論証指導における
操作的証明の機能に関する研究

～中学校数学科における学習環境デザインを通して～

2014 年

兵庫教育大学大学院
連合学校教育学研究科

佐々祐之

目　次

序章　本研究の目的と方法　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　1

　1節　研究の背景　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　2

　2節　研究の目的と方法　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　4

　3節　論文の構成　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　7

第1章　学校教育における論証指導の現状　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　11

　1節　小学校段階における論証指導の概要　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　12

　　1．学習指導要領における論証に関わる学習活動　・・・・・・・・・・・・・・・　12

　　（1）中央教育審議会答申における「説明する活動」

　　（2）小学校学習指導要領における教科の目標

　　（3）算数的活動における「説明する活動」に関する記述

　　2．全国学力・学習状況調査にみる「説明する活動」に関する

　　児童の学習状況　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　21

　　（1）全国学力・学習状況調査における「説明すること」に関する問題

　　（2）「理由」を説明する問題の正答率と指導上の課題

　2節　中学校数学科における代数的証明の指導の概要　・・・・・・・・・・・・・　27

　　1．学習指導要領における代数的証明の位置づけ　・・・・・・・・・・・・・・・　28

　　2．教科書における代数的証明の取扱い　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　29

　　（1）教科書における代数的証明に関する学習内容の割合

　　（2）教科書で扱われている題材

　　3．全国学力・学習状況調査からみる代数的証明に関する生徒の学習状況・・・　34

　　（1）全国学力・学習状況調査における代数的証明に関する問題

　　（2）代数的証明に関する問題の正答率と指導上の課題

　　（3）記述問題のタイプと正答率との関係

　　4．「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性

　　についての理解」　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　46

　　（1）文字式による論証能力に関する調査

　　（2）文字式による論証のもつ一般性についての理解に関する調査

（3）「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性
についての理解」との関係
第１章のまとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 50

第２章　操作的証明の概念 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 55
１節　学校教育における「証明」の概念 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 56
２節　ヴィットマンの「操作的証明」の概念 ・・・・・・・・・・・・・・・ 57
１．先行研究における「操作的証明」 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 57
２．ヴィットマンの「操作的証明」とその背景 ・・・・・・・・・・・・・ 61
３．『数の本（Das Zahlenbuch)』における「操作的証明」の展開 ・・・・ 65
４．おはじきと位取り表による操作的証明の発展性 ・・・・・・・・・・・ 68
（1）形式的証明を生成し，それを納得・確信する手段となること
（2）別の数学的現象を創造すること
第２章のまとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 74

第３章　おはじきと位取り表の操作に関する学習者の実態 ・・・・・・・・・・ 77
１節　インタビュー調査の位置づけと実施計画 ・・・・・・・・・・・・・・ 78
１．実証的研究 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 79
２．インタビュー調査の概要 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 80
３．インタビュー調査の内容 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 81
２節　調査結果の概要 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 84
１．「①おはじきと位取り表による数の表現」についての分析 ・・・・・・・ 84
２．「②おはじきの操作の意味理解」についての分析 ・・・・・・・・・・・ 85
３．「③おはじきの操作の活用」についての分析 ・・・・・・・・・・・・・ 87
３節　調査結果の考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 91
１．おはじきの基本的な操作に関する準備的な学習活動の設定の必要性 ・・・ 91
２．数計算に対する筆算という方法への依存傾向 ・・・・・・・・・・・・・ 93
３．筆算再現型のおはじき操作の傾向 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 94
４．複数のおはじき操作を一連のものとして捉えることの困難性 ・・・・・ 96
第３章のまとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 98

第４章　操作的証明を取り入れた授業実践　・・・・・・・・・・・・・・・・・・　101
１節　授業実践で用いた題材　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　102
１．ANNA 数　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　103
（１）ANNA 数の現象
（２）ANNA 数の差に見られる数学的パターンの数学的証明
（３）ANNA 数の現象に対するおはじきと位取り表を用いた操作的証明
２．ANNA 数の発展課題　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　109
（１）NANA 数の現象
（２）魔法の数
（３）位取り表におけるおはじきの操作からの命題の導出
２節　公立中学校における試行授業　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　115
１．授業の趣旨と授業設計　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　116
（１）授業の目的
（２）授業の実施計画
（３）授業の実施状況
２．授業分析と考察　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　121
（１）操作的証明の中学生への適用可能性
（２）数学的命題の探究的な発見
（３）おはじきと位取り表による操作的証明の理解と実行
（４）形式的証明の学習との関連
３．学習環境のリデザインに向けた示唆　・・・・・・・・・・・・・・・・・　126
（１）おはじきと位取り表の操作に関する手立て
（２）形式的証明への移行のための手立て
３節　附属中学校における実験授業　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　127
１．授業の趣旨と授業設計　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　127
（１）授業の目的
（２）授業の実施計画
（３）授業の実施状況
２．授業分析と考察　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　133
（１）おはじきと位取り表の操作の理解に関する手立て

（2）形式的証明への移行に関する手立て
3．操作的証明を取り入れた学習環境デザインの意義 ・・・・・・・・・・・ 136
（1）操作的証明は，学習者の探究活動の助けとなるか
（2）操作的証明は，形式的証明の意義の理解の助けとなるか
4．学習環境のリデザインに向けた課題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 147
4節 公立中学校における実験授業 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 148
1．授業の趣旨と授業設計 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 148
（1）授業の目的
（2）授業の実施計画
（3）授業の実施状況
2．授業分析と考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 151
（1）おはじきと位取り表による操作的証明の理解と実行
（2）文字を用いた形式的証明の一般性の理解
3．学習環境のリデザインに向けた示唆 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 156
第4章のまとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 157

第5章 論証指導における操作的証明の機能 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 171
1節 課題探究としての証明における操作的証明の位置づけ ・・・・・・・・ 172
1．「課題探究として証明することのカリキュラム開発」プロジェクト ・・・ 173
2．課題探究として証明することのカリキュラムの枠組み ・・・・・・・・ 174
3．課題探究として証明することのカリキュラムの枠組みにおける
操作的証明の位置づけ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 178
2節 操作的証明の構想に関するプロセス ・・・・・・・・・・・・・・・・ 180
1．実証的研究から見出された課題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 180
2．教授実験の概要 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 182
3．教授実験の結果と分析 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 184
（1）おはじきと位取り表の表現と使い方
（2）9個のおはじきで作られる3桁までの数
（3）ANNA 数の現象
（4）魔法の数の現象

４．教授実験から得られた示唆 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 191
３節　操作的証明の発展性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 192
１．算数・数学科の学習における「練習」の考え方 ・・・・・・・・・・・ 192
２．生産的練習の概念 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 194
（１）生産的練習とは
（２）生産的練習の具体例
（３）「操作的証明」と「生産的練習」との結びつき
第５章のまとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 202

終章　本研究の総括と今後の課題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 205
１節　本研究の総括 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 206
２節　今後の課題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 209
１．操作的証明の構想と構成の様相 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 209
２．形式的証明への移行 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 209
３．操作的証明の適用範囲の拡張と総合的な学習環境のデザイン ・・・・・・ 210

引用・参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 211

序章

本研究の目的と方法

序章　本研究の目的と方法

本章では，本研究でテーマとする論証指導における操作的証明について，社会的背景や学校教育の現状など，研究の背景について概説するとともに，研究の目的と方法を明確化し，論文全体の構成を示す．

１節　研究の背景

学校教育において思考力・判断力・表現力等の育成の重要性が高まる中，他者への説明活動やコミュニケーション活動のための基礎的な能力として，論証能力が重要な位置を占めるようになってきている．平成 20 年 1 月に中央教育審議会から出された「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」では，思考力・判断力・表現力等の育成にとって不可欠な各教科における学習活動の例として以下のようなものが挙げられている．

①体験から感じ取ったことを表現する．
②事実を正確に理解し伝達する．
③概念・法則・意図などを解釈し，説明したり活用したりする．
④情報を分析・評価し，論述する．
⑤課題について，構想を立て実践し，評価・改善する．
⑥互いの考えを伝え合い，自らの考えや集団の考えを発展させる．

これらの活動には，「表現する」「伝達する」「説明する」「論述する」「伝え合う」など「表現」に関する言葉が多く含まれているため，思考力・判断力・表現力等の育成のためには，言語活動をはじめとする「表現」に関わる活動が重要であるようにも解釈できる．しかし，「表現」に関わる活動は，それ自身単独で行われるものではなく，上記の活動の中の「理解する」「解釈する」「活用する」「分析・評価する」「構想を立てる」「実践する」「評価・改善する」「発展させる」などの言葉に代表される「思考」や「判断」に関わる活動があって初めて可能な学習活動であるといえよう．つまり，思考力・判断力・表現力は，それらを個別に育成していくようなものではなく，「思考」「判断」「表現」に関わる学習活動が，一連の

学習活動として展開されることによって, 総合的に育成される能力であるということができるだろう.

また，これらの活動は，特定の教科だけではなく，すべての教科・領域にわたって行われるべきものであるが，特に，算数・数学科という教科においては,「探究活動を通して見出した性質を一般化するなどの思考活動を行い, それらを基に課題解決のための方法や手段を判断するとともに, 得られた結果や解決のプロセスの妥当性を数学的記号や証明という形で表現していく」というように,「思考」「判断」「表現」に関わる学習活動が，一連の学習活動として展開されるため，思考力・判断力・表現力等の育成のために，算数・数学科という教科の果たす役割は非常に大きいものであるといえるだろう.

特に，算数・数学科における論証指導においては,「数学的性質が成り立つことを理由づける」という学習活動を通して，思考力・判断力・表現力等を総合的に育成していくことが期待される. 数学科における論証といえば，数学の命題や定理が成り立つことを，論理的な記述によって証明することのみを指すと考えられがちであるが，近年では論証指導を「証明を書く」という狭義の捉え方（proof）から,「探究を通して数学的な原理や法則を発見すること」「それらが成り立つことを示すための構想を立ててそれを実践すること」「証明を振り返って評価・改善したり，新たな性質を見出したりすること」などを含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」として捉えられるようになってきている(Stylianides. A. J. (2007)，Stylianides. G. J. & Stylianides. A. J. (2008)，宮崎樹夫・藤田太郎(2013)，). このように「探究，発見，理由づけ」の一連の学習活動として，また,「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点に立つならば，算数・数学科における論証指導は，思考力・判断力・表現力等を育成するために不可欠な上記①から⑥までの活動すべてにわたってそれらを具現化する学習活動であるということができるだろう.

しかし，思考力・判断力・表現力等の育成のために大きな役割を担うことが期待される算数・数学科での論証指導に関しては，全国学力・学習状況調査，PISA 等の国際学力比較調査の結果を見る限り，その成果が十分であるとは言い難い. 例えば，平成 19 年度から平成 22 年度までの 4 年間に実施された全国学力・学習状況調査の結果を概観すると，小学校算数（主として「活用」に関する問題）の記述式の問題の平均正答率は，35.5%となっており，事柄や方法を言葉や式を用いて説明したり理由づけたりすることに課題があることが分かる. また，中学校数学（主として「活用」に関する問題）の記述式の問題の正答率を見ても,

「発展的に考え，予想すること」に関する問題，「事象の数学的な解釈と問題解決の方法」に関する問題,「証明を振り返り，発展的に考えること」に関する問題などの正答率は，50%を下回っており，中学校第 2 学年から行われる証明に関する学習を終えた後であるにもかかわらず，十分に定着しているとは言えない（国立教育政策研究所(2012a)(2012b)）．もちろん，これらの結果は，ペーパーテストによる評価であり，論証指導における「表現」に関わる部分に特化した結果ではあるが，表現されたプロダクトとしての「証明」が書けないという現状は，その前提となる「探究」や「発見」のプロセスにおいても，十分な定着が図られておらず，思考力・判断力・表現力等を総合的に育成するために，論証指導が十分に機能していないことを暗に示しているといえよう．

以上考察してきたように，思考力・判断力・表現力等の育成が重視される中で，算数・数学科における論証指導は,それらの能力を育成するために大きな役割を担うことが期待されており，論証指導そのものも，単に証明の書き方の学習ではなく総合的な学習プロセスとして捉えられるようになってきているが，学力調査等の結果を見る限り，それらが十分な成果を上げているとは言い難い現状にあることが分かる．したがって，思考力・判断力・表現力等の育成を目指す小学校・中学校での学習活動を充実させるためには,「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動，さらには「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点に立った論証指導の改善を志向する必要があるといえよう．

２節　研究の目的と方法

上記のような問題意識のもと，本研究では,「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動，さらには「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての視点から，小学校から中学校にかけて算数･数学科という教科指導において行われている論証指導を取り上げ，その改善のための方策を検討する．

現行の学習指導要領では，論証指導の中心をなす証明についての学習は，中学校第 2 学年の「図形」領域において扱われることになっているが，数学的推論を伴う理由づけや説明といった活動については，小学校段階から一貫して行われており，むしろ算数・数学科の学習活動においては，これらの活動が学習の中心であるということができる．そこで，本研究においては，中学校段階における証明の学習だけではなく，小学校から中学校にかけて行われ

る理由づけや説明，証明に関する学習活動を論証指導と捉え，広い意味での探究的な学習活動としての視点から，改善のための方策を検討することとする．

現在，中学校の第 2 学年から指導されている証明の学習活動においては，命題や定理が成り立つことを数学的な式や記号, 論理的な表現を用いて表現することが求められているため, ともすれば，本来行われるべき，「探究，発見，理由づけ」や「評価，改善，発展」などを含む広義の「証明すること（Proving)」とならず,「証明の書き方」の学習となってしまっているかもしれない．確かに，証明というものの成り立ちやその構成の仕方について学ぶことは必要不可欠であり, それらの学習を抜きにして論証指導を充実させることはできないであろう．しかし,「証明の書き方」の学習に傾倒するあまり，本来論証指導の中で行われるべき「探究」やそれに伴う数学的パターンの「発見」，さらに，証明や証明した事柄を振り返って「評価，改善」したり，そこから新しい命題へと「発展」したりするなどの活動が十分に行われなければ，児童生徒の思考力・判断力・表現力等の育成には寄与することができないであろう．

証明についての学習が「証明の書き方」の学習に傾倒してしまう背景には，数学的証明の高度な抽象性と形式性があると考えられる．数学的証明では，命題や定理が成り立つことを示すために，さまざまな論理記号や文字，数学独自の表現などを用いる．また，定理や命題そのものが抽象的な概念を扱っているため，それを学習しようとする児童生徒にとっては, 証明そのものの学習が困難であると同時に, 命題や定理自体の捉え方についても困難を感じているのである．

そこで，本研究では，論証指導を「証明の書き方の学習」のような狭い意味ではなく，探究的な学習活動としての広義な論証活動としての「証明すること（Proving)」として充実させていくために，操作的証明（Operative proof）[註 1)] の概念を取り上げ，その機能について考察するとともに，操作的証明を取り入れた学習環境[註 2)] をデザインし，その効果を検証することを目的とする．

操作的証明は, ドイツの数学教育学者ヴィットマン(E. Ch. Wittmann)(1996, 2004, 2007, 2009)によって提唱された概念である．厳密な論理規則に支えられ抽象的・形式的な数学的記号を用いて表現される数学的証明と対峙する概念で, 児童生徒が探究活動を通して発見した数学的パターンが成り立つことを, それが表現された数学的対象に対する操作の結果を根拠として示そうとするものである．操作の対象が具体的特殊であるため，命題の一般性という観点からすれば，厳密な意味での形式的証明にはなり得ないが，数学的対象に対する操作

の結果を観察することを通してそこに一般性を認識し,命題や定理が成り立つことを示そうとするのである．これまでの論証指導では，形式的証明の学習が中心であったため，このような操作的証明は証明の学習としては扱われることはなかった．しかし，論証指導を厳密な意味での形式的証明に限定してしまうことは，児童生徒にとって，証明の学習を困難にしてしまうだけではなく，前述したように，論証指導を狭い意味での「証明の書き方の学習」に偏ったものにしてしまう可能性があるのではないだろうか.

本研究では，形式的証明の学習に限定された狭義の論証指導ではなく，「探究，発見，理由づけ」や「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとして位置付けられる広義の「証明すること（Proving)」を展開していく中で，操作的証明を取り入れることの有効性と限界について，分析・考察を行うこととする.

なお，論証指導において扱われる数学的対象は，数や図形の性質など多岐にわたるが，生徒にとって命題の抽象性，一般性の理解が困難とされていること，論証活動における操作の役割を特徴づけやすいこと，という 2 つの理由から，本研究では，数の性質に対する代数的証明に焦点化して考察することとする．また，操作的証明に関しても，用いる道具や場面によってさまざまな種類の操作的証明が考えられるが，本研究では，ヴィットマン自身が操作的証明の典型的な例として用いている「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」に限定し，数の性質の代数的証明に関する探究的な学習活動において,おはじきと位取り表を用いた操作的証明がどのように機能し，効果を発揮するのか，また，どのような点において課題と限界があるのかを明らかにする.

証明という概念の捉え方や，操作的証明の位置づけ等については，ヴィットマンらの先行研究をはじめ，國本(1990，1992，1994，1996)らによる証明に関する先行研究を対象とした文献研究を行う．また，操作的証明を用いた学習環境のデザインに当たっては，児童生徒の操作的証明に関する理解の様相を明らかにするためにインタビュー調査を行い,それらの分析・考察をもとにしたデザインを行う．さらに，実証的研究に関しては，デザインされた学習環境に基づく実験授業，教授実験を実施し，それぞれの分析・考察を経て学習環境のリデザインへ向けた示唆を抽出するものとする．最終的に，文献研究，インタビュー調査，実験授業と教授実験等を総合的に考察し,探究的な論証活動における操作的証明の機能に関して，その可能性と限界に言及するものとする.

３節　論文の構成

第１章では，学習活動としての論証指導の現状を把握するために，小学校段階から中学校段階にかけて算数･数学科という教科において主に行われている論証に関わる学習活動について，学習指導要領，教科書，各種学力調査の結果，先行研究等を分析し，課題の整理を行う．特に，本研究での中心的概念である操作的証明という証明方法の特性に考慮して，ここでは，数の性質について扱う代数的証明に焦点化し，学習指導の現状を分析する．

第２章では，論証指導に関する先行研究を整理し，一般的に数学的な命題の証明に用いられる形式的証明に対峙する概念として, 厳密な論理性に縛られることなく図や操作を通して命題の正しさを説明しようとする前形式的証明という概念の特徴を考察する．その上で，前形式的証明の１つと位置付けられる E. Ch. Wittmann が提唱する「操作的証明（Operative proof)」という概念を取り上げ，その性格を明らかにするとともに，操作的証明の具体的な事例として，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り上げ，操作的証明がいかに学習活動として具体化されるのか，また，その教育的意義や発展性としてどのような可能性を持つのかについて考察を行う．

第３章では, おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた具体的な学習環境のデザインのために，児童生徒の既習知識・技能を把握するための実証的研究として，おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を実施し，その結果を分析，考察する．小学校高学年から中学校段階にかけての学習環境デザインを想定するという意味で, 小学校第５学年の児童を対象として，おはじきと位取り表による数の表現やおはじきの操作の意味理解，それらの活用に関するスキルなどを調査し，学習環境デザインに向けた示唆を導出する．

第４章では，インタビュー調査から得られた知見をもとに，学習環境デザインの対象を，文字を用いた形式的証明を学習する中学校第２学年の生徒に設定し，ANNA 数の数学的現象を題材とした学習環境のデザインを行う．学習環境デザインにあたっては，試行授業，附属中学校での実験授業，公立中学校での実験授業と３回にわたる実証的研究を通して，それぞれの授業の詳細な分析を行う．特に，操作的証明の機能を明確化するために，代数的証明を扱う同単元において，操作的証明を取り入れた学習活動を行う実験群と，操作的証明を行わず形式証明のみを学習する対照群とに分け, 生徒の学習活動や理解の様相を比較分析するなど，多様な方法によって操作的証明を取り入れた学習活動の特徴を詳細に分析する．

第５章では, 広義の論証指導としての「証明すること (Proving)」を捉える枠組みとして，宮崎ら(2012)による「課題探究として証明すること」という考え方を参考として，命題の生

成，証明の構想・構成，評価・改善・発展という理由づけのプロセスの中で，操作的証明がどのように機能するのかを考察する．また，一連の学習プロセスの中で，証明の構想に着目して行った教授実験の分析から，操作的証明の構想に関する学習環境デザインの示唆を導出する．さらに，操作的証明の発展性として，「練習」という概念との結びつきに着目し，E. Ch. Wittmann の生産的練習という概念を参考にして，定着のための「練習」も含めた総合的な学習プロセスにおける操作的証明の機能について考察する．

【註】

1）「操作的証明」という訳語は，ゼマデニ（Z. Semadeni）の“Action proof”に対して用いられることが多く，例えば小松(2012)は，“Action proof”の訳語として「操作的証明」を用い，その活用の促進に関して考察を行っている．しかし本研究では，ヴィットマンが，ピアジェの“Operation”の概念を基礎とした「操作的原理」に基づく証明として提唱した“Operative proof”という概念に対して「操作的証明」という語を用いている．“Action proof”と“Operative proof”とは，類似した概念であるが，そこで用いる「操作」がピアジェの意味での「操作」であることを強調したこと，より具体的な学習活動への活用を志向していることが，“Operative proof”の特徴であると考えられる．

2）ドイツの数学教育学者ヴィットマンは，数学教育学をデザイン科学の枠組みで捉え，本質的学習環境（Substantial Learning Environment）を開発することを研究の中心においている．ここでいう本質的学習環境とは，児童生徒が学習活動において取り組む学習課題や教師の支援，学習者同士のコミュニケーションなど，様々な学習要素の総体を指す概念であり，学習活動としての授業をより広義にとらえた概念である．本研究では，ヴィットマンの本質的学習環境の考え方を授業設計の基礎とするため，「授業」という用語の代わりに「学習環境」という言葉を用いることとする．

【序章における引用・参考文献】

國本景亀(1990).「数学教育における証明指導」. 平林一榮先生頌寿記念出版会編,『数学教育のパースペクティブ』(pp.335-354), 聖文社.

國本景亀(1992).「前形式的証明とその教育的意義－証明の社会学的見方に関連して－」,『高知大学学術研究報告』, 第 41 巻, pp.1-14.

國本景亀(1994).「証明概念の多様性」,『日本数学教育学会第 27 回数学教育論文発表会論文集』, pp.457-462.

國本景亀(1996).『空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善』, 平成 6 年～7 年度科学研究費補助金（一般研究(C)）研究報告書.

國宗進 編著(1997).『確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり 5』, 明治図書.

国立教育政策研究所(2012a).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～（小学校編）』, 教育出版.

国立教育政策研究所(2012b).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～（中学校編）』, 教育出版.

小松孝太郎(2012).『数学的探究における操作的証明の活用の促進に関する研究』, 筑波大学大学院人間総合科学研究科 学位論文.

中央教育審議会(2008).『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申）』(p.25).

宮崎樹夫・藤田太郎(2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発―我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果―」,『日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集』(pp.1-8).

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education,* 38, pp.289–321.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics：Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning, *Mathematical Thinking and Learning, 10(2),* pp.103-133.

Wittmann, E. Ch. (1996). Operative proofs in Primary Mathematics, *Paper presented to Topic Groups 8, "Proofs and proving: Why, when,how?" at the 8th International Congress of Mathematics Education, Seville.*

Wittmann, E. Ch. (2004). Learning mathematics for teaching mathematics : The notion of operative proof, *Paper presented at TSG3 in 10th ICME, 4.-11., July, 2004, Copenhagen, Denmark.*

Wittmann, E. Ch. (2007). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference "The Future of Mathematics Education in Europe", Lisbon 17. - 19.12.2007, organized by the Academia Europaea.*

Wittmann, E. Ch. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference ICMI Study 19 : Proof and Proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education", Taiwan, 10-15. May 2009, organized by ICMI.*

第１章

学校教育における論証指導の現状

第１章　学校教育における論証指導の現状

本章では，学習活動としての論証指導の現状を把握するために，学習指導要領，教科書，各種学力調査の結果，先行研究等を分析し，課題の整理を行う．特に，本研究では，論証指導の中でも数の性質を扱う代数的証明を中心に考察するため，小学校段階から中学校段階にかけての代数的証明に関わる学習活動に焦点化し，それらの現状と課題について考察するものとする．

１節　小学校段階における論証指導の概要

前述したように，証明に関する学習は，中学校第 2 学年の図形領域において初めて導入されることになっているため，「証明を書くこと」の学習は，小学校算数科では行われない．しかし，「探究を通して数学的な原理や法則を発見すること」「それらが成り立つことを示すための構想を立ててそれを実践すること」「証明を振り返って評価・改善したり，新たな性質を見出したりすること」などを含む総合的な学習プロセスとしての論証（proving）の観点からすれば，小学校段階でも，中学校から始まる本格的な証明に関する学習の基礎的段階として，「探究」「発見」「理由づけ」などの活動が展開されているといえよう．ここでは，そのような中学校での論証指導の素地指導としての小学校の学習活動が，どのように意図され，実施されているのか，またそれらの学習活動に対する児童の達成度の現状はどのようになっているのかを，学習指導要領，全国学力・学習状況調査の結果等の分析を通して整理する．

１．学習指導要領における論証に関わる学習活動

小学校段階では，中学校で行うような演繹的な推論については重点的には扱われないが，数や図形に関するさまざまなパターンや法則を探究し，それらが成り立つ理由を説明する活動は行われている．ここでは，平成 20 年 3 月に改訂された小学校学習指導要領において，論証指導としての「理由を説明する活動」がどのように位置づけられているのかを明らかにする．

（1）中央教育審議会答申における「説明する活動」

平成 20 年 1 月に中央教育審議会から出された「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び

特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申）」では，算数，数学科の改善の基本方針の第三項目として，次のように示されている．

> 数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため、数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。特に、根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。（中央教育審議会(2008)，pp.83-84）

ここでは，根拠を明らかにし筋道を立てて考えることや，さまざまな表現方法を用いて問題を解決したり，自分の考えを説明したり，伝え合ったりする活動を重視することが述べられており，思考力と表現力を一体のものとして捉えて指導しようとしていることがうかがえる．論証とは，筋道を立てて考え，そのプロセスや結果を他者に伝えるために表現することであり，その意味では，今回の学習指導要領の改訂では，これまで以上に論証指導を充実させる必要があると考えていることが分かる．

（２）小学校学習指導要領における教科の目標

中央教育審議会の答申を受けて平成 20 年 3 月に改訂された小学校学習指導要領では，算数科の一般目標が以下のように示されている．

> 算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，<u>日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てる</u>とともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。（文部科学省(2008a)，p.43，下線筆者）

教科の一般目標の中で，特に論証指導に関係するのは，「日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てる」という部分であると考えられるが，ここで「筋道を立てて考える」ことと「表現する能力を育てる」こととを並列して示していることには注意が必要である．これについて，学習指導要領解説では，次のように述べている．

今回の改訂では，「考え，表現する能力を育てる」というように，「表現する（能力)」の文言を加えて示している。考える能力と表現する能力とは互いに補完しあう関係にあるといえる。考えを表現する過程で，自分のよい点に気付いたり，誤りに気付いたりすることがあるし，自分の考えを表現することで，筋道を立てて考えを進めたり，よりよい考えを作ったりできるようになる。授業の中では，様々な考えを出し合い，お互いに学び合っていくことができるようになる。そうした考えから，目標において考える能力と表現する能力とを並べて示すこととした。（文部科学省(2008b)，p.20）

ここに述べられているように，算数科の学習では，「思考力」と「表現力」を相互補完的なものとして捉えており，自分で考えたことを表現しようとしたり，言葉や図などの様々な表現方法を用いて思考したりすることが，抽象的な数学的概念の理解のために必要であると考えられているのである．論証指導は，このような学習活動を具現化しうるものであり，今回の学習指導要領の改訂では，その目標部分にも関わって論証指導の充実が求められていると考えることができる．

しかし，前述した通り，本格的な論証指導は中学校第 2 学年から始まるため，厳密な意味での演繹的な推論は小学校段階では扱われない．そのため，論証指導自体も形式的な「証明の書き方」ではなく，あくまで思考の一様式としての数学的推論が中心的なものとなる．このことについて学習指導要領解説には，次のように示されている．

問題解決の方法や結果が正しいことをきちんと示すためには，筋道を立てて考えることが求められる。それは，根拠を明らかにしながら，一歩ずつ進めていくという考えである。ある前提を基にして説明していくという演繹的な考えが代表的なものであるが，児童が算数を学習していく中では，帰納的な考えや類推的な考えもまた，根拠となる事柄を示すという点で，筋道を立てた考えの一つといえる。（文部科学省(2008b)，p.20）

つまり，小学校段階では，論証指導において行われる数学的推論については，これを充実させていくことが求められているが，推論そのものについては帰納的な推論や類推的な推論も認めていくということである．帰納的推論や類推的推論は，数学的な思考方法として特徴的なものであり，小学校段階での論証指導が，中学校段階から本格的に始まる演繹的推論の記述としての証明指導のための素地指導として位置付けられていることが分かる．

（３）算数的活動における「説明する活動」に関する記述

平成 20 年 3 月に改訂された小学校学習指導要領では，算数科の内容に，従来の「A 数と計算」「B 量と測定」「C 図形」「D 数量関係」に加えて「算数的活動」が示されることになった．これまで算数的活動については，「内容」ではなく「方法」としての性格が強いため，学習指導要領に示される内容としてではなく，学習指導要領解説の中でその重要性が述べられてきたが，今回の改訂においては内容として明示されることになり，これまで以上に算数的活動を重視した学習指導が求められることになるといえよう．

算数的活動に関しては，各学年の内容に付随する形で，その代表的な活動が例示されており，第 1 学年から第 6 学年で，合計 29 の算数的活動が示されている．それらの中で，論証指導に関わるものとして，「説明する活動」を含む算数的活動を抽出したものが，以下の【表１-１】である．

【表１-１ :「説明する活動」を含む算数的活動】

学 年	算 数 的 活 動
第２学年	オ　加法と減法の相互関係を図や式に表し，説明する活動
第３学年	ア　整数,小数及び分数についての計算の意味や計算の仕方を,具体物を用いたり，言葉，数，式，図を用いたりして考え，説明する活動
第４学年	イ　長方形を組み合わせた図形の面積の求め方を，具体物を用いたり，言葉，数，式，図を用いたりして考え，説明する活動
第５学年	ア　小数についての計算の意味や計算の仕方を，言葉，数，式，図，数直線を用いて考え，説明する活動
	イ　三角形，平行四辺形，ひし形及び台形の面積の求め方を，具体物を用いたり，言葉，数，式，図を用いたりして考え，説明する活動
	エ　三角形の三つの角の大きさの和が 180°になることを帰納的に考え，説明する活動。四角形の四つの角の大きさの和が 360°になることを演繹的に考え，説明する活動
第６学年	ア　分数についての計算の意味や計算の仕方を，言葉，数，式，図，数直線を用いて考え，説明する活動

「説明する活動」を含む算数的活動は，29 項目の算数的活動の中の 7 項目であり，第 5

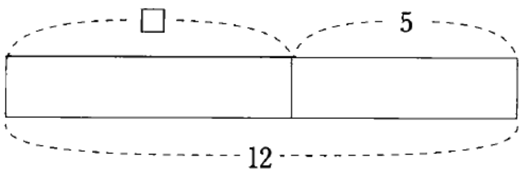
学年のエに示されているように，演繹的推論を扱ったものも含まれてはいるが，ほとんどが言葉，図，数，式などを用いて具体的な事象を説明する活動となっており，小学校段階での「説明する」活動が，本格的な演繹的推論を扱う証明指導の素地指導の段階として位置付けられていることが分かる．

また，算数科の内容領域についてみると，7 項目の「説明する活動」を含む算数的活動の中で，第 2 学年のオ第 3 学年のア，第 5 学年のア，第 6 学年のアという 4 項目が，数の性質を説明する活動として取り上げられていることが分かる．つまり，小学校算数科の学習においては，数の性質や計算のきまりに関する学習内容が中心的であるため，論証指導に関しても，必然的に数の性質や計算のきまりに関して説明する活動が多くなってくるということである．このことは，「論証＝図形」という中学校数学科における論証指導のイメージとは異なる部分であるが，論証指導の素地的経験として位置づけられる小学校算数科での「説明する活動」は，数の性質や計算のきまりといった代数的証明を中心的な題材として行われているということである．

では，数の性質や計算のきまりに関する「説明する活動」としては，具体的にどのようなものが例示されているのだろうか．小学校学習指導要領解説，算数編には，以下のような「説明する活動」が例示されている．

【第２学年】

第 2 学年では，「加法と減法の相互関係を図や式に表し，説明する活動」として，図 1 - 1 のような帯図を用いて説明する活動が例示されている．



【図 1 - 1 ：加法と減法の相互関係を表す帯図】

これは，「はじめにリンゴが幾つかあって，5 個もらったら 12 個になった．はじめにいくつあったか.」という問題場面において，問題状況を図 1 - 1 のように表し，これを用いて 12－5 という式になることを説明する活動である．第 2 学年の段階では，このように，12－5 というひき算で計算できることを，図を根拠として説明する活動が例示されていることから，

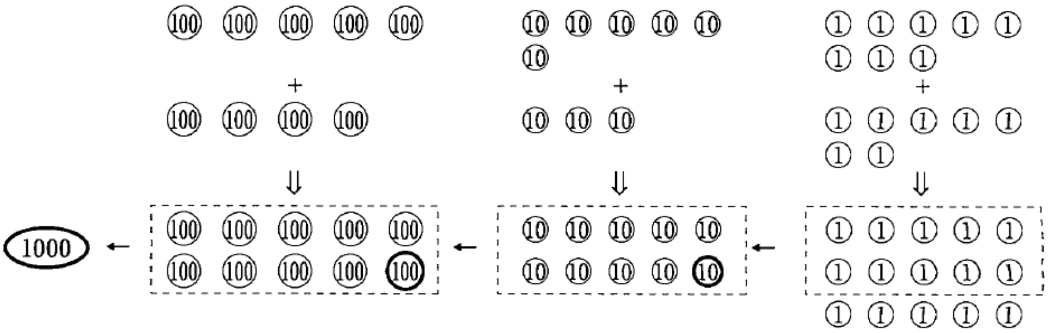
低学年の段階では，具体的な場面を抽象化して表した図を根拠として，演算決定の理由を説明するということが行われることが分かる．また，学習指導要領解説には，説明活動において図を用いることの留意点として，以下のように示されている．

> 図を用いる際には,問題場面にある数量について具体物で表したものを図へと抽象化し，図についての実感的理解を育みながら，「思考の道具」そして「説明の道具」となるように活動の中で用いさせていくことが重要である。また，図を，ほかの表現である式や言葉の式などとも関連付けて用い，考えたり，読み取ったり，説明したりすることができるようにする。（文部科学省(2008b)，p.84）

つまり，この段階の児童にとって図は「思考の道具」であると同時に「説明の道具」でもあり，演繹的な推論の基礎的段階として，図を根拠とするような説明活動が意図されていることが分かる．

【第３学年】

第３学年では，「整数，小数及び分数についての計算の意味や計算の仕方を，具体物を用いたり，言葉，数，式，図を用いたりして考え，説明する活動」として，図１‐２のような硬貨のモデルを用いて加法の計算方法を説明する活動が例示されている．

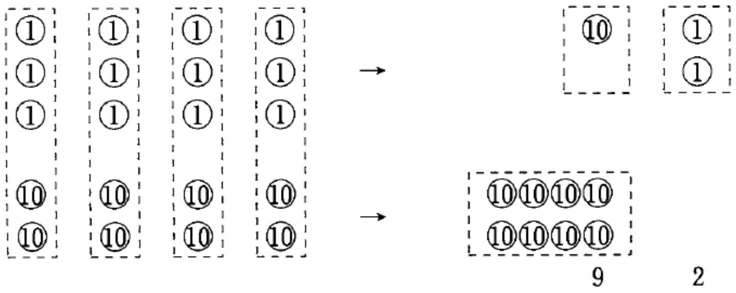


【図１-２：568＋437 の操作的な説明】

これは，568＋437 の計算における繰り上がりの処理を，1 が 10 個で 10 に置き換わること，10 が 10 個で 100 に置き換わることを用いて，硬貨のモデルで説明する場面である．実際に，計算場面を硬貨で表現すると，1 円玉が 15 個あるので，そのうちの 10 個を 1 個の 10 円玉に置き換える．さらにそれと 9 個の 10 円玉を合わせて 10 個の 10 円玉になるので，

これを 1 個の 100 円玉に置き換える．さらにこれを合わせると 100 円玉は 10 個になるのでこれを 1000 円と置き換える．このような操作を通して，十進位取りの原理を理解するとともに，繰り上がりのある加法の計算の仕方を説明するのである．

また，同じく第３学年では，23×4 という乗法の場面でも，図１-３のように，硬貨のモデルを用いて説明する活動が例示されている．



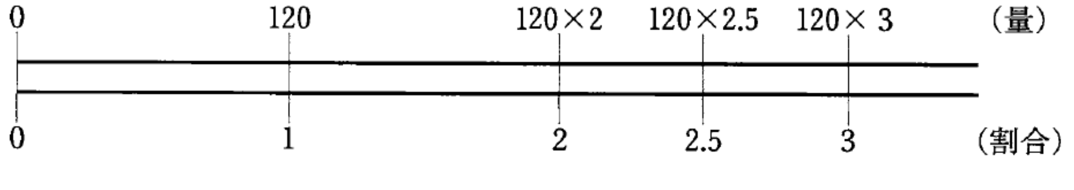
【図１-３ ：23×4 の操作的な説明】

ここでも，加法の場合と同様に，23 の 4 つ分を硬貨のモデルで表して，1 円玉と 10 円玉をそれぞれ計算し，最終的に一の位から 1 繰り上がって十の位が 9 になることを操作を通して説明することになる．

このように，第３学年では，図を用いるだけではなく，それらを操作しながら，その操作の結果を根拠として計算の方法を説明するという活動が行われることが分かる．

【第５学年】

第５学年では，「小数についての計算の意味や計算の仕方を，言葉，数，式，図，数直線を用いて考え，説明する活動」として，図１-４のような数直線を用いて小数の乗法の意味を説明する活動が例示されている．



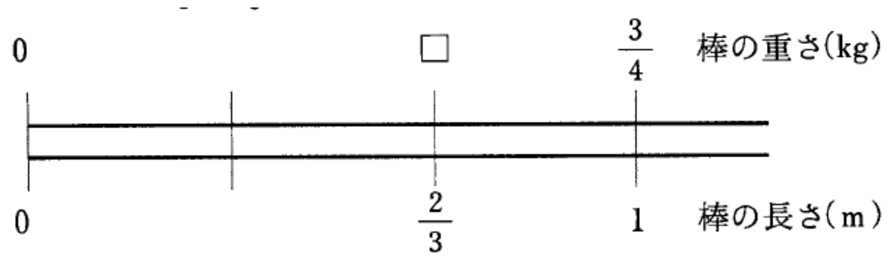
【図１-４ ：120×2.5 の計算の意味】

これは，120×2.5 という小数をかける乗法の意味を，「120 を 1 と見たときに 2.5 に当たる大きさを求める計算」として捉え，その構造を数直線という表現方法を用いて説明する活

動である．整数，小数，分数とも，乗法や除法の問題は，すべてこのような「量」と「割合」を表す２本の数直線を組み合わせた構造図によって説明できるため，算数科の学習では，このような図的表現がよく用いられる．第２学年で説明のために用いた帯図より，さらに複雑な構造を示す図であるが，これらの図を根拠として用いて計算の意味や方法を説明するという意味では，基本的な説明の方法は低学年から一貫したものであることが分かる．

【第６学年】

第６学年でも第５学年での数直線を用いた説明活動と同様に，「分数についての計算の意味や計算の仕方を，言葉，数，式，図，数直線を用いて考え，説明する活動」として，図１-５のような数直線を用いて説明する活動が例示されている．



【図１-５ ：3/4×2/3 の計算の意味】

これは，「１m の重さが 3/4kg の棒があります。この棒 2/3m の重さは何 kg でしょうか．」という問題場面において，棒の重さ（量）と長さ（割合）の関係を数直線として表現し，それを根拠として，3/4×2/3 の計算の仕方を説明するという活動である．第５学年で例示されている小数の乗法の例では，計算の意味を説明するという側面が強調されていたが，ここでは，「3/4 を 3 で割って 2 倍する」という計算の方法を説明する根拠として数直線を用いることが強調されている．

以上，「小学校学習指導要領解説 算数編」に算数的活動として例示された「数や計算のきまりについて説明する活動」を見てきたが，これらを見ると，小学校段階での説明活動は，厳密な意味での演繹的な推論を行うわけではないが，図や操作を根拠として用いて計算の意味や方法を説明する活動が行われているということが分かる．図や操作を根拠とする説明は，具体的な一事例を示してそれを根拠とするという点において，一般性を有するような厳密な意味での演繹的推論にはならないが，中学校から始まる演繹的な推論の素地的な指導として，

このような説明の方法が，小学校の段階から取り扱われているのである．

また，根拠として用いる図や操作についても，低学年から高学年へと進むに連れて，具体的なものから抽象的なものへと変化していることが分かる．例示された算数的活動においても，第 2 学年では「具体物を図化した帯図」，第 3 学年では「硬貨をモデルとした操作教具」であったが，第 5 学年，第 6 学年になると，乗法構造を抽象的に表現した数直線が用いられている．

特に，第 3 学年で例示されているような操作教具を用いた操作的な説明は，低学年や中学年における説明の活動において，頻繁に用いられている．小学校学習指導要領解説には，算数的活動として示された説明の活動以外にも，第 1 学年に，具体物を操作しながら説明する活動として，次のような例が示されている．

> 具体物を等分することについては，全体を同じ数ずつ幾つかに分けたり，全体を幾つかに同じ数ずつ分けたりする活動を扱う。例えば，８本の鉛筆を，２本ずつや４本ずつなど，同じ数ずつ分けると何人に分けられるかを操作や図で説明したり，分けられた結果を式に整理して表したりする。このような活動を通して，８という一つの数を多面的にみることができるようにし，数についての感覚を豊かにする。（文部科学省(2008b), p.58）

○○ ○○ ○○ ○○　　○○○○ ○○○○

２＋２＋２＋２　　　４＋４

また，第 3 学年では，「式と図の関連付け」として，以下のような例も示されている．

> 第３学年では，式の指導において，具体的な場面に対応させながら，数量や数量の関係を式に表すことができるようにするとともに，式が表している場面などの意味を読み取ったり，式を用いて自分の考えを説明したり，式で処理したり考えを進めたりするなど，式を使いこなすことができるようにする。（文部科学省(2008b)，p.110）

○ ○ ○ ○

3 × 4　⟷　○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○

このように，操作を根拠として数の性質や計算の意味を説明するという活動は，低学年や中学年の段階では行われているが，高学年段階になると，数直線のような抽象的な図を用いて説明する活動が中心となり，操作的な説明はほとんど扱われることがなくなる．これは，

発達段階的に，学年が進むにつれて用いる表現方法自体も抽象化されてきて，その先の学習として中学校段階における文字を用いた形式的な証明があるという捉え方によるものと思われるが, 文字を用いた代数的な証明は, 単に表現方法が抽象的であるというだけではなく, 一般性を有する命題に関する演繹的な推論である．従って，単に表現方法を抽象化していっただけでは，代数的証明そのものの意味は理解できないのである．このようなことを考えるならば，図や操作を根拠とした説明を，小学校の低学年や中学年の段階だけではなく，小学校高学年や中学校段階においても扱い, 一般性をもった命題として成り立つことを説明するということの意味をその都度考えさせることが有効なのではないだろうか. これについては, 操作的証明のもつ機能に関する考察課題として, 次章以降において詳しく論じることとする.

２．全国学力・学習状況調査にみる，「説明する活動」に関する児童の学習状況

学習指導要領解説を概観することを通して，小学校段階での説明する活動は，中学校段階から始まる本格的な演繹的推論としての証明の学習のための素地的な学習として, 図や操作を根拠とした説明活動として扱われているということが明らかとなった．では，それらの学習に対する児童の学習状況はどのような現状にあるのだろうか．ここでは，全国学力・学習状況調査における「説明すること」に関する問題やその正答率等を分析することを通して，小学校段階における「説明する活動」の学習活動の実態を把握していく．

（１）全国学力・学習状況調査における「説明すること」に関する問題

全国学力・学習状況調査は，小学校第 6 学年および中学校第 3 学年の児童生徒を対象として平成 19 年度から実施されている全国規模の学力調査である．平成 19 年度から平成 21 年度までの 3 年間は悉皆調査という形で実施されてきたが，一定規模の調査であれば全国規模の傾向を把握できるとして，平成 22 年度，平成 24 年度は 3 割程度の児童生徒を対象とする抽出調査となった．平成 25 年度からは再び悉皆調査として実施され，平成 26 年度調査で 7 回目の調査となっている．

算数・数学に関する調査は,「身に付けておかなければ後の学年等の学習内容に影響を及ぼす内容や, 実生活において不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい知識・技能など」に関係する「算数 A・数学 A」と「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などに関わる内容」に関する「算数 B・数学 B」とから構成されており,「算数 A・数学 A」では，選択式

や短答式を中心とした知識・技能に関する出題,「算数 B・数学 B」では,記述形式も含む課題解決力に関する出題がなされている.

