012）を参考にして作成した。S 社の教科書（山本，2012）は，2012 年度に採択された数Ⅱの教科書のうちで，採択冊数が最も多い（渡辺，2012）。

表 6-1：高校の解析幾何の概要

<table>
<tr><td rowspan="3">直線と円</td><td rowspan="2">点と直線</td><td>点</td><td>直線上の点の座標，直線上及び平面上での 2 点間の距離，直線上及び平面上の線分の内分点・外分点の座標，三角形の重心の座標</td></tr>
<tr><td>直線</td><td>陽関数・陰関数の形での方程式，2 直線の平行条件や垂直条件，1 点と直線の距離</td></tr>
<tr><td>円</td><td colspan="2">円の方程式，三角形の外接円と外心，円と直線の共有点の座標とその個数，円の接線の方程式と接点の座標</td></tr>
<tr><td rowspan="2">軌跡と領域</td><td>軌跡</td><td colspan="2">点の軌跡としての直線（線分の垂直二等分線など）や円（アポロニウスの円）</td></tr>
<tr><td>領域</td><td colspan="2">直線や円を境界線とする平面上の領域と不等式，連立不等式の表す領域，領域と最大・最小，線形計画法</td></tr>
</table>

また，数Iの教科書をみれば（大矢・岡部他，2010，pp.115-121），鈍角の三角比は座標を用いて定義されており，解析幾何の学習は数Iでも行われている。熊倉（2006）は，解析幾何のよさとして，「自ら座標を設定することにより図形の問題が容易に解決できる」（p.363）ことにあると述べ，解析幾何の指導の重点として，①解析幾何による解法と初等幾何による解法を比較させること，②図形の性質が新たに発見できるような課題にとりくませること（p.364）をあげている。

以上より，本研究では，高校の解析幾何の指導のねらいは，「図形に座標を入れて，関数の式や方程式を用いて，図形の性質を生徒が探究できるようにすること」と考える。

一方，中学校における解析幾何の指導についての先行研究は，小高（1965）の「解析幾何学的手法による実験的指導」があるが，現行の数IIの「図形と方程式」や「三角関数」及び数IIIの「平面上の曲線」などの内容を含むものであり，現在の中学校の学習内容とはかけ離れている。また，小林（2009）は，中学校に解析幾何の内容を取り入れるべきであると述べているが，その具体的な内容にはふれていない。

本研究では，現行の中学校の関数学習において，「関数」と「解析幾何」の学習を区別する立場をとっているので,「解析幾何」の学習に「関数」の学習を活用する立場をとる。

そこで，中学校の解析幾何的視点を考慮した指導のねらいは，上記の高校の解析幾何の指導のねらいとの関連を考慮して,「座標平面上で点や線分を用いて図形をつくり，関数の式を用いて，その図形の性質を探究できることを生徒が知ること」と考える。

表 6-2 は，高校の解析幾何の指導と中学校の解析幾何的視点を考慮した指導について，それぞれのねらいをまとめたものである。

表 6-2：高校の解析幾何の指導のねらいと中学校の解析幾何的視点を考慮した指導のねらい

高校の解析幾何の指導のねらい	図形に座標を入れて，関数の式や方程式を用いて，図形の性質を生徒が探究できるようにすること
中学校の解析幾何的視点を考慮した指導のねらい	座標平面上で点や線分を用いて図形をつくり，関数の式を用いて，その図形の性質を探究できることを生徒が知ること

6.2 解析幾何的視点を考慮した指導の基本設計

本節では，まず，基本的な授業構想を述べ，その授業構想をもとにした指導の視点とその視点に対する教授活動から,解析幾何的視点を考慮した指導の基本設計を検討する。

6.2.1 基本的な授業構想

概念定義と概念イメージの理論および形的概念の理論からは，関数概念のイメージや形の面，すなわち図形（グラフ）であるが，その形の面とそれをコントロールすべき概念の面との融合が要請されている。

本研究では，図形（グラフ）をコントロールすべき概念の面は，方程式および不等式，それに関わる傾きや y 切片および変域と考える。

したがって，解析幾何的視点を考慮した指導では，この両者の面の融合が促進される学習場面が必要である。

さらに，アフォーダンス理論からは，図形（グラフ）に対する探索と発見の過程の重要性が示唆されている。そのため，本研究では，ICT を含めた視覚を利用して，図形（グラフ）の特徴や性質を顕在化する方法についても吟味する。

本研究の授業構成として必要な条件を以下にまとめる。

- 関数のイメージや形の面である図形（グラフ）をコントロールする概念の面は，方程式および不等式，それに関わる傾きや y 切片および変域であり，この両面の融合が促進される学習場面を設定すること
- 図形（グラフ） の特徴や性質を顕在化するために ICT を含めた視覚を利用する学習場面を設定すること

6.2.2 指導の視点と教授活動

本研究の指導の視点は，上記の基本的な授業構想で述べた授業構成上の必要条件をふまえ，①傾きの意味と数値化，②図の変容と y 切片の意味の顕在化，③ひげの左端と右端の比較から生まれる範囲の相等性の認識，④図形（グラフ） の特徴や性質の顕在化という 4 つの視点からなる。

また，本節で述べる教授活動は，これまでに筆者が関数グラフソフト GRAPES を使って実践してきた教授活動を再構成した仮想のものである。

生徒は関数および二元一次方程式のグラフについて既習とする。

ここでは，図 6-1 のようなねこの顔が記入されたプリントを配布して，生徒一人ひとりが GRAPES を操作できる ICT 環境を用意する。

(1) 傾きの意味と数値化

ねこの顔に関して生徒達に探究させたいことの一つ目は，①～③の 3 本の平行なひげを比較させたり，④～⑥の平行でないひげを比べさせたりすることである（図 6-1)。

まず，①～③の傾きが同じ理由を尋ねることから始める。これは，生徒達から，既習事項や方眼のマス目の助けから，「どれも 2 行って 1 上がる」といった意見を引き出したいからである。