調査結果については,正答率等のデータが各自治体の教育委員会や学校単位でフィードバックされることから,いたずらに競争をあおるとの批判がある一方で,それぞれの問題や生徒の回答傾向について,毎年詳細な分析が行われ,報告書や指導法の改善に向けた授業アイデア集等を通して,学校現場の授業改善のための取り組みが行われている.

小学校段階における「説明すること」に関する出題は,「算数 B」の中で記述式の問題として出題されてきている.2012 年に国立教育政策研究所から出された『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ』には,「算数 B」における記述形式の問題の種類として,以下の 3 つが示されている.

■「事実」を記述する問題

「事実」を記述する問題では,計算の性質,図形の性質や定義,数量の関係の記述を求めること,表やグラフなどから見いだせる傾向や特徴の記述を求めることが考えられる。また,「事実」を記述する際には,説明する対象を明らかにして記述することが求められる。

■「方法」を記述する問題

「方法」を記述する問題では,問題を解決するための自分の考え方や解決方法の記述を求めること,他者の考え方や解決方法を理解して,その記述を求めることが考えられる。また,ある場面の解決方法を基に別の場面の解決方法を考え,その記述を求めることが考えられる。

■「理由」を記述する問題

「理由」を記述する問題では,ある事柄が成り立つことの理由や判断の理由の記述を求めることが考えられる。また,「理由」を記述する際には,「A だから B となる」のように,A という理由及び B という結論を明確にして考え,それを記述することが求められる。さらに,理由として取り上げるべき事柄が複数ある場合には,それらを全て取り上げて記述することが求められる。 (国立教育政策研究所(2012),p.43)

「事実」「方法」「理由」のいずれを記述する問題も「説明すること」に関わる記述形式の問題ではあるといえるが,演繹的推論の素地的指導として小学校段階で行われる「説明する活動」を考えるならば,これらの中で,最も関連が深いのは「理由」を記述する問題であろ

う．特に，「A だから B となる.」というように，理由と結論をセットにして記述する形式は，探究した事柄について根拠を明らかにしながら説明を行うという広義の論証活動の典型的なものであり，中学校段階から本格的に指導される証明に関する学習の基礎となるものである．そこで，ここでは，3 つの種類の記述形式の問題のうち，「理由」を記述する問題に焦点を絞って，全国学力・学習状況調査で出題された問題を分析することを通して，「説明すること」に関する児童の学習状況の現状を考察したい．

（２）「理由」を説明する問題の正答率と指導上の課題

全国学力・学習状況調査のうち，すでに調査結果報告書が出されている平成 19 年度から平成 25 年度（平成 23 年度は未実施）までの 6 回の調査をみると，「算数 B」において「理由」を説明する問題として出題された記述式の問題は，全部で 16 題ある．それらの問題の概要と正答率等についてまとめたものが，以下の表 1‐2 から表 1‐7 である．

【表 1‐2 :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 19 年度調査，算数 B）】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
1(3)	全体の長方形から内部の長方形を除いた残りの部分の面積が，設問(2)のもとの図形の面積と等しいことの理由を説明する.	量と測定	68.1%	8.7%
5(3)	長方形の形をした公園と，平行四辺形の形をした公園について，面積が広い方の公園を答え，その理由を説明する.	量と測定	18.2%	3.5%
6(2)	２人の走り高跳びのめあてについて，計算せずに大小を比較できる理由を説明する.	数量関係	51.4%	20.3%

【表 1‐3 :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 20 年度調査，算数 B）】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
1(2)	どの 2 つの戸棚を選んで置いても，ドアを開け閉めすると，ドアが戸棚に当たってしまうわけを書く.	数と計算	30.3%	11.9%
2(3)	米の生産額について，「割合が減っているから，	数量関係	17.6%	1.9%

	生産額は減っている」という考え方が正しいかどうかを判断し，そのわけを書く.			
$\boxed{3}$(3)	長方形と四角形について, 各頂点を中心に円の一部をかき, それらを合わせた面積の関係をとらえ，判断のわけを書く.	量と測定 図形	33.4%	6.1%

【表１-４ :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 21 年度調査，算数 B)】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
$\boxed{3}$(3)	２種類の品物を買うとき，与えられた条件では, ハンカチを買うともう１種類の品物が買えないわけを書く.	数と計算	33.8%	9.1%
$\boxed{5}$(3)	４月と６月の全体の重さを基にしたペットボトルの重さの割合の大小関係をとらえ, 判断のわけを書く.	数量関係	17.9%	7.5%

【表１-５ :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 22 年度調査，算数 B)】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
$\boxed{4}$	平行四辺形から台形に図形を変えて, 示された２つの三角形の面積が等しいことの説明を書く	量と測定	33.5%	21.8%
$\boxed{5}$(2)	割引券を使うと値引きされる金額が最も大きくなる商品を選び，そのわけを書く.	数量関係	17.4%	4.4%
$\boxed{6}$(2)	バスのドアが動く様子を表した図を見て, 円周の一部と直線の長さの大小についての正しい記述を選び，判断のわけを書く.	図形	14.9%	9.1%

【表１-６ :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 24 年度調査，算数 B)】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
$\boxed{1}$(2)	代金 630 円に対して，1030 円よりも 1130 円を支払ったときの方が, おつりの硬貨の枚数が少なくなるわけを書く.	数と計算	42.8%	5.6%

$\boxed{2}$(2)	中型の跳び箱を 70cm の高さにすることができるかどうかを判断し，そのわけを書く.	数と計算 量と測定 数量関係	27.0%	1.2%
$\boxed{5}$(3)	示された表から, 合計の人数を基にした乗れる人数の割合は, 男子と女子ではどちらの方が大きいかを判断し，そのわけを書く.	数量関係	23.8%	10.5%

【表 1 - 7 :「理由」を説明する問題の正答率等（平成 25 年度調査，算数 B)】

設問	設問の概要	領域	正答率	無答率
$\boxed{1}$(2)	三つの乗り物券の買い方を比較して, どの買い方が一番安いかを選択し，そのわけを書く.	数と計算	51.0%	0.9%
$\boxed{5}$(2)	帯グラフに示された割合と基準量の変化を読み取り, インターネットの貸出冊数の増減を判断し，そのわけを書く.	数量関係	44.7%	7.8%

これらの出題を見ると,「理由」を説明する記述式の問題については，16 題のうち 10 題が，何らかの「判断」をした上でその「理由」を記述する問題となっており，活用の文脈での「説明すること」が，単なる理由の説明ではなく，判断を伴ってその判断の理由を記述するような，広義の論証活動（proving）として位置付けられていることが分かる．また，出題分野に関しても，数と計算や数量関係など，数の性質に関する出題が 11 題と最多となっており, 学習指導要領における算数的活動と同様, 数や計算のきまりや性質に関する説明が, 小学校段階での「説明する活動」の中心となっていることが分かる.

正答率に関しては，平成 19 年度の$\boxed{1}$(3)（68.1%），$\boxed{6}$(2)（51.4%）や平成 25 年度の$\boxed{1}$(2)（51.0%）など，過半数が正解できている問題もあるが，正答率が 30%未満の問題が 16 題中 7 題（43.8%）となっており，中でも，平成 19 年度の$\boxed{5}$(3)（18.2%），平成 20 年度の$\boxed{2}$(3)（17.6%）, 平成 21 年度の$\boxed{5}$(3)（17.9%）, 平成 22 年度の$\boxed{5}$(2)（17.4%）, $\boxed{6}$(2)（14.9%）のように，正答率が 20%を下回る問題も多く,「理由」を記述して説明する問題に対する児童の理解には課題があると言わざるを得ない.

特に正答率の低かった問題には，平成 20 年度の$\boxed{2}$(3)，平成 21 年度の$\boxed{5}$(3)，平成 22 年度の$\boxed{5}$(2)のように「割合」の内容に関わるものが多く, 算数科としての内容の難しさから,「理由」を説明する問題でも正答率が低くなっているという見方もできるが，解答類型を見

てみると，単に割合についての理解が不十分であるために「理由」の説明ができていないわけではないことが分かる．例えば，以下は，平成 22 年の $\boxed{5}$(2)の問題である．

(2) ひろしさんは，下のような定価で売られているシャツ，ズボン，くつを1品ずつ買います。

ア　イ　ウ

シャツ	ズボン	くつ
定価 1900 円	定価 3900 円	定価 5800 円

ひろしさんは，右の図のような割引券を1枚持っています。その割引券には，「1品に限り，定価の 20％引き」と書かれています。

割 引 券
1品に限り，
定価の 20％引き

シャツ，ズボン，くつのうち，どれに割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなりますか。

上の **ア** から **ウ** までの中から1つ選んで，その記号を書きましょう。また，その記号の商品に割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなるわけを，言葉や式を使って書きましょう。

【図 1-6 ：平成 22 年度 算数 B $\boxed{5}$(2)の設問】

この問題の正答の条件では，**ウ**を選択して，その理由として，①商品の定価（基準量）はくつが最も高いこと，②割引率（割合）が一定（20%）であること，③比較量，基準量，割合の関係，を記述すること，もしくは，シャツ，ズボン，くつのすべてについて，割引される金額を計算して，それを根拠とすることが求められている．この問題の正答率は 17.1% であるが，正答できなかった児童のうち 22.8%は，「くつが一番高いから」のように，①だけを書いていたり，「くつが一番高くて 20%引きだから」というように，①と②のみを記述

しており,「割引率が 20%で一定なので,定価が高いほど割引額も大きくなる」という比較量,基準量,割合の関係について言及できていなかったりする解答であった.この 22.8%の児童は,値引きされる金額が一番大きくなる商品として**ウ**を答えており,「くつの定価が一番高いこと」(くつが基準量として最大であること)や「割引率が 20%であること」(割合が一定であること)は記述できているため,割合そのものの考え方は理解できていると考えられる.しかし,単に問題から読み取れる情報だけを記述するにとどまっており,それらを根拠とするためには「比較量,基準量,割合」の関係に言及する必要が理解できていないということである.

このように,根拠となりうる事実を捉えることはできているが,それらを適切に組み合わせたり,根拠とするためにそれらの関係を明確に示したりして理由を説明できないという児童の姿は,小学校段階における「説明すること」に関する学習の定着状況を端的に表したものであるといえよう.小学校段階での「説明する活動」は,中学校から始まる本格的な演繹的推論の素地的指導の段階であることは事実であるが,中学校からは,単なる理由の説明ではなく,説明する事柄を「一般性を有する数学的命題」として捉え,その成り立つ理由を説明していくという論証活動を学習することを考慮するならば,小学校段階から,「何を根拠とするのか」だけではなく,「それらを根拠とするためには何を記述しなければならないのか」までを考慮して説明する力を身に付けさせておく必要があるだろう.

２節　中学校数学科における代数的証明の指導の概要

小学校での「説明すること」の学習を経て,中学校では本格的な論証指導が始まることになる.「証明を書くこと」としての論証指導は,厳密には中学校第 2 学年の「図形」の領域において扱われるため,これに先立って指導される「文字を用いた説明」の学習内容は,「証明」としてではなく「説明」として扱われており,文字を用いた数や式の表現について学習する単元の 1 つの活用場面として位置付けられている.

しかし,ここでは,数の性質を探究し,一般的に成り立つ数の性質を見出すとともに,これが一般的に成り立つことを文字を用いて説明するという一連の学習活動が展開されることになり,これはまさに探究,発見,理由づけを含む総合的な学習プロセスとしての広義の意味での論証活動(proving)に当たる活動である.代数的な式変形の学習の延長であるとともに,論証指導の基礎であることを考慮し,広義の論証活動(proving)としての学習を

展開していく必要があるだろう．

本節では，小学校での「説明すること」に関する学習を受けて，中学校段階における「代数的証明」の学習が，どのように意図され，実施されているのか，学習指導要領や教科書において具体的にどのように位置づけられているのか，また，「代数的証明」について学習に対する生徒の達成度の現状はどのようになっているのかを，学習指導要領，教科書，全国学力・学習状況調査の結果等の分析を通して考察し，課題を明らかにする．

１．学習指導要領における代数的証明の位置づけ

平成 20 年 3 月改訂の中学校学習指導要領 1)では，代数的証明に関する内容として，第 2 学年および第 3 学年に「文字を用いて説明すること」が示されている．第 2 学年では，「２ 内容」の「A 数と式」の領域の(1)として，《具体的な事象の中に数量の関係を見いだし，それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うとともに，文字を用いた式の四則演算ができるようにする．》（文部科学省(2008c)，p.50）とした上で，具体的項目の「イ」として，《文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること》（文部科学省(2008c)，p.50）と示されている．

また，これを受けて第 3 学年では，同じく「２ 内容」の「A 数と式」領域の(2)として，《文字を用いた簡単な多項式について，式の展開や因数分解ができるようにするとともに，目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす．》（文部科学省(2008c)，p.53）としたうえで，具体的項目の「ウ」として，《文字を用いた式で数量及び数量の関係を説明すること》（文部科学省(2008c，p.53)）と示されている．

平成 10 年改訂の学習指導要領 2)においては，「文字を用いた説明」に関する記述は第 2 学年のみにあり，第 3 学年では多項式の展開と因数分解についての記述はあるものの，学習指導要領の内容の記述としては「文字を用いた説明」について触れられていない．このことは，今回の改訂において，特に「説明する活動」が重視されていることの表れであると言えよう．これについて，学習指導要領解説（数学編）には，次のような記述がみられる．

…第 2，3 学年において，文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ説明ができること，目的に応じて簡単な式を変形したり，その意味を読み取ったりする能力を養い伸ばすことが明示された．これは，従来も行われてきたことであるが，今回の改訂

で言語活動の充実が各教科等を通じて重視されたことを踏まえ，表現したり読み取ったりしたことを基に，説明したり伝えあったりすることの重要性が改めて強調されたからである．…（文部科学省(2008d)，p.38）

確かに，従来からも第3学年の「多項式の展開や因数分解」の学習の最後に，式の計算の利用という位置づけで，「文字を用いた説明」が取り扱われてはいたが，多項式の変形に重点が置かれたものであって，「文字を用いた説明」のための学習内容という位置づけではなかった．今回，学習指導要領に内容として明示されたことによって，より「文字を用いた説明」としての位置づけが重視されたと捉えることができる．

また，それぞれの学年での取り扱いについて，第2学年と第3学年の具体的項目の文末を比較してみると，第2学年では「説明できることを理解すること」となっているのに対して，第3学年では「説明すること」となっている．これは，第2学年では文字を用いた数の表し方等について学習するとともに，それを用いて説明するという代数的証明の構造を理解し，第3学年にかけて，徐々に，生徒自身が代数的証明ができるようになるといったように，2年間にわたって代数的証明に関する学習を行うことが内容として求められていると言えよう．

つまり，言語活動の充実が重視された今回の学習指導要領の改訂によって，これまで第2学年の内容としてしか示されていなかった「文字を用いた説明」が，第2学年，第3学年にわたって明示され，しかも学年段階によって達成レベルが想定されているということは，代数的証明に関する学習が，これまで以上に学習内容としての位置づけが明確化され，重視されていることの表れであると言えよう．

２．教科書における代数的証明の取扱い

言語活動の充実を受けて，学習指導要領においては，代数的証明としての「文字を用いた説明」の位置づけが，より明確になったことが分かったが，実際に生徒が学習する教科書においては，どのような取扱いになっているのか，主要3社の教科書（藤井(2012a)，藤井(2012b)，岡本(2012a)，岡本(2012b)，一松(2012a)，一松(2012b)，杉山(2010a)，杉山(2010b)，岡本(2010a)，岡本(2010b)，一松(2010a)，一松(2010b)）をもとに分析する．

（１）教科書における代数的証明に関する学習内容の割合

下の表１‐８，表１‐９は，３社の中学校の教科書において，代数的証明に関する内容が取り扱われているページ数をまとめたものである．旧課程時期との比較のために，平成22年発行の教科書（杉山(2010a)，杉山(2010b)，岡本(2010a)，岡本(2010b)，一松(2010a)，一松(2010b)，移行措置用補助教材を除く）と平成24年発行の教科書（藤井(2012a)，藤井(2012b)，岡本(2012a)，岡本(2012b)，一松(2012a)，一松(2012b)）を比較している．なお，代数的証明のページ数については，章末問題等は含まず，教科書の内容として「文字を用いた説明」を取り扱っているページ数を示した．

【表１-８教科書会社における代数的証明のページ数（第２学年）】

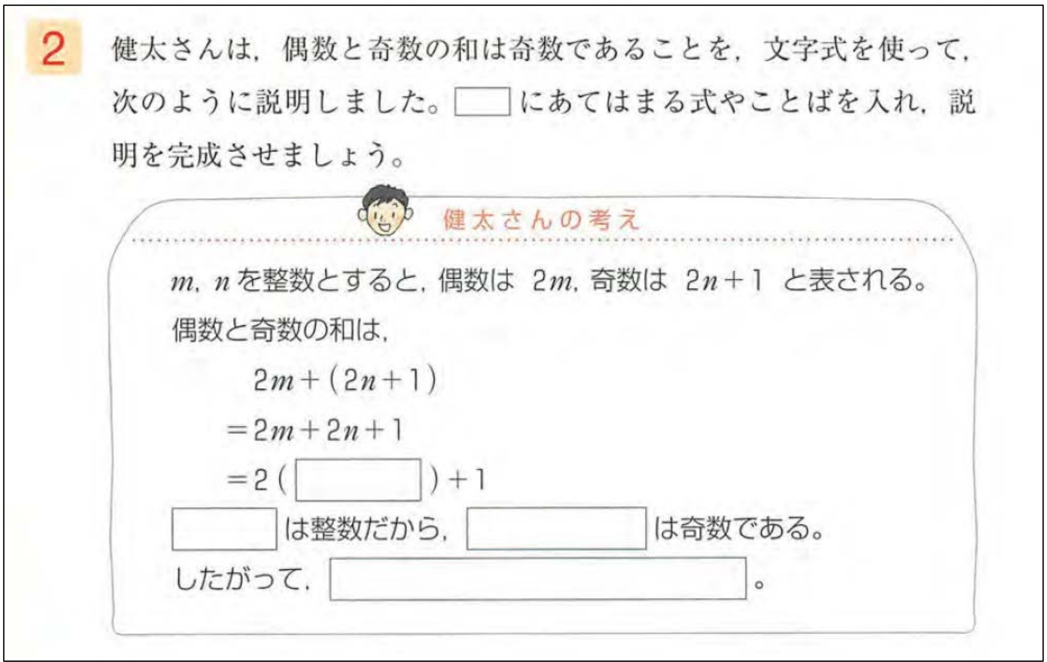
教科書会社		Ｔ社	Ｋ社	Ｇ社
H22年	全体のページ数	208	178	188
	単元のページ数	20	18	22
	代数的証明のページ数	3	2	3
	全体に対する割合	1.4%	1.1%	1.6%
H24年	全体のページ数	212	206	220
	単元のページ数	24	20	26
	代数的証明のページ数	3	3	5
	全体に対する割合	1.4%	1.5%	2.3%

【表１-９：教科書会社における代数的証明のページ数（第３学年）】

教科書会社		Ｔ社	Ｋ社	Ｇ社
H22年	全体のページ数	208	180	188
	単元のページ数	28	24	28
	代数的証明のページ数	3	3	3
	全体に対する割合	1.4%	1.7%	1.6%
H24年	全体のページ数	256	262	276
	単元のページ数	28	28	32
	代数的証明のページ数	4	5	4
	全体に対する割合	1.5%	1.9%	1.4%

これを見ると，全体的な傾向として，旧教育課程から現行の学習指導要領に沿った教育課程へと移行したことによって，数学という教科自体の時間数が増加し，教科書全体のページが増えているため，それに伴って代数的証明に関して扱ったページも，1 ページないし 2 ページ程度増えているものの，特に今回の教科書の改訂によって，教科書の分量という面では，代数的証明の取り扱いが特に重視されたということは読み取れない．

しかし，各社とも教科書での取り扱いが増加したことによって，これまでの教科書の扱いとは異なるアプローチによる代数的証明の内容の取扱いを行っている部分もあった．例えば，図 1 は，G 社の第 2 学年の教科書の代数的証明に関する部分で，代数的証明の書き方を扱ったものである．



2 健太さんは，偶数と奇数の和は奇数であることを，文字式を使って，次のように説明しました。□ にあてはまる式やことばを入れ，説明を完成させましょう。

健太さんの考え

m，n を整数とすると，偶数は $2m$，奇数は $2n+1$ と表される。
偶数と奇数の和は，

$$2m+(2n+1)$$
$$=2m+2n+1$$
$$=2(\boxed{})+1$$

□ は整数だから，□ は奇数である。
したがって，□。

【図 1 - 7 ：教科書における代数的証明の取り扱い】（一松(2012)，p.25）

偶数と奇数の和が奇数になることの一般的な証明を，空欄を埋めることによって完成させる問題である．これまでもこのような課題を第 2 学年で扱うことはあったが，一般的な証明の書き方を示し説明の内容を理解することに重点が置かれており，実際に書かせることを意図した紙面構成にはなっていなかった．しかし，上記の取り扱いでは，式計算が終わった後，最後の 2 行において結論部分を正しく表現することを含めて，代数的証明の書き方を指導しようとする意図が読み取れる．学習指導要領において，「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」という記述にとどまっている

にもかかわらず，教科書において具体的に書かせることを意図した取り扱いがなされるということは，今回の学習指導要領の改訂，および教科書の改訂において，「言語活動の充実」が強く意識されていることの表れであろう．

（２）教科書で扱われている題材

では，具体的に教科書では，どのような題材を用いて代数的証明に関する学習を行おうとしているのであろうか．表１-１０，表１-１１は，平成 24 年度版の教科書（藤井(2012a)，藤井(2012b)，岡本(2012a)，岡本(2012b)，一松(2012a)，一松(2012b)）をもとに，扱われている題材についてまとめたものである．

【表１-１０：代数的証明の題材（第２学年）】

題 材	T 社	K 社	G 社
連続する 3 つの整数の和			◎○
連続する 5 つの整数の和	◎		
連続する 2 つの奇数の和			△
連続する 3 つの偶数の和	△		
差が 3 である 3 つの整数の和			△
2 桁の自然数とその数の一の位と十の位を入れかえた数の和	◎	◎	◎
2 桁の自然数とその数の一の位と十の位を入れ変えた数の差	○	◎	○
3 桁の自然数とその数の一の位と百の位を入れかえた数の差			◇
奇数＋奇数＝偶数	◇	◎	◎
偶数＋奇数＝奇数		○	○
偶数＋偶数＝偶数		△	○
カレンダーの数の並び	◎○	△	
数あてゲーム	◇	◇	
その他（図形関係など）	△		◎△◇

【表１-１１：代数的証明の題材（第３学年）】

題　材	T 社	K 社	G 社
連続する奇数の積に 1 を加えると 4 の倍数	◎	○	
連続する偶数の積に 1 を加えると奇数の 2 乗	△	◎	◎○
連続する奇数の 2 乗の差は 8 の倍数			○
連続する 2 数の 2 乗の差	○	△	△
連続する 3 整数の最大数の 2 乗と最小数の 2 乗の差			△
連続する 3 整数の中央の数の 2 乗から 1 を引くと残り 2 数の積			○
2 つの奇数の積は奇数			△
道幅×長さ＝面積(円)	◎	◎	◎
道幅×長さ＝面積(円以外)	○	○	○
十の位が等しく一の位の数の和が 10 である 2 つの自然数の積	◎△	◎	◇
十の位の数の和が 10 で一の位が等しい 2 つの自然数の積		○	

※表中における記号は，◎：例題レベル，○問レベル，△章末問題レベル，◇コラム等のレベルでの扱いであることを示す．

これを見ると，第２学年，第３学年とも，代数的証明の題材として扱われている命題は，いくつかの大きなカテゴリーに分けることができる．

まず，第２学年では，「連続する整数の和に関する問題」「2 桁の自然数の十の位と一の位を入れかえた数との和や差に関する問題」「偶数や奇数の和や差に関する問題」という 3 つのカテゴリーに分けることができる．

このうち，「2 桁の自然数の十の位と一の位を入れかえた数との和や差に関する問題」については，3 社とも例題のレベルで取り上げており，重点的な扱いがなされている．この問題は，平成 19 年度の全国学力・学習状況調査でも出題され，指導の改善のための授業アイデア例などとして示されたものである．

他の 2 つのカテゴリーの問題については，各社においてその取扱いに差が見られた．「連続する整数の和に関する問題」に関しては，T 社と G 社のみが扱っており，K 社は扱っていない．また，「偶数や奇数の和や差に関する問題」では，K 社と G 社が例題，問のレベルで扱っているのに対して T 社ではコラムでの扱いにとどまっている．また，3 つのカテゴリー以外の題材でも，T 社，K 社がカレンダーや数あてゲームを扱っているのに対して，G 社では図形関係の問題を重点的に扱っているなど，教科書による違いを見ることができた．

第 3 学年では，「連続する整数や奇数・偶数の 2 乗を含む数の性質に関する問題」「道幅と道の長さの積に関する問題」「ある条件を満たす 2 位数どうしの積に関する問題」という 3 つのカテゴリーに分けることができる．

第 3 学年におけるこれらのカテゴリーの題材の扱いに関しては，ほとんど差が見られなかった．「道幅と道の長さの積に関する問題」は 3 社ともにおいて例題レベル，問レベルで扱われており，「連続する整数や奇数・偶数の 2 乗を含む数の性質に関する問題」も多少の違いはあるものの，3 社ともで例題レベルの扱いがされている．強いて違いを上げるとすれば，G 社の教科書では「連続する整数や奇数・偶数の 2 乗を含む数の性質に関する問題」において様々なバリエーションを扱っている一方で，「ある条件を満たす 2 位数どうしの積に関する問題」に関しては，コラムでの扱いにとどまっているということであろう．

このように見てみると，細かい題材の違いはあるものの，第 2 学年，第 3 学年とも教科書会社によって扱われている題材は大きく異なることはなく，これまでの教科書で扱われてきた定番と言われる問題が出そろっていることが分かる．しかしこのことは，図形領域において扱われる題材が多岐にわたるのに対して，代数的証明で扱われる題材は非常に限られていることを示している．今後，代数的証明の学習内容の改善に当たっては，新たな教材の開発ということも大きな課題となるであろう．

３．全国学力・学習状況調査からみる代数的証明に関する生徒の学習状況

ここでは，全国学力・学習状況調査の出題傾向と調査結果を分析することを通して，中学校第 2 学年における代数的証明に関する学習においてどのような力を身に付けることが期待されているのか，また，そのような課題に対して生徒の理解の現状はどのようになっているのか，ということについて考察する．

（１）全国学力・学習状況調査における代数的証明に関する問題

代数的証明に関する問題は，中学校第３学年を対象とした「数学 B」の中で毎年扱われており，記述形式も含めて，「文字を用いて説明すること」に関する生徒の理解度が調査されている．次の表１-１２は，これまでの調査において出題された問題の概要をまとめたものである．

【表１-１２：代数的証明に関する問題の概要】

平成 19 年度	連続する３つの自然数の和が３の倍数になることの説明を読み，連続する５つの自然数の和が５の倍数になることの説明を完成する．
平成 20 年度	2 桁の自然数とその位を入れ替えた数との和が 11 の倍数になることの説明を完成させ, 差の場合はどのような数になるかを予想する．
平成 21 年度	連続する３つの自然数の隣り合う２数を足していく計算フォーマットにおいて，３段目の数が４の倍数になることの説明を完成させるとともに，２段目の数についてわかることを記述する．
平成 22 年度	連続する３つの奇数の和についての予想に対して反例を挙げ，予想を修正して連続する３つの奇数の和が３の倍数になることの説明を完成させる．また，連続する４つの奇数の場合には和がどのような数になるか予想する．
平成 23 年度	連続する３つの自然数の和が中央の数の３倍になることの説明を読み，連続する５つの自然数の和が中央の数の５倍になることの説明を完成する．
平成 24 年度	連続する ３ つの自然数の和が ３ の倍数になることの説明を完成させ，連続する３つの偶数の和がどのような数になるかを予想する．
平成 25 年度	2 けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差が９の倍数になる説明を完成する

これを見ると，内容としては，平成 20，21 年度調査を除いて「連続する整数や連続する奇数の和に関する問題」が扱われており，基本的な代数的証明の方法についての出題が，繰り返し行われていることが分かる．特に，平成 22 年度以降は，毎年出題の傾向は変化しているものの，題材としてはすべて「連続する自然数の和」に関するものであり，基礎・基本を重視した出題がなされていることが分かる．しかし，これは後述するよう

に，毎年のように出題されているにもかかわらず，正答率はほとんど伸びておらず，代数的証明に関する生徒の理解に課題が多いことの表れでもある.「文字を用いて説明する」ということに関して，どのようなことに困難を感じているのかということを明らかにするために，出題の視点を変えながら，毎年同じ題材で繰り返し調査をしていると見ることができる.

では，出題の趣旨はどのようになっているのであろうか．下の表１-１３は，平成 19 年度調査から平成 25 年度調査までの 7 回の調査において出題された「代数的証明」に関する問題の出題の趣旨をまとめたものである.

【表１-１３：代数的証明に関する問題の出題の趣旨】

平成 19 年度	自然数性質に関する説明を読み, 次のことができるかどうかをみる. ・説明を振り返って考えること ・発展的に考え，その結果を説明すること
平成 20 年度	2 けたの自然数について予想された事柄を読み，次のことができるかどうかをみる. ・事柄が成り立つ理由を，方針に基づいて説明すること ・発展的に考え，予想した事柄を説明すること
平成 21 年度	自然数について予想された事柄を読み，次のことができるかどうかをみる. ・事柄が成り立つ理由を説明すること ・説明を振り返って考えること
平成 22 年度	連続する奇数について予想された事柄を読み，次のことができるかどうかをみる. ・予想された事柄を振り返って考えること ・事柄が成り立つ理由を説明すること ・発展的に考え，成り立つ理由を説明すること
平成 23 年度	自然数の性質についての説明を読み，次のことができるかどうかをみる. ・与えられた説明を振り返って考えること ・発展的に考え，事柄が成り立つ理由を説明すること

平成 24 年度	連続する 3 つの自然数の和について予想された事柄を読み，次のことができるかどうかをみる． ・事柄が成り立つ理由を，方針に基づいて説明すること ・発展的に考え，予想した事柄を説明すること
平成 25 年度	見いだされた事柄について，次のことができるかどうかをみる． ・事柄が成り立つ理由を，方針に基づいて説明すること ・発展的に考え，見いだした事柄を説明すること

これを見ると，代数的証明に関する出題にあたって，いくつかのキーワードが設定されていることが分かる．これらのキーワードは，全国学力・学習状況調査の「数学 B」の出題にあたって様々な領域の問題でも用いられているもので，全国学力・学習状況調査の「活用」の問題作成の枠組みの中に，「数学的なプロセス」として示されているものである．

問題作成の枠組みでは，「活用する力」として，「α：知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力」と「β：様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」および「γ：上記α，βの両方に関わる力」という 3 種類が示されており，そのそれぞれについて，関連する数学的プロセスが示されている．次の表１-１４は，それらの数学的なプロセスをまとめたものである．

【表１-１４：「活用」の問題作成の枠組みにおける数学的なプロセス】

α：知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力	<u>α１：日常的な事象等を数学化すること</u> α１(1)ものごとを数・量・図系統に着目して観察すること α１(2)ものごとの特徴を的確にとらえること α１(3)理想化，単純化すること <u>α２：情報を活用すること</u> α２(1)与えられた情報を分類整理すること α２(2)必要な情報を適切に選択し判断すること <u>α３：数学的に解釈することや表現すること</u> α３(1)数学的な結果を事象に即して解釈すること α３(2)解決の結果を数学的に表現すること

β：さまざまな課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力	β１：問題解決のための構想を立て実践すること β１(1)筋道を立てて考えること β１(2)解決の方針を立てること β１(3)方針に基づいて解決すること β２：結果を評価し改善すること β２(1)結果を振り返って考えること β２(2)結果を改善すること β２(3)発展的に考えること
上記α，βの両方に関わる力	γ１：他の事象との関係をとらえること γ２：複数の事象を統合すること γ３：事象を多面的に見ること

表1-１３の代数的証明に関する問題の出題の趣旨の中では，「事柄が成り立つ理由を説明すること」（β１(1)に相当），「方針に基づいて説明すること」（β１(3)に相当），「説明を振り返って考えること」（β２(1)に相当），「発展的に考えること」（β２(3)に相当），という４つの「数学的なプロセス」が盛り込まれており，これら４つの「数学的なプロセス」が様々に組み合わされて毎年の出題の趣旨を構成していることが分かる．これら４つの「数学的なプロセス」の視点で，どの年度にどの「数学的なプロセス」が趣旨に盛り込まれているかをまとめると，表1-１５のようになる．

【表1-１５：出題の趣旨と「数学的なプロセス」】

年度	β１(1)	β１(3)	β２(1)	β２(3)
平成 19 年度	○		○	○
平成 20 年度	○	○		○
平成 21 年度	○		○	
平成 22 年度	○		○	○
平成 23 年度	○		○	○
平成 24 年度	○	○		○
平成 25 年度	○	○		○

これを見ると，代数的証明を行うことそのものである「事柄が成り立つ理由を説明すること」（β 1(1)）に関しては，毎年出題の趣旨に含まれているものの，代数的証明の構成に関する「方針に基づいて説明すること」（β 1(3)）については6回の調査で2回しか趣旨に含まれていない．それに比べて，すでに説明されたものを振り返って証明の構造を考えたり，そこから新たな性質を発見したりする「説明を振り返って考えること」（β 2(1)），「発展的に考えること」（β 2(3)）がほぼ毎年，趣旨に盛り込まれていることが分かる．これは，中学校第2学年での「文字を用いた説明」の単元が，「図形の証明」の単元に先立って指導されるため，証明としての学習よりも，文字を用いた式を変形することや様々な数の性質を見いだすことに重点が置かれていることが一つの要因として考えられる．学習指導要領でも「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」となっていることから，積極的に代数的証明そのものを構成するというレベルに踏み込みにくいことが読み取れる．

しかし，個別に問題を見てみると，決して代数的証明の構成に関しての出題がなされていないわけではない．平成22年度調査では，連続する3つの奇数の和についての予想に対して反例を上げて成り立たないことを説明する文章を完成させる出題がなされていたり，平成19年度調査，平成23年度調査では，類似した命題の説明が示されて，それをまねて証明を構成することを意図した出題が試みられたりしている．また，平成23年度調査では，出題の趣旨にこそ「方針に基づいて説明すること」が含まれていないものの，証明の方針に該当するような，目的に応じた式変形に関する内容が同じ問題の中の小設問として位置づけられていたりするなど，代数的証明の構成のために必要な様々な手立てが問題の中に組み込まれており，「振り返り」や「発展」に偏って出題がなされているわけではないことが分かる．

学習指導要領上は，第2学年の段階で，積極的に代数的証明を構成していくレベルまでは求められていないが，これらの調査において，様々な工夫をしながら代数的証明の構成に関する内容が出題されているということは，言語活動の充実に対応して，代数的証明が重視されていることの表れであろう．

（２）代数的証明に関する問題の正答率と指導上の課題

全国学力・学習状況調査の「数学B」において，毎年，代数的証明に関する問題が出題されており，様々な数学的なプロセスに対応した出題の趣旨が設定されていることが分か

ったが，これらの問題に対する実際の生徒の理解度はどの程度であったのだろうか．ここでは，これまでに実施された調査の調査結果報告書（文部科学省・国立教育政策研究所(2008b)，(2008d)，(2009b)，(2010b)，(2012d)，(2013b)）の記述をもとに，それぞれの年度における代数的証明に関する出題に対して生徒がどの程度，正答することができたのか，また，誤答パターン等からどのような学習指導上の課題が指摘されているのかについて考察していく．

【平成 19 年度調査】

平成 19 年度調査では，「連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数になること」に関する太郎さんの説明を読んで，(1)計算結果の 3(n+1)から，3 の倍数であること以外にどのようなことが言えるかを答える問題（選択形式），(2)「連続する 5 つの整数の和が 5 の倍数になること」の説明を完成させる問題（記述形式）が出題されている．

(1)の正答率は 56.0%で，報告書には，「文字式から新たな性質を読み取ることに課題がある」とされている．

また，(2)の正答率は 42.5%であるが，報告書では，最終的な計算式に対して「n+2 が整数なので」という根拠と「5(n+2)は 5 の倍数である」という結論部分を何らかの形で記述しようとした生徒は 60%程度であったことが示されている．このことは，逆に言えば，40%の生徒は，代数的証明に関して根拠と結論を示す必要性を理解していないと読み取ることができる．調査時期が第 3 学年の 4 月であることを考えると，第 2 学年での論証に関する学習を終えた段階の生徒で，約 40%の生徒が代数的証明のために何を記述する必要があるかを理解していないということになる．

【平成 20 年度調査】

平成 20 年度調査では，「2 桁の自然数とその位の数字を入れかえた数の和は 11 の倍数になる」という直樹さんの予想を読んで，(1)82 の場合にこの予想を確かめる問題（短答式），(2)この予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式），(3)2 桁の自然数とその位の数字を入れかえた数の差について予想できることを答える問題（記述形式）が出題されている．

(1)の正答率は 76.4%であるが，報告書では，110 という計算結果のみを書いているなど，表現が十分でない生徒が 14%いたことが指摘されている．

また，(2)の問題の正答率は 39.7%で，問題中に吹き出しによって証明の方針が示されているものの，平成 19 年度調査のように，証明の手本となる説明の例が示されていなかったことから，若干正答率が下がっている．報告書では，11x+11y と計算結果だけを記し，根拠と結論について記述していない生徒が 17.9%いたことが指摘されている．

(3)の正答率は 49.2%であり，報告書では，「予想した事柄を「～は…になる.」という形で表現することに課題がある」と指摘されている．

この年度の調査は，3 つの設問中 2 つが記述式であったが，そのどちらも正答率が 50%以下であり，代数的証明についての生徒の理解が十分でないという現状が示されたといえる．

【平成 21 年度調査】

平成 21 年度調査では，連続する 3 つの自然数を入れて隣同士を足して 2 段目，3 段目と数を入れていく計算フォーマットにおいて，「3 段目の数はいつも 4 の倍数になる」という健治さんの予想を読んで，(1)21，22，23 という連続する 3 つの自然数を 1 段目に入れたときの 3 段目を求める問題（短答形式），(2)「3 段目の数はいつも 4 の倍数になる」という予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式），(3)2 段目の 2 数の関係について分かることを答える問題（選択形式）が出題されている．

(1)は，この計算フォーマットの構造を理解できているかの確認問題であり，正答率も 86.0%と高い．

また，(2)はこれまでの出題と同様，4 の倍数になることの証明を完成させる問題であるが，正答率は 41.7%である．報告書では，4n+4 と計算した結果のみを示し，根拠と結論について記述していない生徒が 25.6%いたことが指摘されている．

(3)については，正答率は 58.8%であったが，報告書では，「連続する偶数」や「奇数と偶数」と答えた生徒が 21.6%おり，2n+1 や 2n+3 という表現から具体的な数がイメージできていないことが指摘されている．

この年度の調査問題は，前 2 年間の調査問題とは異なり，ある種の計算フォーマットを基に，その構造を説明するものであったが，説明する内容としては「4 の倍数になること」であるので，連続する自然数の和に関する問題と本質的には変わっていない．代数的証明を行う設問(2)についても，これまでと変わらない程度の正答率となっている．

【平成 22 年度調査】

平成 22 年度調査では，「連続する 3 つの奇数の和」について健太さんが具体的な奇数から考えている場面を読んで，(1)「連続する 3 つの奇数の和は 9 の倍数になる」という予想が正しくない理由を，反例を挙げて説明する問題（穴埋め・短答形式），(2)「連続した 3 つの奇数の和は 3 の倍数になる」という修正した予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式），(3)「連続した 4 つの奇数」について予想した事柄を答える問題（記述形式）が出題されている．

(1)は，反例を用いて成り立たないことを証明することを扱った問題であり，新しい試みであったが，正答率は 54.8%であった．報告書では，9 の倍数になる例（反例にならないもの）を挙げていた生徒が 10.8%，奇数でないものや連続しないものを挙げていた生徒が 18.1%いたことから，反例の意味やその示し方そのものについての理解が十分でない生徒がいる可能性があることが指摘されている．

(2)は，これまでと同様に「3 の倍数になる」ということを説明する問題であるが，計算の結果が 6n+3 という形になることから，3 の倍数になることが計算結果からは見えにくくなっていたため，正答率は 26.4%と，非常に低かった．このことは，説明すべき結論から判断し，目的に応じて式の変形を行うことに課題があるということを示していると言えるだろう．

(3)は，予想した事柄を記述する形式の問題で，正答率は 59.0%であったが，報告書では「1，3，5，7 の和は 4 の倍数になる」というように，具体数で記述しているものが見られ，一般に成り立つ命題ということの意味が捉えられていない生徒がいるということが指摘されている．

この年度の調査問題では，「反例を挙げて成り立たないことを説明する」ということを試みており，他の年度の調査問題とは異なった傾向を見ることができる．しかし，学習指導要領上，「反例を用いて成り立たないことを説明すること」が明確に位置づけられていないため，各社の教科書で扱われている程度の出題にとどまっているものと考えられる．また，代数的証明を行う部分では，計算結果の文字式を，目的に応じて変形することに課題があることが明らかになっており，「どのような結論を証明しようとするのか」また，「証明するためには何が言えればよいのか」ということについて，学習指導上の改善が必要であることが示唆されている．

【平成 24 年度調査】

平成 24 年度調査では，「連続する 3 つの自然数の和は 3 の倍数になる」という智也さんの予想を読んで，(1)「3 の倍数になることを示すには，3 と自然数の積になることを示せばよい」という方針を読んで，予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式），(2)「連続する 3 つの偶数の和」がどのような数になるかを予想して書く問題（記述形式）が出題されている．

(1)は，平成 22 年度調査の結果から，結論を示すために目的に応じて式を変形することに課題があることが明らかになったため，この部分を特に「説明の方針」として示し，説明を完成させる問題であったが，正答率は 38.8%と，これまで同様に低い結果となっている．依然として，代数的証明に関しては課題が多いことが明らかになったと言えよう．

(2)は条件を変更したときにどのようなことが成り立つかを予想する問題であるが，正答率は 57.0%であった．しかし，この中には，「2 の倍数になる」や「3 の倍数になる」と答えたものが 32.4%も含まれており，「6 の倍数になる」と答えられた生徒は，正答者数の半数以下である．また，ここでも「4，6，8 の和は 3 の倍数になる」のように具体数で記述しているものが見られ，一般に成り立つ命題ということの意味が捉えられていない生徒がいるということが指摘されている．

この年度の調査問題では，平成 22 年度調査で明らかになった課題をさらに追及しようとする姿勢が見られるが，「説明する命題の結論を把握し，それを示すために目的に応じた式変形を行う」ということに関しては，依然として生徒の理解は厳しい状況にあるといえる．また，自然数に関する様々な命題が一般に成り立つということに関する理解も十分ではない．今後の学習指導の改善に向けて，多くの示唆を残した調査である．

【平成 25 年度調査】

平成 25 年度調査では，「2 けたの自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の差は，9 の倍数になる」という大輝さんの予想を読んで，(1)「9 の倍数であることを説明するには，9 と整数の積になることをいえばよい」という方針から，予想がいつでも成り立つことの説明を完成させる問題（記述形式），(2)「2 けたの自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の和」がどのような数になるかを予想して書く問題（記述形式）が出題されている．

(1)は，扱っている数の性質は異なるものの，「9 の倍数になることを説明するには，9 と整数の積になることをいえばよい.」といった方針をもとに，予想がいつでも成り立つことを文字を用いて説明するという出題の流れは，前年度から踏襲されているにもかかわらず，正答率は 38.4%であり，方針に基づいて理由を説明することに，引き続き課題があることが示されている.

(2)も前年度同様，もとの命題を発展させた場面の具体例から，予想できることがらを記述する問題であるが，正答率は 29.3%であり，事柄を記述する問題としては低い正答率となっている.「2 桁の自然数と，その数の十の位と一の位を入れ替えた数の和は，割り切れる」のように，予想されることがら自体はつかめているものの，それを適切に表現できていない解答も見られるが，無解答率は 34.0%であり，依然として事柄を説明することに課題があるといえよう.

この年度の調査問題は，出題の形式として平成 20 年度調査，平成 24 年度調査と同様であり，「いつでも成り立つ理由を説明する問題」と「予想されることがらを記述する問題」とから構成されている. しかし，平成 20 年度調査，平成 24 年度調査と比較しても，正答率，無解答率は，大きな変化を見せておらず，文字を用いて説明することに関しては，この調査期間内において十分な改善がなされていないということが明らかになった.

（３）記述問題のタイプと正答率との関係

全国学力・学習状況調査の各年度の問題，および正答率について分析してきたが，ここで，記述問題の正答率と無回答率の関係について言及しておく.

全国学力・学習状況調査では，記述問題に関して，小学校の調査と同様に，「(a)見いだした事柄や事実を説明する問題」「(b)事柄を調べる方法や手順を説明する問題」「(c)事柄が成り立つ理由を説明する問題」という 3 つのタイプを設定している. 代数的証明に関するこれまでの出題では，これらのタイプのうち(a)と(c)のタイプの記述問題が出題されている. (a)のタイプとしては，平成 20 年度調査の$\boxed{2}$(3)，平成 22 年度調査の$\boxed{2}$(3)，平成 24 年度調査の$\boxed{2}$(2)，平成 25 年度調査の$\boxed{2}$(2)がこれに該当する. また，(c)のタイプとしては，予想やことがらが正しいことの説明を完成させる問題がこれに該当し，平成 19 年度調査の$\boxed{2}$(2)，平成 20 年度調査の$\boxed{2}$(2)，平成 21 年度調査の$\boxed{2}$(2)，平成 22 年度調査の$\boxed{2}$(2)，平成 23 年度調査（未実施）の$\boxed{2}$(3)，平成 24 年度調査の$\boxed{2}$(1)，平成 25 年度調査の

$\boxed{2}$(1)と全ての年度において出題されている．次の表１-１６，表１-１７は，それぞれのタイプ別に，各年度の正答率と無解答率を示したものである．

【表１-１６：理由を説明する記述問題の正答率と無解答率】

年度	問題の概要	正答率	無解答率
19	連続する 5 つの自然数の和が 5 の倍数になることの説明を完成させる．	42.5%	28.1%
20	2 けたの自然数と, その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の和が 11 の倍数になることの説明を完成させる.	39.7%	26.8%
21	1 段目に連続する 3 つの自然数を入れたとき, 3 段目の数が 4 の倍数になることの説明を完成させる.	41.7%	17.2%
22	連続する 3 つの奇数の和が 3 の倍数になることの説明を完成させる.	26.4%	27.3%
24	連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数になることの説明を完成させる.	38.8%	22.5%
25	2 けたの自然数と, その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の差が 9 の倍数になることの説明を完成させる.	38.4%	22.4%

【表１-１７：事柄を記述する問題の正答率と無解答率】

年度	問題の概要	正答率	無解答率
20	2 桁の自然数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差について予想した事柄を書く.	49.2%	36.1%
22	連続する 4 つの奇数の和について成り立つ事柄を書く.	59.0%	18.7%
24	連続する 3 つの偶数の和について予想した事柄を書く.	57.0%	23.4%
25	２けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数との和について予想した事柄を表現する.	39.3%	34.0%

これらを見ると，「代数的証明」を完成させるタイプの問題に関しては，平成 22 年度調査のみ 26.4%と正答率が低いが，概ねどの年度も 40%前後の正答率で推移している．また，無解答率も 25%前後で推移しており，このことから，第 3 学年の生徒の 4 人に 1 人は

「代数的証明」の構成に関して全く手を付けておらず，何らかの形で取り組んでいる生徒の約半数しか代数的証明を正しく構成できていないということが分かる．しかし，これまでの出題では，記述形式はすべて「正しいことの説明を完成させる問題」となっており，数を文字を用いて表す段階，連続する数の和などを式で表す段階まではすでに記述されている状態で，代数式を計算して結果を導き，証明したい結論に合わせて式変形し，根拠と結論を述べるところを記述する問題となっている．ということは，数を文字を用いて表す段階からすべてにわたって代数的証明を構成するということに関しては，おそらくほとんどの生徒がそのレベルに達していないものと考えられる．今後，全国学力・学習状況調査でどのレベルまで踏み込んで調査がなされるかは分からないが，「代数的証明」に関しては，学習指導上も課題となることが多いと言えるだろう．

また，発展的に考えたり，振り返って考えたりすることによって見出した事柄を，数に関して一般的に成り立つ命題として記述するタイプの問題に関しては，いずれも60%以下の正答率となっており，これについては，命題の一般性，数の性質の捉え方といった面から指導の改善が望まれるであろう．

４．「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」

代数的証明を構成する能力だけではなく，代数的証明のもつ一般性に関する理解にも着目した研究に，國宗(1997)の行った調査研究がある．國宗は，代数的証明に関する生徒の理解を，「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」という２つの視点から調査し分析している（國宗(1997)，pp.65-81）．このような視点の設定が必要であることの背景には，図形における論証でも同様であるが，実際に証明を書けることと，なぜそのような証明が必要なのかということの理解とは，必ずしも同時的に達成されるものではないという生徒の現状がある．國宗の研究では，このような生徒の証明に対する理解のずれを明らかにしようとしているのである．以下，それぞれの視点からの國宗の調査研究およびそれらの間の関係について概観してみよう．

（１）文字式による論証能力に関する調査

國宗は「文字式による論証能力」について，以下の表１-１８のような水準を設定している．

【表１-１８：文字式による論証能力の水準】

水準０	無回答，あるいは，問題文を繰り返していたり，説明になっていない.
水準１	文字式を使わずに，具体的な数値を挙げたり，言葉で説明しようとする.
水準２	文字式を使うが，不適切な使い方をする.
水準３	文字式を使って正しく説明する.

このような「文字式による論証能力の水準」を設定し，実際に文字式による証明を書かせる調査問題で，生徒がどの水準にあるのかということを分析した結果が，下の表１‐１９である.

【表１-１９：文字式による論証能力に関する調査結果】

	水準０	水準１	水準２	水準３
中学校第１学年	53%	41%	6%	0%
中学校第２学年	40%	25%	12%	23%
中学校第３学年	22%	18%	12%	48%

これを見ると，文字式を用いない水準１以下の生徒が，中学校第１学年で 94%，第２学年で 65%，第３学年でも 40%いることが分かる. 代数的証明に関する学習が第２学年から始まることを考慮しても，代数的証明を行うことが，生徒にとっていかに難しい課題であるかということが分かる.

（２）文字式による論証のもつ一般性についての理解に関する調査

國宗は，「文字式による論証のもつ一般性の理解」について，以下の表１‐２０のような水準を設定している.

【表１-２０：文字式による論証のもつ一般性についての理解の水準】

水準０	無回答.
水準１	文字を使って証明する意味を理解せず，帰納的な説明の不十分さも指摘できない.
水準 2-ア	文字を使って証明する意味は理解していないが，帰納的な説明の不十分さは指摘できる.

水準 2-イ	文字式を使って証明する意味は理解しているが，帰納的な説明の不十分さは指摘できない.
水準 3	文字式を使って証明する意味を理解し，帰納的な説明の不十分さも指摘できる.

このような「文字式による論証のもつ一般性の理解の水準」を設定し，「奇数と奇数の和は偶数である」という命題に対して示された 3 つの説明方法を読んで，それぞれ説明として十分であるか否かについて理由も合わせて答えるという調査問題によって調査を行っている．問題に示された 3 つの説明方法とは，帰納的な説明の不十分さを指摘できるかどうかを見るための「具体的な数値を用いて示している帰納的な説明」と，文字式を使って説明することの意味を理解しているかどうかを見るための「文字を用いて説明しているが，文字の用い方を間違っている説明」「文字を正しく用いた説明」という 3 つである．調査結果は，下の表１-２１に示したようになっている.

【表１-２１：一般性の理解に関する調査結果】

	水準０	水準１	水準２ア	水準２イ	水準３
中学校第１学年	12%	65%	8%	12%	3%
中学校第２学年	7%	35%	6%	23%	29%
中学校第３学年	3%	24%	5%	32%	36%

これを見ると，第 1 学年から第 2 学年にかけて，水準 1 以下の生徒が減少し，水準 2 以上の生徒が増加することが分かる．しかし，第 3 学年でも水準 3 に達する生徒は 36%であることが分かる．また，水準 2-アと水準 2-イを比較すると，どの学年でも水準 2-イの生徒が多い．文字を用いて証明することの意味については理解できていても，帰納的な説明の不十分さについては指摘できないという傾向にあることが示されている．このような結果は，図形領域における調査（例えば全国学力・学習状況調査の平成 21 年度調査「数学 A」の８や平成 23 年度調査「数学 A」の８）でも同様の傾向が示されている.

（３）「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」との関係

國宗の研究では，上記の「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性に関する理解」の調査結果をクロス集計し，生徒の発達水準に関する両者の関係を分析している．

それによると，まず，第 1 学年から第 2 学年にかけて，「文字式による論証能力」「文字式による論証のもつ一般性の理解」の両方について，水準 2 以上の生徒が増加するということが指摘されている．これは，図形を含めた証明に関する学習が第 2 学年から始まることを考慮すれば，予想される結果である．

また，「文字式による論証の力」に比べて「文字式による論証のもつ一般性の理解」は，水準 2 の占める割合が多く，特に，第 3 学年では，「文字式による論証能力」が水準 3 にあるにもかかわらず「文字式による論証のもつ一般性の理解」は水準 2 以下にとどまっている生徒が少なくないことが指摘されている．つまり，このことは，文字式の証明自体は書けているものの，文字を用いることの必要性やその証明の表している意味については十分理解できていない生徒が一定数いるということを示した結果であるといえる．

第１章のまとめ

本章では，学習活動としての論証指導の現状を把握するために，小学校段階から中学校段階にかけての代数的証明に関わる学習活動について，学習指導要領，教科書，各種学力調査の結果，先行研究等を分析し，課題の整理を行った．

まず，小学校段階では，学習指導要領の教科の目標や，算数的活動の中でも，様々な説明する活動の事例が紹介されていることから，中学校から本格的に行われる論証指導の素地指導として，数の性質や計算のきまりについて説明する活動が重視されているということが読み取れた．特に，そのような学習活動の中でも，本研究で考察の対象とする操作的証明（操作を根拠として数の性質や計算の仕組みを説明するという活動）に該当するような活動が示されていたことは注目に値するが，これらの活動は，低学年，もしくは中学年の学習活動事例として示されており，学年が進むにしたがって操作を根拠とするような説明活動は行われなくなっていく傾向にあることが分かった．

小学校の全国学力・学習状況調査では，記述形式の問題として，理由を説明する問題が出題されているが，その多くは，単なる理由の説明だけではなく，判断を伴ってその判断の理由を記述する問題となっており，小学校段階における「説明する活動」が，広義の論証活動（proving）として位置付けられていることが読み取れた．しかし，実際の児童の現状としては，正答率が 20%を下回る問題もあり，定着に関して課題があると言わざるを得ない．

次に，中学校段階では，学習指導要領の改訂によって，「説明し伝えあう活動」など，言語活動の充実が重視されてきたことを受けて，これまで第 2 学年にのみ記述されていた代数的証明に関する取扱いが第 3 学年でも記述されるようになるなど，若干ではあるが，重視されてきていることが読み取れた．

また，そのような学習指導要領の改訂を受けて，各社の教科書においても代数的証明に関する内容のページ数が増え，証明を書かせることを意図した紙面構成も見られるようになっているが，一方で，教科書で扱われている題材については，これまでの教科書で扱われてきた定番の内容にとどまっており，代数的証明に関する新たな教材の開発が待たれるところである．

中学校の全国学力・学習状況調査では，毎回，代数的証明に関する問題が出題されているが，どの年度の調査でも正答率は低く，「代数的証明を構成すること」に関して課題があ

ることが明らかになっている．加えて，これまでの調査では，数を文字を用いて表したり，示すべき事柄を文字を用いた式で表すことについては問われていないことから，これらを含めた完全解答型の代数的証明に関しては，ほとんどの生徒がそのレベルに達していないことが予想される．

さらに，代数的証明に関する理解を，「証明を構成する能力」と「証明の意義の理解」という 2 つの視点から見た場合，前者についてはある程度できていても，後者についての理解が十分でない生徒が一定数以上存在するということが明らかになっている．全国学力学習状況調査では，「証明を構成する能力」については調査されているものの，「証明の意義の理解」については，図形領域の問題において一部扱われているのみである．代数的証明においても「証明の意義の理解」に関する調査と合わせて，生徒の理解の現状を総合的に把握することが必要であろう．

【第１章における引用・参考文献】

岡本和夫ほか(2010a).『未来へひろがる数学２』, 啓林館.

岡本和夫ほか(2010b).『未来へひろがる数学３』, 啓林館.

岡本和夫ほか(2012a).『未来へひろがる数学２』, 啓林館.

岡本和夫ほか(2012b).『未来へひろがる数学３』, 啓林館.

国宗進 編著(1997).『中学校数学科・新しい授業づくり５，確かな理解を目指した文字式の学習指導』, 明治図書.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2007a).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2007b).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2008a).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2008b).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2009a).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2009b).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2010a).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2010b).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2011a).『解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2011b).『解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2012a).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2012b).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2013a).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2013b).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

佐々祐之(2012).「学校数学における代数的証明に関する一考察」,『熊本大学教育学部紀要』, 第 61 号人文科学編，pp.231-239.

杉山吉茂ほか(2010a).『新編 新しい数学２』，東京書籍.

杉山吉茂ほか(2010b).『新編 新しい数学３』，東京書籍.

中央教育審議会(2008).『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申）』，中央教育審議会.

一松信ほか(2010a).『中学校数学２』，学校図書.

一松信ほか(2010b).『中学校数学３』，学校図書.

一松信ほか(2012a).『中学校数学２』，学校図書.

一松信ほか(2012b).『中学校数学３』，学校図書.

藤井斉亮ほか(2012a).『新しい数学２』東京書籍.

藤井斉亮ほか(2012b).『新しい数学３』東京書籍.

文部科学省(2008a).『小学校学習指導要領』，東京書籍.

文部科学省(2008b).『小学校学習指導要領解説 算数編』，東洋館出版社.

文部科学省(2008c).『中学校学習指導要領』，東山書房.

文部科学省(2008d).『中学校学習指導要領解説 数学編』，教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008a).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008b).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008c).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008d).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009a).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009b).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2010a).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2010b).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012a).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ　～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～　小学校編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012b).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ　～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～　中学校編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012c).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012d).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2013a).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査報告書 小学校 算数』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2013b).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査報告書 中学校 数学』.

第２章

操作的証明の概念

第２章　操作的証明の概念

本章では，國本の研究をもとに，操作的証明の概念に関わるこれまでの証明に関する先行研究を概観する．また，操作的証明の概念を提唱したヴィットマン自身の研究をもとに，その目的，性格，位置づけを明らかにするとともに，ヴィットマン自身が典型的な操作的証明の例として挙げている「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を取り上げ，その特徴を考察するとともに，操作的証明が学習活動としてどのように具体化されるのかを示す．

１節　学校教育における「証明」の概念

わが国では，「証明」に関する学習は，中学校第 2 学年から導入されるが，この「証明」の内容は，中学校における数学の学習において，生徒が最も困難を感じるものの 1 つである．実際，平成 20 年度の全国学力学習状況調査の結果を見ても，方針をもとに図形に関する証明を書く問題では，証明の方針が示されているにもかかわらず，正答率が 44.1%，無答率が 27.8%となっており，依然として中学生の証明に関する学習の定着が十分ではないことが示されている（文部科学省(2008)）．

國本は，《「証明」の困難性の要因としては，従来から，「証明の必要性の理解」「証明すべき命題の全称性の理解」「証明に用いる図の一般性の理解」「証明に用いる補助線の発見」「演繹的体系・公理的体系の意味の理解」など，認知的要因が主として挙げられてきた》（國本(1990)）とし，これに対して，《日本の証明指導では，より抽象的で，閉じた，より局所的な観点から，証明概念が捉えられているようである．このあたりに，生徒が「証明が難しい」と思う原因があるのではないだろうか.》（國本(1994)）と述べている．証明指導の困難性の要因として，従来的な認知的要因だけではなく，証明観，すなわち証明自体の捉え方を問題にしようとする國本の指摘は，今後の証明指導の改善に重要な視点であると考える．

一般に，証明とは，「公理あるいは既に証明された命題から，厳密な論理的規則に従って新しい命題を導出すること」と定義され，その論理的厳密性や記述の形式性が強調されることが多い．しかし，学校教育における算数・数学の学習という立場で考えるならば，厳密性や形式性はもちろん尊重しつつも，子どもの活動としての証明のダイナミズムを，より強調していくことが必要ではないだろうか．この証明の形式性と厳密性について國本は，以下のようにまとめている．

《定理は証明の形式性･厳密性ゆえに, 数学者の共同体に受け入れられるのであろうか. 証明の形式性や厳密性以上の要因が重要ではないのか．また，数学教育にとって重要なことは，形式化以前に「証明する」活動そのものを一層大切にすることではないのか. 定理が証明の形式性・厳密性のみによって受け入れられるのではなく，証明に含まれるアイデアの重要性やその意義によってこそ，数学者の共同体に受け入れられ，証明それ自体は意味の協定の漸進的社会的過程であるという, 証明の社会学的見方に注目した見解が台頭してきている.》（國本(1992))

國本は，このような視座に立つ証明を，ブルム（W.Blum）とキルシュ（A.Kirsch）による“Pre-formal Proving”の概念規定(1989)を踏まえたうえで，「前形式的証明」として捉え，その数学教育における重要性を強調している．

「前形式的証明」に関しては，これまでも，ゼマデニ（Z.Semadeni）の前数学的証明（Pre-mathematics）（1976），操作的証明（Action proofs）（1984)をはじめとして，シュタイン（M.Stein）の具体的証明(1981)，ヴィットマン，ミューラー（G.Müller）の内容的-直観的証明(1988)など様々な視点から研究されてきている．本研究では，その中でも，特にヴィットマン(1996)の「操作的証明（Operative proof)」の概念に着目して，論証指導における学習活動としての「証明」の意義を考察する．

本章では，まず，ヴィットマンのいう「操作的証明」の概念を，先行研究から明らかにするとともに，「操作的証明」の１つの例として「おはじきと位取り表による操作的証明」を取り上げ，ヴィットマンが編集した実験教科書『数の本（Das Zahlenbuch)』において，それらがどのように扱われているかを明らかにする．そして，この「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を例として，その教育的意義，発展可能性を考察する．

２節　ヴィットマンの「操作的証明」の概念

１．先行研究における「操作的証明」

ここでは，「操作的証明」の概念を明らかにするために，主として國本の先行研究（國本：1990，1992，1994，1996）をもとに，これまでの「前形式的証明」に関する研究の流れについて概観し，「操作的証明」の位置づけについて考察する．ここで注意しなければならないのは，従来から「操作的証明」という言葉は，“Action proof”の訳語として捉えられてい

るが，ヴィットマンは，1996 年以降，“Operative proof”という言葉を用いていることである．“Action proof”と“Operative proof”は，どちらも「操作的証明」と訳されるが，本研究では，ヴィットマンのいう「操作的証明」を研究対象としているため，“Action proof”を意味する場合は，「操作的証明（Action proof）」と表記することによって区別することとする．まず，ここでは，「前形式的証明」の概念の中で，「操作的証明（Action proof）」がどのように位置づけられているのかについて考察する．

國本によれば，「前形式的証明」が議論されるきっかけとなったのは，ゼマデニの「前数学的証明（Pre- mathematics）」と「操作的証明（Action proof）」からである．ゼマデニは，小学校で児童の論理性を育成するための教授法略として「前数学的証明（Pre-mathematics）」という概念を提案したが，後にその概念をより限定するために「操作的証明（Action proof）」を提案したとされている．操作的証明の例としては，図２-１のものが挙げられている．

(1) 自然数 3 と 5 を選び，おはじきを長方形状に並べる。

図のように，おはじきを水平，垂直に分割することによって，5×3，3×5 が得られる。おはじきの総数は，分割の仕方によらないので，5×3＝3×5 である。

（ここで重要なことは，おはじきを長方形状に並べ，それを分割するという行動がもとになって交換法則が得られている点である。しかも，この考察では，3×5＝15 という結果を知る必要がない。）

(2) 同じような操作を 3，5 以外の数に対しても行われた後，念頭上での操作に内面化させるために，大きな数を選び，同様の操作が行えることを確認する。

(3) 大きな数でも，同様の操作が行えることが確認できたことをもって，自然数の乗法の交換法則が証明されたとみなす。

【図２-１；ゼマデニの操作的証明（Action proof）の例】

この例からもわかるように，ゼマデニの「操作的証明（Action proof）」は，①具体的行動から成立し，表象され，②その行動は具体的な数学的根拠と対応しており，③数学的根拠は心理的に自然な順序で生じる，ものである．そして，具体的操作に基礎をおくという意味で，

ゼマデニの「操作的証明（Action proof)」には，図的証明などは含まれていない．

これに対して，図的証明や範例からの一般化なども証明として捉えようとしたのが，シュタインの「具体的証明」であった．國本は，シュタインの「具体的証明」の規定を，以下のように示している．

《具体的証明とは，1 つの例に関して，あるいは 1 つのモデル内で研究される．その証明は, 直接に前提から読み取れない数学的事態の根拠づけを, 直接に読み取りうるもの, あるいはそのような読み取りうるものの系列内に解放する. その選ばれた例やモデルは, 一般的な事態を代表していなければならないし, 学習者はそれを意識していなければならない.》（國本(1992))

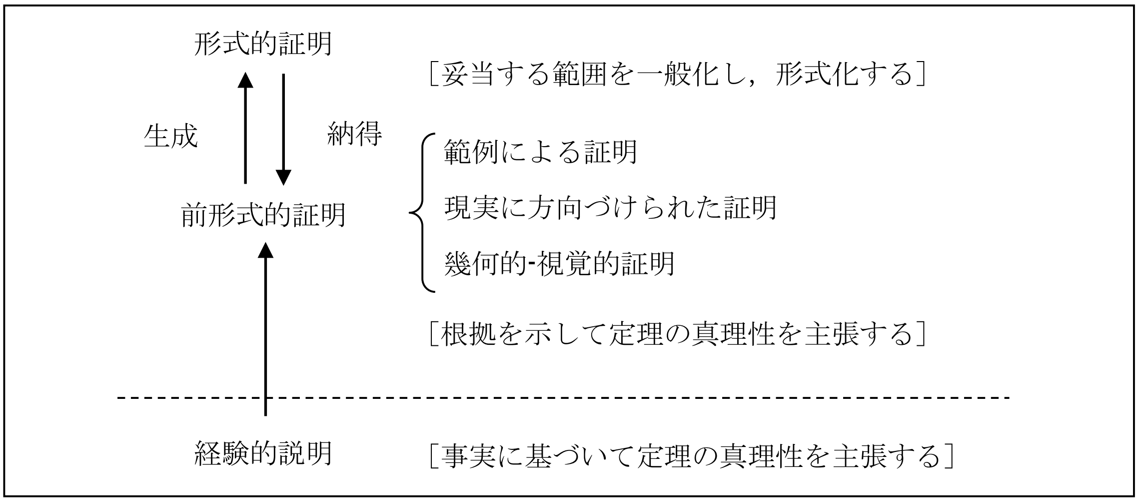
シュタインの「具体的証明」の特徴は，操作だけではなく,「1 つの例」や「1 つのモデル」による証明を強調していることで，これによって，図的証明も「具体的証明」に含まれることになる．また，シュタインの挙げている具体的証明の例をみると，小学校段階だけではなく，中等段階の証明に対しても，具体的証明が寄与しうると考えていることが分かる．

ゼマデニやシュタインが「前形式的証明」の意味を明らかにしようとしたのに対して，ヴィットマン，ミューラーは，その教育的意義を明らかにしようと試みている．ヴィットマンらは，証明を，①実験的「証明」，②内容的-直観的証明，③形式的証明という 3 つの水準に区別し,「前形式的証明」という概念を,「内容的-直観的証明」という言葉で捉えている．ここでの「実験的「証明」」とは，具象化，蓋然的考察，実験的検証や例による説明（証明）であり,「形式的証明」とは，厳密な推論規則と形式的な表現を用いた証明を指している．國本は，ヴィットマンらによる「内容的-直観的証明」の規定を，次にように示している．

《内容的-直観的証明は，実験的証明とは異なり，根拠を示して命題の真理性を確立する（内容的)．しかし，形式的証明とは異なって，構成や操作によって支えられており，必要となれば，根拠として，実在的なものを引き合いに出す（直観的)．》(國本(1992))

ヴィットマンらは「内容的-直観的証明」の最も美しい例として「操作的証明(Action proof)」を挙げている（Wittmann(1988))．

また，國本は，ヴィットマンらとほぼ同様に証明の水準を捉えており，図２-２のような図式によって,「前形式的証明」の概念を整理している．



【図２-２；國本による「前形式的証明」の位置づけ】（國本(1996)，p.13)）

國本は，「前形式的証明」をヴィットマンの「内容的-直観的証明」とほぼ同じ意味で用いているが，そこでは，「前形式的証明」に含まれるものの１つとして，「操作的証明」という言葉が用いられているが，これもゼマデニのいう“Action proof”を指したものである．

ここまで，「前形式的証明」に関する研究の流れを，國本の先行研究をもとに概観してきたが，その中で，「操作的証明（Action proof)」に関しては，次のことが明らかになったといえる．

①「操作的証明（Action proof)」という概念は，ゼマデニによって初めて示された．

②「操作的証明（Action proof)」は，厳密な推論規則や形式的な表現による証明とは異なり，その基礎を操作におく．

③ 図的証明や範例による証明は，「操作的証明（Action proof)」には含まれない．

④「操作的証明（Action proof)」は，前形式的証明（内容的-直観的証明）の１つである．

ここまで考察してきた「操作的証明 (Action proof)」の概念は，ゼマデニに始まるもので，前形式的証明に関する議論のきっかけとなったものである．しかし，1996 年以降，ヴィットマンが用いている“Operative proof”という言葉は，単に「操作に基礎をおく証明」というだけではなく，「操作」そのものを子どもの学習活動として捉え，「証明」自体を１つの積極的な学習活動と捉えることによって，実際の学習環境への応用をより強調するために用いられている．

２．ヴィットマンの「操作的証明」とその背景

ヴィットマンによれば,「操作的証明」の考え方は，ヴィットマン自身によって開発された概念である.

《数学教育学の多くの論文で，証明に関する新しい見方が考察されている．ゼマデニ(1974)の「前数学的証明（pre-mathematics)」，キルシュ(1979)の「前形式的証明（pre-formal proof)」を基礎として，「操作的証明（Operative proof)」が開発された》（Wittmann(2001)，p.546）

実際, ヴィットマンは 1996 年 ICME8（スペイン）のトピックグループ 8（テーマ: "Proofs and proving: Why, when, how?"）で「Operative proofs in Primary Mathematics」と題する発表を行い，「操作的証明」の概念を提起した（Wittmann(1996)）．本節では，この発表原稿を中心にしながら,「操作的証明（Operative proof)」の理論的背景とその性格について考察しておきたい.

1987 年にヴィットマンらによって創設された数学教育の研究開発プロジェクト“mathe 2000”においては，小学校（就学前）から高等学校，さらには大学における教員養成までの数学教育を全体として捉え，一貫性のあるカリキュラムや本質的学習環境（Substantial Learning Environment）の研究開発が行われている．“mathe 2000”では,「数学化すること（mathematizing)」,「探究すること（exploring)」,「推論すること（reasoning)」,「コミュニケーションすること（communicating)」という 4 つが教科の一般目標のとして掲げられており，これらを実現する数学教育の研究開発が，プロジェクトの目的となっている．（Wittmann(2004，2005)）．特に，初等数学教育（就学前及び小学校）でこのような教科の一般的目標を実現するためには，中等数学教育（中学校・高等学校）段階における証明に相当する学習活動を概念的に明確にし, 実践可能な方法を開発する必要があったと考えられる．そこで，適切に表現された数学的対象の操作を通して,「推論する」学習活動として概念化されたのが,「操作的証明（Operative proof)」であった．したがって「操作的証明」は，初等数学教育において重要な数学教育学的概念である. このことはそれ以後のさまざま国際会議等でヴィットマンが繰り返し,「操作的証明」に関する発表を行っていることからも理解できる（Wittmann，1996，2001，2004，2005，2007a，2007b，2009）.

「操作的証明」を実践可能な学習方法として具体化するに当たって，理論的基盤とされたのが，ピアジェ (J. Piaget) の「発生的認識論」であり,「操作的原理 (Operative principle)」

である．ヴィットマンによれば,「発生的認識論」の中核的な考え方とは,

《数学的知識の起源は，さまざまな“対象”に対して学習者自らによって施された”操作”にある.》(Wittmann(1996)，p. 1)

という考え方である．ピアジェによる発生的認識論の中核的前提をもとに，数学の学習指導のための原理が「操作的原理（Operative principle)」であった．（Wittmann(1985)，國本(2003)，山本(2004)）その原理とは，以下の原理である

《対象を把握するというのは，その対象に操作（変換や行為など）を施しながら，それがどう組み立てられているか, それらにはどのような関係があるかを探究することである．したがって，学習過程あるいは認識過程では，一定の手順に沿って，次のことを行う必要がある.

(1)どんな操作ができるのか，その操作は互いにどう関連しているのかについて調べること

(2)操作を通してその対象にある性質や関係を見つけだすこと.

(3)その対象が持つ性質や関係は操作によってどのような影響があるかを観察すること》（Wittmann(1985)，p. 9）

プロジェクト mathe 2000 では，この「操作的原理」を可能な限り広範囲に「証明」に適応することを目指して研究が進められた．その結果，新たな数学教育学の概念として提案されたのが「操作的証明」であった（Wittmann，1996，p. 3）.

このような理論的基盤のもとで開発された「操作的証明（Operative proof)」の性格として，ヴィットマンが挙げているのは，次の 2 点である（Wittmann，1996，p. 6）.

(1) 数学的な問題状況の探究という学習活動に統合された証明であること

(2) 適切に表現された数学的対象に施された操作の結果にもとづく証明であること

（1）は,「操作的証明」の位置づけである．「証明」という数学的概念の意味を理解させるために, それを取り上げ指導の対象とするのではなく, あくまで問題の探究 (exploration), 推論(reasoning)，コミュニケーション（communication）という一連の学習活動の 1 つとして,「操作的証明」が位置付けられている.

一方（2）は，学習活動としての「操作的証明」の実行に関する性格付けである． 初等数

学教育において，児童が操作を通して証明を行うためには，抽象的な数学的対象は，操作を可能にするように具体的に表現されなければならない．従って，学習活動としての「操作的証明」は数学的対象の適切な表現があって初めて実行される証明である．児童は適切に表現された数学的対象の操作を通して，そこで生じる操作の結果に注目しながら，その状況で生じる数学的なパターンを説明することが期待されるのである．

この論文でヴィットマンが「操作的証明」を説明するために例として挙げたのが，「ANNA数」と呼ばれる数学的現象である（Wittmann(1996)）．ANNA数は，「0から9までの2つの数を用いて作った2種類のANNA数（例えば，4334と3443）の差をとると，必ず891の倍数，特に891×（最初に選んだ2数の差）となる」という数学的現象である．このANNA数の差についてまとめたものが，次の表２-１である．

【表２-１：「ANNA数」の差とその構造】

ANNA数の例	ANNA数を構成する2数の差	2つのANNA数の差
1221と2112，3443と4334など	1	891＝891×1
1331と3113，3553と5335など	2	1782＝891×2
2552と5225，4774と7447など	3	2673＝891×3
1551と5115，3773と7337など	4	3564＝891×4
1661と6116，2772と7227など	5	4455＝891×5
2882と8228，3993と9339など	6	5346＝891×6
1881と8118，2992と9229など	7	6237＝891×7
1991と9119，880と8008	8	7128＝891×8
990と9009	9	8019＝891×9

通常，ANNA数の差のパターンに関する形式的な証明は，ANNA数の一般的表現を担保するために，ANNA数を構成する2つの1桁の自然数をそれぞれ文字で表し，次のように行われる．

（証明）最初に選んだ2数を a，b（$a > b$）とすると，2つのANNA数は，

$1000a + 100b + 10b + a$，$1000b + 100a + 10a + b$ と表わされる。

これらの差をとると，

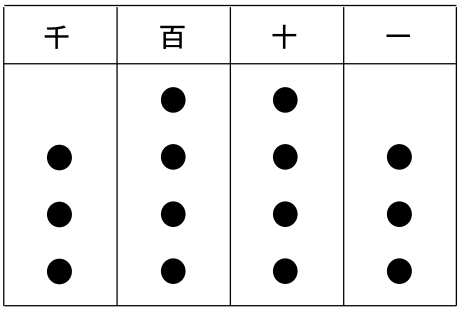
$$
\begin{aligned}
&(1000a+100b+10b+a)-(1000b+100a+10a+b)\\
&=1000a+100b+10b+a-1000b-100a-10a-b\\
&=1000(a-b)+100(b-a)+10(b-a)+(a-b)\\
&=1000(a-b)-100(a-b)-10(a-b)+(a-b)\\
&=(1000-100-10+1)(a-b)\\
&=891(a-b)
\end{aligned}
$$

ここで，$(a-b)$は，ANNA 数を構成する 2 数の差を表しているので，

2 つの ANNA 数の差は，最初に選んだ 2 数の差の 891 倍となる．（証明終）

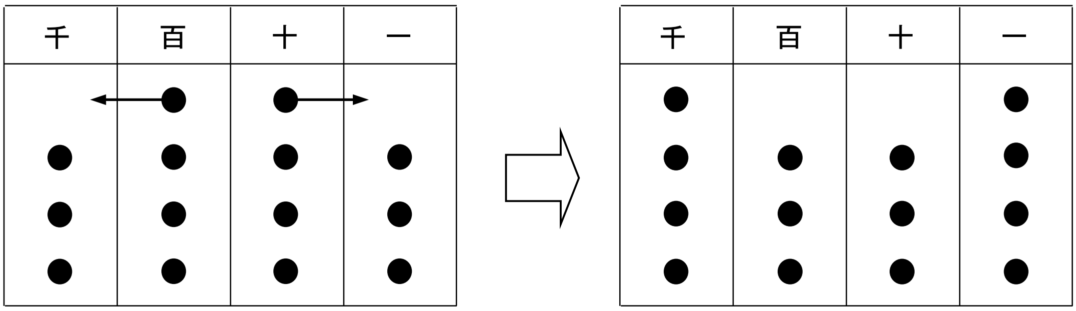
これに対して，ヴィットマンが提起する「操作的証明」では，おはじきと位取り表を用いて，以下のように証明される．以下に示すのは，4 と 3 という差が 1 である 2 数から作られた ANNA 数の差 4334－3443 を例とした「操作的証明」である．

まず，3443 を位取り表とおはじきを使って図２-３のように表す．



【図２-３：おはじきと位取り表による 3443 の表現】

これから，4334 をつくるには，図２-４のように百の位にあるおはじきを１つ千の位に動かし，十の位にあるおはじき１つを一の位に動かす必要がある．



【図２-４：位取り表におけるおはじきの移動】

2 つのおはじきの操作によって，全体としては，＋1000－100－10＋1＝891 だけ値が変化することになる．2 つの数の差が 2 の場合は，動かすおはじきのペアは 2 組となるので，891×2，つまり 1782 だけ値が変化することになる．

「操作的証明」の性格の(2)で示されているように，「操作的証明」を実行する場合，まず学習者の操作を実現するために数学的対象が適切に表現される必要がある．同時にその表現は，学習者自身による操作を実現し，その操作の結果がその証明の核心的部分と関連することが必要である．この場合，4 桁の数の変化という数学的現象が「おはじきと位取り表」によって表現されることによって，おはじきを動かすという子どもの操作が可能となる．また，百の位から千の位へおはじきを 1 つ移動させる操作によって値は 1000－100＝900 増加し，十の位から一の位への操作の結果 10－1＝9 減少することから，全体として値は 900－9＝891 だけ増加するということの理解は，3443 と 4334 という場面だけではなく，他の ANNA 数の場合も同様の操作が可能であるということによって一般化され，ANNA 数の現象の説明の根拠として機能するのである．

このような証明の方法は，具体的な事例に対する操作の結果を根拠とするという意味で，厳密な意味での一般性を有する形式的証明ではないが，直観的に認められる方略によって根拠を示して定理の真理性を主張するという意味で，國本のいう「前形式的証明」に含まれるものであるといえる．

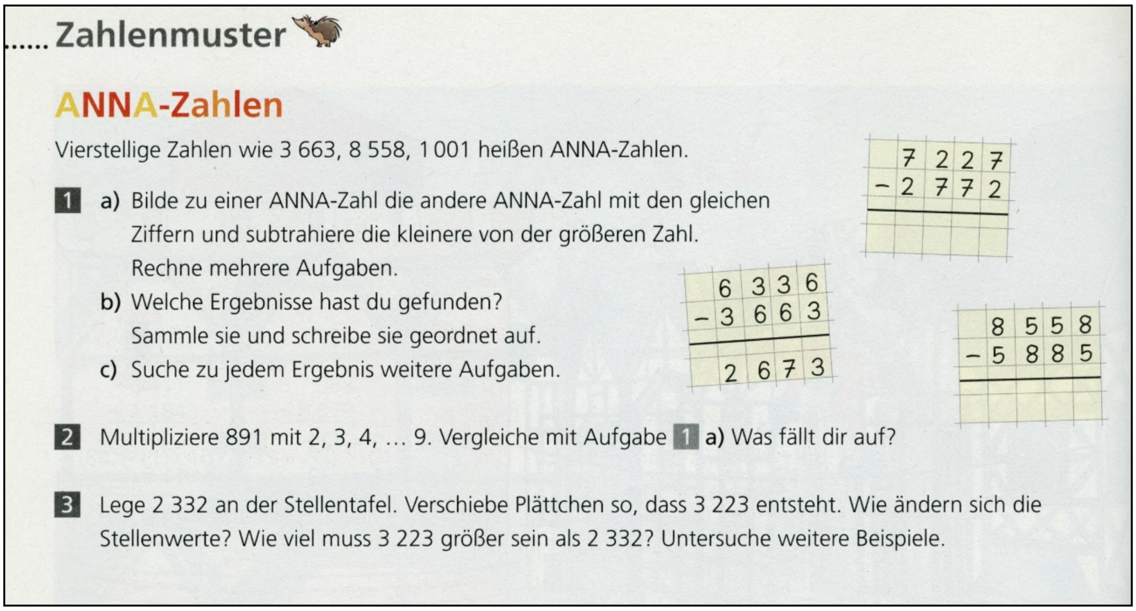
また，ここで根拠を示すために用いられる「直観的に認められる方略」は，「3443 と 4334 といった具体的な数」ではなく，「おはじきに対する操作」である．このことは，おはじきと位取り表による「操作的証明」が，操作的原理を基礎として具体化された学習活動であることを意味している．

以上，ヴィットマンの論文から「操作的証明（Operative proof)」の理論的背景を考察するとともに，その性格については，ANNA 数を例とした具体例を示すことを通して考察してきた．これらの考察から，「操作的証明」は，ヴィットマンが性格づけたように，適切に表現された数学的対象に対する操作の結果にもとづく証明であるといえる．

３.『数の本（Das Zahlenbuch)』における「操作的証明」の展開

『数の本（Das Zahlenbuch)』は，数学教育の研究開発プロジェクト“mathe 2000”においてヴィットマンらによって開発された実験的教科書である．この『数の本（Das Zahlenbuch)』の 4 年生の後半部分には「数のパターン（Zahlenmuster)」と称する単元が

あり，そこでの最初の問題が，先に述べた ANNA 数を素材にした本質的学習環境である．（資料２-１，２-２）



..... Zahlenmuster

ANNA-Zahlen

Vierstellige Zahlen wie 3 663, 8 558, 1 001 heißen ANNA-Zahlen.

1 a) Bilde zu einer ANNA-Zahl die andere ANNA-Zahl mit den gleichen Ziffern und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl. Rechne mehrere Aufgaben.

b) Welche Ergebnisse hast du gefunden? Sammle sie und schreibe sie geordnet auf.

c) Suche zu jedem Ergebnis weitere Aufgaben.

2 Multipliziere 891 mit 2, 3, 4, … 9. Vergleiche mit Aufgabe **1** a) Was fällt dir auf?

3 Lege 2 332 an der Stellentafel. Verschiebe Plättchen so, dass 3 223 entsteht. Wie ändern sich die Stellenwerte? Wie viel muss 3 223 größer sein als 2 332? Untersuche weitere Beispiele.

【資料２-１：Das Zahlenbuch，4. Schuljahr，S. 102】

ANNA 数

3663，8558，1001 のような４桁の数を ANNA 数といいます。

$\boxed{1}$ a) ２つの数を使って２つの ANNA 数をつくりましょう。そして大きい ANNA 数から小さい ANNA 数を引いてみましょう。同じように計算してみましょう。

b)どんな答えを見つけましたか？ 出てきた答えを並べてみましょう。

c)答えが同じになる ANNA 数を見つけましょう。

$\boxed{2}$ 891 に 2，3，4，…，9 をかけてみましょう。その答えと $\boxed{1}$ a)の答えと比べましょう。気がついたことがありますか？

$\boxed{3}$ 2332 を位取り表で表しましょう。それが 3223 になるようにおはじきを動かしましょう。数はどれだけ大きくなりましたか？ 3223 は，2332 よりいくつ大きいですか？ 他の ANNA 数のときもしらべてみましょう。

【資料２-２：『数の本』（Das Zahlenbuch，４年生　児童用, p. 102）日本語訳】

これによれば，おおまかな学習活動の流れは以下のようになっている．

(1) 2 つの数で 2 つの ANNA 数をつくり，その差を計算する．

(2) ANNA 数の差を並べたり，同じ差がでる ANNA 数を探す．

(3) 891 に 2，3，4，・・・9 をかけて答えを出し，ANNA 数の差と比較する．

(4) おはじきと位取り表を使って，その差が 891 の倍数になっていること考える．

この ANNA 数を題材とした本質的学習環境において，「操作的証明」は(4)の学習活動である．それは，『数の本』における$\boxed{3}$ に関する教師用解説を見ても明らかである．

《おはじきを位取り表に置いて小さいほうの数を表わす．そして 1 つのおはじきを十の位から一の位に，また 1 つのおはじきを百の位から千の位に移動させる，そうすると大きいほうの ANNA 数ができる．このような 2 つのおはじきの移動で，小さいほうの ANNA 数は，＋1000−100−10＋１＝891 だけ大きくなる．一般に，二つの数字の差の数だけおはじきのペアを動かすことによって，小さいほうの ANNA 数から大きいほうの ANNA 数にすることができる．たとえば，3663 から 6336 にするには，おはじきのペア 3 組が必要である．したがって 2 つの ANNA 数の差は 891×3＝2673 となる．

ANNA 数の差がもっとも小さいのは 1000−100−10＋１＝891 である．ANNA 数の差は，一の位の数は千の位の数より 1 大きく，百の位の数は，十の位の数よりも 1 小さい．》(Das Zahlenbuch, 4. Schuljahr, Lehrband, 2004)

ヴィットマンは，「本質的学習環境」のデザインにおいて重視されるべきことは自然な数学的活動の流れであると述べた．

《探究の出発点は，現実あるいは数学的な問題状況である．その状況は，数学化される状況である場合と，より広い数学的状況の中に埋め込まれた場合がある．まずその状況は，数学的パターンを発見すること，あるいは問題の解を求めることを目的として実験的に探究される．いろいろな試みを通して，その探究の過程でパターンが見つかれば，そのパターンや解が妥当かどうかを説明するために，推論することが必要となる．もしそれらの結果が確かめられれば，最終的には，それを口頭あるいは書き言葉で表現し他者とコミュニケーションを図ることになる．》(Wittmann(2005)，p. 3)

これによれば，自然な数学的活動の流れというのは，問題状況を数学化すること，探究す

ることを通して数学的なパターンを発見すること，それが妥当かどうかを推論によって確かめること，その結果を表現し，コミュニケーションすること，とされている．言い換えれば，本質的学習環境のデザインにおいて重視すべきは，「数学化」，「探究」，「推論」，「コミュニケーション」の流れで進行する一連の数学的活動である．

ANNA 数を素材とする「本質的学習環境」の学習活動が示しているように（資料 1，2），そこではこの一連の数学的活動の流れが考慮されているように思われる．特に，おはじきの移動による「操作的証明」は，子どもたち自身が見出した数学的なパターンがなぜ成り立つのかを推論することを意図した学習活動となっている（資料 1，2 の$\boxed{3}$）．したがって，「操作的証明」は，「数学化」，「探究」，「推論」，「コミュニケーション」という自然な数学的活動の流れが重視される「本質的学習環境」において必要不可欠な学習活動となっているといえる．

４．おはじきと位取り表による操作的証明の発展性

これまで，ヴィットマンの提唱する「操作的証明」という概念の理論的背景やその性格について考察してきた．ここでは，前述した「おはじきと位取り表」という表現方法を用いた「操作的証明」を例にして，「操作的証明」の教育的意義や発展可能性について，「形式的証明を支える役割」という側面と，「さらなる数学的発展の可能性」という 2 つの観点からの考察を行う．

（１）形式的証明を生成し，それを納得・確信する手段となること

國本（1996）は，前形式的証明の教育的意義として，次のように述べている．

《「前形式的証明は，形式的証明を生成したり，納得・確信させる役割をもつこと．すなわち，前形式的証明は，形式的証明に対する直観的支えを与える．》

（國本，1996，p. 18）

ヴィットマンの「操作的証明」は，國本の前形式的証明に含まれるものであり，それをより学習活動として具体化したものであるということを考えるならば，「操作的証明」も，このような教育的意義をもつものであるといえよう．ここでは，ANNA 数のおはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として，この教育的意義について考察する．

前述したように，ANNA 数は，「0 から 9 までの 2 つの数を用いて作った 2 種類の ANNA

数（例えば，4334 と 3443）の差をとると，必ず 891 の倍数，特に 891×（最初に選んだ 2 数の差）となる」という数学的現象である．この数学的現象に対する，文字式による「形式的な証明」とおはじきと位取り表を用いた操作的な証明を，再度ここで比べてみる．

（証明）最初に選んだ 2 数を a，b（$a > b$）とすると，2 つの ANNA 数は，

$1000a + 100b + 10b + a$，$1000b + 100a + 10a + b$ と表わされる。

これらの差をとると，

$$
\begin{aligned}
&(1000a + 100b + 10b + a) - (1000b + 100a + 10a + b) \\
&= 1000a + 100b + 10b + a - 1000b - 100a - 10a - b \\
&= 1000(a-b) + 100(b-a) + 10(b-a) + (a-b) \\
&= 1000(a-b) - 100(a-b) - 10(a-b) + (a-b) \\
&= (1000 - 100 - 10 + 1)(a-b) \\
&= 891(a-b)
\end{aligned}
$$

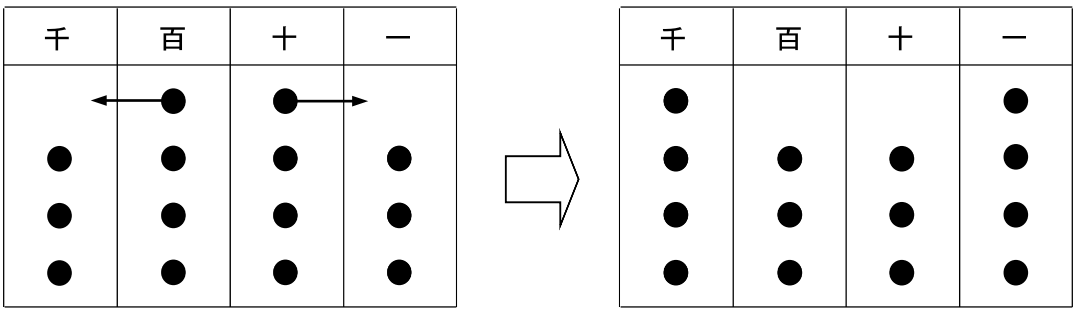
ここで，$(a-b)$は，ANNA 数を構成する 2 数の差を表しているので，

2 つの ANNA 数の差は，最初に選んだ 2 数の差の 891 倍となる．（証明終）

【図２-５：文字式による ANNA 数の形式的な証明】

まず，3443 を位取り表とおはじきを使って左の図のように表す．

これから，4334 をつくるには，百の位にあるおはじきを 1 つ千の位に動かし，十の位にあるおはじき 1 つを一の位に動かす必要がある．



２つのおはじきの操作によって，全体としては，＋1000－100＋10－1＝891 だけ値が変化することになる。2 つの数の差が 2 の場合は，動かすおはじきのペアは 2 組となるので，891×2，つまり 1782 だけ値が変化することになる．

【図２-６：おはじきと位取り表による操作的証明】

確かに, 形式的証明では, 計算式の最後の結果が $891(a-b)$ となることから, 2 つの ANNA 数の差が 891 の倍数になるということは, 子どもにとっても比較的理解しやすいであろう. しかし，形式的証明に慣れていない段階の子どもにとっては，証明の最初の部分で，なぜ 2 つの ANNA 数が，$1000a+100b+10b+a$，$1000b+100a+10a+b$ と表現されるのかを理解することは難しいであろう．また，2 つの ANNA 数の差を計算していく部分は，形式的な代数的操作そのものであり，代数的表現に慣れていない子どもにとっては，単なる手続きとなってしまう.