次に，筆者は，「④のひげも 2 行って 1 上がるけれども，どのように違うか」と投げかける。これは，生徒達からは，①～③のひげと④のひげとは向きがちがうという考えを引き出したいからである。

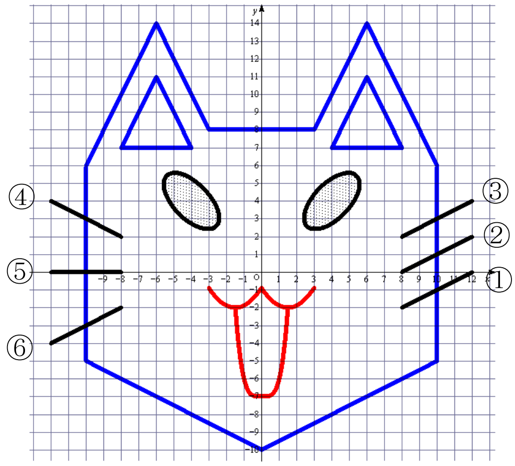


図 6-1

さらに，正負の差がねこのひげの向きとして具体化されていることを理解させるため，筆者は③と④の傾きを生徒にそれぞれ数値化させ，④の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり，③の傾きは $\frac{1}{2}$ であることを導く。

筆者はさらに，⑥，⑤，④のひげを生徒に観察するように促す。なぜなら，この比較を通して，$\frac{1}{2} \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{1}{2}$ のように，静的な傾きを動的に見る契機を生徒に与えたいからである。筆者は，この変化の様子を，さらに GRAPES の動的機能を使用して，動きの中で連続的に捉えさせる工夫を行う。

この工夫により，筆者は，生徒達に傾きの数値と，そのグラフ的（図的）側面を結びつけ，さらにはそれらを連続変形の元で意識させたいと考えたからである。さらに，筆者は生徒達に耳やあごの傾きを考察させることによって，傾きの数値の意味とグラフの面とをさらに融合的に把握されるように指導する。

ここでは，傾きの認識は図的な面から，特に幾つかの直線の傾きの比較から高めることを意図しており，その意識をさらに深めるために，ICT で動的に生徒に捉えさせる。筆者は，視覚的な面を比較と動きを通して強化することによって，概念的な面と図的な面の融合を意図した指導を行う。

(2) 図の変容と y 切片の意味の顕在化

ねこの顔に関して生徒達に探究させたいことの二つ目は，生徒が図に書きこみを行うことで得られる情報から，式の構成が可能であることを理解させることである。筆者は生徒に②のひげの式を尋ねる。②のひげの y 切片は，②のひげの左端の座標の y 座標ないし x 座標の値であると考える生徒がいると考えられるからである。$y = \frac{1}{2}x$ や $y = \frac{1}{2}x + 8$ の考えが出てきた場合は，筆者は，生徒が答えた式を GRAPES に入力する。これは，

②のひげと離れた位置に直線が描かれることを見せて，式の誤りを導きたいからである（図 6-2)。

さらに，筆者は，直線 $y=\frac{1}{2}x$ や直線 $y=\frac{1}{2}x+8$ の y 切片を生徒に図 6-2 から読み取らせる。つまり，生徒に，y 切片のグラフ的（図的）な意味を認識させるのである。

ここで，再度，筆者は，図 6-2 から②のひげの y 切片を読み取らせるために指示を出す。それは，生徒に②のひげを図のようにのばさせ，y 切片の値をが－4 であることを読み取らせたいからである。

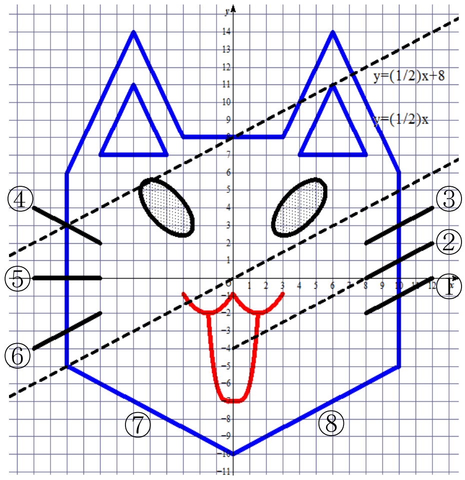


図 6-2

さらに，筆者は，生徒の理解を確認するため，②以外のひげの切片も読み取るように促す（図 6-3)。

次に，筆者は，①，②のひげを③のひげに重ねる方法を生徒に尋ねる。それは，それぞれ上へ 2，上へ 4 だけ平行に移動すればよいということを考えさせたいからである（図 6-3)。ここでも，筆者は，y 切片の数値の連続性と意味が顕在化させる意図をもって GRAPES の動的機能を使用して，動きの中で捉えさせる工夫を行う。

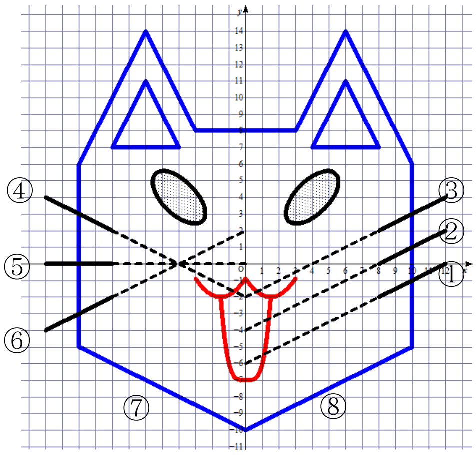


図 6-3

(3) ひげの左端と右端の比較から生まれる範囲の相等性の認識

ねこの顔に関して生徒達に探究させたいことの三つ目は，生徒達に①～③および④～⑥の左端と右端の比較をさせる活動を通じて，それぞれの範囲の等しさを意識させることである（図 6-4)。