これに対して，おはじきと位取り表による操作的証明では，位取り表へのおはじきの配置という表現方法によって，形式的証明において 4 桁の ANNA 数が $1000a+100b+10b+a$ と表現されることが分かりやすくなるであろう．つまり，形式的証明における a，b は，各位におかれたおはじきの個数を表しており，その結果，$a-b$ は ANNA 数を作るために最初に選んだ 2 数の差を表していることが，視覚的に捉えやすくなるのである．また，100 の位から 1000 の位へ，また 10 の位から 1 の位へとおはじきを 1 つ（4334 と 3443 の例では最初に選んだ数の差は 1）動かすという操作は，1000 増えて 100 減る，10 減って 1 増えるという数学的な現象を表しており, 形式的証明における代数的な式変形の意味理解を助けることになると考えられる．つまり,「最初に選んだ 2 数の差の個数ぶんだけ，100 の位からおはじきをとり，1000 の位におく」という操作は，$1000(a-b)-100(a-b)$ の部分に対応しており,「最初に選んだ 2 数の差の個数ぶんだけ，10 の位からおはじきをとり，1 の位におく」という操作は，$-10(a-b)+(a-b)$ の部分に対応するということである．もちろん，「差を計算する」という操作と「小さいほうの ANNA 数から大きいほうの ANNA 数を構成する」という操作の意味的な違いはあるが,「操作的証明」による操作を経験した子どもは, 文字を用いた形式的な証明の意味を理解しやすくなるのではないだろうか. つまり,「操作的証明」が形式的証明を理解し納得するための助けとなるということである.

また逆に,「操作的証明」が形式的証明を生成するということも考えられる．実際，おはじきと位取り表による 4 桁の整数の表現は，形式的証明における 4 桁の数の表現を生み出すであろうし,「操作的証明」における操作を振り返ることは，おはじきの移動は代数的式変形に根拠を与える．つまり，形式的証明は,「操作的証明」から生成されるということは十分に考えられる.

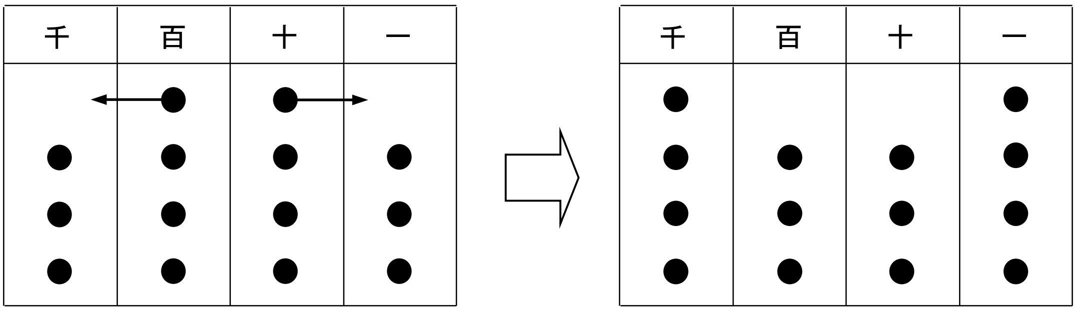
このような「操作的証明」の役割は，國本の言う《前形式的証明は，形式的証明を生成したり，納得・確信させる役割を持つこと。すなわち，前形式的証明は，形式的証明に対する

直観的支えを与える。》(國本(1992)，p.14）という教育的意義に相当するものであろう。

（２）別の数学的現象を創造すること

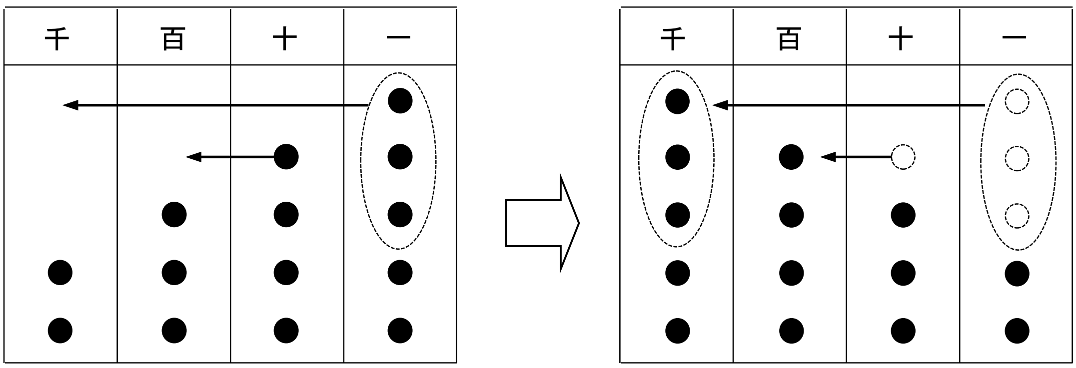
「操作的証明」が，形式的証明の直観的な支えとなることは述べたが，筆者はこの証明のもつもう１つの発展性に注目したい．それは，「操作的証明」が，別の新しい数学的パターンの発見に役立つという可能性である．ここでは，おはじきと位取り表による ANNA 数の操作的証明から，新しい数学的パターンが生み出されるという例をもとに考察する．

まず，おはじきと位取り表による ANNA 数の「操作的証明」におけるおはじきの移動を確認しておく。



【図２-７：ANNA 数におけるおはじきの移動】

ここでは，百の位と十の位のおはじきが 1 つずつ千の位，一の位へ移動することによって，「1000 増えて，100 減って，10 減って，1 増える」ということが示されている．移動前と移動後のおはじきの配置を見てみると，山型に配置されていたおはじきが，谷型の配置に変わっていることが分かる．このような配置の変化に着目すると，別の変化による数学的パターンを創り出すことができるのである．例えば，次のようなおはじきの移動を考えてみる．



【図２-８：「魔法の数」におけるおはじきの移動】

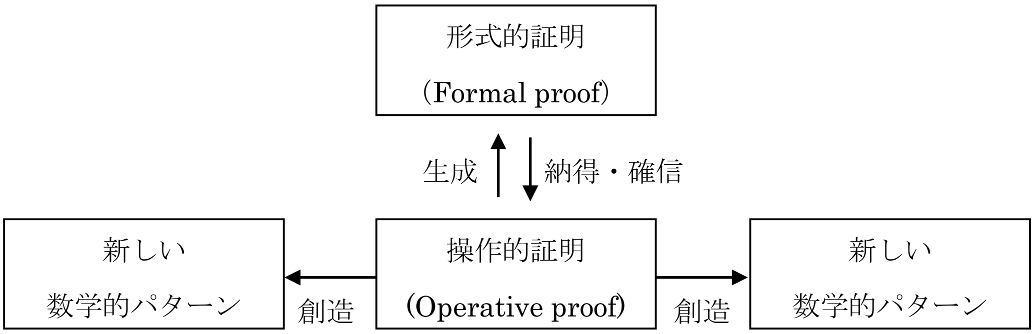
2345という各位の数字が連続している4桁の整数を位取り表におはじきによって表現し,「十の位のおはじきを1つ百の位へ,一の位のおはじきを3つ千の位へ」というおはじきの移動をする.この操作によって,5432という各位の数字が逆転した4桁の整数を構成することができる.これは,右上がりに配置されているおはじきを右下がりの配置となるように移動したことから現れた現象であるが,このような配置の変形は,2345の場合だけではなく,3456や4567という各位の数字が連続する4桁の整数の場合であれば,まったく同じ操作で可能である.このおはじきの操作は,3000増えて3減る,100増えて10減るという操作を表していることから,式で表すと+3000−3+100−10=3087となり,結果として,「各位の数字が連続する4桁の整数(例えば,2345)に3087を加えると各位の数字が逆転する.」という数学的パターンを見出すことができる.この数学的現象は,國本(2006)によって「魔法の数」と呼ばれており,この題材をもとにした授業実践も報告されている.

上で示したように,おはじきと位取り表による「操作的証明」は,ANNA数にある数学的パターンの証明にだけ限定されるわけではない.各位の数字が連続している4桁の数に3087を加えると位の数が逆転するという数学的パターンも,おはじきの操作によって証明することができる.この「魔法の数」に関する数学的パターンの証明は,ANNA数の証明の場合と同様,各位の間での「おはじき」の移動がどのような変化をもたらすかという点が本質である.したがって,各位の間での「おはじき」の移動による数の変化に関わる数学的パターンであれば,その証明は,ANNA数と同様,操作的に証明することができる.例えば,ANNA数と類似した4343,3434などのNANA数に関する数学的パターン,また3桁の数,646と464などに関する数学的パターンの証明も,位取り表の上でおはじきを操作しながら証明することができる.

おはじきと位取り表は,ANNA数の数学的パターンの「操作的証明」に限定される訳でなく,むしろ,上述したような整数に関するいろいろな数学的パターンを子どもたちに発見させ,それを操作的に証明するという学習活動を生起させる可能性をもつものである.

実際,筆者は小学校の教師を対象とした教員研修において,おはじきと位取り表によるANNA数の操作的証明を体験していた教員が,上記の「魔法の数」はもちろん,他にも,NANA数などの数学的パターンの発見に至るという場面を経験したことがある.このような数学的パターンの発見は,子どもたちにも起こりうるであろうし,おはじきと位取り表を用いた操作的証明は,数学的現象の証明から新しい数学的パターンの発見へとつながるような発展的な学習環境のデザインを可能とするであろう.

以上，おはじきと位取り表による操作的証明の意義及び発展性について考察してきたが，これらを振り返ってみると，図２‐９のような図式によって，「操作的証明」を捉えることができる．



【図２‐９：操作的証明の発展性】

つまり，数学の学習活動において「操作的証明」が「形式的証明」の直観的な支えとなるということは，垂直方向への発展と捉えることができ，「操作的証明」から新しい数学的パターンの発見につながるということは，水平方向への発展と捉えることができるのではないかということである．このような 2 つの側面の発展性は，「操作的証明」自体の教育的価値を裏付けるものであると考える．

第２章のまとめ

本章では，まず，学校教育における証明に関する学習の困難性を指摘した上で，数学学習における証明とは何か，という問題に対して，國本らの先行研究をもとに考察した．その結果，厳密な論理規則によって成り立つ形式的証明だけではなく，操作的証明(Action proof)や図的証明なども証明として認める立場をとる前形式的証明という概念が，学校教育においては重要な概念であることを指摘した．

その上で，ヴィットマンの提唱する「操作的証明」という概念に焦点を当て，mathe2000という数学教育改革プロジェクトの中で本質的学習環境をデザインしていくために，「操作的証明」をどのように位置づけてきたのかを明らかにするとともに，「操作的証明」のもつ以下の 2 つの性格を特定した．

(1) 数学的な問題状況の探究という学習活動に統合された証明であること

(2) 適切に表現された数学的対象に施された操作の結果にもとづく証明であること

これらの性格をもつヴィットマンの「操作的証明」は，國本のいう前形式的証明の範疇に入るものではあるが，ゼマデニの「操作的証明（Action proof)」をより学習活動という側面に具体化した概念であることが明らかとなった．

さらに，ヴィットマン自身が編纂した『数の本（Das Zahlenbuch)』において「操作的証明」がどのように本質的学習環境としてデザインされているのかを示すことによって，「操作的証明」の具体的な事例を考察することができた．

また，國本のいう前形式的証明の視点から見たとき，「操作的証明」にどのような教育的価値や発展性があるのかを考察することができた．これらの考察については，現段階では仮説にすぎないが，次章以降の実証的研究を経て，それらの可能性と限界について考察を進めることとする．

【第２章における引用・参考文献】

國本景亀(1990).「数学教育における証明指導」. 平林一榮先生頌寿記念出版会編,『数学教育のパースペクティブ』(pp.335-354), 聖文社.

國本景亀(1992).「前形式的証明とその教育的意義－証明の社会学的見方に関連して－」,『高知大学学術研究報告』, 第 41 巻, pp.1-14.

國本景亀(1994).「証明概念の多様性」,『日本数学教育学会第 27 回数学教育論文発表会論文集』, pp.457-462.

國本景亀(1996).『空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善』, 平成 6 年～7 年度科学研究費補助金（一般研究(C)）研究報告書.

國本景亀(2003).「 E. Ch. Wittmann の数学教育論（Ⅱ）–問題解決能力の育成と技能の習得・習熟を結びつける–」,『第 36 回数学教育論文発表会論文集』, pp.13-18.

國本景亀(2006).「機械論から生命論へ（練習に焦点をあてて）—機械的練習から生産的（創造的）練習へ—」, 日本数学教育学会誌『算数教育』, 第 88 巻, 第 2 号, pp.12-18.

小松孝太郎(2012).『数学的探究における操作的証明の活用の促進に関する研究』, 筑波大学大学院人間総合科学研究科 学位論文.

佐々祐之・山本信也(2009).「数学教育における操作的証明に関する研究 ～おはじきと位取り表の事例から～」,『日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集』, pp.553-558.

佐々祐之・山本信也(2010).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究 —おはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 16 巻, 第 2 号, pp.11-20.

佐々祐之(2011).「数学教育における操作的証明に関する研究」,『日本科学教育学会年会論文集』vol.35, pp. 52-55.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

山本信也(2004).「「操作的原理」による算数・数学の学習指導—『数の本』における「計算三角形」の扱いを例として—」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 11 号, pp.1-8.

Mueller, G. N., & Wittmann, E. Ch. (2004a). *Das Zahlenbuch, 4.Schuljahr*, Klett, 2004.

Mueller, G. N., & Wittmann, E. Ch. (2004b). *Das Zahlenbuch, 4.Schuljahr, Lehrband*, Klett, 2004.

Semadeni, Z. (1984). Action Proof in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training, *For the Learning of Mathematics, 4(1),* pp.32-34.

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte-Operation-Wirkung : das oretrative Prinzip in der Mathematikdidakitik, *Mathematiklehren, 11,* pp.7-11.

Wittmann, E. Ch. (1996). Operative proofs in Primary Mathematics, *Paper presented to Topic Groups 8. "Proofs and proving: Why, when,how?" at the 8th International Congress of Mathematics Education, Seville.*

Wittmann, E. Ch. (2001). The Alpha and omega of teacher education : Organization mathematical activities, *In D. Halton(Ed.) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* 239-552.

Wittmann, E. Ch. (2004). Learning mathematics for teaching mathematics : The notion of operative proof, *Paper presented at TSG3 in 10th ICME, 4.－11., July, 2004, Copenhagen, Denmark.*

Wittmann, E. Ch. (2005). Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood, *Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut, Mons/Belgium, July 7-9, 2005.*

Wittmann, E. Ch. (2007a). Mathematics as the Science of Patterns － from the very Beginning, *Position paper presented at the conference "The Future of Mathematics Education in Europe", Lisbon, 15.-17, 12, 2007 organized by the Academia Europaea.*

Wittmann, E. Ch. (2007b). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference "The Future of Mathematics Education in Europe", Lisbon 17. - 19.12.2007, organized by the Academia Europaea.*

Wittmann, E. Ch. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference ICMI Study 19 : Proof and Proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education", Taiwan, 10-15.May 2009, organized by ICMI.*

第３章

おはじきと位取り表の操作に関する学習者の実態

第３章　おはじきと位取り表の操作に関する学習者の実態

前章では，「前形式的証明」に関する國本の先行研究を参照しながら，ヴィットマンの操作的証明の理論的背景やその性格について考察した．そして，操作的証明が，「数学的な問題状況の探究という学習活動に統合された証明」であり「適切に表現された数学的対象に施された操作の結果にもとづく証明」であるという特色を持つこと，また，「前形式的証明」をより具体的に学習活動に位置づけた概念であることを明らかにした．さらに，具体的な例として「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を取り上げ，これが，ヴィットマンの編纂した『数の本(Das Zahlenbuch)』中で，どのように本質的学習環境としてデザインされているのかということを明らかにした．さらに，操作的証明の発展性について考察することによって，その教育的価値を強調した．

本章では，それらの基礎的研究を踏まえ，操作的証明を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインを具体化するために，学習者の既有知識を調査するための実証的研究として，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を行うに当たって必要とされる基本的なおはじきの操作を，小学校高学年段階の児童がどのように理解し，活用していくのかを明らかにする．そこで，基礎的なおはじきと位取り表の操作に関して実施したインタビュー調査の結果を分析・考察するとともに，本質的学習環境のデザインに向けて得られた示唆についてまとめることとする．

１節　インタビュー調査の位置づけと実施計画

本研究では，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明を適切に位置づけた本質的学習環境」を開発し，その可能性と限界について考察することを研究の目的としているが，研究の枠組みとしては，山本(2012)，ヴィットマン(2004)による実証的研究という枠組みを用いている．ここで小学校高学年の段階の児童を対象に行ったインタビュー調査は，おはじきと位取り表による操作的証明を用いた本質的学習環境の開発のために，学習者の実態を把握し学習環境デザインへの示唆を得ることを目的としており，学習環境開発のための準備段階と位置づけられる．この種の研究が実証的研究という枠組みにおいてはどのように位置づけられるのかということを明らかにするためにヴィットマンの示す 3 つの実証的研究のタイプを参照するとともに，今回行ったインタビュー調査の概要について説明する．

１．実証的研究

本質的学習環境が学習者に対してデザインされる一種の人工物である以上，その研究開発は実証的研究と不可分な関係にあることは言うまでもない．山本は，本質的学習環境のデザインとその実証的研究の必要性について，以下のように述べている．

《サイモンの視点に立てば，人工物としての「本質的学習環境」は，その内部環境（授業コンセプト，学習のねらい，学習活動とその意図）と外部環境（児童・生徒・学生の実態）が相互に適合しているときに，その機能が最大限に発揮されることになる．…（中略）…いずれにせよ，「本質的学習環境」が数学教育において現実的な機能を発揮するためには，それが機能する「外部環境」，すなわち児童・生徒あるいは学生の実情を解明する実証的研究が必要となる．したがって，実証的研究を予定しないマスタープランは生命論的デザイン科学としての数学教育学には存在しない．》（山本(2012)，pp.139-140）

つまり，山本は，本質的学習環境を人工物と捉え，そのデザインのためには，常に環境との相互関係を追及していかなければならないことを示しているのである．

また，ヴィットマンも，本質的学習環境の開発のために必要不可欠な研究として実証的研究を位置づけ，次のような 3 つの実証的研究のタイプを示している．（Wittmann(2004)）

①学習者の既有知識を調査するための実証的研究

②教授学習過程を調査・分析するための実証的研究

③本質的学習環境の改善のための実証的研究

①は，ヴィットマンが《あるカリキュラムのトピックに対する一連の学習環境をデザインするには，その学習に入るときに学習者が持っている既有知識を考慮に入れる必要がある．したがって前提とする知識の実証的研究は不可欠である．》（Wittmann(2004)）と述べるように，本質的学習環境をデザインするために必要とされる情報を得るための実証的研究である．

②は，本質的学習環境を道具として学習者の学習過程等を調査・分析するための実証的研究で，《この種の研究において，本質的学習環境は道具として用いられる．ある学習環境における一連の教授実験では，個人の学習過程，教師の介入，教室内の相互作用が調査され説明される．》（Wittmann：(2004)）と説明されている．

③は，本質的学習環境をより良いものへとリデザインしていくための実証的研究である．ヴィットマンは《教授実験は，学習環境の持つ特別の構造とは無関係の学習過程についての情報を与えるだけでなく，より良い結果を得るために学習環境をどのように改善すべきかについての情報を与える．》（Wittmann : (2004)）として，この種の実証的研究を強調している．

本研究では，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインを目的とする以上，山本，ヴィットマンが指摘するような実証的研究を避けて通ることはできない．そこで，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を行うために必要とされる基本的なおはじきと位取り表の操作について，児童がこれをどのように理解し，活用することができるのかということを明らかにするため，実証的研究を行うことにした．もちろん，上記のヴィットマンの分類に従えば，今回の実証的研究は，操作的証明を行うための学習者の実態を明らかにするという意味において，「①学習者の既有知識を調査するための実証的研究」に位置づけられるものである．

２．インタビュー調査の概要

今回のインタビュー調査は，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた本質的学習環境をデザインするために，そこで必要とされるおはじきと位取り表の基本的な操作を，学習者がどのように理解し，活用できるのかということを調査することを目的としている．

本研究では，探究的な学習活動としての広義な論証活動 (proving) を具体化するために，「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインを行うことを目的としている．そこで，そのような学習活動は，数のさまざまな性質が考察対象となってくる小学校高学年から，文字を用いた形式的証明を学習する中学校の段階を対象としたものになることが想定されるため，その初めの段階に当たる小学校高学年の児童を対象にインタビュー調査を行うことを計画した．

おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査の調査対象となった児童は，熊本市内の公立小学校第 5 学年の児童 45 名である．調査に当たっては，附属小学校の児童 3 名を対象とした予備調査を行い，調査内容（質問事項）の検討・修正を行った上で，本調査を実施した．

インタビュー調査は，平成 22 年 11 月末から 12 月にかけて行った．1 対 1 の面接方式で

1 人あたりに要する時間が 10 分から 15 分程度であったため，昼休みや放課後の時間を利用し，1 日に 4 名ないし 5 名ずつ，11 日間にわたってインタビュー調査を行った．インタビュー調査の様子は，すべてビデオカメラに記録し，発問の様子，児童のおはじきの操作，説明する児童の発言等を分析した．

３．インタビュー調査の内容

おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査で扱った内容は，以下の 3 つから構成されている．

①おはじきと位取り表による数の表現

- 位取り表におはじきで示された 234，405 を児童はどのように認識するのか．
- 児童は 253, 550 という数をどのように位取り表におはじきを置いて表現するのか．

②位取り表におけるおはじきの操作の意味理解

- 位取り表におはじきで 123 を表しておき，一の位から百の位へおはじきを移動して 222 としたとき，いくつ増えたかをどのように説明するのか．
- おはじきの移動を「一の位から 1 つ取り去って，新たに百の位へ 1 つ置く」というように変えたとき，いくつ増えたかをどのように説明するのか．

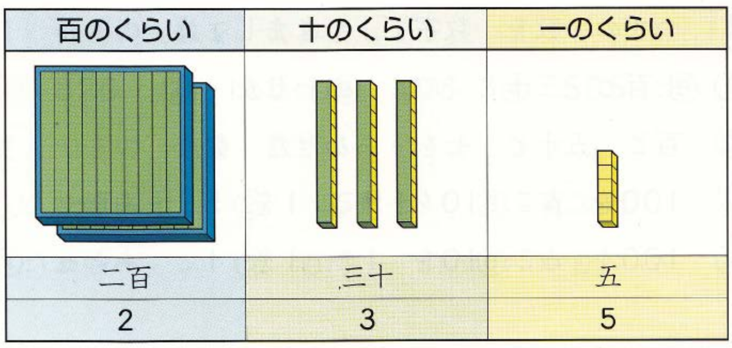
③おはじきの操作の活用

- 「233 と 332 の差」「123 と 321 の差」をおはじきと位取り表を用いてどのように求めるのか．
- 「差が 99 となる 2 数」をおはじきと位取り表を用いてどのように作るのか．

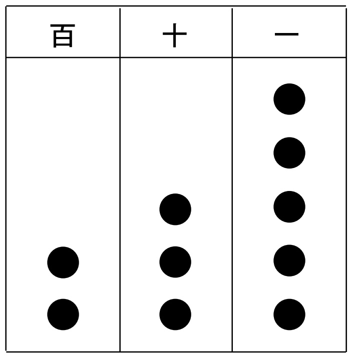
まず, ①は, 児童はおはじきと位取り表によって表現された数をどのように認識するのか, また，具体的な数をおはじきを用いてどのように位取り表に表現するのか，ということを見るものである.「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」で扱う位取り表での数の表現が, 児童が使う一般的な教科書に示されている位取り表における数の表現と異なるため, それらの違いに混乱することなく，おはじきで表現された数を読み，また数をおはじきで表現することができるかどうかを見るために設定した質問項目である．

【図 3 - 1 】は，一般的な教科書（一松(2005)）に示された位取り表による数の表現であるが，ここでは，一の位はブロック，十の位は 10 個のブロックからなるスティック，百の位

は 10 本のスティックからなるプレートでそれぞれの位の数が表現されている．このような位取り表の表現方法は, 数と量とを結び付けて理解させようとする日本の教科書では一般的な表現方法である．しかし,「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」で扱う位取り表では,【図３-２】のように，十の位に置かれたおはじきは 1 つが 10 を表し，百の位に置かれたおはじきは 1 つが 100 を表すというように，どの位に置かれるかによって，1 つのおはじきが表す数（量）は異なってくる．この表現方法は，例えば十進位取り記数法では abc と表される 3 桁の数が，文字を用いた形式的な証明においては 100a＋10b＋c と表されるということにつながるという意味で, 数の表現の代数的な意味を重視した表現方法であるといえよう．



【図３-１】



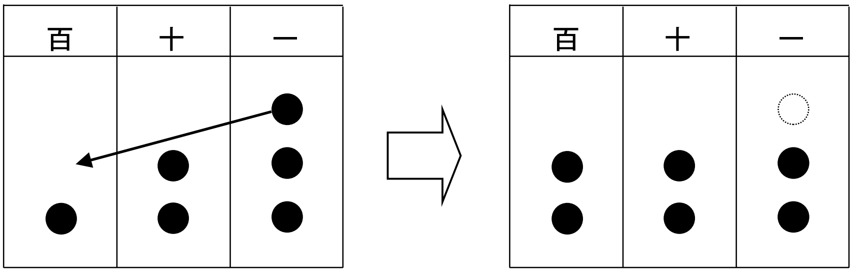
【図３-２】

このような「おはじきと位取り表における数の表現」の違いを, 児童はどのように理解し,読んだり表現したりするのかということを明らかにするために, この質問項目を用意したが,「おはじきで表された数の読み」に関しては,「234 と 405」を，また「おはじきを用いての数の表現」に関しては「253 と 550」という数をそれぞれ設定した．どちらも，一般的な 3 桁の整数と空位のある整数に対して，同じように対応するのかどうかを見ることができるようにしている．

次に②は，位取り表である数を表しているおはじきの一部を動かしたときに，数としてはどのように増減するかを，児童がどのように理解するのかを見るものである．【図３-３】のように，位取り表におはじきで 123 を表した状態で，一の位から百の位へおはじきを 1 つ移動させて 222 としたとき，数としてはいくつ増えたかを，おはじきの動きから解釈して「1 減って 100 増えたので全体としては 99 増えた」という説明を想定した問題である．

ここで，一の位から百の位へおはじきを 1 つ移動させたとき，一の位で 1 を表していたおはじきは，百の位へ移って 100 を表すことになる．つまり，同じおはじきが位取り表のポ

ジションによって異なる数を表すということに児童は困難を感じるのではないかと予想される．そのため，上記のようなおはじきの移動に対して「1 減って 100 増えるので 99 増えた」という説明ができない児童に対しては，位取り表におはじきで 123 を表した状態で，一の位からおはじきを 1 つ取り，百の位に新たに 1 つおはじきを置いて 222 とするというように，おはじきの操作の仕方を変更して聞き直すことにした．このことによって，同じおはじきが移動して別の数を表すということがなくなり，一の位のおはじきと百の位のおはじきを別のものと見て操作することができるようになる．これは，筆者が以前，おはじきと位取り表を用いた実験授業を行った際に，児童が用いた表現方法を参考にしたものである．



【図 3-3 ：おはじきの操作の意味理解】

最後に③は，「1 減って 100 増えるので全体としては 99 増えた」というおはじきの操作の活用に焦点を当てた問題である．紙に書かれた「233 と 332 の差は，□です．」という問題と，「123 と 321 の差は，□です．」という問題を順番に見せたとき，児童はどのようにおはじきと位取り表を用いて答えを求めるかを見る問題とした．

「233 と 332 の差」の問題では，おはじきの操作としては，123 から 222 へと数を変化させるときと同じ操作となることに気づき，233 から 332 へとおはじきを移動させると「1 減って 100 増えるので全体としては 99 増えたことになり，差は 99 である．」と結論づけることを想定している．

また「123 と 321 の差」の問題では，123 から 321 へと変化させるときに，一の位から百の位へおはじきを 2 つ移動させることが必要であり，このおはじきの操作を，「2 減って 200 増える」と解釈するか，もしくは「1 減って 100 増える」という操作を 2 回繰り返したものとして解釈して，差が 198 であると結論づけることが求められる．この問題では，児童が「1 減って 100 増える」というおはじきの操作をどのように拡張して用いるのかということを見ることができる．

上記 2 題の後，さらに「□と□の差はいくらですか？答えは 99 です．」と書かれた

紙を見せ，空欄に当てはまる 2 数を自由に作るよう求める問題も提示した．「2 数の差を求める」という問題を「差が 99 である 2 数を求める」という逆の問題にして聞いた場合に，児童はそれをどのように解釈し，おはじきと位取り表を活用して答えを求めるかを見るための問題である．

以上，「①おはじきと位取り表による数の表現」「②位取り表におけるおはじきの操作の意味理解」「③おはじきの操作の活用」という 3 つの種類の問題を用意し，インタビューを行った．それぞれの問題について，ビデオカメラに記録した児童の様子を分析し，おはじきと位取り表の基本的な操作に関する児童の実態を分析した．

２節　調査結果の概要

ここでは，実施したおはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査の結果と分析した内容を示す．今回の調査では，45 名というインタビュー調査としては比較的多人数の児童を対象としているため，児童の反応をある程度分類しその反応数をまとめた上で，全体的な反応の傾向性を示しながら分析を進めることとした．

１．「①おはじきと位取り表による数の表現」についての分析

おはじきと位取り表による数の表現に関しては，位取り表におはじきで表された 234，405 を読み取る問題，253，550 を位取り表におはじきで表現する問題を用いてインタビュー調査を行った．

位取り表におはじきで示された数を読む問題に対しては，【表３-１】に示すように，ほとんどの児童が特別な説明なしに数を読み取ることができていた．45 名の被験者中，位取り表の読み方についての説明が必要だったのは 8 名で，このうち 6 名は 234 が示された位取り表を見て「9」とそこに置かれているおはじきの個数を答えている．

【表３-１：位取り表におはじきで置いた 234，405 を読むこと】

反　応（被験者数 45）	人数
説明しなくても数を適切に読むことができた．	37
おはじきの個数（9 個）を答えるが，説明すると理解した．	6
考え込んでいたが，説明すると理解した．	2

おはじきと位取り表の表現に関して特別な指導をしていないためこのような反応は想定されたものであるが，これらの児童に，「百の位に 2 個，十の位に 3 個，一の位に 4 個置いている」ということを確認すると，全ての児童が位取り表とおはじきによる数の表現の仕方を理解したようで，「234」と答えなおしていた．

また，与えられた数を位取り表の上におはじきで表現する問題は，読みの問題で表現のルールが分かったこともあり，【表３】に示すように，45 名すべての児童が戸惑うことなくおはじきを置いて表現することができていた．

【表３-２：位取り表の上に 253，550 を置いて表すこと】

反　応（被験者数 45）	人数
説明しなくても位取り表におはじきで数を適切に表現した．	43
550 を 555 と勘違いしたが，自分で修正して正解できた．	2

数を読む問題，おはじきを置いて数を表現する問題ともに，空位のある数（405，550）を問題として扱ったが，これによって解答できなかったり，解答を迷ったりする児童はいなかった．

このような結果から，おはじきと位取り表による表現に関しては，概ね児童は表現のルールを理解し，おはじきで表された数を読んだり，数をおはじきで表現したりということができると思われる．しかし，インタビュー調査では，教科書で扱われている位取り表の表現は示さずに，おはじきと位取り表による数の表現だけを提示したため，児童が混乱しなかったとも考えられる．両者の表現の違いについての困難性は，おはじきを操作してみることによって初めて表面化するものかもしれない．

２．「②おはじきの操作の意味理解」についての分析

おはじきの操作の意味理解に関しては，位取り表におはじきで 123 を表した状態で，一の位から百の位へおはじきを 1 つ移動させ，いくつになったか，いくつ増えたかを問い，いくつ増えたかについてはおはじきを用いて理由を説明することを求める問題を用いてインタビュー調査を行った．

おはじきの移動によって数が 222 になったことについてはすべての児童がすぐに 222 と答えたが，いくつ増えたかについては，多様な解答を見ることができた．【表３-３】は，児童の反応をまとめたものである．45 名中 10 名の児童は，特にインタビュアーが指導しなく

ても，百の位から一の位へおはじきが 1 つ移動することによって，数としては 99 増えるということを，おはじきを用いて説明した．残りの 35 名については，次の段階で「一の位からおはじきを 1 つ取って，百の位に 1 つ置くということは…」というようにおはじきの変化の表現を「移動」から「置き換え」へと変えて再度説明し，いくつ増えたかを説明するよう求めた．このことによって 35 名のうち 18 名は，「1 減って 100 増えたので全体としては 99 増えた」という説明をしたが，14 名は，インタビュアーが誘導的に説明して何とか 99 増えたということを理解したようであった．2 通りのおはじきの操作をしても 99 増えたということが理解できなかった児童は 3 名であった．

【表３-３：おはじきの操作の意味理解（123 から 222）】

反　応（被験者数 45）	人数
特に指導なしに 99 と答え，説明することができた.	10
「置き換え」で示しなおすと，おはじきを用いて説明することができた.	18
「置き換え」で示して誘導的に説明すると，99 増えることを何とか理解した.	14
結局理解できなかった.	3

これらの結果から，位取り表におけるおはじきの移動とその意味理解に関しては，何らかの指導を行う必要があるということが分かった．特別な指導がなくても 99 増えたことを説明できたのは 20%強であり，おはじきが移動して位取り表におけるポジションが変わることによって，同じおはじきが別の数を表すことになるということについては，表現の解釈に関する何らかの指導がなければ，自然と理解できるというものではないと言えよう．しかし一方で，「一の位からおはじきを 1 つ取って，百の位に 1 つ置くということは…」と表現を変えておはじきの操作を示した場合，18 名の児童が新たに理解できたということから考えると，具体的な学習環境のデザインに当たっては，数の変化を表現するためのおはじきの操作として，「移動」ではなく「置き換え」を用いることが有効であると言うことができるだろう．

また，児童に対するインタビュー調査を行う中で，特徴的な児童の反応としては，次の【表３-４】のようなものが見られた．

123 から 222 へとおはじきを動かしたとき，数はいくつ増えたかという問いに対して，何らかの形で筆算によって計算しようとした児童は 26 名で，半数以上の児童が筆算で計算している．

【表３-４：児童の特徴的な反応】

反　応（被験者数 45）	人数
何らかの場面で，筆算によって計算した．	26
暗算によって 100 と答えた．（片方の操作だけに着目）	11
暗算によって 101 と答えた．（2 つの操作が連結できない）	5

また，「1 減って 100 増える」というおはじきの操作が，一連のものとして認識できない児童がいることも分かった．これは，【表３-４】において，暗算によって 100 もしくは 101 と答えた児童の特徴である.「一の位から百の位へおはじきを 1 つ動かす」という操作には,「1 減る」「100 増える」という 2 つの現象が内包されている．しかし，児童にとってはそれらの 2 つの増減がうまく操作と結びつかず，100 増えたことだけに着目したり，100 増えたことは理解できるが 1 減ったことを 1 増えたと勘違いしてしまったりするのである．小学校高学年の段階においてもこのような反応が見られたということは, おはじきの操作と数の増減の認識については，決して易しいものではなく，おはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習環境デザインにおいて注意する必要があることを示唆している．

３．「③おはじきの操作の活用」についての分析

おはじきの操作の活用に関しては,「1 減って 100 増えるので全体としては 99 増えた」というおはじきの操作を，どのように別の問題に活用することができるかを見るために,「233 と 332 の差は，□です.」という問題と,「123 と 321 の差は，□です.」という問題を順番に見せ, おはじきと位取り表を用いて答えを求めることができるかどうかを見るインタビュー調査を行った．この問題では,「1 減って 100 増えると 99 増える」という操作を，差を求める問題場面に活用することが求められる．また,「123 と 321 の差」では，これらの操作を拡張して,「2 減って 200 増える」というおはじきの操作から差を 198 と計算することが求められる．

また，おはじきの操作を一般化できるかどうかを見るため,「□と□の差はいくらですか？答えは 99 です.」と書かれた紙を見せ，空欄に当てはまる 2 数を自由に作るよう求める問題も提示し，インタビュー調査を行った．以下，それぞれの設問に対する児童の反応を示す．

【表３-５】【表３-６】は，紙に書かれた「233 と 332 の差は，□です.」という問題を

見せ，おはじきと位取り表を用いて答えを求める問題に対する児童の反応をまとめたものである．なお，【表３-５】に関しては，１名の児童はおはじきの操作の意味理解までで調査を終了したため，被験者数は 44 である．また，【表３-６】に関しては，複数の反応の場合も別々にカウントしており，反応例として代表的なもののみを示している．

【表３-５：計算結果】

反　応（被験者数 44）	人数
99	30
101	9
その他（無回答を含む）	5

【表３-６：児童の計算方法】

反　応　例	人数
おはじきを使って操作・説明できた.	20
筆算再現型のおはじき操作を行った.	9
筆算を用いて計算した.	12

計算については，99 と正解できた児童は 44 名中 30 名で，68.2％の児童が正解できている．しかし，計算方法について見てみると，おはじきの操作を活用して正解を求められた児童は 20 名で，何らかの場面で筆算を用いて計算している児童が 12 名となっている．筆算に頼っている 12 名の児童のうち，前の問題においても筆算を用いて計算しているのは 7 名で，この問題において初めて筆算を用いた児童が 5 名であった．

また，【表３-６】にある筆算再現型のおはじき操作とは，位取り表の上に 332 をおはじきで置いて示し，そこから，233 を取り去ろうとするものである．このとき，百の位と十の位は取り去ることができるが，一の位を取り去ろうとしたとき，繰り下がりが生じるため，うまくおはじきの操作によって答えを求められない児童が多く見られた．計算結果として 101 と解答した児童が 9 名いたが，このうち，5 名はこの筆算再現型のおはじきの操作をしていた．いずれも，繰り下がりができず，332 と 233 のおはじきの並びを比較して，百の位と一の位のおはじきが 1 つずつ異なることから 101 と解答してしまっていた．

【表３-７】【表３-８】は，「123 と 321 の差」についての問題で，同様にインタビュー調査を行った際の児童の反応をまとめたものである．なお，【表３-７】に関しては，被験者数

が，この問題までに調査終了した児童を除く 33 名となっている．また，【表３-８】に関しては，【表３-６】と同様，複数の反応の場合も別々にカウントしており，反応例として代表的なもののみを示している

【表３-７：計算結果】

反　応（被験者数 33）	人数
198	24
誤答（199，200，99，98，299）	7
無回答	2

【表３-８：児童の計算方法】

反　応　例	人数
おはじきを使って操作・説明できた．	19
筆算再現型のおはじき操作を行った．	4
筆算を用いて計算した．	7

計算については，198 と正解できた児童は 33 名中 21 名であったが，誤答であった児童の中で，操作を振り返って答えを 198 と修正した児童が 3 名いたため，合計して 24 名が正解できたと言える．被験者数に対する正解者の割合は 72.7%であるが，「233 と 332 の差」の問題までで調査を終えた児童が 11 名いたため，全体（45 名）に対する通過率としては，53.3%となり，「233 と 332 の差」の問題に比べて若干下がっている．正解できた 24 名のうちおはじきの操作によって答えを導くことができた児童は 19 名であった．おはじきの操作としては，「2 減って 200 増える」という形で説明をした児童が 15 名，「99 増える操作を 2 回する」という説明をした児童が 4 名であった．

何らかの場面で筆算を用いている児童も 7 名いた．筆算を用いた 7 名のうち 3 名は前の問題でも筆算を用いており，この問題から初めて筆算を用いた児童が 4 名であった．

筆算再現型のおはじき操作をした児童は 4 名であるが，この 4 名はいずれも 198 という正解にはたどり着いておらず，「233 と 332 の差」の問題においても筆算再現型のおはじき操作を用いていた．

また，【表３-９】【表３-１０】は，「$\boxed{}$と$\boxed{}$の差はいくらですか？答えは 99 です．」と書かれた紙を見せ，空欄に当てはまる 2 数を自由に作るよう求める問題に対する児童の

反応をまとめたものである.

なお,【表３-９】に関しては，被験者はこの問題まで調査対象となった児童23名である．また，【表３-１０】に関しては，【表３-６】【表３-８】と同様，複数の反応の場合も別々にカウントしており，反応例として代表的なもののみを示している．

【表３-９：計算結果】

反　応（被験者数 23）	人数
差が 99 の 2 数を答えた．	20
間違った 2 数を答えた．	3

【表３-１０：児童の計算方法】

反　応　例	人数
おはじきを使って操作・説明できた．	15
おはじきを使わず暗算した．	2
筆算を用いて計算した．	7

最終的に，差が 99 になる 2 数を答えることができた児童は 20 名であった．このうち，おはじきの操作を活用して考えることができた児童は 15 名であった．この 15 名については，これまでの調査問題によって慣れてきたためか，スムーズにおはじきを操作し，差が 99 になる 2 数をつくることができていた．

また，差が 99 ということから「100 と 1」などの答えを出した児童もいた．この場合，もっとひき算が難しそうな 2 数を見つけられないかと問い直すと，数名の児童はおはじきや筆算を用いて別の 2 数を答えることができた．【表３-９】に示されている 3 名については，間違った 2 数を答えていたため問い直したが，別の 2 数を見つけることができなかった児童の数である．

筆算を用いて差が 99 になる 2 数を求めようとした児童が 7 名いたが，このうち 2 名は間違った 2 数を答えている．この 2 名については，適当な数を選び，その数に 99 を加えることによってもう 1 つの数を求めようとしたが，筆算の計算において計算ミスをしてしまっていた．

３節　調査結果の考察

45 名の児童に対するインタビュー調査の結果，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を学習活動として適切に位置づけた本質的学習環境のデザインに向けて様々な示唆を得ることができた．本節では，それらを 4 点にまとめ，示すこととする．

１．おはじきの基本的な操作に関する準備的な学習活動の設定の必要性

インタビュー調査では，「①おはじきと位取り表による数の表現」，「②おはじきの操作の意味理解」，「③おはじきの操作の活用」という 3 段階で 45 名の児童を対象にインタビューを行った．その結果，おはじきと位取り表による数の表現に関しては，おはじきで表現された数の認識, 与えられた数の表現の両方に関してほぼすべての児童が想定された正しい反応を示していた．また，おはじきの操作の意味理解に関しては，おはじきの置き換えという方法も含めて, 自分自身でおはじきの操作の意味を理解することができた児童は 28 名(62.2%)であった．さらに，おはじきの操作の活用に関しては，差を求める問題におはじきの操作を活用できた児童は約 20 名（44.4%），差が 99 の 2 数をおはじきの操作をもとに考えられた児童は 15 名（33.3%）であった.