筆者は，生徒に①～③のひげに共通していることを尋ねる。まず，生徒に左端と右端がそろっていることに気づかせたいからである。次に，筆者は，左端の x 座標は 8 であり，右端の x 座標は 12 であるといった考えを出させたいので，数値を使って答えるように促す。さらに，どの範囲に 3 つのひげがあると説明できるのかと生徒に尋ねる。それは，x 座標が 8 から 12 までの間にあるといった考えを導きたいからである。そして，筆者は，これを不等式（$8 \leqq x \leqq 12$）で表現する方法について質問する。

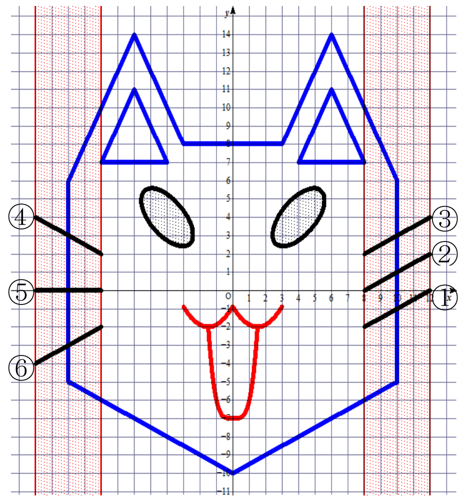


図 6-4

次に，筆者は，生徒に④～⑥のひげを比較させ，先ほどと同様にして，x の範囲を考えさせる。ただし，ここでは，①～③の場合と正負が逆になっていることにも注意を向けさせるため，不等式（$8 \leqq x \leqq 12$）と不等式（$-12 \leqq x \leqq -8$）との相違を尋ねる。

このとき，グラフの定義域を意識させるために，①～③のひげおよび④～⑥のひげの x の範囲を GRAPES で顕在化させる工夫を行う（図 6-4）。

(4)　図形（グラフ）の特徴や性質の顕在化

最後に，生徒に探究させたいことは，ねこの顔の図形としての特徴や性質を顕在化して，概念的な面との融合を図ることである。

ねこの顔は，①・②と⑤・⑥のひげの部分を除いて，y 軸に関して対称になっている。図の対称性を利用して，$y = ax + b$（$\alpha \leqq x \leqq \beta$）の式の構成の理解の促進を図りたい。

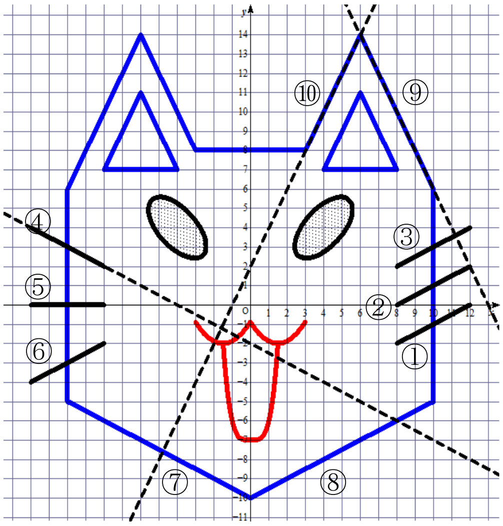


図 6-5

例えば，図 6-5 の⑦のあごの線分と⑧のあごの線分は，y 軸に関して対称であるが，それぞれ線分を表す式について，共通点と相違点を生徒に尋ねる発問が考えられる。

これは，「切片が－10 で同じだが，傾きは⑦は$-\frac{1}{2}$で，⑧は $\frac{1}{2}$ で正負が逆になっている。x の範囲についても，⑦は$-10 \leqq x \leqq 0$ で，⑧は $0 \leqq x \leqq 10$ で正負が逆になっている」といった考えを答えさせたいからである。

また，②のひげの線分と⑤のひげの線分を y 軸に関して対称にするには，傾きや切片の値および x の変域をどうすればよいかを尋ねる。これは，「②の傾きを 0 にして，切片も 0 に変えればよい。ただし，②の線分の x の変域は変えなくてもよい」といった考えを答えさせたいからである。

さらに，互いに垂直な線分を見つけさせ，垂直な線分どうしの傾きの値を比較させる活動も考えられる。

例えば，ひげの線分②と耳の部分の線分⑨，ひげの線分④と耳の線分⑩はそれぞれ垂直に交わる。

これは，「②と⑨の傾きは，それぞれ 2 と $-\frac{1}{2}$，④と⑩の傾きは－2 と $\frac{1}{2}$ だから，それぞれの値の積は－1 になる」といった考えを答えさせたいからである。

6.3　第 6 章のまとめ

本章では，高校の解析幾何の内容を概観し，その指導のねらいを明確化したのち，中高連携の視点から，中学校における解析幾何的視点を考慮した指導のねらいを定めた。この指導のねらいをもつ授業構想を第 3 章の概括的理論に基づいて作成し，指導の視点を明確化しつつ，具体的な教授活動を明らかにした。この教授活動で得られた知見をまとめると，以下のようになる。

・高校の解析幾何の学習のねらいが，図形に座標を入れて，関数の式や方程式を用いて，図形の性質を生徒が探究できるようにすることと考えれば，中高連携の視点から，中学校における解析幾何的視点を考慮した指導のねらいは，座標平面上で点や線分を用いて図形をつくり，関数の式を用いて，その図形の性質を探究できることを生徒が知ることであると考えられる。

・イメージや形と概念との融合の観点からは，ねこの絵には比較して見ることのできる図形が数多く埋め込まれていると考えられる。この比較する活動を通じて，線分や直線という形の面とその概念の面である，方程式および不等式，それに関わる傾きや y 切片の理解および変域の理解を促し，両者の融合を意図した教授活動を構成することが示唆される。

・図形（グラフ）の特徴や性質の顕在化の観点からは，図形間の対称性，図形間の平行や垂直の関係がねこの顔からアフォードされる可能性が示唆される。そして，図形間の対称性や平行や垂直の関係が，傾きや y 切片および定義域とどのように結びついているのかを学習させうることも示唆される。

・ICT を含めた視覚的表現を利用した授業環境のもとでは，ただ単に視覚的表現を提示するだけでは，生徒にとって意味ある行為や認識には結びつかない。視覚的表現を用いた授業設計では，グラフ表現の場面設定のなかに，比較の活動が起きるような発問や教材提示の工夫が必要であると考えられる。