インタビュー調査は，1 人当たりのインタビュー時間が 10 分程度の短いインタビュー調査であったが，そのような短時間の中で，3 分の 1 の児童がおはじきの操作を理解し，それを計算に活用できるレベルに達していることが分かる．また，自在に活用できる段階に達していない児童も，インタビューを行っていく中で徐々におはじきの操作に慣れ，その操作の意味を理解することができるようになってきていた．このことから，おはじきと位取り表の基本的な操作に関しては, 小学校高学年の段階の児童にとって難しすぎて対応できない問題ではないといえるだろう．

しかし一部には，おはじきの操作の意味を理解することに困難を感じていたり，筆算再現型のおはじき操作に固執していたりする児童がいたことも事実である. おはじきと位取り表を理由づけのためのツールとして用いて説明する学習活動を行っていくためには, おはじきと位取り表の扱いについて十分に慣れておく必要があることは言うまでもない.

したがって, おはじきと位取り表を用いた操作的証明を学習活動として適切に位置づけた本質的学習環境のデザインに当たっては，操作的証明を行う学習活動の前段階として，おはじきと位取り表を用いて様々な数を表現したり, おはじきを動かして数の変化を観察したりするような, おはじきと位取り表に慣れ親しむことのできる学習活動を組み込んでいくこと

が必要であると言えよう．もちろん，おはじきの操作の意味が理解できたからと言って，それがすぐに操作的証明を理解できることにつながるというわけではないが，操作的証明を用いて理由づけする学習活動の準備段階として，丁寧な指導を行っておくことが必要であろう．

例えば，國本によれば，KMK（ドイツ連邦文部大臣会議）から 2004 年に公表された教育スタンダード（Bildungsstandards）では，基礎学校（小学校）向けの学習課題例として，位取り表に関する以下のような問題が示されているという．

万	千	百	十	一
●●● ●●	●	●●●	●●● ●●● ●●●	●●● ●

問 1：どんな数を表していますか.

問 2：百の位のおはじきを 1 つ取りました．どんな数ができますか.

問 3：十の位におはじきを 1 つ増やしました．どんな数ができますか.

問 4：千の位から万の位へおはじきを 1 つ動かすとどんな数になりますか.

数は，1000 だけ小さくなる　□

1000 だけ大きくなる　□

9000 だけ小さくなる　□

9000 だけ大きくなる　□

10000 だけ大きくなる　□

問 5：位取り表におはじきを 2 つ置きます．どんな場合がありますか.

2 つのおはじきを置いて，最大の数と最小の数を作りなさい.

（國本(2011)，Bildungsstandards，2005）

この学習活動では，おはじきと位取り表の基本的構造についての問いが設定されており，このような学習活動を経験することによって，児童はおはじきと位取り表に慣れ親しんでいくことができるだろう．

もちろん，日本の教科書でみられるような数と量とを関連させた位取り表の表現（【図３-１】）との関係も考慮しなければならないが，例えば，おはじきと位取り表による表現の前に，1 円玉，10 円玉，100 円玉といった硬貨を用いた位取り表を活用するなど，何らかの工

夫をすることによって，今回調査で用いたような位取り表への移行を図っていく必要があるだろう．いずれにせよ，中学校段階での代数的な数の扱いのためには，遅くとも小学校高学年の段階で，上記のようなおはじきと位取り表の表現へと移行し，数の代数的な見方を培っていくことが重要である．

２．数計算に対する筆算という方法への依存傾向

インタビュー調査の中で，数計算を筆算に頼っている児童が非常に多いことが分かった．例えば，インタビュー調査の結果のところでも示したように，「位取り表において 123 から 222 へと数が変化したときいくつ増えたかを求める問題」に対して，半数以上の児童が，何らかの形で筆算によって計算しようとしている．中には，「1 減って 100 増える」ということから 100－1 の計算を筆算によって処理しようとしている児童もいた．児童の中では，「3 桁の計算＝筆算でなければできない」という感覚があり，実際には筆算することなく求めることができる計算場面においても筆算で計算してしまうものと考えられる．

「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」では，おはじきを増やしたり減らしたりする操作を振り返ってそれを計算に結びつけて考えるために，筆算という形式的な計算方法だけに頼るのではなく，数の柔軟な見方に依拠する操作と説明が求められる．したがって，そのような数の柔軟な見方を養うためにも，普段から筆算一辺倒とならないような学習活動の展開が必要である．日本の算数科の学習指導では，筆算による計算が重視されすぎる傾向があるため，前述した児童のように 100－1 という簡単な計算であっても筆算によって処理しようとするケースが見られる．今回，おはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習活動をデザインしていくに当たっては，単に操作的証明ができるようにするということだけではなく，数の柔軟な見方についても学ぶことができるような学習環境のデザインが望まれるであろう．例えば，ヴィットマンによって編纂された教科書『数の本(Das Zahlenbuch)』には，おはじき，百シート，百の表，計算直線など様々な表現方法によって数の多様な見方を学んだり，半筆算を通して様々な計算方法を経験したりといった学習活動が数多く盛り込まれている．【図３-４】は『数の本(Das Zahlenbuch)』の 2 年生における学習活動の 1 つであるが，「38＋25」という計算に対して，半筆算や計算直線を用いた計算など，様々な方法で取り組む子供たちの様子が示されている．これらの学習活動は，形式的な筆算による計算の方法を学ぶ前の段階で扱われているもので，計算を形式的に行う前に，数を柔軟に見て工夫して計算するということを重視していることが伺える．これらの学習活動は，「おはじきと位取り

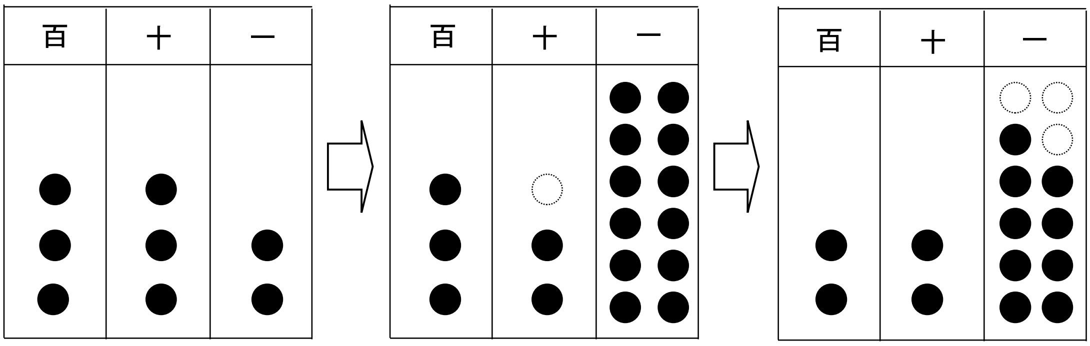
表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインの上で，参考となるものであろう．

【図３-４ ：Das Zahlenbuch における計算の工夫】

３．筆算再現型のおはじき操作の傾向

おはじきと位取り表を活用してひき算の問題を解決しようとする際に，筆算的におはじきを操作して答えを求めようとする児童が見られた．これは，例えば「233 と 332 の差は $\boxed{}$ で

す.」の問題で，位取り表の上に 332 をおはじきで置いて示し，そこから，233 を取り去ろうとするものである．332 の一の位は 2 であることから，233 の一の位 3 を取り去るために，十の位のおはじき 1 つを一の位のおはじき 10 個に置き換えてからひき算し，次に 2 となった十の位から 3 を取り去るために，百の位のおはじき 1 つを十の位のおはじき 10 個に置き換えてからひき算するといった操作が必要になる（【図３-５】)．これは，筆算において行っている操作を位取り表の上で再現しようとしているのであるが, 操作が煩雑となるため, 途中でミスをして間違った答えを求めてしまったり, 繰り下がりの操作をうまく行えずに答えを求められなかったりするケースが見られた.



332 を表す　　一の位の 3 をひくために，十の位から繰り下がる．　　一の位から 3 をひく

【図３-５：筆算再現型のおはじき操作】

ここでのおはじきの操作で想定されているのは，「233 から 332 へとおはじきの表現を変えたときに，数としてはどれだけ変化したか」ということから 2 数の差を求める操作であるため，最終的に計算の結果が位取り表に現れるのではなく，おはじきの操作を振り返って数の変化を読み取る必要がある．筆算再現型のおはじき操作を試みた児童は，このようなおはじきの表現とその読み取りに対応できていなかったものと見ることができる.

インタビュー調査において筆算再現型のおはじき操作をしようとした児童がいたということから，おはじきと位取り表の用い方，つまりおはじきによる数の表現方法については，全く児童に任せてしまうのではなく，適切な表現方法を教師が示すことが必要であるということが言えるだろう．ヴィットマン自身が言うように，《操作的証明は，適切に表現された数学的対象に施された操作の結果にもとづく証明》(Wittmann(1996), p.6) なのであって，おはじきと位取り表に関しても，計算という数の対象を適切に表現したものに対する操作を行わなければ，逆に混乱を生じさせてしまうということである．332 と 233 の差を求めるよ

うな問題に関しても，おはじきと位取り表の操作に慣れれば自然にできるようになるというものではなく，「233 から 332 へのおはじきの変化」を 2 数の差に対応させて読み取るような表現方法を，ある程度教師の側で示す必要があるだろう．決しておはじきの操作を教え込むということではなく，おはじきを使った操作がスムーズに行えるように，その表現に関してはある程度教師側で準備しておくということである．

4．複数のおはじきの操作を一連のものとして捉えることの困難性

これは，「②おはじきの操作の意味理解」や「③おはじきの操作の活用」に関する調査において共通して見られた傾向であるが，複数のおはじきの動きを一連のものとして捉えられない児童が多いということである．例えば，次の児童の反応は，「123 と 321 の差は$\boxed{}$です」という問題において典型的なものである．

T：じゃあ，もう 1 つやってみようか．

（123 と 321 の差を求める問題を提示）

T：今度はおはじきを使って考えてみてくれる？

C：123…，321…，

（おはじきで 123 を 321 に作り変えながら）

C：1 が 2 個減って，100 が 2 個増える….

T：うん，ということは？

C：えーと…，う～ん…，

（計算しようとするが，考え込んでいる）

T：書いてもいいよ．

（計算用紙に 200－2 を筆算で計算）

C：198！

この児童は，123 と 321 の差を求める問題をおはじきを使って考えるように指示されると，位取り表の上に 123 をおはじきで置き，その一の位から百の位へおはじきを 2 個動かすことによって，321 につくり変えようとしている．つまり，おはじきの操作自体は理解し，123 から 321 に変えると 2 減って 200 増えることは分かっているものの，それらを一連の操作として認識して差を求めることができていない．これと同様の反応を見せた児童が 10 名確認できた．

数計算を筆算に頼る傾向が強いという結果からも分かるように，日本の算数科の教科書では，筆算による形式的な計算方法が先行しており，数の柔軟な見方による計算の工夫といった学習活動は限られている．例えば，3 年生の内容に工夫して暗算する学習が取り上げられているが，教科書紙面としては 2 ページの扱いであり，数の柔軟な見方に関する学習活動が十分行えるとは言い難い．したがって，数の柔軟な見方を養うためにも，普段から筆算一辺倒とならないような学習活動の展開が求められるであろう．

第３章のまとめ

本章では,「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインのために, 小学校第 5 学年の児童 45 名を対象として,「おはじきと位取り表」の操作に関するインタビュー調査を実施し，その結果を分析・考察した.

インタビュー調査は，ヴィットマンのいう 3 つのタイプの実証的研究のうち,「学習者の既有知識を調査するための実証的研究」に当たるもので, 児童の理解の様相を詳しく分析するために,「おはじきと位取り表による数の表現」に関する問題,「位取り表におけるおはじきの操作の意味理解」に関する問題,「位取り表におけるおはじきの操作の活用」に関する問題という 3 つの段階を設けて実施した.

インタビュー調査を分析した結果, おはじきと位取り表を用いた操作的証明を適切に位置づけた本質的学習環境のデザインに向けて，次のような示唆を得ることができた.

・おはじきと位取り表による数の表現に関しては，特別な指導をしなくても，児童は位取り表の上におはじきで表された数を読み取ったり, 数を位取り表の上におはじきで表現したりすることができたが, 位取り表上でおはじきを動かしたときに，それがどのような数の増減を表しているかというおはじきの操作の意味理解については, 何らかの指導が必要である.

・筆算再現型のおはじき操作を行う児童が多かったことから，おはじきと位取り表の用い方，つまり，おはじきによる数の変化に対する表現方法に関しては，全て児童に任せるのではなく，ある数を表した状態から, 別の数を表すようにおはじきを動かしてみるよう指示するなど，適切な理由づけができるよう，ある程度教師の側で方向付けをする必要がある.

・「おはじきと位取り表」を用いた操作的証明においては，おはじきの動きに対して「いくら増えて，いくら減った」という数の変化としての意味づけを行っていく必要があるため，計算技能の習熟に当たっては，形式的な筆算の学習に偏ることなく，様々な方法での計算練習を通して, 数の柔軟な見方ができるような学習環境をデザインする必要がある.

以降，これらの示唆をもとに，本質的学習環境のデザインを行う必要がある.

【第３章における引用・参考文献】

國本景亀(2011).「PISA2003 以後のドイツの数学教育の動向(1)—「実質陶冶」から「数学に固有な形式陶冶」へ—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 17 巻, 第 1 号, pp. 1-8.

佐々祐之(2012).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究 （Ⅱ）—おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を通して—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 18 巻, 第 2 号, pp.77-89.

佐々祐之・山本信也(2009).「数学教育における操作的証明に関する研究—おはじきと位取り表による操作的証明の事例から—」,『日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集』, pp. 553-558.

佐々祐之・山本信也(2010).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究—おはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 16 巻, 第 2 号, pp. 11-20.

一松信 他(2005).『みんなと学ぶ 小学校算数 2 年上』, 学校図書, p. 13.

文部科学省(2008a).『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社.

文部科学省(2008b).『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.

山本信也(2012).『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望 －E. Ch. ヴィットマンの数学教育学の基本的視角－』, 熊日出版.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004a). *Das Zahlenbuch, 1. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004b). *Das Zahlenbuch, 2. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004c). *Das Zahlenbuch, 3. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004d). *Das Zahlenbuch, 4. Schuljahr*, Klett.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik deutschland(Hrsg.)(2005). Bildungssatandards imFach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15. 10. 2004, Wolters Kluwer.

Wittmann, E. Ch. (1996). Operative Proofs in Primary Mathematics, *Paper presented to Topic Groups 8, "Proofs and proving: Why, when,how?" at the 8th International Congress of Mathematics Education,* Seville 1996.

Wittmann, E. Ch. (2004). Empirical Research Centred Arounf Substantial Learning Environments, *Plenary Lecture delivered at the Annual Meeting of the Japanese Society of Mathematics Eduvation,* Okayama, November, pp. 20-22.

Wittmann, E. Ch. (2005). Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood, *Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut,* Mons/Belgium, July 7-9.

第４章

操作的証明を取り入れた授業実践

第４章　操作的証明を取り入れた授業実践

前章では,「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」を適切に位置づけた学習環境デザインのために,小学校高学年の児童を対象としたインタビュー調査を実施し,おはじきと位取りの操作に関する児童の理解の様相を分析した.その結果,おはじきと位取り表による数の表現については,小学校高学年の児童でも,特別な指導を必要とすることなく理解できるが,位取り表上でのおはじきの操作の意味理解については,何らかの指導が必要であること,また,おはじきと位取り表を用いた操作的証明については,おはじきの操作の仕方について,教師側からある程度の方向付けが必要であること,さらに,おはじきと位取り表を用いた操作的証明のためには,数の柔軟な見方ができるようになっておく必要があることが明らかとなった.

本章では,それらの結果を踏まえて,おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境を実際にデザインし,実証的研究を通して,探究的な論証指導における操作的証明の可能性と限界について分析・考察を行う.

なお,小学校高学年の児童を対象としたインタビュー調査の結果から,操作的証明を用いた学習環境のデザインは,小学校高学年の段階の児童を対象としても十分デザイン可能であると考えられる.しかし,小学校高学年の段階では,通常の学習指導の中で文字を用いた形式的証明を扱わないため,第２章において考察した操作的証明の意義と発展性の中の「形式的証明への接続」に関しては検証できない.従って,今回の実証的研究では,文字を用いた形式的な証明へと接続する中学校第２学年初めの段階の生徒を対象とした学習環境のデザインを行い,実証的研究を通して,操作的証明の有効性と限界について考察するものとする.

１節　授業実践で用いた題材

実証的研究のための学習環境デザインの題材としては,ヴィットマンが自らの論文の中で操作的証明の説明のための例として用いたANNA数という現象を取り上げることとした.ここでは,まず,学習環境デザインの題材となったANNA数およびその発展課題について解説し,実証的研究において,生徒の学習活動として期待される「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」の内容をまとめておく.

１．ANNA 数

前述したように，今回の実証的研究のための学習環境デザインでは，ANNA 数という数学的現象を題材として扱った．ANNA 数の現象とは，以下に説明するような数学的パターンである．

（１）ANNA 数の現象

ANNA 数とは，2332，5115 のように，千の位と一の位の数字が同じで，百の位と十の位の数字が同じであるような 4 桁の自然数のことである．このような 4 桁の ANNA 数は，幾通りも作ることができるが，次のような手順に従って計算すると，ANNA 数に関するある数学的なパターンを導出することができる．

【手順】
①1 から 9 までの 1 桁の自然数の中から異なる 2 つの自然数を選ぶ.
→ 例えば 3 と 5
②選んだ 2 つの自然数を ANNA のように配列して 4 桁の ANNA 数を 2 通り作る.
→ ①で 3 と 5 を選んだ場合は，3553 と 5335 という 2 つの ANNA 数ができる.
③できた 2 つの ANNA 数の差を求める.
→ ②で作った 3553 と 5335 の場合，その差は 5335－3553＝1782.

①においては，0 を含んでも問題はないが，最初に選ぶ 2 つの自然数に 0 が含まれている場合，4 桁の ANNA 数を作るときに，一方の ANNA 数は 3 桁の自然数となってしまう．そこで，桁数の変化による混乱を排除するため，学習環境デザインにおいては，0 を除く 9 つの自然数から 2 つの自然数を選ぶように設定した．また，最初に同じ自然数を 2 つ選んで ANNA 数を作ってその差を求めても ANNA 数のパターン自体は影響を受けないが，2 種類の ANNA 数が同じものになってしまい，それらの差が 0 となってしまうことから，これも混乱を避けるために，学習環境デザインにおいては，最初に選ぶ 1 桁の自然数は異なる 2 つの自然数とした．

ここで，上の手順のように 1 つの具体例だけでは ANNA 数の数学的パターンは見えてこないが，学習活動では，生徒たちは，まず，様々な ANNA 数を作ってそれらの差を求め，それらを分類・整理することを通して，数学的パターンを導出していくこととなる．実際に様々な ANNA 数の差を計算してみると，5335－3553＝1782，9779－7997＝1782，3113－

1331＝1782 や 6556－5665＝891，8778－7887＝891，3223－2332＝891 のように，2 つの ANNA 数の差が等しくなるものが存在することが分かる．これらを分類して，どのような場合に 2 つの ANNA 数の差が等しくなるのかを観察すると，最初に選んだ 2 つの 1 桁の自然数の差，つまり ANNA 数を構成している 2 つの 1 桁の自然数の差が等しいときは，ANNA 数の差が等しくなるということが見出される．さらに注意深く観察すると，2 つの ANNA 数の差は，891 の倍数であり，しかも 891×（最初に選んだ 2 つの 1 桁の自然数の差）となっていることが分かる．

そのような 2 つの ANNA 数の差に関する数学的パターンをまとめると，次の表 4‐1 のようになる．

【表 4‐1 ：「ANNA 数」の差とその構造】

ANNA 数の例	ANNA 数を構成する 2 数の差	2 つの ANNA 数の差
1221 と 2112，3443 と 4334 など	1	891＝891×1
1331 と 3113，3553 と 5335 など	2	1782＝891×2
2552 と 5225，4774 と 7447 など	3	2673＝891×3
1551 と 5115，3773 と 7337 など	4	3764＝891×4
1661 と 6116，2772 と 7227 など	5	4455＝891×5
2882 と 8228，3993 と 9339 など	6	5346＝891×6
1881 と 8118，2992 と 9229	7	6237＝891×7
1991 と 9119	8	7128＝891×8

よって，様々な ANNA 数の差を計算した結果から観察された数学的パターンとしては，次のように命題としてまとめることができる．

【ANNA 数の差に見られる数学的パターン】
異なる 2 つの 1 桁の自然数選び，ANNA のように配列して作った 2 つの ANNA 数の差は，891×（最初に選んだ 2 つの 1 桁の自然数の差）となる．

実証的研究に当たってデザインした学習環境では，この ANNA 数の差に関する数学的パターンが成り立つ理由を説明する操作的証明を扱うこととした．

（２）ANNA 数の差に見られる数学的パターンの数学的証明

ANNA 数の差に見られる数学的パターンは，文字を用いた代数的証明として，数学的に証明することができる．この証明に関しては，第 2 章においても示しているが，ここで再度，確認しておく．

（証明）最初に選んだ 2 数を a，b（$a > b$）とすると，2 つの ANNA 数は，

$1000a + 100b + 10b + a$，$1000b + 100a + 10a + b$ と表わされる。

これらの差をとると，

$$
\begin{aligned}
&(1000a + 100b + 10b + a) - (1000b + 100a + 10a + b) \\
&= 1000a + 100b + 10b + a - 1000b - 100a - 10a - b \\
&= 1000(a - b) + 100(b - a) + 10(b - a) + (a - b) \\
&= 1000(a - b) - 100(a - b) - 10(a - b) + (a - b) \\
&= (1000 - 100 - 10 + 1)(a - b) \\
&= 891(a - b)
\end{aligned}
$$

ここで，$(a - b)$は，ANNA 数を構成する 2 数の差を表しているので，

2 つの ANNA 数の差は，最初に選んだ 2 数の差の 891 倍となる．（証明終）

この証明では，ANNA 数を構成する 2 つの自然数を a，b として，4 桁の ANNA 数を文字a，b を用いて表現し，その差を計算することになる．一般に 2 種類の文字を用いて証明する代数的証明は，1 つの文字だけを用いて証明できる命題に比べて難しいと言えるが，中学校第 2 学年の文字を用いた説明の単元では，2 桁の自然数とその十の位の数字と一の位の数字を入れかえた 2 桁の自然数との和が 11 の倍数になることや差が 9 の倍数になることの説明が扱われており，中学校で学習する文字を用いた説明の内容として取り上げることは可能であろう．

実証的研究における学習環境デザインでは，ANNA 数の差に見られるパターンが成り立つことの証明として，上記のような文字を用いた代数的証明も扱うが，その前段階として，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れたとき，操作的証明が形式的証明の学習に対してどのように機能するのかという観点からも考察を行うこととした．

（３）ANNA 数の現象に対するおはじきと位取り表を用いた操作的証明

ヴィットマンは，自身の論文の中で操作的証明の概念を説明するための具体例として，

ANNA 数の差に見られる数学的パターンに対するおはじきと位取り表と用いた操作的証明を取り上げている．ここでは，このおはじきと位取り表を用いた操作的証明について再度確認するとともに，その特徴を整理することとする．

おはじきと位取り表を用いた操作的証明では，文字を用いた代数的証明のように，最初から命題の一般性を保証して記述していくのではなく，1 つの具体的な事例について操作を行い，その操作の結果を観察することを通して操作の一般性を認識し，これを根拠として命題が一般に成り立つことを示そうとする．従って，外見上は，1 つの具体的事例についてのみ説明しているように見えるが, そこで示される操作が他の場合においても同様に行うことができるということを根拠としているのである．以下，ANNA 数の差に見られる数学的パターンに対するおはじきと位取り表を用いた操作的証明の手順を示す．

ここでは，3443 と 4334 という 2 つの ANNA 数の差が 891 となることを示す操作を例として取り上げる．まず，3443 を位取り表とおはじきを使って図 4 - 1 のように表す．

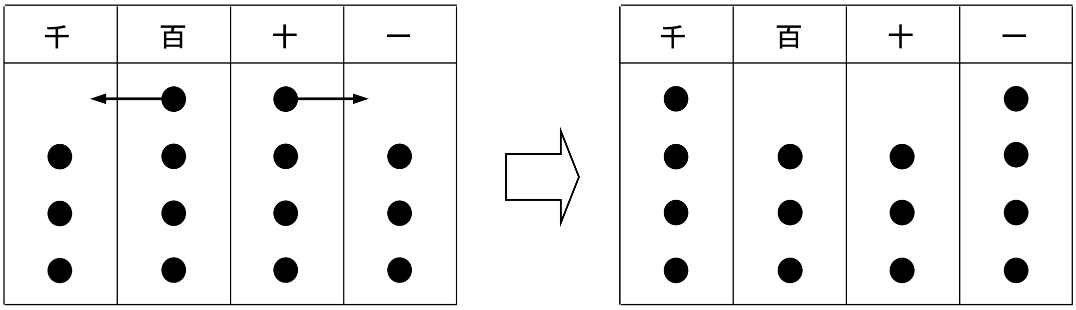
千	百	十	一
	●	●	
●	●	●	●
●	●	●	●
●	●	●	●

【図 4 - 1 ：おはじきと位取り表による 3443 の表現】

ここで注意しなければならないのは, 第 3 章におけるおはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査のところでも触れたが，ここでの操作的証明で用いる位取り表は，一般に日本の教科書で扱われている位取り表とは，表現の方法が異なるということである．日本の教科書で扱われている位取り表は，数を量に対応させて理解させようとする意図から，一の位ブロック，十の位は 10 個のブロックからなるスティック，百の位は 10 本のスティックからなるプレートでそれぞれの位の数が表現されているが, ここでの操作的証明で用いる位取り表では，十の位に置かれたおはじきは 1 つが 10 を表し，百の位に置かれたおはじきは 1 つが 100 を表すというように，どの位に置かれるかによって，1 つのおはじきが表す数（量）は異なってくる．しかし，第 3 章で行ったインタビュー調査の結果からは，日本の教科書で扱われている位取り表と, ここでの操作的証明で用いる位取り表の表現の違いについ

ては，特別な指導を行わなくても十分理解できることが確認されており，中学校段階での代数的証明への導入ということを考慮するならば，例えば十進位取り記数法では abc と表される 3 桁の数が，文字を用いた形式的な証明においては 100a＋10b＋c と表されるということにつながるという意味で，数の表現の代数的な意味を重視した表現方法であるということがいえる．

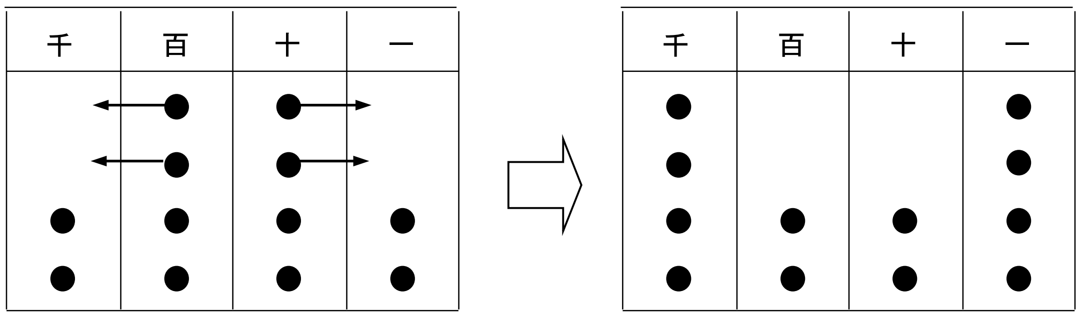
おはじきと位取り表を用いた操作的証明では，具体的な ANNA 数を位取り表の上に表現した後，次の図 4 - 2 に示すような操作を行う．



【図 4 - 2 ：3443 から 4334 への位取り表におけるおはじきの移動】

つまり，位取り表の上におはじきで表された 3443 を 4334 に作り変えるため，百の位にあるおはじきを 1 つ千の位に動かし，十の位にあるおはじき 1 つを一の位に動かすのである．百の位のおはじきを 1 つ千の位へ移動することによって，数としては 1000 増えて 100 減る，つまり，＋1000－100 だけ変化する．また，十の位のおはじきを 1 つ一の位へ移動することによって，数としては 10 減って 1 増える，つまり，－10＋1 だけ変化する．したがって，全体としては＋1000－100－10＋1＝891 だけ変化し，2 つの ANNA 数の差は 891 であることが示されるのである．この操作は，もちろん，3443 と 4334 という ANNA 数の差が 891 であることを示したものであるが，2332 と 3223，4554 と 5445，7887 と 8778 など，ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差が 1 である場合には，同じおはじきの操作によって一方の ANNA 数からもう一方の ANNA 数へと作り変えることができるので，同様の操作が行えるということを根拠として，ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差が 1 の場合には，ANNA 数の差が 891 になるということが納得されるのである．

さらに，このようなおはじきの操作は，ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差が 2 以上の場合にも拡張することができる．2442 と 4224 の場合を考えると，位取り表におけるおはじきの移動は，以下の図 4 - 3 のようになる．



【図 4 - 3 ：2442 から 4224 への位取り表におけるおはじきの移動】

ANNA 数を構成する 2 数の差が 2 であるため,「百の位から千の位へ 1 つ，十の位から一の位へ 1 つおはじきを移動する」という操作を 2 回行うことになる.「百の位から千の位へ 1 つ，十の位から一の位へ 1 つおはじきを移動する」ことによって数としては 891 増加するので，この操作を 2 回繰り返すということによって，数全体としては 891×2 だけ変化するということが示されるのである．さらに，ANNA 数を構成する 2 数の差が 3 のときは「百の位から千の位へ 1 つ，十の位から一の位へ 1 つおはじきを移動する」という操作を 3 回繰り返せばよいので，2 つの ANNA 数の差は 891×3 であることが納得されるのである．このような操作は，ある具体的な対象に対して行われたものであるが，その操作が一般的にも同様に可能であることがイメージされることによって，2 つの ANNA 数の差は，ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差の 891 倍であることが示されるのである．

このようなヴィットマンの操作的証明は，もともとは証明の手段を持たない小学校の段階の児童に,「理由づけ」の学習活動としての手段を与えることをイメージして考えられたものであるが，このような操作を振り返ることを通した証明の活動は，証明を初めて学習する中学校段階の生徒にも有効に作用するのではないだろうか．中学校第 2 学年における「文字を用いた説明」の単元では，証明の意味や命題の一般性ということよりも，式をいかに変形していくかということに焦点化される傾向にあり, 証明について本格的に学習する図形の単元でも,「証明の書き方」の指導が中心的であり，証明そのものの意義や証明のもつ一般性に関する学習は十分行われていないというのが現状である. そのような証明の学習の中に操作的証明を取り入れることによって，自らの操作を振り返り，それを一般化するという学習活動を組み込むことによって, 証明の意義や証明のもつ一般性の理解に役立つものと考えられる．そこで，本研究における実験授業では，第 2 学年の「文字を用いた説明」の単元において，この ANNA 数のパターンとその操作的証明を取り入れることとした．

２．ANNA 数の発展課題

前述したように，今回の実証的研究では，ヴィットマン自身が操作的証明の例として挙げた ANNA 数という数学的パターンを題材として用いることにしたが，この ANNA 数のパターンの構造を少し変化させることによって，おはじきと位取り表を使って同様に操作的証明を行うことができる別の数学的パターンを見出すことができる．ここでは，ANNA 数の発展課題としてのそれらの数学的パターンの例を示し，学習課題としての発展性を整理する．

（１）NANA 数の現象

ANNA 数は，自由に選んだ 2 つの 1 桁の自然数を，2332，5115 のように配置して作った 4 桁の自然数であったが，NANA 数はその配置を 2323，1515 のように配置して作った 4 桁の自然数のことである．この NANA 数についても，ANNA 数と同様の数学的パターンを見出すことができる．

【手順】

①1 から 9 までの 1 桁の自然数の中から異なる 2 つの自然数を選ぶ．

→ 例えば 3 と 5

②選んだ 2 つの自然数を NANA のように配列して 4 桁の NANA 数を 2 通り作る．

→ ①で 3 と 5 を選んだ場合は，3535 と 5353 という 2 つの NANA 数ができる．

③できた 2 つの NANA 数の差を求める．

→ ②で作った 3535 と 5353 の場合，その差は 5353－3535＝1818.

①における自然数の選び方については，0 や同じ 2 つの自然数を選んでも数学的には問題ないが，そのような設定にすると，ANNA 数のときと同様に，NANA 数を構成したときに 4 桁の数にならなかったり，2 つの NANA 数の差が 0 になってしまったりすることになる．そのようなことを避けるために，0 でない異なる 2 つの自然数を選ぶように設定してある．

NANA 数についても，1 組の NANA 数の差を求めただけでは数学的なパターンは見えてこないが，様々な NANA 数を作ってそれらの差を計算すると，ANNA 数のときと同様に，ある数学的パターンを導出することができる．様々な 2 つの自然数の組み合わせによって作った NANA 数の差についての計算の結果をまとめたのが表 4‑2 である．

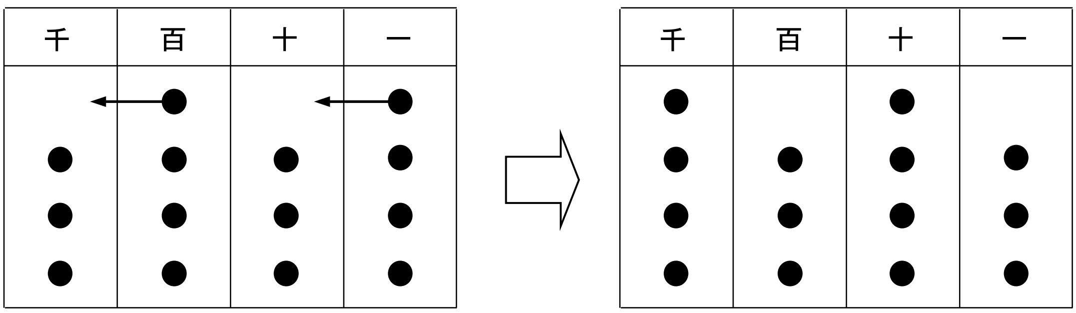
【表４-２：「NANA 数」の差とその構造】

NANA 数の例	NANA 数を構成する2数の差	2つの NANA 数の差
1212 と 2121，3434 と 4343 など	1	909＝909×1
1313 と 3131，3535 と 5353 など	2	1818＝909×2
2525 と 5252，4747 と 7474 など	3	2727＝909×3
1515 と 5151，3737 と 7373 など	4	3636＝909×4
1616 と 6161，2727 と 7272 など	5	4545＝909×5
2828 と 8282，3939 と 9393 など	6	5454＝909×6
1818 と 8181，2929 と 9292	7	6363＝909×7
1919 と 9191	8	7272＝909×8

表４-２を見ると，NANA 数の差に関しては，次のような数学的パターンを導出することができる．

【NANA 数の差に見られる数学的パターン】
異なる２つの１桁の自然数選び，NANA のように配列して作った２つの NANA 数の差は，909×（最初に選んだ２つの１桁の自然数の差）となる．

ANNA 数の差は，891×（最初に選んだ２つの１桁の自然数の差）となっていたが，NANA 数では 909×（最初に選んだ２つの１桁の自然数の差）となる．NANA 数は ANNA 数の配列を変化させただけで，構造そのものは ANNA 数の数学的パターンと同様であるため，操作的証明についても ANNA 数と同様に行うことができる．図４-４は，3434 という NANA 数を 4343 に作り変える操作を示したものである．



【図４-４：3434 から 4343 への位取り表におけるおはじきの移動】

位取り表の上におはじきで表された 3434 を 4343 に作り変えるため，百の位にあるおはじきを１つ千の位に動かし，一の位にあるおはじき１つを十の位に動かすのである．この操作によって，数全体としては＋1000－100＋10－1＝909 だけ変化するので，3434 と 4343 のように NANA 数を構成する 2 つの 1 桁の自然数の差が 1 の場合は, NANA 数の差は 909 であることが示される．さらに，NANA 数を構成する 2 つの 1 桁の自然数の差が 2 以上の場合は，同様の操作をその差の回数分行うことになるので，結果として 2 つの NANA 数の差は 909×（最初に選んだ 2 つの 1 桁の自然数の差）ということが示されるのである．

この NANA 数の数学的パターンは, ANNA 数の数学的パターンとほぼ同様の構造をもつため，ANNA 数を題材とした学習活動を展開したのちに，確認のための課題として用いることもできるだろうし，そのような学習課題を設定することによって，改めておはじきによる操作の意味を確認するということにもつながるであろう．

（２）魔法の数

魔法の数は，國本(2006)によって紹介されたもので，第２章の中で，操作的証明が別の数学的現象を創造することの例として取り上げたものであるが, 再度ここでその構造を確認しておく. 魔法の数とは, 次のような手順によって見出すことができる数学的パターンである.

【手順】

①1234，2345，3456 のように，各位の数字が千の位から一の位へと連続する自然数になっているような 4 桁の自然数を 1 つ選ぶ.

②選んだ 4 桁の自然数に，魔法の数 3087 を加える．

このようにして計算した結果は，以下のようになる．

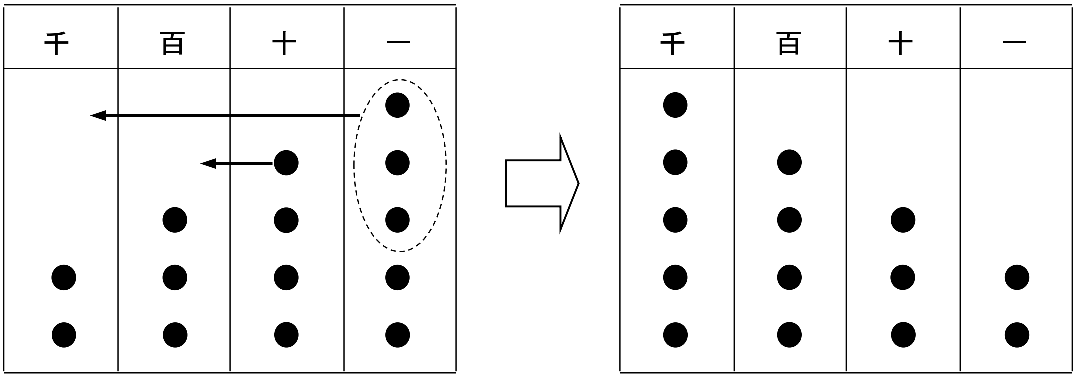
1234＋3087＝4321	2345＋3087＝5432	3456＋3087＝6543
4567＋3087＝7654	5678＋3087＝8765	6789＋3087＝9876

つまり，各位の数字が連続するような 4 桁の自然数に魔法の数 3087 を加えると，各位の数字の並びが逆転して，各位の数字が一の位から千の位へと連続するような 4 桁の自然数になるという数学的なパターンを見出すことができるのである. ANNA 数や NANA 数の場合は，様々な場合を計算して，その結果を観察し分類することによって，ようやく数学的パターンを見出すことができたが，魔法の数の場合は，1 つの事例でも「各位の数字の並びが

逆転する」という数学的パターンを見出すことができ，2 つ目，3 つ目を調べてみることによって, その数学的パターンが偶然ではないことが確認されるという流れでの展開が可能となるため，数学的パターンを見出す学習活動の展開としては ANNA 数や NANA 数とは異なる展開となる．

しかし，魔法の数の数学的パターンも，構造的には，ある 2 つの自然数の差に関するパターンであるため，おはじきと位取り表を用いた操作的証明としては，ANNA 数や NANA 数の場合と同様に，証明を行うことができる．

下の図 4 - 5 は, 2345 という 4 桁の自然数を 5432 に作り変える操作を示したものである．



【図 4 - 5 ：2345 から 5432 への位取り表におけるおはじきの移動】

ANNA 数や NANA 数の場合と同様に，一方の数からもう一方の数へと位取り表上のおはじきを作り変える操作をもとに証明することになる．ここでは，手順①で選んだ 4 桁の自然数を，その各位の数字の並びが逆転した 4 桁の自然数に作り変えるという操作，つまり，おはじきを一の位から 3 つ千の位に移動させ，十の位から 1 つ百の位へ移動させるという操作を行うのである．このことによって，数全体としては 3000 増えて 3 減り，100 増えて 10 減るので，＋3000－3＋100－10＝＋3087 となり，2345 と 5432 の差は 3087 であることが示されるが，ここでのおはじきの操作は，2345 と 5432 のときだけの操作ではなく，3456 を 6543 に作り変えるときや, 5678 を 8765 に作り変えるときにも同様の操作を行うことから，一般に，各位の数字が連続するような 4 桁の自然数と，その各位の数字の並びを逆転させた 4 桁の自然数との差は常に 3087 であることが示されることになる．

この魔法の数に対するおはじきと位取り表を用いた操作的証明は, ANNA 数や NANA 数に比べると，おはじきの動きが若干複雑にはなるが，ANNA 数や NANA 数のときのように ANNA 数や NANA 数を構成する 2 つの 1 桁の自然数の一般性, ANNA 数や NANA 数自体

の一般性といった多重構造的な一般性を含むものではなく，計算の対象となる 4 桁の自然数自体が 6 つと限られているため，そこに現れる数学的パターンをイメージしやすいという特徴があると言える．

また，魔法の数は，4 桁の場合だけではなく，2 桁，3 桁，5 桁，6 桁などの各位の数字が連続する自然数に対しても同様の数学的パターンを見出すことができる．以下の表 4-3 は，各桁数の自然数に対する魔法の数をまとめたものである．

【表 4-3 ：各桁数に対する魔法の数】

桁数	もとになる自然数	各位の数字の並びを逆転させる魔法の数
2 桁	12，23，34，45，56，67，78，89	9
3 桁	123，234，345，456，567，678，789	198
4 桁	1234，2345，3456，4567，5678，6789	3087
5 桁	12345，23456，34567，45678，56789	41976
6 桁	123456，234567，345678，456789	530865
7 桁	1234567，2345678，3456789	6419754
8 桁	12345678，23456789	75308643
9 桁	123456789	864197532

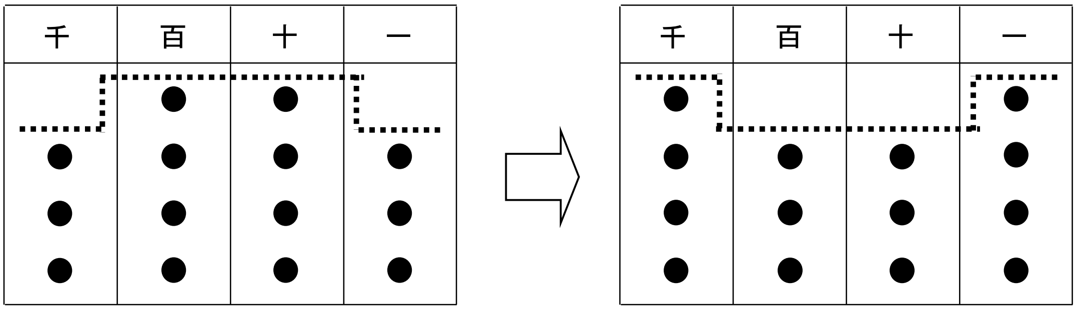
それぞれの桁数における魔法の数の数学的パターンについての説明は，4 桁の魔法の数の場合のおはじきと位取り表を用いた操作的証明と同様であるため，ここでは説明しないが，発展的な題材として，様々な桁数の魔法の数を扱うことによって，おはじきと位取り表による操作的証明の意味がより理解されることが予想される．また，学習環境をデザインする対象の子どもの発達段階によって，4 桁ではなく 3 桁の魔法の数を扱うなど，発達段階に応じた学習環境のデザインにも柔軟に対応することができる題材である．

（3）位取り表におけるおはじきの操作からの命題の導出

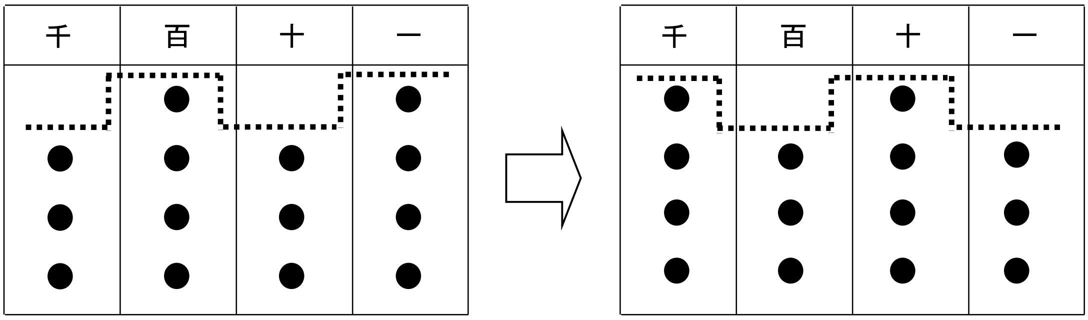
今回の実証的研究で題材とした ANNA 数の発展的課題として，NANA 数の数学的パターン，魔法の数の数学的パターンを説明し，その特徴を整理してきたが，これらの題材は，ほぼ同様な構造で，おはじきと位取り表を用いた操作的証明ができる題材であるという点で共通している．このことは，逆に言えば，おはじきと位取り表を用いた操作的証明でのおはじ

きの操作をもとにして，様々な数学的パターンを見出せるということを意味している．このことは，第２章において，操作的証明の発展性として示したことであるが，おはじきと位取り表を用いた操作的証明からの学習課題の開発という視点から，まとめておきたい．