第７章　本研究の総括と今後の課題

7.1　本研究の総括

本研究の目的は，中学校の関数指導における関数的読解と解析幾何的読解の混在を，菊池（1960a）や遠山他（1961）などの研究の視点から解きほぐし，関数的読解と解析幾何的読解の相違を明確化し，関数のグラフと解析幾何のグラフのそれぞれに対する生徒の適切な読解力の育成をめざす指導の基本設計を探究することであった。本研究では，生徒のグラフ読解力とは，関数のグラフから変量を読み取って事象の動きと結びつけて考えることのできる能力であるとともに，解析幾何のグラフから数式を読み取って図形の空間的性質（かたち，位置，大きさ）と結びつけて考えることのできる能力と考えている。

第 1 章では，先行研究を概観し，中学校数学の関数分野のグラフ読解に関する課題を 3 つの面から整理した。

1 つ目は研究上の課題であり，中学校の関数の学習内容には，2 元 1 次方程式のグラフのように，事象ではなく図形を対象にした課題など，本来は解析幾何の内容にあたるものが含まれており，関数的読解と解析幾何的読解との混同の整理と区別に向けた研究の必要性である。

2 つ目は指導上の課題であり，①生徒が具体的な事象の中から変量を取り出し，事象とグラフを量の視点から結びつけて理解するための指導プロセスが解明されていないこと，②事象の動きをグラフから読みとる際に，正比例関数と一次関数の違いが指導されていないことである。3 つ目は理論上の課題であり，負の数の導入に伴う量の大きさの表現や認識の点からは，量の概念の拡張という理論的視点が要請されていることである。

第 2 章では，関数分野のグラフ読解に関して，関数的読解と解析幾何的読解の違いを明確化し，関数分野のグラフ読解に関する先行研究を概観して，研究課題の整理を行い，次の課題が明らかになった。

関数的読解とは，事象のなかの 2 変量の組がグラフ上の 1 点の位置を決定していることを読みとることである。一方，解析幾何的読解とは，平面上や空間上に定められた軸からの距離がグラフ上の 1 点の位置を決定していることを読みとることである。

関数分野のグラフ読解に関する先行研究には，①関数分野のグラフの関数的側面と解析幾何的側面を区別した指導的立場をとる研究，②事象のグラフ化におけるミスコンセプションに関する研究，③関数のグラフ表現への表現プロセスに関する研究があり，③については，教具から直接的に取りだされた変量を対象にする研究とコンピュータを通して間接的に取りだされた変量を対象にする研究の 2 種類がある。

関数分野のグラフの関数的側面と解析幾何的側面を区別した指導的立場をとる研究から

は，それぞれの側面からの課題が明らかになった。関数的側面からの課題は，事象から2量をとりだすプロセスと，取りだされた2量をどのように対応させるのか，そして，変量を線分や矢線で表現することの意味は何なのかが明確にされていないことである。また，解析幾何的側面からの課題は，中学校数学の「2元1次方程式とグラフ」の単元と高校数学の「図形と方程式」の単元との接続が考慮されていないことである。

次に，事象のグラフ化におけるミスコンセプションに関する研究からは，時間の変化に伴った位置や距離などの変量の認識を高めることが必要であること，そして，事象から変量が取り出されるプロセスも明確化することが示唆された。

さらに，関数のグラフ表現への表現プロセスに関する研究からは，本研究への示唆として，教具の動きやICTで支援された動点の動きから，変量としての認識を高めて表やグラフへと結びつけていく指導プロセスの必要性であった。

第3章では，生徒が関数のグラフから変量を読み取って事象の動きと結びつけて考えることができたり，解析幾何のグラフから数式を読み取って図形の空間的性質（かたち，位置，大きさ）と結びつけて考えることのできたりするようになるための指導の基本設計を教師が考えるための視点として，関数分野のグラフ読解を捉えるための理論を吟味し，以下のことが明らかになった。

・概念定義と概念イメージの理論からは，関数のグラフ読解の指導過程の中に，関数概念のイメージによって関数の定義を構成させたり，関数の定義を使いながら関数概念のイメージを操作させたりすることが必要である。本研究では，関数概念の基盤となる概念は測定対象（未測量）の一意対応であると考えており，事象のなかの測定対象（未測量）である2変量x，yのxからyへの一意対応とその対応のイメージを形成するような指導プロセスが重要であると考える。
・形的概念の理論からは，解析幾何のグラフ読解においては，かたちの面であるグラフと概念の面である数式とが融合するような指導プロセスが必要であると考える。
・アフォーダンスの理論からは，関数のグラフ読解の場合は，変量の意味や変量の変化がアフォードされたり，解析幾何のグラフ読解の場合は，平面や空間の部分集合である対象のかたちやその特徴がアフォードされたりするような指導プロセスが必要であると考える。
・関数のグラフ読解の対象となる変量は，量の大きさを負でない実数で表すユークリッド式量から，量の大きさと向きを実数で表す有向量に拡張される必要がある。また，変量の意味を顕在化させるためには，測定対象である数値化される前の変量，すなわち未測量の変量が重要である。さらに，変量の表現に関しては，ユークリッド式量を対象とする場合は線分として，また，有向量を対象とする場合は矢線として視覚化さ

れる。一方，量を１次元線型空間と捉えると，例えば，時間に対する時刻や距離に対する位置も，大きさのない量として捉えていくことが可能となり，点も量の表現の一つとなる。このような変量の視覚化は，速さや速度などの変化率をグラフから読みとらせたり，変化の様子を読みとらせたりする際の生徒への支援となりうる。

第４章では，関数のグラフ読解の前提として，生徒の認識の中に，事象の中の変量がグラフを形成しているという認識を高めることが不可欠であること，そのためには，事象から取り出される変量の意味を把握させるために，測定対象である数値化される前の変量を線分として捉えさせ，グラフをつくる段階が必要であることを明らかにした。