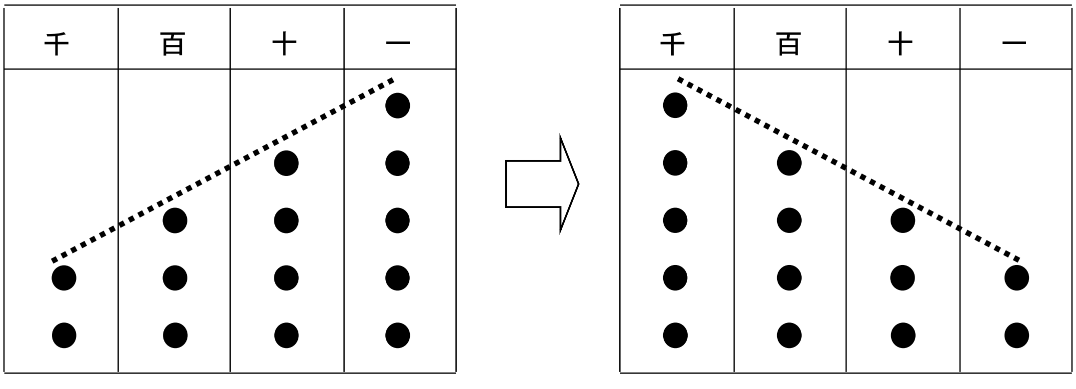
ここで示した，ANNA 数，NANA 数，魔法の数に対するおはじきと位取り表を用いた操作的証明におけるおはじきの操作をまとめると，以下の図４-６，図４-７，図４-８のようになる．



【図４-６：ANNA 数の操作的証明におけるおはじきの移動】



【図４-７：NANA 数の操作的証明におけるおはじきの移動】



【図４-８：魔法の数の操作的証明におけるおはじきの移動】

これらのおはじきの操作を見ると，ANNA 数では，山型のおはじきの配置を谷型のおはじきの配置に変更する操作，NANA 数では，凹凸の順が逆になるようにおはじきの配置を変更する操作，魔法の数では，右上がりに並んでいる配置を右下がりの配置に変更する操作が，それぞれ行われていることが分かる．つまり，位取り表に並べたおはじきの配置を図形的にとらえて，それをどのように変形させるかを考えることで，ANNA 数と同様の数学的パターンを作り出すことができるのである．

例えば，魔法の数における各位の数字が千の位から一の位へと連続するような 4 桁の自然数のおはじきの配置をもとに，千の位におはじきを 1 つ置いて，十の位から 1 つ，一の位から 2 つのおはじきを取り除くというおはじきの操作を考えると，位取り表では，各位に同じ数ずつのおはじきが並ぶことになる．このとき，数としては 1000 増えて，10 減って，2 減るということから全体として 988 増えることになる．よって，「各位の数字が千の位から一の位へと連続するような 4 桁の自然数に，988 を加えると，各位の数字がすべて同じ 4 桁の自然数になる．」という数学的パターンを導出することができるのである．

このように考えるならば，位取り表の桁数を変更したり，最初のおはじきの配置を変更したり，おはじきの動かし方を変更したりすることによって，様々な数学的パターンを導出し，学習課題を開発することが可能になる．つまり，操作的証明は，児童生徒の説明活動のための手段というだけではなく，教師の学習課題の開発の手段としても機能するということである．

以上，実証的研究のための学習環境デザインの題材として用いた ANNA 数という数学的パターンとその発展性について考察したが，次節以降では，ANNA 数を題材としてデザインした学習環境による実証的研究について詳述することとする．

２節　公立中学校における試行授業

本研究における実証的研究は，ANNA 数の数学的パターンを題材としてデザインした学習環境によって行った．学習環境デザインは，デザインと検証，リデザインの繰り返しによって洗練されてくるが，本研究においても，公立中学校における試行的な授業，附属中学校における比較検証的な授業，さらに 2 回の授業を通して得られた示唆をもとにリデザインした学習環境を用いて行った公立中学校での授業と 3 段階にわたっての実証的研究を行っている．本節では，それらの実証的研究のうち，最初に公立中学校において行った試行的な

授業の様子について，その詳細を示すとともに，試行授業から得られた学習環境デザインに対する示唆をまとめることとする．

１．授業の趣旨と授業設計

まず，試行的に行った授業の目的，実施計画，実施状況について，その概要を示すことにする．

（1）授業の目的

ヴィットマンは,形式的証明の手段をもたない小学校段階の児童に対する理由づけの活動のための道具として操作的証明を位置付けており,本研究で取り上げているおはじきと位取り表を用いた操作的証明も，そのような意図で用いられているものである．実際，第３章で考察したように，小学校高学年の段階の児童に対しては，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインは，十分可能であると考えられる．

しかし,本研究では,文字を用いた代数的証明を取り扱う中学校段階の生徒を対象として,おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境をデザインし,操作的証明の有効性と限界を考察しようとしているため，本格的な学習環境デザインの準備段階として，いくつか確かめておくべき事柄がある．

そこで，ここで行った試行的な授業では，以下のことがらを確認することを目的として設定した．

①中学校の段階の生徒に，おはじきと位取り表を用いた操作的証明が，学習活動として受け入れられるのか． ②操作的証明に関する素地的な学習経験がない生徒たちが，おはじきと位取り表による操作的証明の意味が理解できるのか．

①は，中学校第２学年という発達段階にある生徒が，ともすれば小学校で行うと思われているようなおはじきと位取り表の操作を中心とした学習活動に取り組み,探究的な学習活動を展開できるかどうかということを確認しようとするものである．中学校第 1 学年の段階から，文字式についての学習をしてきており，ある程度，数学の形式性，抽象性を意識した学習活動を経験してくる中で，おはじきと位取り表という，小学校で用いていたような学習具を用いた活動を取り入れることに抵抗を感じる生徒がいるということも考えられる．学習

活動に対するモチベーションを維持できるかという視点からも確認しておく必要があると考え，試行的な授業の目的として設定した．

②は，授業において行う ANNA 数の数学的パターンの説明におけるおはじきの操作の意味が理解できるかどうかということである．第 3 章における小学校高学年の児童を対象としたインタビュー調査の結果からは，おはじきと位取り表を用いた数の表現自体は容易に理解できるものの，おはじきの操作の意味については，何らかの指導がなければ理解することが難しいということが明らかとなった．中学校第 2 学年という発達段階の生徒を対象としたとき，おはじきの操作の意味理解に関しては，小学校高学年の段階の児童とどのような違いがみられるのかということに関しても，確認しておく必要があるだろう．また，今回の試行的な授業は，1 単位時間での学習活動となるため，特に操作的証明に関する素地的な学習経験をしていない生徒が，1 単位時間という限られた時間内で，どこまでおはじきと位取り表を用いた操作的証明の意味を理解し，それを活用することができるかということも確認しておく必要があるため，試行的な授業の目的として設定した．

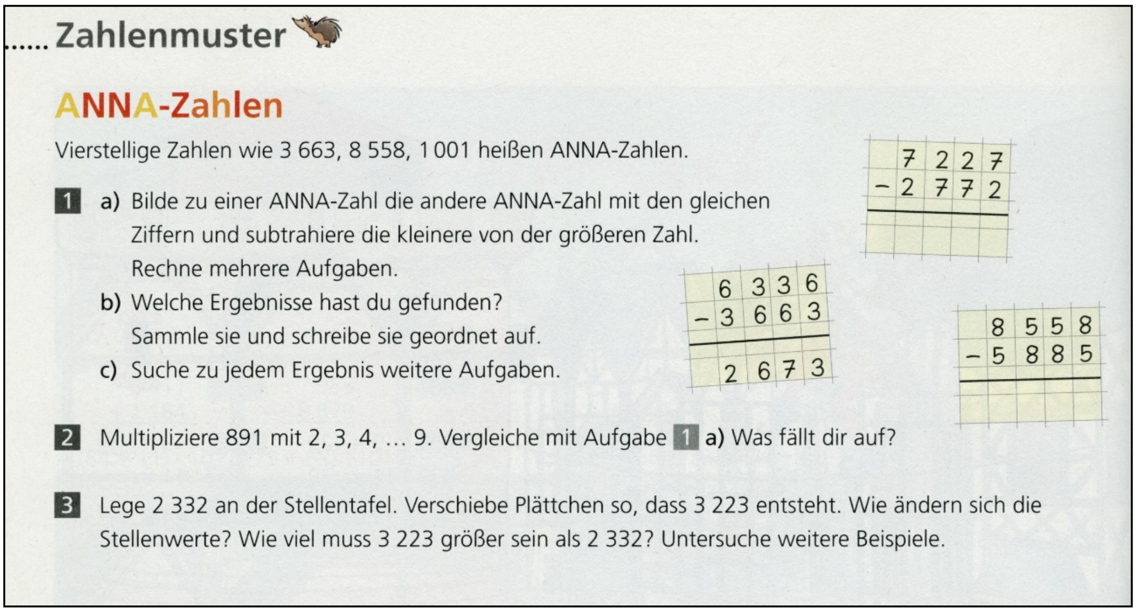
その他にも，ANNA 数の数学的パターン自体を生徒が探究的に発見することができるか，操作的証明が形式的証明の学習の前段階としてどのように機能するのかなど，分析の視点は設定できるが，本試行授業では，上記の①②を確認することを主な目的として授業を実施し，学習環境のデザインに向けた示唆を得たいと考える．

（２）授業の実施計画

試行的な授業の実施計画の作成，実施に当たっては，現職派遣の大学院生として熊本大学大学院に在籍していた熊本県水上村立水上中学校の樋脇正幸教諭の協力を得ることができた．基本的な授業展開の検討から，学習課題と授業での展開の概要をまとめたマスタープランの作成，試行授業の実施，授業実施後のビデオの分析と考察について．学校現場での実践経験豊かな教員との共同研究の形で実証的研究を進めることができた．

ANNA 数を題材とした試行的な授業の具体的な展開については，ヴィットマンが編纂した実験的教科書『数の本（Das Zahlenbuch）』における ANNA 数を題材とした学習活動の展開を参考とした．第 2 章においても示したように，ヴィットマンは，自身の操作的証明の概念を説明するための具体例として ANNA 数の数学的パターンに対するおはじきと位取り表による操作的証明を用いており，その ANNA 数の数学的パターン自体を，『数の本（Das Zahlenbuch）』の第 4 学年の学習活動として具体化しているのである．

以下は，第２章で示したものの再掲となるが，実際の『数の本（Das Zahlenbuch)』に示された内容と，その日本語訳である．



...... Zahlenmuster

ANNA-Zahlen

Vierstellige Zahlen wie 3 663, 8 558, 1 001 heißen ANNA-Zahlen.

1 a) Bilde zu einer ANNA-Zahl die andere ANNA-Zahl mit den gleichen Ziffern und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl. Rechne mehrere Aufgaben.

b) Welche Ergebnisse hast du gefunden? Sammle sie und schreibe sie geordnet auf.

c) Suche zu jedem Ergebnis weitere Aufgaben.

2 Multipliziere 891 mit 2, 3, 4, ... 9. Vergleiche mit Aufgabe **1** a) Was fällt dir auf?

3 Lege 2 332 an der Stellentafel. Verschiebe Plättchen so, dass 3 223 entsteht. Wie ändern sich die Stellenwerte? Wie viel muss 3 223 größer sein als 2 332? Untersuche weitere Beispiele.

【資料４-１：Das Zahlenbuch，4. Schuljahr， S. 102】

ANNA 数

3663，8558，1001 のような４桁の数を ANNA 数といいます。

1 a) ２つの数を使って２つの ANNA 数をつくりましょう。そして大きい ANNA 数から小さい ANNA 数を引いてみましょう。同じように計算してみましょう。

b) どんな答えを見つけましたか？ 出てきた答えを並べてみましょう。

c) 答えが同じになる ANNA 数を見つけましょう。

2 891 に 2，3，4，…，9 をかけてみましょう。その答えと 1 の答えと比べましょう。気がついたことがありますか？

3 2332 を位取り表で表しましょう。それが 3223 になるようにおはじきを動かしましょう。数はどれだけ大きくなりましたか？ 3223 は，2332 よりいくつ大きいですか？ 他の ANNA 数のときも調べてみましょう。

【資料４-２：『数の本』（Das Zahlenbuch， ４年生 児童用，p. 102）日本語訳】

ここでは，2 つの 1 桁の自然数を選んで ANNA 数を構成し，それらの差を求める活動から，様々な ANNA 数の差を観察することを通して ANNA 数の差に見られる数学的パターンを探究する活動，そして最終的には，おはじきと位取り表を用いて，ANNA 数の数学的パターンを説明する活動までが順次示されており，第 4 学年の児童でも段階的に ANNA 数の数学的パターンの操作的証明を学習することができるように展開されている．

このような『数の本（Das Zahlenbuch）』における展開を基本としながら，対象が中学校第 2 学年の生徒であることを考慮して，以下の 2 点について展開をアレンジすることにした．

まず 1 つ目は，ANNA 数の数学的パターンの発見に関する学習活動についてである．『数の本（Das Zahlenbuch）』では，ANNA 数の数学的パターンの発見を助けるために，$\boxed{2}$の活動として 891 の倍数を書き出し，ANNA 数の差と比較してみるという活動が設定されている．しかし，本試行授業では，対象が中学校第 2 学年の生徒であり，理由づけの活動に入るまでに十分な探究的活動を確保したいという観点から，891 の倍数を書き出すという活動は削除し，その代わり，ANNA 数の差に見られる数学的パターンを探究する時間を十分に確保することとした．

2 点目は，文字を用いた代数的証明の扱いについてである．『数の本（Das Zahlenbuch）』では，小学校段階の児童の理由づけの活動を意図しているため，おはじきと位取り表による操作的証明をもって学習活動を終えているが，本試行授業では，文字を用いた代数的な証明について学習する単元の一部として学習活動を位置付けるため，ANNA 数の数学的パターンの操作的証明の後に，文字を用いた代数的証明を行う活動を取り入れることとした．

また，本研究における学習環境デザインでは，学習環境デザインのコンセプトとして，学習課題とそこに見られる数学的パターン，学習活動のねらい，学習活動の展開と意図などをまとめたマスタープランを作成した．マスタープランとは，学習環境デザインの基本設計にあたるもので，学習活動のねらいや大まかな展開を示すことによって，学習環境デザインの概要を示すためのものである．山本(2012)は，マスタープランに含めるべき内容について，以下のように述べている．

《「本質的学習環境」の基本的な要件に従えば，その表現内容は，その授業コンセプト，学習の狙い，学習活動とその意図を記述することが最低限必要であろう．対象とする学年および時期，想定される時間等は，クラスの実情によって変化する．それ故，それら

について詳細を記述する必要はないであろう．むしろ個々の教師自身がクラスの実情に合わせて主体的に改変したり，学年を超えて稼働させる余地を意図的に残すことが必要である．》（山本(2012)，p.134）

つまり，授業者は，このマスタープランをもとに，各自の授業実施クラスの生徒の実情に応じて学習指導案を作成し，具体的な授業設計を行うのである．

本試行授業に当たって作成したANNA数の数学的パターンに関するマスタープランは，本章の最後に資料４‐３として掲載したが，マスタープランに示された学習活動の流れは，以下のようなものである．

①ANNA数の差を求め，そこに見られる現象に気付く．

②おはじきと位取り表によってANNA数を表現し，その差を求める．

③おはじきと位取り表を用いて，ANNA数の差が891×（最初に選んだ2数の差）になることを説明する．

④文字を用いた式によって，ANNA数の差に見られる現象を説明する．

⑤NANA数について探究する．

また，試行授業は，中学校第2学年における「文字を用いた説明」の一部として指導計画に組み込み実施したが，ANNA 数という教科書にない題材を扱う授業であり，授業後の分析をしやすくするという意図もあって，授業に当たってはワークシートを作成してそれを用いた．ワークシートは，マスタープランに示された学習活動の流れに沿って作られており，1枚目はANNA数の現象を探究的に発見する段階，2枚目はおはじきと位取り表によって操作的証明を行う段階が書き込めるようつくられている．また，文字を用いた式によってANNA数の現象を説明する段階については，時間的に1単位時間内では扱えないと判断したため，事後課題として取り組めるように，別のワークシートを作成した．これらのワークシートに関しても，同じく本章の最後に資料４‐４として掲載している．

（３）授業の実施状況

ANNA数の数学的パターンを題材として設計された試行的な授業は，平成22年12月17日（金）に，公立中学校である熊本県の水上村立水上中学校第2学年1組の生徒19名を対象として実施された．マスタープランの展開からいえば，数時間をかけて扱う内容ではある

が，試行的な授業であるということと，教育課程上の時間確保の制限もあり，今回の試行授業では，1 単位時間での実施とし，授業時間内に扱えなかった内容については，事後課題として取り組むことができるよう，ワークシートを作成して対応した．

実際の授業では，マスタープランの展開における②の段階，つまり，ANNA 数を構成する 2 つの 1 桁の自然数の差が 1 の場合の ANNA 数の差が 891 になることを，おはじきと位取り表を用いて表現し説明するところまでしか扱えなかったため，その後の展開については，ワークシートを用いて事後課題として取り組むように指示し，後日，ワークシートを回収した．今回設計した授業の実施に当たって必要とされる時間数について，授業を実際に行った樋脇教諭は，

《授業時間に関しても予想以上に時間を必要とすることがわかった．少なくともマスタープランの学習活動(2)までで 1 時間，(3)以降でさらにもう 1 時間必要であると思われる．》（樋脇(2011)，p.116）

と述べており，複数時間を配当した指導計画の作成が必要であることが示されている．

なお，授業の様子については，すべてビデオカメラで記録し，ワークシートについても授業中に用いたもの，事後課題として取り組んだものすべてのコピーをとって事後に分析を行った．

２．授業分析と考察

ここでは，実施した試行授業のビデオ，ワークシートの分析から，ANNA 数を題材とした学習環境のデザインに関して考察した結果をまとめる．なお，考察の観点としては，（１）操作的証明の中学生への適用可能性，（２）数学的命題の探究的な発見，（３）おはじきと位取り表による操作的証明の理解と実行，（４）形式的証明の学習との関連，という 4 点に焦点化して考察することとする．

（１）操作的証明の中学生への適用可能性

これは，試行授業の目的にも挙げられているが，ある程度形式的な数学の学習を経験している中学校第 2 学年の生徒に，おはじきと位取り表を用いた操作的証明という学習活動が受け入れられるかどうかという問題である．

筆者と授業を担当した樋脇教諭との間では，おはじきを用いた操作的活動は，主に小学校

の低学年で行われるため，中学生の生徒にとっては，ともすれば幼稚な活動であり，受け入れられない可能性もあると予想していたが， 実際に授業を実施してみて，そのビデオを見る限り，おはじきと位取り表による操作的証明の活動を「幼稚な活動」としてとらえている生徒は見られず，どの生徒も意欲的におはじきと位取りによる操作的証明に取り組む姿が観察された．

また，授業で用いたワークシートを見ると，操作的証明の活動を，図を用いてまとめることができており，おはじきと位取り表による操作的証明の活動を学習活動として捉えることができていることが伺えた．

（２）数学的命題の探究的な発見

これは，「2 つの ANNA 数の差が，ANNA 数を構成する 2 つの 1 桁の自然数の差の 891 倍である」という数学的命題を，生徒が探究的に発見することができるかということである．命題の発見自体は，操作的証明の前段階として取り組まれるものであるが，操作的証明の活動は，探究，発見，理由づけ，という一連の証明すること（Proving）の活動に組み込まれるため，命題の発見に関する活動は，操作的証明を取り入れた学習活動の重要な部分であると言える．

表 4‐4 は，ワークシートにおける生徒の反応をまとめたものである．生徒数は 19 名であるが，複数回答があったため，反応数は 29 件である．

【表 4‐4 ：ANNA 数の現象に対する探究活動の結果】

反応類型	人数
891×（最初の 2 数の差）になっている	3
選んだ 2 数の差が 1 ずつ増えると，ANNA 数の差は 891 ずつ増える	6
891 の倍数になっている（891 ずつ増えている）	4
選んだ 2 数の差が同じであれば，ANNA 数の差も同じ	7
選んだ 2 数の差が 1 のときは ANNA 数の差は 891， 選んだ 2 数の差が 2 のときは ANNA 数の差は 1782	3
ANNA 数の差の数字を全部足すと必ず 18 になる	1
上記以外	4
無解答	1

ワークシートは個人での探究活動における反応を示しているため, 表を見る限り個人的な探究のみで ANNA 数を構成する 2 数と ANNA 数の差との間の関係をとらえることができている生徒は 9 名である．また，ANNA 数を構成する 2 数との関係までは発見できていなくても ANNA 数の差が 891 の倍数になることは捉えている生徒が 4 名，891 の倍数になることは発見できていないが ANNA 数を構成する 2 数の差によって ANNA 数の差が決まるということを捉えられている生徒が 7 名いることから，ほとんどの生徒が何らかの形で ANNA 数の差に見られる数学的現象に気付くことができていたと考えられる．

実際の授業では, 個々の生徒の発見を生徒同士の相互作用を通して積み上げていくことによって，クラス全体として ANNA 数の差に見られる数学的現象について予想される命題としてまとめることができた．

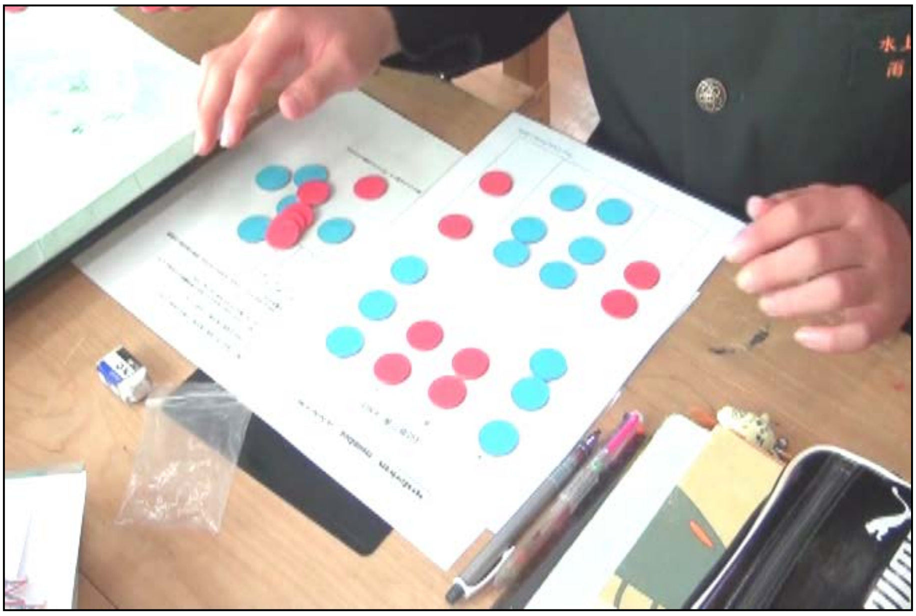
ヴィットマンの編纂した小学校向けの教科書『数の本』では，ANNA 数の差に見られる性質を発見するために，ANNA 数の差を計算する活動とは別に，891 の倍数を書きならべる活動が設定されていたが，この結果を見る限り，中学校第 2 学年の生徒に対する課題提示としては，そのような補助的な課題設定は必要なく，自由に ANNA 数の差について探究活動を行わせ，発見した事柄をクラス全体で積み上げていくことによって，ANNA 数の差の数学的現象にたどり着くことができるということを確認できたといえよう．

（3）おはじきと位取り表による操作的証明の理解と実行

これは, おはじきと位取り表による操作的証明がどのようなことを意味しているのかを理解し，それを説明することができるかどうかということであるが，第 3 章において行った小学校第 5 学年の児童に対するインタビュー調査の結果と同様に, おはじきと位取り表による数の表現自体については，特に困難性を示す生徒はいなかったが，それを用いて ANNA 数の差が ANNA 数を構成する 2 つの自然数の 891 倍となることを示すことは，やはり難しかったようである．

ANNA 数の差に見られる数学的現象を確認した後，おはじきと位取り表による数の表現方法について説明し，これを用いて ANNA 数の差が ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差の 891 倍となることを説明してみるように指示した．ワークシートに示したように，まず 2332 と 3223 との差が 891 になることを説明する設問を設け，次にそれを一般化するという流れで学習活動を展開したが，今回の授業で想定している操作的証明，つまり，「2332 を位取り表におはじきで表し，それを 3223 に作り変えるときの操作を振り返って 891 増え

ているということを示す」という説明を行おうとした生徒は 19 名中 2 名だけで，ほとんどの生徒は，図４-９に示すように，2332 と 3223 を位取り表の上下に配置し，筆算と同じように上の数 3223 から下の数 2332 を取り去ろうとする操作である．



【図４-９：操作的証明における生徒の反応】

生徒にとっては，「差を求める＝筆算」というイメージが強く，位取り表とおはじきの操作においても，筆算に近い操作をしようとすることは，小学校第 5 学年の児童に対するインタビュー調査でも見られた傾向であるが, 試行授業においても同様の反応を観察することができたといえよう．

授業では，2332 から 3223 へと数を変形させてそのおはじきの動きによって説明しようとした生徒の反応を取り上げて説明しようとしたが,「おはじきの移動によって数の増減を説明する」ということになれていない生徒にとっては，説明を理解することが難しかったようである．理解できた生徒を中心に説明し合う活動を取り入れることによって，ほとんどの生徒は位取り表とおはじきの操作を理解することができたが，ワークシートの問 2 (4)において，他の ANNA 数へと操作的証明を一般化することに関しては，図と言葉による説明によってワークシートにまとめられた生徒は 9 名と半数以下であり，操作的証明の意味理解およびそれを説明することが，生徒にとっては難しい内容であることが確認できた.

今回の試行授業では，おはじきと位取り表による操作的証明の意味理解については，十分に行えたとは言えないが，1 単位時間と限られた時間内での試行授業であったことなどを考

慮すると，おはじきと位取り表による操作的証明の活動においては，生徒が取り組む時間を十分に確保し，生徒同士の相互作用を促進することによって，徐々に理解を促すことができるのではないかと予想される.

（４）形式的証明の学習との関連

試行授業は，1 単位時間で実施したため，ANNA 数の差に見られる数学的現象をおはじきと位取り表による操作的証明によって説明する段階までで授業は終了し, それを文字を用いた形式的証明に書く段階は，授業後の課題として，生徒それぞれが取り組んだ.

生徒が取り組んだワークシートを見る限り, 文字を用いた形式的証明が書けていた生徒は 3 名のみで，ほとんどの生徒は，一般の ANNA 数を文字を用いて表す段階で，すでに躓いている状態であった．これは，試行授業の段階では，教科書における「文字を用いた説明」は未習の段階であり, 代数的証明ということ自体が初めてであったということが大きく影響しているが，このことによって明らかになったのは，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れたからといって，自動的に文字を用いた形式的証明，つまり代数的証明ができるようになるわけではないということである.

また，文字を用いた代数的証明のためには，ある程度，文字式の扱いについても慣れておく必要があり，学習環境のリデザインにあたっては，ANNA 数の差に見られる数学的現象を題材として扱う場合，文字式の基本的な表現・処理について，どの程度の基礎的学習経験が必要とされるのかということを明らかにしておく必要があるだろう.

操作的証明は，あくまで適切に表現された数学的対象に対する操舵の結果を根拠として，一般的に成り立つと考えられる性質を説明しようとするもので, それ自身に抽象性を含む文字を用いて説明を行う代数的証明とは性格の異なるものである．従って，操作的証明を取り入れた学習環境のデザインにあたっては, 操作的証明から形式的証明へと移行するための教師の手立てを工夫する必要があるということがいえる．それと同時に，代数的な証明の学習の前に，操作的証明を取り入れることによって，生徒の学習活動としてどのような効果が期待できるのか，ということについて検討しておく必要もある．探究，発見，理由づけ，という一連の流れによる「証明すること（Proving)」の学習活動として，操作的証明を位置付けることの意義を見出すことができるように, 学習環境や実験授業のデザインを行っていく必要があるだろう.

３．学習環境のリデザインに向けた示唆

公立中学校における試行授業を通して,おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインに向けて，いくつかの重要な知見を得ることができた．ここでは，ANNA 数の差に見られる数学的現象を題材とした学習環境のリデザインのポイントとして，2 点まとめておきたい.

（１）おはじきと位取り表の操作に関する手立て

試行授業では，おはじきと位取り表の用い方について，生徒の特長を見出すことができた．つまり，例えば 2 つの ANNA 数，2332 と 3223 の差が 891 になることを示そうとする段階で，3223 を位取り表上におはじきで表し，そこから 2332 を取り除こうとする操作をする傾向にあるということである．これは，いわゆる筆算再現型のおはじき操作で，小学校第 5 学年の児童に対するインタビュー調査のときにも同様の傾向が観察されているので，児童生徒にとっては自然な反応であるといえよう.

確かに，差が 891 であるという結果を示したいので，操作の結果が 891 になるように操作しようとすることは自然なことであるとはいえるが，そのような操作では，なぜ差が 891 になるという事実を示すことはできても，なぜそのようになるのか，別の ANNA 数の時も同じようにできるのか，ということに関しては説明がつかない．操作的証明が「適切に表現された数学的対象に対する操作の結果に基づく証明」である以上，操作自体を振り返って，ANNA 数の差が 891 になることを説明しなければならないので，やはり授業で意図しているような「2332 から 3223 へ作り変える操作」によって説明を行いたい.

よって，学習環境のリデザインにあたっては，授業で意図しているようなおはじきの操作を意識づけるような教師側の手立てを工夫する必要があるだろう.

（２）形式的証明への移行のための手立て

試行授業では,おはじきと位取り表を用いた操作的証明から形式的証明へと転換する場面については，時間的な制限から扱うことができなかったが，少なくとも，操作的証明を取り入れたからといって自動的に形式的証明ができるようになるわけではないということは明らかとなった．そのため，操作的証明から形式的証明へと移行するために教師側のどのような手立てが有効かということを考えておく必要があるだろう.操作の結果を根拠とし証明と，形式性と一般性を備えた文字による代数的証明とでは，基本的な性格が異なるため，両者を

いかに結び付けて意向を図るのか，ということを具体的な手立てとして計画しておくことは，学習環境のリデザインにあたって重要な作業である．

また，形式的証明，つまり文字を用いた代数的証明の学習の前に，おはじきと位取り表による操作的証明を取り入れることによって，生徒の学習にどのような効果が期待できるのかということを明らかにすることも必要であろう．従来の代数的証明の学習では，やや天下り的に文字を導入し，形式的に証明の書き方を指導するという側面が強かった．そのような学習活動に対して，操作的証明を取り入れることの意義はどこにあるのか，この点についても明らかにできるよう，学習環境のリデザインを行い，実験授業の計画を立てる必要があるだろう．

３節　附属中学校における実験授業

試行授業では，ANNA 数の差に見られる数学的現象を題材とした学習環境をデザインし，1 単位時間という短時間ではあったが実際に授業を行い，その結果を分析した．その結果，学習環境のデザイン，実験授業の計画等について，いくつかの示唆を得ることができた．本節では，公立中学校での試行授業から得られた示唆をもとに，学習環境をリデザインし，附属中学校において行った実験授業について，その詳細を示すとともに，実験授業から得られた示唆をまとめることとする．

１．授業の趣旨と授業設計

まず，附属中学校で行った実験授業の目的，実施計画，実施状況について，その概要を示すことにする．

（1）授業の目的

２節で示したように，公立中学校における試行授業では，おはじきと位取り表による操作的証明が学習活動として中学生に十分受け入れられること，ANNA 数の差に見られる数学的現象を発見するための探究的活動が生徒同士の相互作用を通して可能となることが確認できた．しかし一方で，おはじきと位取り表の操作の意味理解に関しての手立てや，文字を用いた形式的な証明への移行のための手立てが必要であることが明らかとなった．また，文字を用いた形式的な証明，つまり代数的証明の学習の前段階として，操作的証明に取り組む

ことの意義はどこにあるのか，操作的証明を取り入れることによってどのような学習効果が期待できるのか，という点についても明らかにする必要があることが示唆された．

そこで，附属中学校における実験授業では，試行授業から得られた示唆を基に，次のような事柄を確認することを目的として設定した．

①操作的証明におけるおはじきと位取り表の操作の理解のために，どのような具体的な手立てが有効に機能するのか．
②操作的証明から形式的証明への移行のために，どのような具体的な手立てが有効に機能するのか．
③形式的証明の学習の前段階として操作的証明を取り入れることによって具体的にどのような学習効果が期待できるのか．

①は，小学校第 5 学年の児童を対象としたインタビュー調査や試行授業で，ANNA 数の差に見られる現象を説明しようとする際に，大きいほうの ANNA 数を位取り表上に配置し，そこから小さいほうの ANNA 数を取り除く操作をしようとする児童生徒が多く見られたため，本授業で意図するように，小さいほうの ANNA 数を位取り表上に配置し，それを大きいほうの ANNA 数に作り変える操作を行い，その操作の意味を考察するという学習活動を方向付けるために，教師はどのような手立てを行うことができるかということである．様々なアプローチから有効に機能する手立てを見出すために，複数のクラスで実験授業を行い，有効な手立てを見出せるよう実験授業を計画した．

②は，時間的な制約から，試行授業においては扱えなかった部分であるが，ANNA 数の差に見られる数学的現象に対する操作的証明を理解した生徒が，文字を用いた形式的証明，つまり代数的証明へと移行するためには，どのような手立てが必要であるかを明らかにするということである．試行授業では，授業後のレポート課題として代数的証明に関する内容を扱ったが，スムーズに代数的証明へと移行できていた生徒はほんの一部であった．また，操作的証明を理解したことによって説明は完了し，代数的証明の必要性を感じていない生徒がいることも予想される．従って，操作的証明を理解できた段階の生徒に対して，代数的証明の必要性や意義をどのように意識させ，学習活動の流れを作っていくかということを明らかにする必要がある．

③は，そもそも操作的証明を取り入れることの意義を，具体的レベルで検証するということである．第 2 章で考察したように，仮説としては，「操作的証明は形式的証明を生成し，

それを納得する手段になる」ということが考えられる．その仮説を具体的な授業のレベルにおいて検証するために，実験授業では，単元を通した学習活動を設定し，操作的証明を扱う学習集団と，通常の形式的証明のみを扱う学習集団とに分け，学習活動の展開の違いを観察することとした．

以上のような目的のもと，附属中学校の第２学年の生徒を対象とした実験授業を計画，実施し，学習環境デザインの改善に向けた示唆を得たいと考える．

（２）授業の実施計画

試行授業に引き続き，現職大学院生として熊本大学大学院に在籍していた熊本県水上村立水上中学校の樋脇正幸教諭の協力のもと，実施計画の作成を行い，授業の実施にあたっては，熊本大学教育学部附属中学校の松永憲治教諭の協力も得ての実施となった．今回の実験授業では，「ANNA 数の差に見られる数学的現象」だけを扱うのではなく，「文字を用いた説明」の単元として，「偶数・奇数の和」等，教科書にある題材も含めて 4 単位時間の単元構成とした．そのため，ANNA 数の差に見られる数学的現象の部分については樋脇教諭が授業を担当し，その他の題材については普段から生徒に指導している附属中学校の松永教諭が担当するという形で実験授業を計画した．授業の実施にあたっては，筆者と授業者 2 名による打合せを十分に行い，実験授業のねらい等について，共通理解を図った上で実施した．

ANNA 数の差に見られる数学的現象を扱う 2 時間については，試行授業の際に作成したマスタープランを基に学習活動の流れを作成した．今回の実験授業では，おはじきと位取り表の操作の意味理解，および形式的証明への移行における有効な教師の手立てを見出すことが目的であったため，試行授業の際には発展課題として位置付けていた NANA 数の差に見られる現象については授業後のレポート課題として扱うこととし，実際の授業では，以下の①から④の流れで展開することとした．

①ANNA 数の差を求め，そこに見られる現象に気付く． ②おはじきと位取り表によって ANNA 数を表現し，その差を求める． ③おはじきと位取り表を用いて，ANNA 数の差が 891×（最初に選んだ 2 数の差）になることを説明する． ④文字を用いた式によって，ANNA 数の差に見られる現象を説明する．

また，実験授業でも試行授業のときと同様，ANNA 数の差に見られる数学的現象を扱う

2 単位時間については，ワークシートを作成し，それを用いて学習活動を展開した．その際，特に，②③については，ANNA 数を構成する 2 つの自然数の差が 1 の場合と 2 以上の場合に分けて，ワークシートを作成し，段階的に操作的証明を捉えることができるように改善した．これは，ANNA 数の題材がもつ一般性に関する特徴によるところが大きい．ANNA 数は，構成する 2 つの自然数の選び方によって 2 つの ANNA 数の差が決定されるが，その ANNA 数を構成する 2 つの自然数の選び方は，二重の自由度があると言える．つまり，ANNA 数を構成する 2 数の差が 1 の場合でも，2 つの ANNA 数の作り方は 1221 と 2112，2332 と 3223，3443 と 4334 など幾通りも考えられるし，また，ANNA 数を構成する 2 数の差自体も 2 であれば 1331 と 3113 など，3 であれば 2552 と 5225 など幾通りも考えられるということである．これについては，試行授業の際にはそれほど意識せずに授業を展開していたが，授業計画を検討する中で，まずは ANNA 数を構成する 2 通の差が 1 の場合について操作的証明を考察し，それをもとに ANNA 数を構成する 2 数の差が 2 以上の場合を考えさせるほうが理解がしやすいであろうという配慮から，ワークシートも別にして段階的な学習活動を行えるように授業計画を設定した．実験授業で実際に用いたワークシートは，本章の最後に，資料 4 - 5 として掲載してある．

さらに，今回の実験授業では，「形式的証明の学習の前段階として操作的証明を取り入れることによって具体的にどのような学習効果が期待できるのか．」ということを明らかにすることを目的として設定していたため，操作的証明を行った上で文字を用いた形式的な証明へと学習活動を進める実験群と，操作的な証明は行わず，通常の文字を用いた形式的な証明の授業のみを行う対照群とを設定し，操作的証明を取り入れた学習集団と，そうでない学習集団との間にどのような差異がみられるかを観察することとした．その際，授業で扱う題材による差異をなくすために，対照群においても ANNA 数の差に見られる数学的現象の題材は，文字を用いた形式的証明として授業において扱うこととした．対照群においても実験群と同様，ワークシートを用いて授業を進めた．対照群で用いたワークシートについても，章末に資料 4 - 6 として掲載してあるが，レポート課題として扱った NANA 数の差に見られる数学的現象を題材としたワークシートは，実験群で用いたものと共通であったため，掲載を省略している．

実験授業として設定した 4 単位時間の最後の時間には，「文字を用いた説明」の単元に関する小単元末テストを実施した．小単元テストは，教科書にある題材（位の数を入れかえてできる数）を基にしたものと，ANNA 数の題材を基にしたものの 2 問が出題された．実際

に出題された 2 問の問題は，以下のような問題である．

【問 1】一の位が 0 でない 3 ケタの自然数を A，A の百の位の数と一の位の数を入れかえてできる数を B とするとき，この A と B の差がどんな数になるかを考える．

（1）A の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とするとき，A と B を式で表す問題.

（2）A と B の差の値が 99 の倍数になるという予想が正しいことを説明する問題

【問 2】1 から 9 までの整数から異なる 2 つを選び，AANN 数をつくる．異なる 2 つの整数を選んだときにできる 2 つの AANN 数の差を調べる．

（1）「2 つの AANN 数の差は，○○○になる」という形でどんな数になるかについての予想を書く問題.

（2）（1）の予想が正しいことを説明する問題.

これらの小単元末テストの問題は，操作的証明を扱った実験群と形式的証明のみを扱った実験群の両方において実施し，実験群に対しても，特におはじきや位取り表を用いて考えるようには指示していない．それまでの 3 単位時間の学習活動の違いが，学習活動の定着にどのように影響するかを見るためのものである．

このように，試行授業の結果を受けて，ANNA 数の差に見られる数学的現象を題材とした実験授業の構成を検討し，ワークシートを修正した上で，実験群と対照群とを設けた実施計画を立てたが，4 単位時間分の学習指導計画の詳細は，次の表 4-5 にまとめた通りである．

【表 4-5 ：実験授業の実施計画】

授業	実験群 (2 年 2 組，2 年 4 組)	対照群 (2 年 1 組，2 年 3 組)
1	・ANNA 数の差に見られる数学的現象の探究 ・おはじきと位取り表を用いた操作的証明（ANNA 数を構成する 2 数の差が 1 の場合）	・教科書をもとにした，文字を用いた形式的証明の学習（奇数+奇数=偶数）

2	・おはじきと位取り表を用いた操作的証明（ANNA 数を構成する 2 数の差が 2 以上の場合） ・文字を用いた形式的証明による ANNA 数の現象の証明	・教科書の題材による文字を用いた説明の習熟（位の数をいれかえた数の和，差）
3	・教科書の題材による文字を用いた説明の習熟（奇数+奇数=偶数）	・文字を用いた形式的証明による ANNA 数の現象の証明
4	単元末テスト（20 分間程度）	

実験群におけるおはじきと位取り表による操作的証明による探究，説明の学習活動（2 単位時間）では，最初の 1 単位時間で ANNA 数の差に見られる数学的現象，および，おはじきと位取り表を用いての説明の方法（ANNA 数を構成する 2 数の差が 1 の場合）について探究し，次の 1 単位時間でおはじきと位取り表による操作的証明（ANNA 数を構成する 2 数の差が 2 以上の場合），文字を用いた形式的証明の学習を行うよう計画した．その後，教科書にある例題，練習問題において文字を用いた説明の学習活動を 1 単位時間行い，最後の時間に，ANNA 数の発展的課題を含む小単元末テストを実施することとした．

対照群における学習活動では，教科書の例題や練習問題を最初の 2 単位時間で扱い，ANNA 数の現象については，3 単位時間目に練習問題の 1 つとして，文字を用いた形式的証明のみを扱うよう計画した．また，小単元末テストは，実験群である 2 組，4 組の行なったものと同一の問題で実施することとした．

（３）授業の実施状況

試行授業をもとにリデザインした実験授業は，平成 23 年 5 月 16 日（月）から 5 月 31 日（火）にかけて，熊本大学附属中学校の 2 年 1 組（38 名），2 年 2 組（41 名），2 年 3 組（39 名），2 年 4 組（41 名）の 4 クラスを対象に実施された．前述したように，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を扱う実験群（2 年 2 組，4 組）の第 1 時及び第 2 時は，試行授業も行った熊本大学大学院の現職大学院生である樋脇正幸教諭が担当し，実験群の第 3 時，第 4 時および，操作的証明を扱わない対照群（2 年 1 組，3 組）のすべての授業は，普段生徒の数学指導にあたっている附属中学校の松永憲治教諭が担当した．実際の授業実施日等は，以下の表 4-6 に示すとおりである．

【表4-6：実験授業の実施日】

日時 （平成23年）	実験群		対照群	
	2年2組	2年4組	2年1組	2年3組
5月16日（月）		第1時		第1時
5月17日（火）	第1時		第1時	
5月18日（水）	第2時	第2時		
5月20日（金）			第2時	第2時
5月21日（土）		第3時		第3時
5月25日（水）	第3時	第4時	第3時	第4時
5月26日（木）	第4時			
5月31日（火）			第4時	

授業を実施した期間は，体育祭の準備等の期間と重なっており，一部短縮授業等にならざるを得なかったが，4クラスとも，ほぼ実施計画の通り授業を進めることができた．表4-6に示すように，実験群，対照群とも2クラスずつ授業を実施したので，一方のクラスの授業が 1 時間終わるごとに打合せを行い，発問や指示について修正してもう一方のクラスで実施するということが可能であった．

なお，授業の様子については，すべてビデオカメラで記録し，授業中に用いたワークシート，小単元末テスト，授業後に取り組んだレポート課題等は，すべてのコピーをとって事後に分析を行った．

２．授業分析と考察

ここでは，前述した実施計画にもとづいて附属中学校で実施された実験授業のビデオ，ワークシート，レポート課題等の分析から，ANNA 数の数学的パターンを題材とした学習環境のリデザインに関して考察した結果をまとまる．なお，考察の観点としては，実験授業の目的に沿って，（１）操作的証明におけるおはじきと位取り表の操作の理解のために，どのような具体的な手立てが有効に機能するのか，（２）操作的証明から形式的証明への移行のために，どのような具体的な手立てが有効に機能するのか，という2点に焦点化して考察することとする．

（１）おはじきと位取り表の操作の理解に関する手立て

試行授業では,おはじきと位取り表による数の表現方法や操作方法については,ある程度,教師の側で方向付けをしておかなければ,生徒の学習活動が授業において意図しているような操作的証明へと向かわないということが観察された．今回の実験授業でも，最初に選んだ2数の差が1であるときに2つのANNA数の差が891であることを説明しようとする場面において，同様の反応を観察することができた．

実験群である2組を対象とした実験授業では，2332と3223という2つのANNA数の差が 891 であることを，おはじきと位取り表を用いて説明するよう求めた場面で，特におはじきの操作方法については，指示しなかった．すると，ほとんどの生徒が筆算再現型のおはじき操作によって説明しようと試みている．

前述したように，筆算再現型のおはじき操作とは，位取り表の上に3223をおはじきで置いて示し，そこから，2332 を取り去ろうとするおはじき操作のことである．これは，筆算において行っている操作を位取り表の上で再現しようとしているのであるが,操作が煩雑となるため，途中でミスをして差が 891 にならなかったり，繰り下がりの操作をうまく行えずに操作に行き詰ったりするケースが見られた．

ここでの操作的証明において想定されているのは,「2332から3223へとおはじきの表現を変えたときに,数としてはどれだけ変化したか」ということから2数の差を求める操作であるため,最終的に計算の結果が位取り表に現れるのではなく,おはじきの操作を振り返って数の変化を読み取る必要がある．しかし,おはじきの操作そのものを振り返るという意識付けが行われていない 2 組の生徒にとっては，筆算再現型で説明しようとすることは自然な流れであったといえよう．

一方，同じ実験群の4組の授業では，2332と3223の差が891であることをおはじきの操作によって説明しようとする場面で，おはじきを用いての説明を考えさせる前に，位取り表に 2332 を表現させ，おはじきをどのように動かせば，3223 に変化するかということを考えさせる場面を設けた．このような場面設定によって，2332 から 3223 に変化させるためには，百の位のおはじきを 1 つ千の位へ動かし，十の位のおはじきを 1 つ一の位へ動かすということを確認することができ，その後の説明方法の探究では，半数近くの生徒が，授業で想定されている操作的証明を行っていることが確認できた．また，2組においても，最初は筆算再現型のおはじき操作を行う生徒がほとんどであったが，その後，2332から3223へのおはじきの変化を確認する場面を設けることによって,想定した操作的証明へと軌道修

正することができていた．

今回の実験授業において，特に指示しなければ，筆算再現型のおはじき操作をしようとする生徒が多かったということから，おはじきと位取り表の操作の仕方，つまりおはじきによる数の表現方法については，全く生徒に任せてしまうのではなく，適切な表現方法を教師が示すことが必要であるということが再確認できたと言えるだろう．ヴィットマン自身が言うように，《操作的証明は，適切に表現された数学的対象に施された操作の結果にもとづく証明》（Wittmann：1996）なのであって，おはじきと位取り表に関しても，対象となる数を適切に表現したものに対する操作を行わなければ，逆に混乱を生じさせてしまうということである．

2332 と 3223 の差を求めるような問題に関しても，おはじきと位取り表の操作に慣れれば自然にできるようになるというものではなく，今回の実験授業で行ったように，「2332 から 3223 へのおはじきの変化」を操作として提示して確認する場面を設けることが，操作的証明を用いた学習環境のデザインにおいて有効に機能するということがいえるだろう．決しておはじきの操作を教え込むということではなく，おはじきを使った操作的証明がスムーズに行えるように，その表現に関してはある程度教師側で準備しておくということである．

（２）形式的証明への移行に関する手立て

試行授業では，文字を用いた形式的証明に移行する部分は授業においては扱うことができず，授業後のレポート課題として生徒に取り組ませたが，その結果，操作的証明を取り入れた学習活動を展開したからといって，自動的に文字を用いた形式的証明ができるようになるわけではないということが確認された．つまり，操作的証明から形式的証明へと移行する際には，教師側の何らかの手立てが必要であるということである．

今回の実験授業を通して，操作的証明から形式的証明への移行を図ろうとする際には，生徒に，操作的証明を「書いて読み手に伝える」ことの困難性を意識させることが有効であるということが明らかとなった．これは，実験授業において操作的証明を理解した後に，文字を用いた証明の方法についても学習させる場面（第 2 時の後半）において，観察することができた．

実験授業の第 2 時では，おはじきと位取り表による操作的証明によって，2 つの ANNA 数の差が 891×（最初に選んだ 2 数の差）になるということを確認した後，それをワークシートにまとめるよう指示した場面があったが，このとき，操作的証明自体をどう書き表すの

かということに戸惑いを見せた生徒が多かった．ワークシートにおいて，位取り表の図におはじきの動き表わす矢印や注釈を書き込んだりしてまとめようとした形跡を見ることはできるが，これらは，ANNA 数の現象が起こる理由を記述したというよりも，具体的な ANNA 数の差について，自分が操作的証明において行った操作を記述したというレベルのものが多かった．実験授業の中で，互いにワークシートの説明的記述を見せ合う場面を設けたが，相手も操作的証明を経験し，理解しているがゆえに伝わるといったものがほとんどであった．このような場面で，操作的証明が十分な説明の方法となりうるのかどうかということに戸惑いを見せる生徒も多かった．

そこで，操作的証明以外の方法で ANNA 数の現象を説明することはできないかという問いかけをしたところ，「文字を用いて説明すればよい．」という反応を自然と導くことができた．もちろん，生徒にとっては，文字を用いての説明こそが数学的な説明であり，おはじきと位取り表を用いた操作的証明は，あくまで補助的なものであると捉えていたかもしれないが，操作的証明の活動を取り入れることによって，文字を用いた形式的証明の必要性が強調されたということは言えるだろう．

ここでは，おはじきと位取り表による操作的証明を理解した段階の生徒に対して，それを「書いて読み手に伝える」という学習活動を設定した結果，操作的証明が記述として表現することが困難であるということから，文字を用いた形式的証明の必要性を強調することができ，操作的証明から形式的証明への移行をスムーズに図ることができたといえよう．しかし，操作的証明が具体的な 1 つの場合に対する操作の結果に基づく説明であるため，一般性を記述することが難しいというレベルで操作的証明の限界を捉えて，形式的証明の必要性を認識しているというよりは，操作的証明でも説明としては十分であるが，「数学的な表現」という意味合いにおいて，不十分であると考えている生徒が多かったと言える．証明しようとする命題が一般性をもつもので，その証明においても一般性を保つような表現が必要であるということをいかに認識させていくかということに関して教師がどのような手立てを講じることが必要であるかについては，今後も検討の必要があるだろう．

３．操作的証明を取り入れた学習環境デザインの意義

今回の実験授業では，操作的証明を取り入れた学習環境デザインの意義を明らかにするために，操作的証明の活動を組み込んだ実験群と，操作的証明は扱わず，通常の文字を用いた形式的証明のみを扱う対照群とに分け，実験授業を行った．ここでは，実験群と対照群の生

徒の反応を比較分析することによって, 操作的証明を取り入れた学習環境デザインの意義について考察する．なお，考察の観点としては，（１）操作的証明は，学習者の探究活動の助けとなるのか，（２）操作的証明は，形式的証明の意義の理解の助けとなるのか，という 2 点に焦点化して考察を進めることとする.

（１）操作的証明は，学習者の探究活動の助けとなるか.

操作的証明を学習環境デザインに取り入れることの 1 つの意義は，探究的な学習活動としての広義の論証活動（Proving）としての学習者の探究活動の助けとなるということである．今回の実験授業では，操作的証明は，学習者が理由づけを行なったり，表現したりするための 1 つの手段として道具的役割を担うとともに，命題を探究的に理解することを助ける役割を担うということを確認することができた.

これについては，操作的証明が，学習者の探究活動の助けとなるという視点をもとに，以下の 3 つの仮説を立てて検証を行った.

（仮説 1）「操作的証明」は，文字を用いた式で表す際に助けとなるのではないか.
（仮説 2）「操作的証明」は,「理由づけ」･「表現」のための手段として助けになるのではないか.
（仮説 3）「操作的証明」は，命題そのものを理解するための，探究のツールとして助けとなるのではないか.

（仮説 1）は，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を経験することが，文字を用いた数の表現, 特に十進位取りの原理を理解したうえでの文字を用いた複数桁の整数の表現方法の理解の助けとなるのではないかということである.

これに関して，実験授業の第 4 時に行った小単元末テスト結果を，実験群と対照群とで比較することによって分析を行った．特に，小単元末テストの問 1 (1)では，以下のような問題が出題されている.

【問 1】一の位が 0 でない 3 桁の自然数を A，A の百の位の数と一の位の数を入れかえてできる数を B とするとき，この A と B の差がどんな数になるかを考える.
（1）A の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とするとき，A と B を式で表す問題.

この問題は，ANNA 数の数学的パターンに直接的に関連するものではなく，条件に当てはまるような 3 桁の自然数を文字を用いて表すという，形式的証明を行うに当たって必要とされる基礎的な知識を問う問題である．この問題に対する正答率は，次の表 4‐7 の通りである．

【表 4‐7 ：小単元末テスト，問 1(1)の正答率】

反応	実験群（2 組，4 組）		対照群（1 組，3 組）	
	人数	%	人数	%
正解	79	98.8%	76	96.2%
不正解	1	1.3%	3	3.8%

この結果を見る限り，操作的証明を取り入れた実験群のほうが若干正答率が高いものの，有意な差は見られない．これは今回の実験授業で対象となった附属中学校の生徒の学力レベルが比較的高かったためであると考えられる．つまり，すでにほとんどの生徒が，文字を用いて数を表現することに関する知識を獲得しているレベルにあったため，操作的証明を取り入れた学習活動の影響が見えにくかったということである．これについては，標準的な学力レベルにある公立学校の生徒を対象とした実証的研究を行うなどして，検証を重ねていく必要があるだろう．

（仮説 2）は，証明に代表される理由づけの活動において，操作的証明を経験していることが生徒の思考の助けとなるのではないかということである．

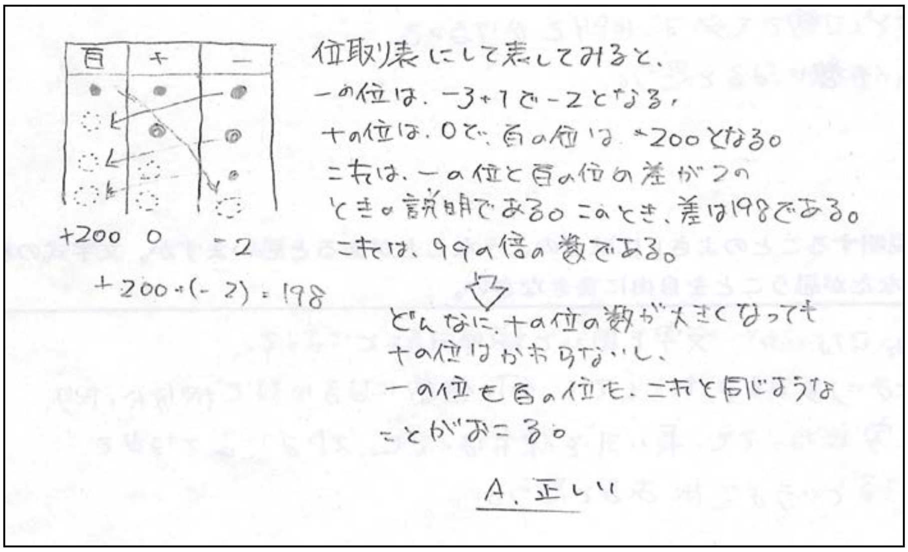
これについては，小単元末テストの問 1(2)に対する生徒の誤答を分析することによって，検証を行った．小単元末テストの問 1(2)では，問 1(1)で文字を用いて表した 2 つの 3 桁の整数の差が 99 の倍数になることを証明することが求められている．この問題に対する正答率を示したものが，次の表 4‐8 である．

【表 4‐8 ：小単元末テスト，問 1(2)の正答率】

反応	実験群（2 組，4 組）		対照群（1 組，3 組）	
	人数	%	人数	%
正解	69	86.3%	68	86.1%
不正解	11	13.7%	10	12.7%
無解答	0	0.0%	1	1.3%

この結果を見ると，実験群，対照群とも正答率は 86%程度であり，両群における数値的な差を見ることはできない．また，基本的に学力レベルの高い生徒たちであったため，14%弱の誤答であった生徒の解答のほとんどは，文字式の計算または，式変形の計算ミスによるものであった．しかし，記述の内容を詳しく分析すると，次のような質的な差を見ることもできた．

操作的証明を経験していない対照群（1 組，3 組）では，3 桁の数を表した文字式のみを記述してそれ以降の記述をしていなかったり，記述していても見当はずれだったりした．それに対して，操作的証明の学習を取り入れた実験群では，同様に文字を用いた説明はできていないものの，手がつかない状態ではなく，おはじきと位取り表を用いて説明しようとしているものを見ることができた．図４-１０は，そのような生徒の解答である．



【図４-１０：小単元末テスト，問 1(2)に対する実験群の生徒の反応】

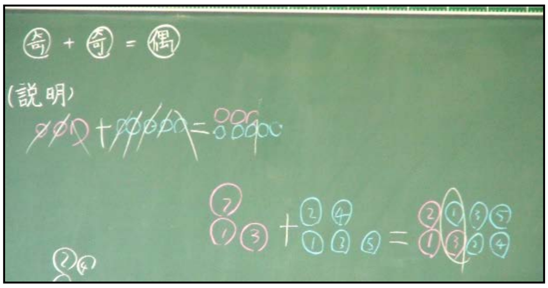
さらに，授業後に課したレポートを見ると，小単元末テストの解答で「操作的証明」を用いて「理由づけ」・「表現」している生徒も，文字を用いて形式的証明まで記述していることが分かった．つまり，彼らの多くは，操作的証明によってここでの説明が完了したと思っているわけではなく，単純にこの段階において，文字を用いた形式的証明が書けるレベルまで達していなかったため，操作的証明による説明を小単元末テストにおいて書いたと推測できる．

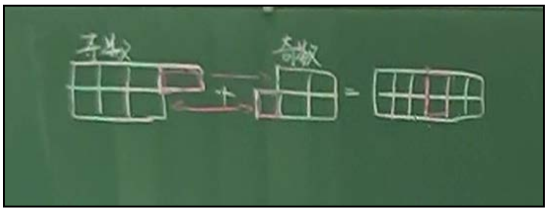
このことから，操作的証明は，文字を用いた形式的証明の理解まで達していない生徒にとって，「理由づけ」や「表現」のための１つの道具的役割を果たしていると考えられる．

また，第 1 時，第 2 時において操作的証明を経験した実験群の第 3 時の授業では，教科書に掲載されている題材の中から，「奇数と奇数の和は，偶数となることを説明しなさい.」という題材を扱った. 操作的証明を行わない対照群の授業では，第 1 時において扱った問題である. このとき，操作的証明を経験している実験群と，操作的証明を行っていない対照群との間で，異なる反応を見ることができた.

対照群では，最初から文字を用いた形式的証明を学習するため，いくつかの具体的な数で計算して「奇数＋奇数＝偶数」となることを確認した後，2 つの奇数を文字を用いて表し，形式的証明を行おうとした. これは，通常よく見られる授業展開である.

しかし，第 1 時，第 2 時において操作的証明を経験している実験群においては，具体的な数で「奇数＋奇数＝偶数」であることを確認した後，文字を用いた形式的証明へ移行する生徒と，図 4‐１１のように丸や四角の図を用いた操作的証明を行う生徒とを観察することができた.





【図 4‐１１：実験群の第 3 時で見られた生徒の反応】

これらの生徒は，具体数による数学的命題の確認から，文字を用いた形式的証明へ進む前に，操作的証明を用いて理由づけし，納得しようとしているのである. つまり，学習者が操作的証明を「理由づけ」･「表現」のための手段として用いており，操作的証明が命題を証明するための道具的役割を担っていることを示すものである.

（仮説 3）は，数学的命題の証明以前に，数学的パターンを探究し命題を発見する文脈において，操作的証明で行う操作が探究他のためのツールとして役立つのではないかということである. これについては，小単元末テストの問 2 の結果から，検証を行った.

小単元末テストの問 2 では，ANNA 数の現象をもとにした AANN 数について扱ったもので，(1)では，2 つの AANN 数の差に見られる数学的パターンを探究し命題として表現すること，また，(2)では，予想した命題が正しいことを証明することが求められている. ANNA 数の数学的パターンについては，題材としては実験群でも対照群でも扱っているもので，こ

の問題では，おはじきと位取り表による操作的証明を経験している実験群と文字を用いた形式的証明のみを扱っている対照群とで，数学的パターンの探究の仕方に違いがあるかどうかを見ることが意図されている．

問２の(1)(2)それぞれの正答率は，次の表４‐９，表４‐１０に示すとおりである．

【表４‐９：小単元末テスト，問 2(1)の正答率】

反応	実験群（2 組，4 組）		対照群（1 組，3 組）	
	人数	%	人数	%
正解	77	96.3%	69	87.3%
不正解	3	3.8%	8	10.1%
無解答	0	0.0%	2	2.5%

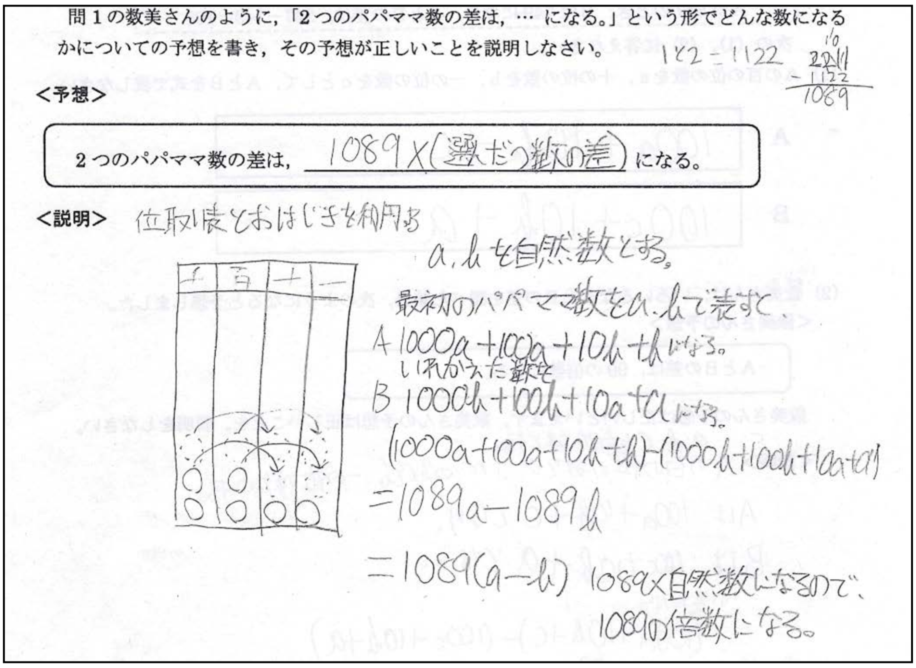
【表４‐１０：小単元末テスト，問 2(2)の正答率】

反応	実験群（2 組，4 組）		対照群（1 組，3 組）	
	人数	%	人数	%
正解	71	88.8%	64	81.0%
不正解	7	8.8%	12	15.2%
無解答	2	2.5%	3	3.8%

この小単元末テストの問２は，示された数学的状況において，そこに見られる数学的現象を探究し，数学的パターンを発見して命題化し，その命題の正しいことを理由づけ・表現する問題である．問１に関しては，実験群と対照群とで有意な差は見られなかったが，問２では，実験群と対照群における正答数において一定程度の差が見られた．つまり，AANN 数の差について探究し，数学的パターンを発見して命題化できた生徒は，操作的証明を経験していない対照群では 87.3%であったのに対して，操作的証明を取り入れた実験群では，96.3%であり，10 ポイント弱の差が見られる．また，見出した命題を証明する(2)の設問においても，対照群の正答率が 81.0%であるのに対して，実験群では 88.8%の生徒が正解できていることが分かる．小単元末テストにおけるこのような結果から，数の性質の探究という活動において，操作的証明のイメージが何らかの形で効果的に働いたのではないかと考えることができる．

さらに，次の図４‐１２に示す実験群の１人の生徒の解答では，おはじきと位取り表によ

って AANN 数の差に見られる数学的パターンを探究・発見し，その後，文字を用いて説明している様子が見て取れた．

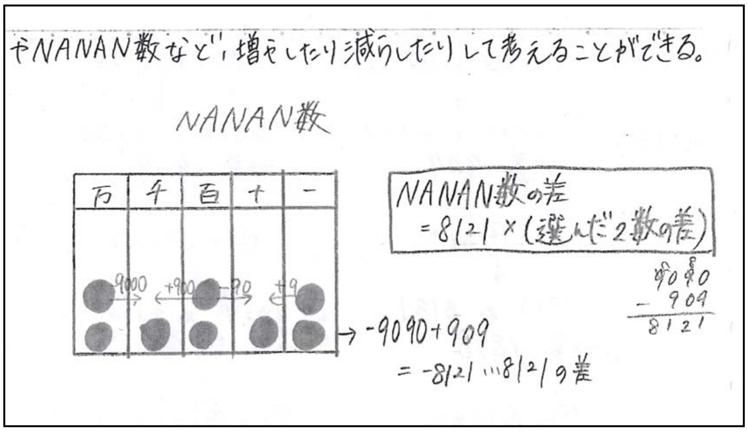


【図４-１２：実験群の第３時で見られた生徒の反応】

つまり，この生徒は，おはじきと位取り表を用いた操作的証明で経験したおはじきの操作を探究の道具として用いて AANN 数の数学的パターンを探究し，その上で文字を用いた形式的証明によってその正しいことを証明しているのであり，操作的証明が命題そのものの探究のツールとして機能した例であるといえよう．

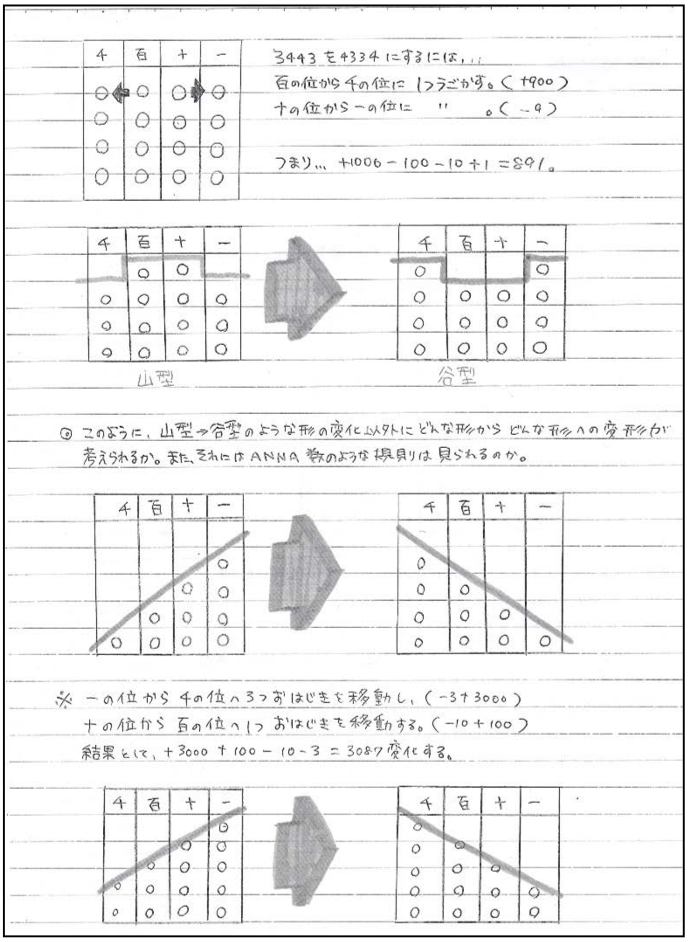
また，課題レポートでは，ANNA 数の数学的パターンをもとにした NANA 数のパターンについて探究し，証明する課題と，さらに発展させて新しい数学的パターンを発見し，それを証明するという課題を与えていたが，対照群の生徒が，ANNA 数に類似した数について，具体的な数を用いた計算をもとにそこに見られる数学的現象を探究しようとしているのに対して，実験群の生徒は，おはじきと位取り表を用いて同様の現象を探究的に理解し，証明するという反応が多く見られた．

これらの生徒たちは，与えられた数学的状況を探究する際に，明らかに探究のツールとしておはじきと位取り表を活用し，証明する活動にのぞんでいる．つまり，操作的証明が，単なる証明の手段としてだけではなく，数学的状況における探究と数学的パターンの発見において有効に機能しているということを示している例であるといえよう．



【図４-１３：課題レポートにおける実験群の生徒の反応】

また，第２章において，おはじきと位取り表を用いた操作的証明の発展性として，「新しい数学的現象を創造すること」を挙げたが，これに関して，少数ではあるが，実験群の中に課題レポートで，次の図４-１４のような探究を試みる生徒が，２人確認できた.



【図４-１４：課題レポートにおける実験群の生徒の反応】

この生徒たちは，位取り表に配置されたおはじきの形状をもとに，新たな数学的パターンを探究している．彼らのうちの一人は，ANNA 数の数学的パターンを説明する場面においても，操作的証明のみで説明を行っており文字を用いた形式的証明のレベルにまで達していない生徒である．また，もう一人は，同じく ANNA 数の数学的パターンを説明する場面において，文字による形式的な証明の記述は見られるものの，記述が不十分であり形式的証明に関して十分な定着のレベルにないことが窺える．つまり，この２人の生徒は，文字を用いた形式的証明を使いこなせる段階にはないものの，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を振り返ってそれらを発展させることによって新しい数学的パターンを発見することに成功しているのである．

このことから，操作的証明は，特定の命題における探究的理解を助けるツールとしてだけではなく，新たな数学的現象を創造するための探究的発見ツールと成り得ることが確認できたといえよう．

以上の検証によって，操作的証明を学習環境デザインに取り入れることの 1 つの意義は，探究的な学習活動としての広義の論証活動（Proving）としての学習者の探究活動の助けとなるということ，つまり，操作的証明は，学習者が理由づけを行なったり，表現したりするための 1 つの手段として道具的役割を担うとともに，命題を探究的に理解することを助ける役割を担うということを確認できたと言える．

（２）操作的証明は，形式的証明の意義の理解の助けとなるか

操作的証明を学習環境デザインに取り入れることのもう 1 つの意義は，形式的証明のもつ一般性の理解に際して操作的証明が助けとなるということである．今回の実験授業では，操作的証明を取り入れることによって，従来の証明の学習においてはあまり見られなかった証明の一般性に関する生徒の議論の場面を意図的に生みだすことができるということが確認できた．これは，形式的証明の意義や有用性に関する議論を促進することができるものであると思われる．

文字を用いた形式的証明の一般性についての議論は，操作的証明を取り入れた実験群の第 3 時の授業における教師と生徒のやりとりの中に見ることができた．この場面は，第 1 時と第 2 時で ANNA 数の数学的パターンについての操作的証明，文字を用いた証明を学習した後，教科書にある題材である「奇数＋奇数＝偶数」となることを証明しようとする場面である．次に示すプロトコルは，実験群の 1 クラス（2 年 4 組）の授業での，教師（T）と生徒

（S）のやり取りを示したものである．なお，このときの板書は，前述の図４-１１に示したものである．

S1：奇数を，具体的にイメージしてみると，こんなふう（図６下）になって，１個ここ（左右の奇数をイメージした図形の飛び出た部分）が飛び出た感じになります．ここまでいいですか．

全員：はい．

S1：なので，ここ（左）の１個とここ（右）の１個が組み合わさることになって，こう（右側の長方形）なって，偶数になります．わかりましたか？

全員：はい．

T：何か意見ある人？

全員：・・・

T：えっ！何かあるでしょう．質問ある人？・・・えっ，何もないの？何かあるでしょう．だってこれ・・・．

S1：ここ（奇数を表している図形の２列に並んでいる部分）が関係なくても，いつもここ（飛び出た部分）が１個余る数になるから・・・

T：というのを，誰か質問しないかな？　S2 くん，全然納得いかないですか？

S2：いえ，納得はいくのですが・・・．

T：これ，他の数のときもこれでいいのかなとかいう発想ないの？だってこれ，　7＋5 しか考えてないよ．

S2：でも考え方は，どんなに大きい数字になっても，S1 が言いたいのは，こうなるからでしょ．１ つが，こっちにこう動く（右側の長方形になることを身振りで示す）という考え方だから，いいんじゃないですか．

ここでのやりとりから，生徒の証明の一般性の認識は恣意的かつ直観的なものであり，説明の際での意識は低いことが窺える．

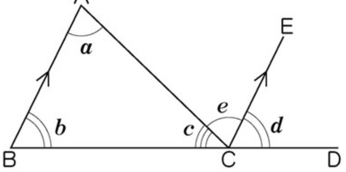
これに関連しては，図４-１５に示す平成 21 年度全国学力・学習状況調査 A においての図形についての証明問題がある．このとき，②の記述において，三角形の内角の和が 180°であるという証明が成立したと考えた生徒は 22.9%，他に複数の三角形で確かめれば証明できたといえると考えた生徒を含めると 30.8%に及ぶ．このときの，調査結果概要においては，《提示された方針に基づいて証明するＢ４(1)の正答率は，41.8%である．Ｂ４(1)を正答

した生徒のうち，63.1%の生徒が本問題で誤答している．このことから，証明を正しく書くことはできても，証明の意義を理解していない生徒がいると考えられる.》（文部科学省・国立教育政策研究所，p. 267）という指摘がある．

$\boxed{8}$ ある学級で，「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について，次の①，②を比べて考えています。

①

下の図の△ABCで，
辺BCを延長した直線上の点をDとし，点Cを通り辺BAに平行な直線CEをひく。



平行線の錯角は等しいから，　$\angle \boldsymbol{a} = \angle \boldsymbol{e}$
平行線の同位角は等しいから，　$\angle \boldsymbol{b} = \angle \boldsymbol{d}$
したがって，

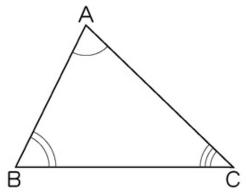
$$\begin{aligned}\angle \boldsymbol{a} + \angle \boldsymbol{b} + \angle \boldsymbol{c} &= \angle \boldsymbol{e} + \angle \boldsymbol{d} + \angle \boldsymbol{c} \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

よって，三角形の内角の和は180°である。

②

下の図の△ABCで，
３つの角の大きさをそれぞれ測ると，

$\angle A = 72^\circ$
$\angle B = 64^\circ$
$\angle C = 44^\circ$



したがって，

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= 72^\circ + 64^\circ + 44^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

よって，三角形の内角の和は180°である。

【図４-１５：平成21年度全国学力学習状況調査の問題】

このことから，生徒の証明の一般性に関する認識は非常に低いものであり，形式的証明をきちんと記述できている生徒であっても，一般性に関する記述は，形式的な約束事のようなものとして考えており，特に重要視していない可能性があると考えられる．

しかし,「操作的証明」を取り入れた授業を行なった実験群の 2 クラスにあっては，第 3 時の授業において，多様な説明の方法が出され，そのため一般性についての話題は避けて通れないものとなった．もう 1 クラスの実験群である 2 組でも，先述の 4 組と同じようなやりとりがなされたが，ここでは，一人の生徒から，次のような発言があった．

S3：数は 3 と 5 だけじゃなくて，いろいろな数があるので，全部に使えるように，私は文字を使って考えました．

このように，生徒自らが，形式的証明のもつ一般性を補う特性に気づき，その意義を発表する学習活動が自然と引き起こされたことが確認された．これは，國本の述べる「形式的証明を直観的に支える」ものに含まれるものであると考えられる．

以上の検証によって，操作的証明を学習環境デザインに取り入れることのもう 1 つの意義は, 形式的証明のもつ一般性の理解に際して操作的証明が助けとなるということ, つまり, 操作的証明を取り入れることによって, 従来の証明の学習においてはあまり見られなかった証明の一般性に関する生徒の議論の場面を意図的に生みだすことができるということが確認できたと言える．

４．学習環境のリデザインに向けた課題

附属中学校における実験授業を通して，試行授業の分析を通して示唆された「おはじきと位取り表の操作に関する手立て」および「形式的証明への移行のための手立て」について，ある程度明確な指針を得ることができた．

ANNA 数の数学的パターンに関する操作的証明では，筆算再現型のおはじき操作をしようとする生徒に対して，小さいほうの ANNA 数を位取り表上に表現させ，それを大きいほうの ANNA 数に作り変えるよう方向づけしてやることによって，授業で意図しているおはじきの操作を引き出すことができた．また，おはじきと位取り表を用いた操作的証明から文字を用いた形式的証明への移行に際しては，操作的証明の結果を「記述して相手に伝える」という活動を設定することによって，操作的証明の「書いて示す」ということの困難さが強調され，形式的証明の必要性が自覚されるということが明らかとなった．

さらに，附属中学校での実験授業では，ANNA 数の数学的パターンの学習において，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れたクラスと, 通常通り文字を用いた形式的証明のみを扱うクラスとに分けて, 両方のクラスの生徒の反応を比較分析することを通して,

操作的証明が，命題の証明としてだけではなく，数学的なパターンの探究，発見，理由づけ，表現，という広義の論証活動（Proving）における学習者の探究活動の助けとなること，また，操作的証明を取り入れることによって，形式的証明の一般性の理解が促進され，証明に意義理解の向上につながるという教育的意義を見出すことができた．

しかし，今回の実験授業は，附属中学校という学力の高い学習集団に対して行われたものであるため，これらの知見が汎用性のあるものであるかどうかは，さらに検証が必要であろう．また，実験授業では，「奇数＋奇数＝偶数」であることを証明するという場面で，たまたま操作的証明を用いようとした生徒の考えを取り上げ，結果として代表的特殊に対する操作を根拠とする操作的証明と，一般性を兼ね備えた形式的証明との比較検討の場面を作り出すことができたが，このような学習機会を意図的に作り出すことが可能かどうかについても，学習環境のリデザインへ向けた視点として，今後検討していく必要があるだろう．

４節　公立中学校における実験授業

附属中学校における実験授業では，「おはじきと位取り表の操作に関する手立て」および「形式的証明への移行のための手立て」に関して，いくつかの知見を得ることができた．本節では，実験授業から得られた知見をもとに，さらに学習環境のリデザインを行い，標準的な学力レベルにある公立中学校で行った実験授業について，その詳細を示すとともに，実験授業から得られる知見をまとめることとする．

１．授業の趣旨と授業設計

まず，公立中学校で行った実験授業の目的，実施計画，実施状況について，その概要を示すことにする．

（１）授業の目的

附属中学校において実施した実験授業では，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインに対して，具体的な知見を得ることができたが，これらは，附属中学校というある程度学力レベルの高い生徒を対象とした実験授業から得られた知見であると言える．おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境を，汎用性の高いものとしてデザインしていくためには，標準的な学力レベルにある公立中学校において

も利用可能であるかを検証し，学習環境デザインの充実を図る必要があるだろう．

また，附属中学校における実験授業では，操作的証明を取り入れた学習活動を展開することによって，文字を用いた形式的証明のもつ一般性が強調される結果となり，形式的証明の意義の理解につながるという示唆を得ることができた．

そこで，附属中学校での実験授業から得られた知見をもとに，次のような事柄を明らかにすることを目的として，公立学校での実験授業を実施することとした．

①おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインは，標準的な学力レベルの公立中学校の生徒に対しても有効に機能するのか．

②操作的証明を取り入れることによって，形式的証明のもの一般性を強調し，証明に意義の理解につながる学習活動を意図的に展開できるのか．

①は，操作的証明を取り入れた学習環境デザインの汎用性を確認するための目的である．実験授業では，ANNA 数の数学的パターンの探究，操作的証明における操作の意味理解，形式的証明への移行，授業後の課題レポートのそれぞれにおいて，質の高い学習活動が展開されていた．これは，実験授業の対象が，学力レベルの高い附属中学校の生徒であったことも影響していると考えられるが，標準的な学力レベルの中学生を対象としたとき，どのような学習環境のリデザインや学習指導上の手立てが必要なのかということを明らかに捨て置く必要があるだろう．そこで，基本的な学習環境デザインは変更せず，標準的な学力レベルにある公立中学校の生徒を対象とした実験授業を計画した．

②は，操作的証明を学習活動として取り入れることの意義に関する目的である．附属中学校の実験授業では，「奇数＋奇数＝偶数」となることを証明する学習活動の際に，操作的証明を取り入れようとした生徒の反応から，「操作的証明をもっていつでもいえるといってよいのか」という議論がクラスに起こり，その結果，文字を用いた形式的証明のもつ一般性や，文字を用いることの必要性が強調されたという場面があった．このような学習の展開が，たまたま起こったことなのか，教師側の手立てによって意図的に組み込むことができるのかということに関しては，検証しておく必要があるだろう．そこで，操作的証明を学習活動として取り入れることの意義として，文字を用いた形式的証明の一般性の議論を，教師が意図的に作り出し，証明の意義の理解を促進させるような学習活動が展開できるかどうかを検証することを，公立中学校での実験授業の目的の１つとして設定した．

（２）授業の実施計画

公立中学校での実験授業は，試行授業，附属中学校での実験授業に引き続き，熊本大学大学院の現職派遣大学院生であった樋脇正幸教諭の協力のもと実施した. 実験授業の時点では，大学院を修了し，勤務校である熊本県水上村立水上中学校に勤務されていた関係で，実験授業も水上中学校の2年生を対象に実施することとした.

公立中学校での実験授業における ANNA 数の数学的パターンに関する学習活動は，基本的には，附属中学校の実験授業で用いた学習環境のデザインを踏襲する形で実施した. ANNA 数の数学的パターンに関する部分の学習活動の内容は，章末に資料として示したマスタープランの通りである.

また，附属中学校での実験授業では，ANNA 数のパターンの探究と，ANNA 数を構成する2つの自然数の差が1である場合の操作的証明で1単位時間，一般の ANNA 数の命題の操作的証明と文字を用いた形式的証明で1単位時間，教科書の題材を用いた形式的証明に1単位時間，小単元末テストに1単位時間という時間配分で授業を実施したが，公立中学校の生徒の学力レベルや，体育祭前の時期で短縮授業が多くなることなどを考慮して，5単位時間での構成とした. 5単位時間の学習活動の流れは，表４-１１に示す通りである.

【表４-１１：公立中学校での実験授業の単元計画】

授業	学習内容
1	・ANNA 数の現象の探究 → ANNA 数の現象に出会い，命題化する. ・おはじきと位取り表を用いた操作的証明１ → ANNA 数を構成する2数の差が1の場合について，おはじきと位取り表で説明する.
2	・おはじきと位取り表を用いた操作的証明２ → ANNA 数を構成する2数の差が1以外の場合について，おはじきと位取り表で説明する.
3	・ANNA 数の現象の代数的証明 → ANNA 数の現象について，文字を用いた形式的証明を行う.
4	・教科書の課題 →「奇数＋奇数＝偶数」という数の性質を代数的に証明する.

5	・練習 → 教科書の練習問題を用いた習熟ための学習 ・小単元末テスト → ANNA 数に類似した課題を含む 20 分程度の小テストを行う．

（３）授業の実施状況

実験授業は，平成 24 年 5 月 11 日（金）から 5 月 21 日（月）にかけて，公立中学校である熊本県の水上村立水上中学校の第 2 学年 1 組の生徒 20 名を対象として実施された．単元構成された 5 単位時間の実施日時は，第 1 時が 5 月 11 日（金），第 2 時が 5 月 16 日（水），第 3 時が 5 月 17 日（木），第 4 時が 5 月 18 日（金），第 5 時が 5 月 21 日（月）であった．

体育祭前の時期であったため，一部短縮授業となった時間もあり，内容の一部を次の時間へ移動させるなどの対応はあったが，最終的に 5 単位時間で実施計画の内容を実施することができた．

なお，実験授業の様子はすべてビデオで記録し，プロトコルに起こした上で，教師の発問，生徒の発言等を分析し，その結果を考察した．

２．授業分析と考察

ここでは，公立中学校における実験授業のプロトコルの分析から，操作的証明を取り入れた学習環境デザインの汎用性，および，操作的証明を取り入れた学習活動における形式的証明の意義の理解について，考察した結果を示すこととする．

（１）おはじきと位取り表による操作的証明の理解と実行

附属中学校における実験授業でも，ANNA 数の差に見られる性質をおはじきと位取り表を用いて説明する場面で，筆算再現型のおはじき操作を行おうとする生徒が多かったが，公立中学校における実験授業でも同様の傾向は見られた．実験授業の 1 時間目で 2332 と 3223 という 2 つの ANNA 数の差が 891 であることを，おはじきと位取り表を用いて説明するよう教師が指示したところ，生徒たちは，位取り表の上に 3223 をおはじきで表し，そこから 2332 を取り除こうとする反応を見せた．この方法は，千の位と一の位についてはおはじきを 2 つずつ取り除くという操作ができるものの，百の位，十の位から 3 つのおはじきを取り除くことができないため，上の位から 1 つ繰り下げて下の位におはじきを 10 個並べ，そ

こから 3 つのおはじきを取り去るということが必要になるため，操作ミスをして結果が合わなくなったり，操作を通して 2332 と 3223 の差が 891 であることは示せたが，その操作によって，他の ANNA 数の場合でも同様のことがいえるということを示したりすることはできなかった．実験授業では，次の段階で，教師が 2332 を位取り表の上に作って，それを 3223 に作り替えるようにおはじきの操作に関する方向付けを行ったため，生徒は，今回意図した操作的証明を行うことができていた．

つまり，おはじきと位取り表の使い方について特別な指導をしなければ，ANNA 数の操作的証明で意図しているような操作的証明は自然に表れるものではなく，ある程度，教師による方向付けが行われる必要があるということは，附属中学校における実験授業でも，公立中学校における実験授業でも同様に見られた傾向であり，学力レベルによるものではないということが確認できたといえよう．

今回の実験授業では，5 単位時間と限られた時間での実験授業であったため，おはじきの操作について十分な基礎的経験を積ませることなく操作的証明を行わせたが，おはじきの操作について行き詰っている生徒に対して，「2332 を表した位取り表を 3223 につくり変えてみてください．」という発問によっておはじきの操作を方向付けすることによって，ほとんどの生徒が ANNA 数の差のパターンについて意図した操作的証明を行うことができていた．

しかし，中には筆算再現型のおはじき操作から脱却できない生徒も見られたことから，ANNA 数の学習に入る前に，あらかじめ，おはじきと位取り表を用いた様々な基礎的課題を通して学習経験を積んでおくことが望ましいであろう．ヴィットマンは，そのような学習活動の例として，例えば，「3 つのおはじきを 3 桁の位取り表に置いたとき，何種類の数を表すことができるか」などを紹介している．このような基礎的な学習経験を積んでいれば，ある程度スムーズな操作的証明への到達が見込めるのではないだろうか．おはじきと位取り表を用いた操作的証明に取り組むことができるようになるためには，どの程度，おはじきと位取り表の操作に慣れるための基礎的経験が必要かということについては，今後，検討の余地があるといえよう．

（２）文字を用いた形式的証明の一般性の理解

附属中学校における実験授業では，おはじきと位取り表を用いた操作的証明に取り組んだ実験群のクラスにおいて，操作的証明について議論するプロセスで，文字を用いた形式的証明の一般性というものが強調されるという場面が見られた．このような学習場面は，たまた

ま起こったことなのか, 教師によって意図的に作り出すことができるものなのかということを明らかにするために，公立中学校での実験授業では，操作的証明を取り入れることが，文字を用いた形式的証明の一般性に関する議論を促進することにつながるのかという視点で,授業を実施し，生徒の反応等の分析を行った.

実験授業における生徒の反応を分析する前に，実験授業で用いたANNA数の数学的パターンという題材のもつ一般性について，改めて整理しておきたい. 操作的証明を取り入れた学習において，証明の一般性に関する議論を促進するために，今回の実験授業で用いたANNA 数という題材は，ある意味で優れた数学的素材であると言える．なぜなら，証明の一般性を議論するに当たっては，単純な「具体から一般」という一段階の構造ではなく，何段階かの一般性の段階があり，その都度，一般性について確認することができることが望ましいが，このANNA数の差に関するパターンには，二重の一般性が含まれており，ANNA数の差に関するパターンを説明していく際に，少なくとも2回は「一般に成り立つ」ということを考える必要があるからである.

まず，一段階目の一般性は,「2332と3223，4554と5445など，最初に選んだ2数の差が 1 の場合，ANNA 数の差は 891 となる.」ということである．操作的証明では，例えば 2332 と 3223 など，具体的な 1 つの例に関しておはじきの操作を行うことによって，差が 891 になることを説明する．しかし，その際，例えば 2332 と 3223 でなくても，4554 と 5445，8998 と 9889 などについても，おはじきの操作としては同じ操作になることから,その差は同様に 891 になるという操作から得られる一般性を導くことが求められる.

次に二段階目の一般性は, 最初に選んだ2数の差が1でない場合に, ANNA数の差は891×（最初に選んだ2数の差）になるという一般性である．操作的証明では，例えば3553と5335という具体例を用いて，最初に選んだ2数の差が2の場合，最初に選んだ2数の差が1の場合の操作を2回繰り返せばよいということを根拠に, ANNA数の差が891×2になることを示すが，同時に差が n の場合も，同様の操作を n 回繰り返せばよいということを根拠として，ANNA数の差が891×nとなることを説明することが求められる.

公立中学校における実験授業では，この 2 段階を一般性の議論に利用するため，あえて「最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合に限定した操作的証明の場面」,「最初に選んだ 2 数の差が 1 以外の操作的証明の場面」に分けて授業を構成し，それぞれの場面において「一般に成り立つか」ということを考えさせる場面を設けていった.

このように，ANNA 数の差のパターンに関しては，最初に選ぶ 2 数の選び方によって,

二重の一般性の段階があり，操作的証明では，その都度「この操作は同様の別の場合でもできるのか.」ということを確認しながら証明することが求められるのである．これは，操作的証明の最も顕著な特徴であり，「具体的な場合に対する操作の結果をもとに，一般に成り立つことを説明する」という操作的証明の本質を示すものである．

また, おはじきと位取り表で行った操作を別の場合でも同様に行うことができるかどうかを考え，一般に成り立つということを考えていくプロセスは，図形の論証の学習でいう「図の代表性」について考えるプロセスと類似しているといえよう．図形の論証の場合，証明に際して用いる図は，様々な場合を代表する 1 つの図であり，その意味では 1 つの具体例であると言える．論証を組み立てていく際に，その代表としての図において，補助線を引いたり記号を書き入れたりして証明を構想していくことになる．このプロセスは，おはじきと位取り表の操作を通して一般的な場合で成り立つことの理由を考えていく操作的証明のプロセスと同様のものであり，その意味では，代数的証明における操作的証明は，図形の論証における図の役割を果たすものであるといえよう．これまで代数的証明の学習では，具体的な数値で確かめるという活動はあっても, そこから一般に成り立つということを考えるということが難しいため, 文字を用いて表し代数的に式を処理していくという形式的なものにならざるを得なかったが，操作的証明を取り入れることによって，具体的な数値からいきなり記号へと抽象化するのではなく, 操作というものを媒介として一般的に成り立つことをイメージするという学習活動が可能となるのではないだろうか.