第５章では，まず，事象の動きが一次関数のグラフで表される読解と正比例関数のグラフで表される読解の違いを明らかにした。それは，事象の動きが一次関数のグラフで表される場合は,その動きに対する基準となるものが正比例関数で表されることである。したがって，事象の動きが一次関数のグラフで表される場合，基準に関する情報（初期値または基準量）の読み取りが必要となる。この読み取りとは，例えば，時刻の差として時間を捉えるように，量とその量の大きさを決める序数的な役割をもつ位置との関係についても考慮して変量を読み取ることである。そして，この場合に，位置は大きさのない点として表現される対象であるが，変量の大きさを決める役割を担う対象であることに注意すべきである。また，このことは，正比例関数のグラフを斉次一次関数のグラフとして読みとる場合にも，同様に顕在化する。さらに，区分的一次関数のグラフ読解については，各区間の速度が一定であることの意味を顕在化させ，それぞれの動きの速度の変化の読み取りにつながるものと考えられる。

第６章では，高校の解析幾何の指導のねらいから，中学校における解析幾何的視点を考慮した指導のねらいを検討し，そのねらいを「座標平面上で点や線分を用いて図形をつくり，関数を用いて，その図形の性質を探究できることを生徒が知ることである」と定めた。また, ICT を利用して描かれたねこの顔の絵にある線分や直線を比較させたり，動的に見させたりしつつ，方程式および不等式，それに関わる傾きや y 切片を読みとらせる教授活動は，グラフを解析幾何的に読解する力を育成する可能性をもつと考える。

以上より，グラフを関数的に読解する力の育成をめざす指導の基本設計とグラフを解析幾何的に読解する力の育成をめざす指導の基本設計についてまとめる。

(1) グラフを関数的に読解する力の育成をめざすための指導の基本設計として，

①関数のグラフは，事象の中の変量によって構成されているという認識を生徒にもたせるために，測定対象である数値化される前の変量を線分として捉えさせ，関数のグラフをつくる教授活動を行うこと。

②事象の動きが一次関数のグラフで表される場合は,その動きの基準に関する情報（初

期値または基準量）を読みとらせたり，基準となる動きが正比例関数で表されていることを読みとらせたりすること。

③そして，さらに，例えば，時刻の差として時間を捉えるように，量とその量の大きさを決める序数的な役割をもつ位置との関係についても考慮して変量を読みとらせること。

(2) グラフを解析幾何的に読解する力の育成をめざすための指導の基本設計として，

①解析幾何のグラフとして構成された図形に対して，その図形を構成する線分や直線に比較対象を設けること。

②ICT 環境を利用して対象となる図形を提示し，その図形を構成する線分や直線を比較させたり，動的に見させたりしつつ，その図形の概念の面である方程式および不等式，それに関わる傾きや y 切片を読みとらせる教授活動を行うこと。

7.2　今後の課題

本研究は，関数分野のグラフの関数的側面と解析幾何的側面を区別した指導的立場の研究に位置づけられるものであり，関数分野のグラフに対する関数的読解と解析幾何的読解を区別して指導し,それぞれの読解に対する能力を育成することを目的にしてきた。本研究は，それぞれの読解に対する能力を育成する可能性を保持していると考えるが，今後の課題について，研究上の課題，指導上の課題，理論上の課題の 3 点にわけてそれぞれ述べる。

(1)　研究上の課題として，

①関数分野のグラフに対する関数的読解と解析幾何的読解を区別して指導することにより，生徒のグラフに対する認識がどのように形成されるのか，その形成過程に関する研究が必要である。

②そして，関数分野のグラフに対する関数的な見方や考え方並びに解析幾何的な見方や考え方が確立されたうえで，両者の融合的な理解に向けた研究が必要である。

(2)　指導上の課題として

①量の大きさが負でない実数で表されるユークリッド式量に対する量化のプロセスは提示したが，量の大きさと向きも含めて実数で表される有向量に対する量化のプロセスは解明されていない。

②関数の種類，特に正比例関数と一次関数の違いと，負の数の導入に伴う量の認識の点からは，動きに伴う変量（Δy）とグラフの y 軸から読み取られるものが異なることを指導する必要性は示したが，実際の指導過程は示されていない。

(3)　理論上の課題

①負の数の導入に伴う量の認識の点からは，有向量の導入により量の概念を拡張することは可能であったが，時刻の差として時間を捉えるように，量とその量の大きさを決める序数的な役割をもつ位置をどのような概念として捉えればよいのかという理論的視点が必要である。

【引用・参考文献】

安藤洋美他（1968）.『量数概論：シリーズ数学教育現代化の構造 4』. 森毅・市川徹（編）. 明治図書.

安藤洋美他（1970）.『関数指導現代化入門 (2) 微積分入門』. 山口昌哉・湯谷一（編）. 明治図書.

Clement，J.（1989）．The concept of variation and mis-conceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*，11(2)，77-87.

Dyke, F. V.（1994）. Relating to graphs in introductory algebra．*Mathematics Teacher*，87(6)，427-432，438-439.

遠藤国雄（1972）.「関数指導の一考察」. 日本数学教育学会誌，54(7)，128-134.

Fischbein，E.（1993）．The theory of figural concepts．*Educational Studies in Mathematics*，24，139-162.

藤井斉亮，飯高茂（2010）.『新しい算数 5 上』. 東京書籍.

藤井斉亮，俣野博ら（2012）.『新しい数学 1』. 東京書籍.

藤井斉亮他（2016）.『新編　新しい数学 1』. 東京書籍.

藤島一満（1990）.「『速さ』の概念指導」. 物理教育，38(1)，13-16.

Gibson，J．J.（1985）.『生態学的視覚論：ヒトの知覚世界を探る』. 古崎敬，古崎愛子，辻敬一郎，村瀬旻（監訳）. サイエンス社.

銀林浩（1957）.『量の世界：構造主義的分析』. むぎ房.

銀林浩(1978).「量の問題をめぐって:発生的立場からも考えよう」. 数学セミナー, 1978. 2，27-31.

Greeno，J．G.（1991）．A view of mathematical problem solving in school．In Smith，M. U.（Ed.），*Toward a Unified Theory of Problem Solving: Views from the Content Domains*（pp.69-98）．Hillsdale，New Jersey: Lawrence Erlbaum，Associates，Inc.

原康夫（2007）.『数学といっしょに学ぶ力学』. 学術図書出版社.

林弘（2001）.「一次関数における学習過程に関する考察 ：事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して」. 上越数学教育研究，16，81-90.

土方宗広(2008).「グラフをよみとる力は, グラフをかく活動から生まれる」. 数学教育，608，79-83.

日野圭子（2013）.「中学校入学初期における生徒の比例的推論の多様性：筆記調査の結果と示唆」. 宇都宮大学教育学部紀要　第 63 号　第 1 部，117-129.

日野圭子（2014）.「小中移行期の生徒による比例の問題場面の表現の特徴：個別インタビューにおける共通問題への応答の比較」. 宇都宮大学教育学紀要，第 64 号　第 1

部，95-110.

日野圭子（2016）.「比例の授業における数学的談話の構成：GeoGebra を通して教師が語ったこと」. 宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第 2 号，145-154.

一松信他（2012）.『中学校数学１』. 学校図書.

礒田正美，志木廣，山中和人（1990）.「関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究」. 日本数学教育学会誌 数学教育，72(1)，48-63.

金児正史（2011）.「関数の定義域と値域をとらえる教具を用いた学習指導：高等学校の実態とその改善を通して」. 日本数学教育学会誌，93(3)，11-18.

川嵜道弘（2003）.「測定」. 中原忠男（編），『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』（p. 194）. 明治図書.

風間喜美江他（2012）.『中学校数学科　関数指導を極める』. 東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会（編著）. 明治図書.

菊池乙夫（1960*a*）.「関数教材の新編成」.　数学教室，No.66，42-45.

菊池乙夫（1960b）.「中学校　函数をめぐる諸問題」.　数学教室，No.67，117-135.

菊池乙夫（1961*a*）.「関数指導現代化への指向（1）」. 数学教室，No.87，87-96.

菊池乙夫（1961b）.「関数指導現代化への指向（2）」. 数学教室，No.88，94-103.

菊池乙夫（1961c）.「関数指導現代化への指向（3）. 数学教室，No.90，80-89.

菊池乙夫（1962）.「関数指導現代化への指向（最終回）」. 数学教室，No.91，88-98.

北村太一郎，栗田一良（1983）.「中学生・高校生のグラフ化に関する調査（その 1）：正比例のグラフについて」. 日本理科教育学会研究紀要，24(2)，55-65.

小林文美子（2009）.「関数の教育内容について：関数のグラフと方程式の関連」. 第 42 回数学教育論文発表会論文集，909-910.

小林貞一（1977）.『集合と位相』. 培風館.

小島順（1976）.『線形代数』. 日本放送出版協会.

小島順（1977）.「量の計算と線形代数」.　数学セミナー1977 年 7 月号，18-22.

小島順（1977）.「量の計算を見直す 2：量の線型空間とその双対」. 数学セミナー1977 年 9 月号，53-58.

小島順（1980）.「量の数学について」. 齋藤正彦，廣瀬健，森毅（編），数学セミナー増刊，シンポジウム数学１，数学と教育（pp.137-152）. 日本評論社.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2013）.「平成 25 年度　全国学力・学習状況調査　報告書」. http://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/data/13-j-math.html. 最終閲覧日 2017 年 1 月 15 日.

久保拓也，岡崎正和（2013）.「小中接続期における関数概念の発達の様相に関する研究」.

全国数学教育学会誌，数学教育学研究 19(2)，175-183.
久保良宏(2000).「現実的な事象と関数のグラフにおける理解の発達に関する調査研究」. 第 33 回数学教育論文発表会，313-318.
熊倉啓之（2003).「学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究」. 日本数学教育学会誌，85(11)，40-49.
熊倉啓之（2005).「学ぶ意義を実感させる図形と方程式の指導に関する研究：中学と高校の接続を重視して」. 第 38 回数学教育論文発表会論文集，361-366.
熊倉啓之(2006).「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究(第 2 次)：図形と方程式の指導に焦点を当てて)」. 静岡大学教育学部研究報告　教科教育学篇，37，49-64.
黒田孝郎（1955).『新初等数学講座 第 3 巻　幾何II，3　式とグラフ』. 小山書店.
松田文子（2002).『関係概念の発達：時間，距離，速さ概念の獲得過程と算数「速さ」の授業改善』. 北大路書房.
松坂和夫（1968).『集合・位相入門』. 岩波書店.
宮川建（1998).「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察：事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて」. 日本数学教育学会誌，80(1), 9-14.
宮本敏雄（1971).『関数の意義. 関数・空間：数学教育現代化の基礎 3』. 遠山啓，銀林浩（編）(pp. 8-29). 国土社.
文部科学省（2008).『中学校学習指導要領解説　数学編』. 教育出版.
文部科学省(2009).「高等学校学習指導要領解説 数学編」. http://www.mext.go.jp/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf. 最終閲覧日 2017 年 2 月 11 日.
文部科学省(2017).「中学校学習指導要領解説　数学編」. www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1387016.htm. 最終閲覧日 2018 年 8 月 17 日.
森毅（1981).『基礎数学選書 15 現代数学と数学教育』. 裳華房.
森毅（2006).『解析の流れ』. 日本評論社.
村上陽一郎（1986).『時間の科学』. 岩波書店.
室山麻実（2010).「数学学習における関数感覚について」. 数学教育論文発表会論文集，43(2)，633-638.
長妻克亘（1966).「関数で何を教えるか」. 遠山啓（編),『関数の指導：中学校編』(pp. 17-28). 明治図書.
中原克己(1964).「関数：量から微積分へ」. 森毅（編),『量の授業：中学校数学編』(pp.

76-124）．明治図書．
中島健三（2015）．『算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察 復刻版』．東洋館出版社．
中西正治（1995）．『正比例関数を中心に据えた関数教育の理論と実践』．大阪教育大学大学院教育学研究科修士論文（未公刊）．
中西正治（2003）．『教科書分析を中心とした関数教育史の研究 ：明治 35 年から昭和 10 年までを対象にして』．広島大学大学院教育学研究科学位論文（未公刊）．
中西正治他（2009）．『正比例関数：近数協中学校教科書シリーズ⑫』．近畿地区数学教育協議会　中学校部会．
中西正治（2014）．「中学校数学における関数と解析幾何に関する省察」． 第 56 回近畿数学教育学会例会発表資料（第 40 回全国数学教育学会研究発表会資料）．
中西正治（2015）．「中学校数学における関数と解析幾何に関する省察」．近畿数学教育学会誌，28，41-49．
日本数学会（2007）．『岩波数学辞典第 4 版』． 岩波書店．
西村徳寿（2014）．「中学校における解析幾何的視点を考慮した指導に関する研究：中高連携を視野に入れて」．全国数学教育学会誌，数学教育学研究，20(2)，209-217．
西村徳寿（2015）．「中学校における関数のグラフ読解に関する研究：変量の線分化の視点から」．日本数学教育学会誌，97，数学教育学論究（臨時増刊），153-160．
西村徳寿，岡崎正和（2017）．「量の視点を意識した中学校の関数グラフの読解に関する研究」．全国数学教育学会，第 45 回研究発表会　発表資料．
小高俊夫（1965）．「解析幾何学的手法による実験的指導」．日本数学教育学会誌，47(3)，42-47．
大滝浩之（2009）．「生徒が活動を創る活動を促す場の設定に関する研究：一次関数の単元構成を通して」．上越数学教育，24，53-64．
大矢雅則・岡部恒治他（2010）．『改訂版　新編　数学I』．数研出版．
岡部恒治他（2012）．『中学校数学 1』．数研出版．
岡本和夫他（2012）．『未来へひろがる数学 3』． 新興出版社啓林館．
岡本光功（1981）．『算数学入門』．学教育協議会．
岡本光功（1983）．「算数の世界」．数学セミナー1983 年 4 月号，35-39．
岡本光功（1983）．「量の教育をまさぐる」．近畿地区数学教育協議会編，『量の教育をめぐって：「割合の周辺」（pp.24-50）．
岡本光功（1985）．「正比例関数について：初等中等数学への一つの接近」．三重大学教育学部研究紀要 自然科学 (36)，1-7．

小野田愛，岡崎正和（2014）.「記号論的視座からの関数の学習過程に関する研究」. 数学教育学研究，20(2)， 197-207.

Pea，R. D.（2004）.「教育のための分散知能とデザイン」. ガブリエル・ソロモン編，松田文子（監訳），『分散認知：心理学的考察と教育実践上の意義』（pp.69-117）. 協同出版.

Saldanha，L.，& Thompson，P. W.（1998）. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe（Eds.），*Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*（Vol. 1，pp.298-304）. Raleigh，NC: North Carolina State University.

佐々木正人（1994）.『アフォーダンス：新しい認知の理論』. 岩波書店.

佐々木徹郎（2003）.「中学校数学における関数領域の研究成果のまとめと課題」. 第 36 回数学教育論文発表会論文集，160-165.

佐藤健三（1983）.「時間」. 銀林浩（監修），『わかる算数指導法辞典』（p.271）. 明治図書.

澤田利夫他（2012）.『中学数学 1』. 教育出版.

関沢正躬（1983）.「外延量」. 銀林浩（監修），『わかる算数指導法辞典』（p.246）. 明治図書.

重松敬一他（2012）.『中学数学 1』. 日本文教出版.

重松敬一他（2016）.『中学数学 1』. 日本文教出版.

島田茂（1972）.「第 1 章　関数指導. 中村幸四郎他（日本数学教育学会編）」，『関数とその指導』（pp. 49-56）. 明治図書.

清水宏幸（2001）.「体験を通して数学の概念を深める指導 ：関数のグラフを点の集合ととらえる指導」. 日本数学教育学会誌，83(1)，2-8.

新海寛（1980）.「中学校で考えたこと[3]:ベテラン教師の問題」. 数学教室　No.332，84-88.

新海寛（1981*a*）.「中学校におけるグラフ指導について-1-解析幾何の教材をどうするか」信州大学教育学部紀要，44，87-96.

新海寛（1981*b*）.「中学校におけるグラフ指導について-2-解析幾何の教材をどうするか」信州大学教育学部紀要，45，137-145.

相馬一彦（2012）.『数学の世界 1 年』. 大日本図書.

高田誠二（1988）.『科学方法論序説：自然への問いかけ働きかけ』. 朝倉書店.

高橋薫（2002）.「事象から形式的な表現への課程を重視した一次関数の授業」. 上越数学教育研究，17，91-102.

高橋薫（2003）.「事象から表現への過程を重視した指導における一次関数の学習の実際とその考察」. 日本数学教育学会誌，85(9)，10-17.

高橋利衛（1979）.『図説基礎工学対話』. 現代数学社.

高畑実（1966）.「グラフ指導」. 遠山啓（編），『関数の指導：中学校編』，84-97. 明治図書.

竹内啓（1978*a*）.「量概念の意味と役割：広義の応用数学の立場から (2)：量の意味と条件」. 数学セミナー1978 年 9 月号，61-65.

竹内啓（1978b）.「量概念の意味と役割：広義の応用数学の立場から(4)：量の基本モデルとしての長さ」. 数学セミナー1978 年 11 月号，79-83.

Tall，D．&Vinner，S．（1989）．Images and definitions for the concept of function．*Journal for Research in Mathematics Education*，20(4)，356-366.

田村二郎（1978）.『量と数の理論』. 日本評論社.

Thompson，P．W．，& Carlson，M．P．（2017）．Variation，covariation，and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai（Ed.），*Compendium for research in mathematics education*（pp. 421-456）．Reston，VA: National Council of Teachers of Mathematics.

東京都教育研究員中学校関数研究グループ（1974）.「関数の基礎的な認識とその指導過程（その１）」. 日本数学教育学会誌，56(7)，126-132.

東京都教育研究員関数研究グループ（1976）.「一次関数の指導における導入部分の取り扱いについての一つの試み」. 日本数学教育学会誌，58(9)，162-168.

友田勝久(2003).『シグマベスト　関数グラフソフト　GRAPES パーフェクトガイド　改訂新版』. 文栄堂

遠山啓他（1964）.『中学校　数学 2』. 日本文教出版.

遠山啓他（1965）.『中学校数学：教師用指導書』. 日本文教出版.

遠山啓（1969）.『数学教育ノート』. 国土社.

土田理(1998).「中学校生徒のグラフスキル調査への CBL 利用」. 日本科学教育学会　年会論文集，22，377-378.

土田理（2001）.「歩いてグラフを描く活動を通してみられる生徒の時間認識についての手がかり」. 日本科学教育学会　年会論文集，25，441-444.

上田貴之(2009).「関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年『一次関数』の単元における影響についての一考察」. 上越数学教育研究，24，41-52.

Vinner，S．（1981）．Concept definition，concept image and the notion of function．*International Journal of Mathematics Education and Science Technology*，14(3)，293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advaced Mathematical Thinking*. 65-81. Kluwer Academic Pub.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

渡辺敦司（2012).「高校教科書の採択状況・中」. 斎藤剛史他，内外教育編集部（編),『データで読む教育　2011～2012 調査・統計解説集』(pp.39-46). 時事通信社.

渡邊健（2007).「現象を定量的にとらえるためのグラフ作成・活用能力の育成：『2 変量着目スキル』･『グラフ作成 10 のスキルズ』の習得を通して」. 福島県教育センター長期研究員個人研究報告書. http://www.center.fks.ed.jp/. 最終閲覧日 2015 年 2 月 17 日.

山田正直（1971).「中学校における関数の実践」. 遠山啓，銀林浩（編),『関数・空間：数学教育現代化の基礎 3』(pp. 32-50). 明治図書.

山本慎他（2012).『最新　数学II』. 数研出版.

保田小学校（1962).『量をどう教えたか』. 明治図書.

【謝辞】

本論文をまとめるにあたり，終始暖かい激励とご指導，ご鞭撻を頂いた岡山大学教育学研究科教授の岡崎正和先生に心より感謝申し上げます。岡崎正和先生には，筆者の研究の主指導教員として，兵庫教育大学大学院連合学校教育研究科の研究生，院生として通算 6 年間, さらに本研究科満期退学後も院生時代と変わらぬご指導を賜りましたこと，感謝の念に堪えません。岡崎先生からは，国内にとどまらず海外の著名な数学教育の研究論文を数多くご紹介いただいたり，また，数学教育に関する研究方法や研究理論をわかりやすくご説明いただいたりする機会を得ました。そのような貴重な機会を通して，数学教育研究の道に筆者を招き入れてくださった結果，予てより願っておりました研究者への道が自ずと開かれ，現在の職を得ることができたように思われます。研究を続けていく職を得ることはできたとはいえ，まだまだ未熟で経験も少ない身ですので，今後ともご指導，ご助言をいただくことができますれば幸いです。どうぞよろしくお願いいたします。

また，筆者の研究の副指導教員として，鳴門教育大学大学院学校教育研究科教授の秋田美代先生，兵庫教育大学学校教育研究科（研究院）教授の濱中裕明先生の御二人にも研究指導をしていただき，的確な助言を頂けたことに厚く感謝を申し上げます。御二人の先生からは，筆者の研究に不足している視点を指摘していただき，筆者の研究の改善方向を見いだす端緒を与えていただいたように思われます。今後，筆者が学会等で先生方とご一緒になる機会を得ました時には，厚かましいお願いと思われますが，ご助言をいただけますようにお願いいたします。

さて，元・岡山大学教育学研究科教授で，現・早稲田大学グローバルエデュケーションセンター教授の曽布川拓也先生にも，筆者が兵庫教育大学大学院連合学校教育研究科在学中にお世話になりました。曽布川先生には，数学と数学教育の関係の捉え方をはじめとして，筆者が苦手とする数学教育に関する英語論文の読み方も含めてご指導をいただき，筆者の研究の枠を広げていただいたように思います。厚くお礼を申し上げます。

さらに，元・大阪教育大学大学院教育学研究科教授の藤井正俊先生には，筆者の修士課程の院生時代や修了後も色々とお世話になり，ご専門の数学の奥深さだけでなく，人生の歩み方も含めて，何事も探究し続けることの大切さを教えていただいたように思います。未だ探究の途上ですので，迷うことも多々あると思われます。今後ともご指導をよろしくお願いいたします。

そして，三重大学教育学部・教育学研究科教授の中西正治先生にも，数多くの助言をしていただき，厚く御礼を申し上げます。中西先生からは，児童・生徒のグラフに対する認識にかかわる課題について助言をいただき，また，数学教育の理論と実践が往還す

る研究の基本設計はどうあるべきかを教えていただいたように思われます。そのおかげをもちまして，紆余曲折はありましたが，本研究を一つの形にすることができました。ありがとうございました。

以上の先生方以外にも，本研究を進めるために，調査研究にご協力をしてくださった中学校現場の諸先生方や生徒の皆さんにも感謝を申し上げます。

最後に，筆者が本論文を纏めるために様々なご配慮やご助言をいただいた，現在の職場の同僚の先生方や職員の皆様，そして，筆者の健康を気遣いつつ，精神的に支えていただいた家族の皆様にも感謝を申し上げます。

本研究の成果を今後の研究生活の糧とし，本研究の残された多くの課題にとりくむ決意をあらたにして，今後も精進をしていきたいと思います。

2018 年 11 月

京都橘大学　発達教育学部児童教育学科

西村　徳寿