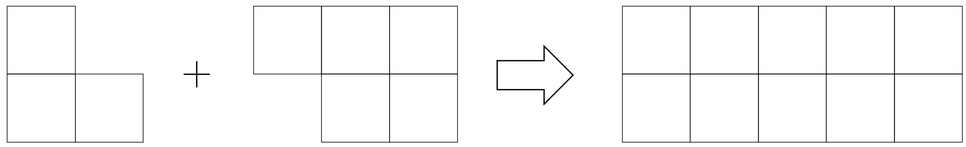
さて，「ANNA 数の差に関するパターンの探究」「おはじきと位取り表と用いた操作的証明」「文字を用いた形式的な証明」と学習が進む中で，1 つ大きな課題となるのが「操作的証明から形式的な証明への移行」の場面である．操作的証明によって一般的に成り立つということをイメージできた生徒が，形式的証明を構成するには，形式的証明が必要であるという認識，つまりは，操作的証明では一般的に成り立つことを示すのには不十分であるということの認識が必要となる．操作的証明で一般性についてイメージできているがゆえに，文字を用いて形式的に証明することの必要性を感じにくいということが予想されるが, 今回の実験授業で教師は，「書いて説明する」ということを繰り返し求め，形式的証明の必要性を認識させようとしていた.

実験授業の 3 時間目，一般の ANNA 数の差のパターンについて操作的証明を行った後，教師はそのパターンの説明をワークシートに書いてまとめるよう指示している. 生徒は位取り表におはじきの動きを矢印で書き込むなどして説明をまとめているが，結局，紙面に書い

た場合，ある1つの具体例を示しただけになってしまうことに気づき，他の同様の場面でも同じ操作ができることをどのように表現したらよいか戸惑っているようであった. 操作的証明による説明を「書いて相手に伝える」という活動をさせることによって，代表的特殊に対する操作の結果を根拠として説明するという操作的証明の特徴が強調され, そのことによって文字を用いた形式的証明への移行が図りやすくなるということは, 附属中学校における実験授業でも見られた結果であるが，公立中学校における実験授業でも，同様の結果を得ることができたといえよう.

このようなやり取りの後，教師が文字を使って表してみようと提案し，最初に選んだ2数をa, bとおくところから, 確認しながら文字を用いた形式的な証明を完成させていったが, 最終的にANNA数の差が891×(b－a)となったとき，生徒からは「おぉ！」という声が上がった. 通常, 天下り的に2つのANNA数を文字で表してその差を計算した場合であれば, おそらくこのような反応は見られなかったであろう. 操作的証明を書いて記録しようとして一般的に成り立つことが表現しにくいという経験を経ているからこそ, 形式的証明の結果が端的に一般性を示していることに驚いたのであると考えられる. このように, 形式的証明のもつ一般性を強調できるという意味でも, 代数的証明の学習に操作的証明を取り入れることは有効であるといえよう.

ANNA数の学習を終えて4時間目は,「奇数＋奇数＝偶数」となることを説明する学習活動が行われた. ここでは，文字を用いた形式的証明に限定することなく，自由に説明の方法を考えさせたが，一部の生徒は，附属中学校における実験授業でも見られた，2列に並べたブロックの図を用いた操作的証明を考案していた. これは，正方形上のブロックを2列に配列したとき，奇数は必ず1個飛び出た部分ができるということから，それを2つ組み合わせると飛び出た部分が打ち消しあい，ちょうど2列のブロックの配列，つまり偶数ができるということを説明するものである.



【図4-16：ブロックを用いた「奇数＋奇数＝偶数」の操作的証明】

黒板でこの方法によって説明した生徒は，3＋5という場面を用いてこの操作的証明を行ったが, 飛び出した部分が合わさって2×4の偶数の列になることは説明できているものの,

他の奇数同士の場合も同様の操作が行えることには言及していなかったが，この学習場面で教師から「ほかの奇数の場合も同じことが言えるか」ということを問われて，証明の一般性について理解する様子が見られた．このように，操作的証明の段階をとらえて，その都度，証明の一般性について確認していくという活動は，証明の一般性についての理解を促進するために有効な学習活動であるといえよう．少なくとも，公立中学校における実験授業では，生徒の操作的証明を捉えて，教師側が意図的にそのような学習場面を設定することができていた．このような操作的証明の扱いをすることが，文字を用いた形式的証明の学習の前段階として，操作的証明を取り入れることの大きな意義といえるだろう．

３．学習環境のリデザインに向けた示唆

公立中学校での実験授業を通して，操作的証明におけるおはじきと位取り表の操作や，操作的証明から形式的証明への移行の場面においては，生徒の学力差に関係なく，同様の反応が見られるということが明らかになった．このことは，試行授業，附属中学校での実験授業を通して，リデザインを重ねてきた ANNA 数の数学的パターンを題材とした学習環境のデザインが，ある程度汎用性をもつものであることを示している．

しかし，詳細に見ると，「奇数＋奇数＝偶数」であることを証明しようとする場面で，ブロックによる操作的証明を考案した生徒も，操作的証明が具体的特殊への操作の結果を根拠としており，一般に成り立つことを示しているわけではないことは理解できていなかったことが窺える．教師からの問いかけによって，ようやく操作的証明では十分な説明とは言えないことを理解していたようであるが，操作的証明の学習を通して，いかに形式的証明の一般性を強調していくかということに関しては，今後も検討の余地があろう．

また，おはじきと位取り表を用いて ANNA 数の数学的パターンを説明しようとする場面では，教師がおはじきと位取り表の操作の仕方について，ある程度の方向付けを行ったが，生徒自身が操作的証明を構想するという学習活動の展開は可能なのであろうか．

おはじきと位取り表の操作について，一定程度の基礎的経験を有していることが前提となることは予想できるが，どの程度，おはじきと位取り表を用いた操作に関する基礎的経験を必要とするのか，また，そのような素地のある生徒がどのように操作的証明を構想していくのかということに関しては，今後の課題といえよう．

第４章のまとめ

本章では，文字を用いた形式的証明を学習する中学校第 2 学年を対象に，ANNA 数の数学的現象を題材とした学習環境のデザインを行い，　試行授業，附属中学校での実験授業，公立中学校での実験授業を経て，リデザインを繰り返してきた．また，それぞれの授業を詳細に分析することによって，生徒の反応やリデザインへの示唆，操作的証明を取り入れることの意義等について，考察してきた．

まず，公立中学校において行った試行授業では，おはじきと位取り表を用いた操作的証明という活動が中学生の段階の生徒にも学習活動として十分受け入れられること，また，ANNA 数の数学的パターンの探究と発見については生徒同士の相互作用を活発化させることによって特に手立てを必要とせずに実行できることが明らかとなった. 操作的証明におけるおはじきの操作については，ある程度教師側が方向づけを行わない限り，筆算再現型のおはじき操作をする生徒が多いということ，操作的証明の学習活動を取り入れたとしても，そこから自動的に形式的証明ができるようになるわけではないということも明らかとなった．

試行授業の結果を受けて，附属中学校での実験授業では，操作的証明におけるおはじきの操作に関する方向づけの仕方, 操作的証明から文字を用いた形式的証明へと向かせる際の教師の手立てについて，いくつかの知見を得ることができた．また，附属中学校の実験授業では, 操作的証明を扱う実験群と形式的証明のみを行う対照群とに分けて実験授業を実施した結果，操作的証明を経験した実験群では，おはじきと位取り表の操作が，数学的パターンの探究活動の助けとして機能すること，また，文字を用いた形式的証明の学習において，証明の一般性に関する議論を促進することができるということが明らかとなった．

学習環境デザインの汎用性と, 証明の一般性の議論の様相に焦点化して行った公立中学校での実験授業では，標準的な学力レベルの中学生であっても，附属中学校での実験授業で見られたのと同様の生徒の反応が見られること，また，それに対する教師側の手立ても，附属中学校で行った実験授業の知見が生かせるということが確認できた．さらに，証明の一般性についての議論についても，教師側が意図的に設定することが可能であり，このような学習活動が，操作的証明を取り入れることの大きな意義であるということが確認できた．

【第４章における引用・参考文献】

國本景亀(1996).『空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善』, 平成 6 年〜7 年度科学研究費補助金（一般研究(C)）研究報告書.

國本景亀(2006).「機械論から生命論へ（練習に焦点をあてて）—機械的練習から生産的（創造的）練習へ—」, 日本数学教育学会誌『算数教育』, 第 88 巻, 第 2 号, pp.12-18.

佐々祐之(2012).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究(Ⅱ)〜おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を通して〜」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 18 巻, 第 2 号, pp.77-91.

佐々祐之(2013).「代数的証明の学習における操作的証明の役割」,『熊本教育実践研究』, 第 30 号, pp.15-22.

佐々祐之・樋脇正幸(2011).「中学校数学科における操作的証明に関する研究」,『日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集』, pp.735-740.

佐々祐之・山本信也(2009).「数学教育における操作的証明に関する研究 —おはじきと位取り表による操作的証明の事例から—」,『日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集』, pp. 553-558.

佐々祐之・山本信也(2010).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究 —おはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 16 巻, 第 2 号, pp. 11-20.

樋脇正幸(2011).「中学校数学科における「操作的証明（Operative proof）」の可能性〜おはじきと位取り表を用いた ANNA 数の授業実践から〜」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 18 号, pp.107-120.

樋脇正幸・佐々祐之(2012).「中学校数学科における「操作的証明」に関する研究—文字を用いた説明における「操作的証明」の役割—」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 19 号, pp.47-57.

文部科学省(2008).『中学校学習指導要領解説数学編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009).『平成 21 年度全国学力学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

山本信也(2012).『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望, E. Ch. ヴィットマンの数学教育学の基本的視角』, 熊日出版, p.134.

Mueller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004a). *Das Zahlenbuch, 4.Schuljahr*, Klett, 2004.

Mueller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004b). *Das Zahlenbuch, 4.Schuljahr, Lehrband*, Klett, 2004.

Wittmann, E. Ch. (1996). Operative proofs in Primary Mathematics, *Paper presented to Topic Groups 8, "Proofs and proving: Why, when,how?" at the 8th International Congress of Mathematics Education, Seville.*

Wittmann, E. Ch. (2004). Learning mathematics for teaching mathematics : The notion of operative proof, *Paper presented at TSG3 in 10th ICME, 4.－11., July, 2004, Copenhagen, Denmark.*

Wittmann, E. Ch. (2005). Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood, *Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut, Mons/Belgium, July 7-9, 2005.*

Wittmann, E. Ch. (2007b). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference "The Future of Mathematics Education in Europe", Lisbon 17. - 19.12.2007, organized by the Academia Europaea.*

Wittmann, E. Ch. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference ICMI Study 19 : Proof and Proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education", Taiwan, 10-15.May 2009, organized by ICMI.*

【資料４-３：試行的な授業に当たって作成したANNA数のマスタープラン】

ANNA数 マスタープラン

授業コンセプト　対象学年：中学校第２学年

【ANNA数に見られる数学的現象】

０から９までの異なる２つの整数を用いて，ANNAの型に表した４ケタの数を“ANNA数”と呼ぶ.（例えば，2と3を用いてつくったANNA数は 2332 と 3223，５と８を用いてつくったANNA数は5885と8558である.）このとき，同じ２つの整数からできるANNA数の差は，常に891の倍数になり，その値は891×(最初に選んだ２数の差)となる現象が見られる.

ANNA数は，ドイツの数学教育学者ヴィットマンの提唱する「操作的証明」の例としてあげられる素材の1つである．本授業では，ANNA数に見られる数学的な現象をおはじきと位取り表を用いた活動によって明らかにする．これにより，対象に起こっている現象を子ども自らの主体的な活動によって把握させ，文字を用いた説明につなげることが可能になる．さらに，新たな数学的パターンの発見も見込めるものである.

１．学習のねらい

異なる２つの整数からなる２種類のＡＮＮＡ数の差に見られる現象を，おはじきと位取り表を用いた活動を通して明らかにしていくことで，数学的思考力や表現力を醸成し，文字を用いた説明につなげる.

【準備物】
- おはじき(36個程度)・位取り表
- ワークシート

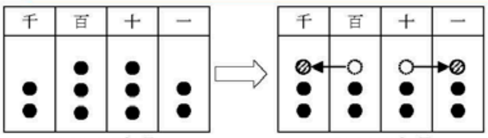
２．学習活動の計画と意図

（１）ANNA数の差を求め，そこに見られる現象に気づく.

予想される反応
- ANNA数の差は，891×(最初に選んだ２数の差)となる.
- ANNA数の差の値の各桁の数字を足すと，18となる.
- ３の倍数，９の倍数，891の倍数となる.　など

個人でＡＮＮＡ数の差を求める計算をより多くさせることで，本時の課題をきちんと把握させる。

（２）おはじきと位取り表によってANNA数を表現し，その差を求める.

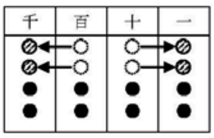


2332の表現　　3223の表現

学習具(おはじきと位取り表)は，必ず一人につき1セット配布する。そこでのおはじきの操作からの，様々な子どもたちの気づきを引き出していく。

2332から3223をつくるには，おはじきを百の位から千の位に１個，十の位から一の位に１個移動させるとよい．これより２数の差は，「−100＋1000−10＋１＝８９１」と求められる.

（３）おはじきと位取り表を用いて，ANNA数の差が891×(最初に選んだ２数の差)となることを説明する.



まず個人思考の時間を確保した後、グループ活動で考えを練り上げていく。

左図のように，最初に選んだ2数の差が２の場合は，差が891となるおはじきの操作を２回行えばよい．つまり，このときのANNA数の差は891×2=1782となる．同様にして考えることで，ANNA数の差は891×(最初に選んだ２数の差)となることが説明できる.

（４）文字を用いた式によって，ANNA数の差に見られる現象を説明する.

最初に選ぶ２つの数をa，b（a<b）とすると，ANNA数は，1000b＋100a＋10a＋b，1000a＋100b＋10b+aと表すことができ，その差を求めると，891(b−a)となる.

（５）NANA数について探究する.

NANA数(例えば，5353と3535)などのANNA数以外の表現形式を紹介し，そこに見られる数学的現象の発見を促す．その際，おはじきと位取り表も使用させ，学習の助けとする.

【資料４-４ ：試行的な授業に当たって作成したワークシート①-1】

Mysterious number ＡＮＮＡ数

２年　　番

【問１】

（１）ＡＮＮＡ数をつくり、次の手順に従って計算してみましょう。

① １から９までの異なる２つの整数を選びなさい。（例）2 と 3

② ①の２数から、ＡＮＮＡ数を１つつくりなさい。（例）2332

③ ②でつくったＡＮＮＡ数の２種類の数を入れ替えて、もう１つのＡＮＮＡ数をつくりなさい。（例）3223

④ ②と③でつくったＡＮＮＡ数の差を求めなさい。（例）3223－2332

この手順に従っていろいろなＡＮＮＡ数をつくり、計算してみましょう。

（２）何か気づいたことはありますか。

【資料４-４：試行的な授業に当たって作成したワークシート①-2】

【問２】おはじきと位取り表を使って考えてみましょう。

（１）2332 を位取り表で表してみましょう。

（２）次に、それが 3223 になるようにおはじきを動かしてみましょう。
このとき、数はどれだけ大きくなりましたか。

（３）3223 は 2332 よりいくつ大きくなるかについての、位取り表を使った説明を書きなさい。

千	百	十	一

（４）他のＡＮＮＡ数でも、同じように説明できますか。

【資料４-４：試行的な授業に当たって作成したワークシート②】

Mysterious number ＡＮＮＡ数＜チャレンジ版＞

２年　　番

3663，8558，1771 などのように，１から９までの異なる２つの整数を用いてつくった４ケタの数を“ＡＮＮＡ数”と呼ぶことにします。

【チャレンジ１】

異なる２つの整数を用いてつくった２種類のＡＮＮＡ数の差は 891 の倍数になることを，文字を使って説明してみましょう。

（１）a，b を１から９までの整数であり，a>b とするとき，
最初に選んだ異なる２つの整数を a, b として，２つのＡＮＮＡ数を a, b を用いて表しなさい。

	,	
	,	

（２）（１)の結果を用いて，異なる２つの整数を用いてつくった２種類のＡＮＮＡ数の差は 891 の倍数になること説明しなさい。

【チャレンジ２】

6363，5858，7171 などのように，１から９までの異なる２つの整数を用いてつくった４ケタの数を“ＮＡＮＡ数”と呼ぶことにします。

ＮＡＮＡ数で見られる現象には，どのようなものがありますか。気づいたことを書きなさい。
また，説明までできる場合は，そこまで書いてみましょう。

【資料４-５：実験授業に当たって作成したワークシート①-1】

２年数学ワークシート	月　　日（　　）
Mysterious number~**ANNA数～**	組　　番（　　　　　　　　）

3663, 8558, 1771 のように 1 から 9 までの異なる 2 つの整数を用いてつくった 4 ケタの数を、“ＡＮＮＡ数”と呼ぶことにします。

【問１】次の手順にしたがってＡＮＮＡ数をつくり、計算してみましょう。

① 1 から 9 までの異なる 2 つの整数を選びなさい。　（例）2 と 3
② ①の 2 数から、ＡＮＮＡ数を 1 つ つくりなさい。　（例）2332
③ ②でつくったＡＮＮＡ数の 2 種類の数を入れ替えて、もう 1 つのＡＮＮＡ数をつくりなさい。　（例）3223
④ ②と③でつくったＡＮＮＡ数の差を求めなさい。　（例）3223－2332

※　何か気づいたことはありませんか。

【Note：みんなの気づき】

【資料４-５：実験授業に当たって作成したワークシート①-2】

【問２】おはじきと位取り表を使って，最初に選んだ２数の差が１である２つのＡＮＮＡ数の差に見られた現象（つまり，________になること）について考えてみましょう。

千	百	十	一

【Note】

【資料４-５：実験授業に当たって作成したワークシート②】

2年数学ワークシート　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　月　　日（　）

Mysterious number~**ANNA数 2**~　　組　　番（　　　　　　　　）

【ＡＮＮＡ数とは？】
1から9までの異なる2つの整数を用いて“ＡＮＮＡ”の並びでつくられた4ケタの数。
（例）3663, 8558, 1771

⇨ （予想）ＡＮＮＡ数の差は, ______________________________になる。

【問１】おはじきと位取り表を使って、最初に選んだ2数の差が1以外の場合における2つのＡＮＮＡ数の差に見られた現象を説明しなさい。

千	百	十	一

【Note】

【資料４-５：実験授業に当たって作成したワークシート③】

２年数学ワークシート 文字式の利用　　　　　　　　　　月　　日（　　）

Mysterious number~**ANNA数 3**~　　組　　番（　　　　　　　　　）

【問題】異なる２つの整数を用いてつくった２つのＡＮＮＡ数の差が 891×(最初に選んだ２数の差)になることを、文字を使って説明してみましょう。

（１）異なる２つの整数を用いてつくった２つのＡＮＮＡ数を、文字を用いて表しなさい。

< 用いる文字とその条件 >

< ２つのＡＮＮＡ数 >

（２）（１）の結果を用いて、異なる２つの整数を用いてつくった２つのＡＮＮＡ数の差は、891×(最初に選んだ２数の差)になること説明しなさい。

【資料４-５：実験授業に当たって作成したワークシート④（レポート課題）】

【チャレンジ】

6363，5858，7171 などのように、1 から 9 までの異なる 2 つの整数を用いてつくった 4 ケタの数を“ＮＡＮＡ数”と呼ぶことにします。ＮＡＮＡ数で見られる現象には、どのようなものがありますか。説明までできる場合は、そこまで書きなさい。

【資料４-６：実験授業に当たって作成したワークシート（対照群）】

「文字式の利用ワークシート」　月　日（　）２年　番

3663，8558，1771 などのように，１から９までの異なる２つの整数を用いてつくった４ケタの数を“ＡＮＮＡ数”と呼ぶことにします。

【問１】次の手順にしたがってＡＮＮＡ数をつくり，計算してみましょう。

①	１から９までの異なる２つの整数を選びなさい。	（例）2 と 3
②	①の２数から、ＡＮＮＡ数を１つつくりなさい。	（例）2332
③	②でつくったＡＮＮＡ数の２種類の数を入れ替えて、もう１つのＡＮＮＡ数をつくりなさい。	（例）3223
④	②と③でつくったＡＮＮＡ数の差を求めなさい。	（例）3223－2332

※　何か気づいたことはありませんか。

【問２】異なる２つの整数を用いてつくった２種類のＡＮＮＡ数の差は，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿になることを説明しなさい。

第５章

論証指導における操作的証明の機能

第５章　論証指導における操作的証明の機能

前章では，ANNA 数の数学的パターンを題材として，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを行い，試行授業，実験授業を繰り返す中で学習環境デザインのリデザインを行ってきた．さらに，それらの改善サイクルを通して，学習環境デザインに際してのいくつかの示唆を導出することができた．

本章では，それらの実証的研究の成果を踏まえ，「探究，発見，理由づけ」という一連の活動として捉える広義の「証明すること（Proving)」の視点から，操作的証明の機能について考察することとする．ここでは，広義の「証明すること（Proving)」の視点からのカリキュラム開発の枠組みとして，宮崎らのプロジェクト「課題探究として証明することのカリキュラム開発」の枠組みを参考にし，カリキュラム開発としての枠組みの中で，操作的証明がどのような機能を果たすかということについて考察を行う．

また，証明の構想や構成，評価・改善・発展という一連の学習活動として操作的証明を考えるとき，操作的証明をいかに構想し，構成していくかという問題は，学習環境デザインにおいて，重要な課題である．前章における実証的研究では，操作的証明の構想や構成については，ある程度教師による方向付けが必要であることが確認されたが，生徒自身が操作的証明を構想，構成していくことができるためには，学習環境のデザインにおいてどのような工夫や手立てが必要であるかを明らかにする必要がある．そこで，操作的証明の構想，構成に関わるインタビュー調査を実施し，その結果を分析することを通して，操作的証明の構想，構成といったプロセスについて考察したい．

さらに，操作的証明の発展性として，特に算数・数学科の学習活動では重要であるとされている「練習」という概念に着目し，広義の「証明すること（Proving)」の枠組みの中で操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを，定着のための練習をも含めた学習環境とするための具体的方策について検討したいと考える．

１節　課題探究としての証明における操作的証明の位置づけ

ここでは，「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動としての論証指導である広義の「証明すること（Proving)」において，操作的証明がいかに機能するのかを考察するために，宮崎らの研究プロジェクト「課題探究として証明することのカリキュラム開発」を取り

上げ，その概要を示すとともに，その枠組みの下での操作的証明の位置づけについて考察を行う．

１.「課題探究として証明することのカリキュラム開発」プロジェクト

平成 20 年 3 月に行われた学習指導要領の改訂では，算数的活動・数学的活動が，基礎的・基本的な知識・技能を確実な定着，数学的な思考力・表現力の育成，算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感のために重要な役割を果たすものと捉えられており，これまで以上に数学的活動を充実させることが求められているといえよう．

証明に関する学習は，これまでも中学校数学科のカリキュラムを中心として重視されてきた内容であり，今回の学習指導要領の改訂においてもその位置づけは変わっていない．むしろ，中学校だけではなく，小学校の高学年の段階から演繹的な推論を意識した学習活動の展開が期待されていると言える．しかし，これまでの証明に関する学習活動を振り返ってみると，時代背景に応じて常に改善が重ねられてきたとはいえ，十分な成果を上げているとは言えない状況にある．例えば，国立教育政策研究所によって行われている全国学力学習状況調査の結果を見ると，数学 B（活用に関する問題）の数や図形の性質を証明する問題に対しては，どの年度も正答率は概ね 4 割前後となっており，証明することに関して十分な学習内容の定着がなされているとは言えないだろう．

このような現状の要因は様々考えられるが，ともすれば，中学校における証明の学習自体が，多くの生徒にとって，通過儀礼的になってしまっており，目的や状況に応じて何をどのように証明すればよいのかについて主体的に思考・判断・表現することが疎かにされているということも考えられる．つまり，小学校高学年から中学校にかけて行われる論証指導が，証明を通して数学的に推論する力を身に付けるための学習活動とはなっておらず，証明の書き方の学習にとどまっているということが懸念されるのである．本来，証明に関する学習指導では，様々な数学的現象を探究することを通して，帰納的推論や類比的推論を用いて数学的な性質や法則を見出し，それが一般的に成り立つことを証明するために構想を立て，構想に従って証明を構成するとともに，証明を振り返って評価・改善・発展させていくという一連の学習プロセスを通して数学的に推論する力を高めるために行われるものであり，知識としての数学ではなく活動としての数学を具現化することを目的として行われるべきものであろう．

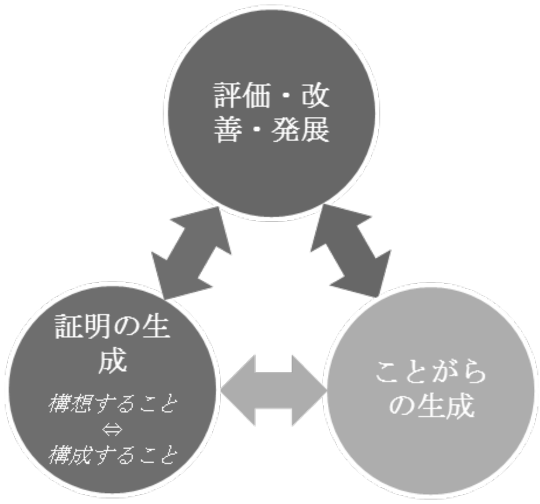
このような問題意識のもと，宮崎を研究代表とする「課題探究として証明することのカリ

キュラム開発」のプロジェクトでは，中学校段階における証明の学習を総合的に捉え，形式的な証明の書き方に終始する証明の学習ではなく，課題探究として証明の学習指導を展開するためのカリキュラムの開発を目指している(宮崎・藤田(2013)，宮崎・佐々・辻山(2013))．このプロジェクトでは，中学校の3年間を通した数学科の学習指導の中で，証明を構想・構成し評価・改善・発展させていくためのカリキュラムの枠組みを構築するだけではなく，具体的な授業を構想し，実践を通して効果を検証することを通してより実効性の高いカリキュラムの構築を目指している．

宮崎らの目指す「課題探究として証明することのカリキュラム」も，「探究，発見，理由づけ」という一連の活動として捉えた広義の「証明すること（Proving)」の視点に立って論証指導の改善を図ろうとするものであり，本研究と同じ考察基盤に立つ研究であると考えられる．確かに，宮崎らのプロジェクトでは，中学校3年間というスパンでの学習活動を構成しており，論証指導に関しても数学という教科における形式的証明を対象とした学習指導を考察の対象としているのに対して，本研究では，小学校高学年から中学校にかけての，形式的証明へと移行する前段階としての前形式的証明における操作的証明の概念を扱っているという意味で，その考察対象は異なるところもあるが，広義の「証明すること（Proving)」の視点から論証指導を考察しようとしている点において，参考となるものである．そこで，本研究では，この宮崎らの「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトの枠組みを参照し，論証指導のカリキュラムという視点から，操作的証明の機能について考察することとする．

２．課題探究として証明することのカリキュラムの枠組み

広義の「証明すること（Proving)」では，「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動を論証指導の中心として捉えているが，それらをカリキュラムとしてどのように構成していくかということに関しては，十分議論されていない．確かに，個々の学習活動においては，「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動を意識した学習環境のデザインが必要であるが，一方でそれをカリキュラムの中にどのように位置づけていくかということは，重要な課題であると考えられる．「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトでは，カリキュラム開発の基本的な枠組みとして，証明することに見られる「ことがらの生成」「証明の生成（構想／構成)」「評価・改善・発展」という3つの側面とそれらの間の相互作用を課題探究として証明することとして捉えている（図5-1，Chino et al., 2010)．

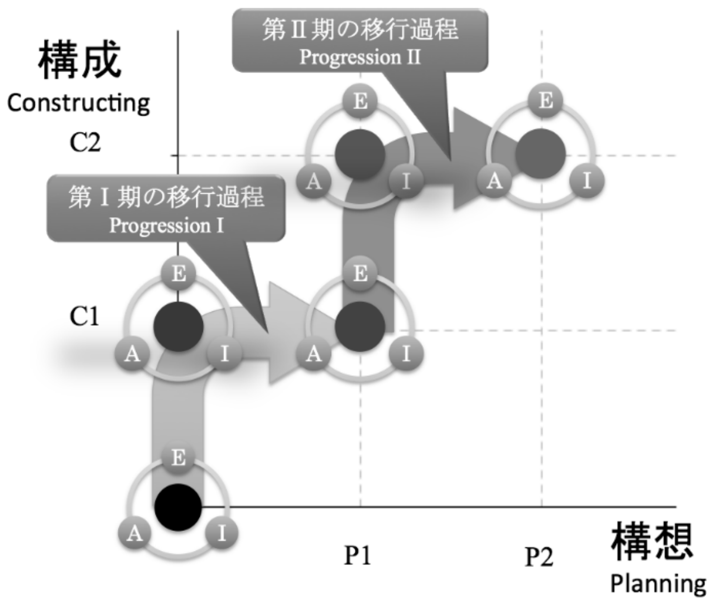


【図５-１：課題探究として証明すること】

これは,「課題探究としての証明」という学習活動を構想するに当たっては，従来から行われてきた論証指導において,「証明の書き方」が学習内容の中心であったように，生徒が構成する証明というプロダクトの質を高めるための学習活動だけを考えるのではなく, 数学的な現象や対象の探究的活動を通して，証明すべき事柄を帰納的・類比的に推論し，数学的パターンを発見するプロセスや, 発見した数学的パターンが成り立つことを理由づけるために証明を構想し，それを構成していくプロセス，さらには，出来上がった証明を振り返ってよりよい証明に改善したり, そこから新たな性質や法則を発見して内容を発展させたりするプロセスも含めて考える必要があるということを意味している. この立場は, A. Stylianides ら（Stylianides, A. J. (2007), Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008)）の主張する広義の「証明すること（Proving)」の考え方をベースとしたものであり，本研究の目指す学習環境デザインの考え方と同じ基盤に立つものである.

また，このような枠組みのもとでの「課題探究として証明すること」を，特定の学年や領域における単体の授業として構想するのではなく，中学校 3 年間を通したカリキュラムとして具体化していくために，証明の生成（構想すること，構成すること）に関して図５-２に示すような学習レベルの設定を行っている．そこでは,「証明の構想」と「証明の構成」という 2 つの視点から論証指導のスコープとシーケンスを明確化し，第Ⅰ期と第Ⅱ期に分けて学習レベルの移行を，図式化している．また，各学習レベルにおいて,「評価・改善・発展」の学習活動を位置づけ,「探究，発見，理由づけ」だけではなく,「評価・改善・発展」

も含めた学習活動のサイクルが実現されるようなカリキュラムを想定している．以下，図５-２をもとに，学習レベルの設定とその移行の流れについて示すことにする．



【図５-２：学習レベルの設定】

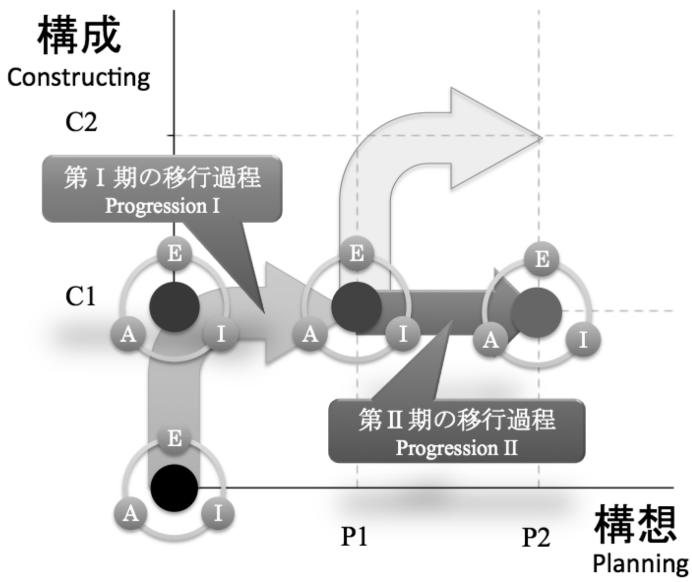
図５-２では，横軸を「証明の構想」，縦軸を「証明の構成」とし，それぞれにおいて２つの学習レベルを設定している．まず，「証明の構想（Planning）」に関する学習レベルとしては，前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉えるレベル（P1）と，前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充するレベル（P2）とが設定されている．また，「証明の構成（Constructing）」に関する学習レベルとしては，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現するレベル（C1）と，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現するレベル（C2）とが設定されている．これらの２つの視点からの学習レベルに，証明の構想と構成とが未分化である状態（O）を設定するとそれらの組み合わせによって，（O）（C1）（C2）（P1）（P2）（P1,C1）（P1,C2）（P2,C1）（P2,C2）という９つの学習レベルが想定できることになる．

しかし，実際に中学校３年間を通したカリキュラムを構想する場合，これら９つの学習レベルがすべて想定されるわけではない．証明を構想することと構成することのレベルが交互に上げていくことを考えるならば，（O）から（P1,C1）を経由して（P2,C2）へと学習レベ

ルが上がることが想定される．また，（O）から（P1,C1）への移行過程においても，前提と結論を結びつける（C1）のレベルを経由せずに，それに必要とされる対象と方法を考察する（P1）のレベルへ至ることはできないため，移行過程としては，（O）から（C1）を経由して（P1,C1）へと移行することになる．（P1,C1）から（P2,C2）への移行過程に関しても，演繹的推論が普遍例化と仮言三段論法に分化する（C2）のレベルを経由せずに，解析的思考において必要条件と十分条件を区別する必要がある（P2）のレベルへ至ることはできないため，移行過程としては，（P1,C1）から（P1,C2）を経由して（P2,C2）へと移行することになる．図 2 では，(O) から (P1,C1) までを第 I 期の移行過程とし，(P1,C1) から (P2,C2) までを第 II 期の移行過程として示している．

また，評価・改善・発展に関しては，それぞれの学習レベルにおいて意図されるため，図中ではそれぞれ(E)：Examining，(I)：Improving，(A)：Advancing という記号で表されている．

このような学習レベルの枠組みは，主に中学校数学科の領域「図形」における証明の生成を想定したものであるが，領域「数と式」における証明の生成，つまり代数的証明の生成については，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化する（C2）レベルが中学校数学科において必ずしも求められていないため，（C2）レベルへの移行を想定せず，第 II 期の移行において，（P1,C1）から（P2,C1）へと移行する図５-３のようなモデルを準用することとなる．



【図５-３：領域「数と式」における学習レベルの設定】

３．課題探究として証明することのカリキュラムの枠組みにおける操作的証明の位置づけ

「課題探究として証明すること」のカリキュラム開発の枠組みは，中学校３年間の数学科のカリキュラムを意図したものであり，また，そこで「証明の構想」「証明の構成」として想定されているのは，数学的な意味での形式的な証明である．一方で，本研究で考察の対象としている操作的証明は，小学校高学年から中学校段階にかけての児童生徒を対象とすることを想定しており，また，証明の性格としても，適切に表現された数学的対象（代表的特殊）に対する操作の結果を根拠として，一般的にあるパターンが成り立つことを説明しようとするものであり，形式的な証明と対峙される前形式的証明として位置付けられるものである．そのため，「課題探究として証明すること」のカリキュラムにおける学習レベルの考え方を，そのまま操作的証明に適用することはできないが，第２章でも述べたように，操作的証明が形式的証明を生成し，それを納得・確信する手段となるという性格をもつものであると考えるならば，「課題探究として証明すること」のカリキュラムにおける学習レベルの移行において，操作的証明の位置づけを考察することは可能である．

まず，「課題探究として証明すること」のカリキュラムの領域「数と式」における学習レベルの移行では，証明の構想と証明の構成とが未分化である（O）から，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形作り表現する（C1）を経由して，証明の構成の要素として前提と結論を結び付けるための着想，必要となる対象と方法を捉えるレベル（P1,C1）へと至る第Ⅰ期と，（P1,C1）から証明の構想に関して，前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充するレベル（P2,C1）へと至る第Ⅱ期とが想定されている．第Ⅰ期は，証明というものの形式について理解し，前提から結論へ至る道筋を概略的にとらえるという段階であるのに対して，第Ⅱ期は，前提から導くことのできる命題と，結論からさかのぼって想定される命題とを分析的にとらえ，それらの間の連鎖，つまり，演繹的推論の道筋を見出そうとする段階であり，学習レベルの移行段階としての違いは，証明の構想に関わるプロセスが洗練されるかどうかにあると言える．

つまり，第Ⅱ期の学習レベルの移行は，ある程度形式的証明についても理解し，自ら証明の構想を立てようとする段階であり，中学校第２学年から第３学年にかけて，形式的証明の学習を洗練していく段階であるのに対して，第Ⅰ期の学習レベルの移行は，証明というものに初めて出会い，それがどのように構成されるのかを理解するとともに，根拠立てて説明するということの意義を見出す段階であり，論証指導における基礎的な理解基盤を形成する段階であるといえるだろう．

このような学習レベルの移行の特性を踏まえると，形式的証明を生成し，それを納得・確信する手段となりうる操作的証明は，証明に関する学習の基盤を形成する第 I 期において，より機能するものであると考えられる．つまり，証明の構想や証明の構成が未分化であるレベル（O）から，「なぜ証明が必要なのか」といったことや「証明とはどのようなものか」ということを理解するレベル（C1）において，さらには，「証明をどのように組み立てていけばよいか」ということについて概略的に理解するレベル（P1,C1）において，操作的証明が機能すると考えられるのである．

確かに，第 4 章における操作的証明に関する実証的研究では，代表的特殊に対する操作の結果を根拠とする操作的証明の特性が，証明の一般性の議論を促進させることなど，「なぜ証明しなければならないのか」という証明の意義の理解に関する教育効果は確認することができた．さらに，操作的証明は，あくまで証明活動であり，「ある数学的パターンが成り立つことを根拠を明確にして説明する」という証明そのものの性格を有していることから，「証明とはどのようなものなのか」ということに関する基本的な理解に関しても，操作的証明を取り入れた学習活動の中で実現することができるだろう．また，実証的研究では，操作的証明が，生徒の探究的な活動を促進するツールとして機能することも確認されており，「課題探究として証明すること」のカリキュラムにおけるそれぞれの学習レベルにおける，「評価・改善・発展」という学習活動に対しても，操作的証明は有効に機能するといえるだろう．

しかし一方で，「証明とはどのようなものか」について理解する（C1）への引き上げの後，「証明をどのように組み立てていけばよいか」ということについて概略的に理解するレベル（P1,C1）へと学習レベルを移行していくためには，「証明の構想」ということに関して概略的に理解することが必要となる．これについては，第 4 章で行った実証的研究の中では，十分検証されておらず，おはじきと位取り表を用いた操作的証明に関するおはじきの操作に関しては，ある程度，教師側の方向付けが必要であることが確認されている．「証明とはどのようなものか」を理解するレベル（C1）への移行だけではなく，証明の構想に関わる概略的な理解ができる（P1,C1）レベルへの引き上げも含めた第 I 期の学習レベルの移行を支えるためには，操作的証明そのものの構想に関する手立てを明確化しておく必要があるだろう．操作的証明を取り入れることによって，「証明がどのようなものなのか」を理解し，さらに，それを「どのように構想するか」というところまで踏み込むことのできる学習環境のデザインができれば，論証指導における操作的証明の機能を，より強固なものとすることができるだろう．

次節では，この「操作的証明の構想」という部分に焦点を当て，「操作的証明を構想するためには，学習環境のデザインのためにどのような手立てが必要とされるのか」ということを明らかにするために行った教授実験の結果を分析し，そこから得られる示唆についてまとめることとする．

２節　操作的証明の構想に関するプロセス

本節では，前節において検討してきた「課題探究として証明すること」のカリキュラムの枠組みにおける操作的証明の位置づけを踏まえ，これまでに行ってきたおはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインとその実証的研究において得られた課題を整理する．また，操作的証明を取り入れた学習環境を「課題探究として証明すること」として位置付けていくために，「操作的証明の構想」という視点から教授実験を企画・実施し，その結果を分析することを通して，よりよい学習環境デザインへの示唆を得ることをねらいとする．

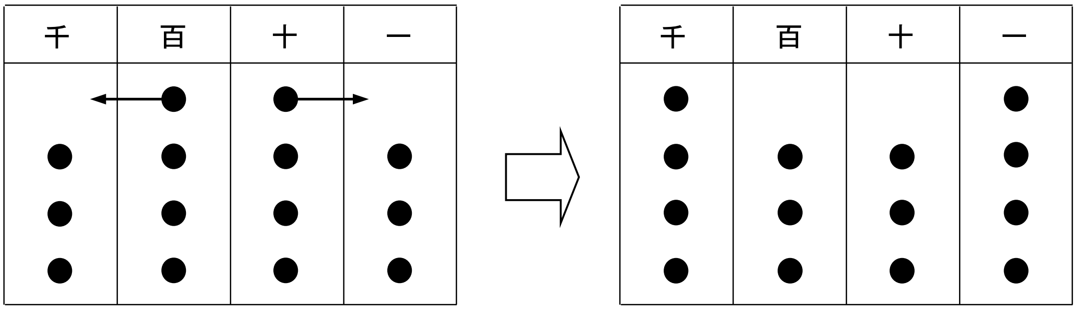
１．実証的研究から見出された課題

これまでの研究を振り返ると，「課題探究として証明すること」のカリキュラムの学習レベルにおいて，証明の構想と証明の構成とが未分化である（O）から，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形作り表現する（C1）を経由して，証明の構成の要素として前提と結論を結び付けるための着想，必要となる対象と方法を捉えるレベル（P1,C1）へと至る第 I 期を支えるための学習活動として，操作的証明を取り入れた学習環境を位置づけていくためには，少なくとも，次のような解決すべき課題があるといえよう．

おはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習活動では，生徒が操作的証明を構想するために，ある程度の教師による方向付けが必要であったが，児童生徒が自ら操作的証明を構想することができるような手立てを工夫することができないか．

これは，第４章で示した中学校第２学年の生徒を対象に実施した ANNA 数を題材とした実験授業から導かれた課題である．例えば，3443 と 4334 という 2 つの ANNA 数の差が 891 であることを，おはじきと位取り表を用いて説明しようとする場合，ヴィットマンによって例示された操作的証明では，図５-４のように，3443 を位取り表に表し，それを 4334

につくり変えるという操作（百の位から千の位へおはじきを１つ移動し，十の位から一の位へおはじきを１つ動かす）が求められる．しかし，実証授業では，多くの生徒が「差が 891 であることを示す」ということのために，4334 を位取り表に表し，そこから 3443 を取り除こうとする操作を行っていた．本研究では，このようなおはじきの操作は，繰り下がりを含む筆算のプロセスを位取り表で行ったものであるということから「筆算再現型のおはじき操作」と呼んでいるが，同様の傾向は，例えば「332 と 233 の差を求める」といった課題を扱った，小学校高学年の児童に対するインタビュー調査の中でも見ることができた．



【図５-４：位取り表におけるおはじきの移動】

もちろん，「筆算再現型のおはじき操作」でも，差を求めることは可能であり，ANNA 数の性質を一般的に説明することも可能である．実際，溝口・松本(2008)は，「位の数を入れかえた 2 位数の差が 9 の倍数になる」ことを扱った小学校第 2 学年の児童に対する実践の中で，筆算再現型のおはじき操作を用いて図的代数の一般化を図っている．しかし，これまでの ANNA 数の性質の実践の中では，筆算再現型のおはじき操作は，一般的な性質の説明には結びついておらず, 代表的特殊に対するひき算の結果を示すにとどまっていた. そこで, 本研究では，筆算再現型のおはじき操作ではなく，図５-４に示したようなおはじき操作を用いた操作的証明を想定し，これを構想するための手立てを考察することとした．

これまでの ANNA 数の実験授業では，ある程度おはじきと位取り表での操作を考えた後に，教師が 3443 を位取り表の上に表してみるように指示し，そこから「4334 につくり変えるにはどうすればよいか.」と問いかけることによって，操作的証明で求められるおはじきの操作を方向づけていた．この方向付けによって，生徒らは ANNA 数の操作的証明で意図されているおはじきの操作に気づき，操作的証明を構想することができていた．

しかし, このように教師が操作的証明のためのおはじきの操作について方向付けを行うのではなく, 生徒自らがおはじきと位取り表を用いた操作的証明を構想することができるよう

な学習プロセスの設定が可能ではないだろうか．ANNA 数の実験授業では，おはじきと位取り表を用いた学習活動が初めてであったために，特に指導しなければ，「筆算再現型のおはじき操作」を行おうとすることは自然な流れであろう．しかし，事前におはじきと位取り表に関する基礎的な経験を提供するような学習活動を組み込むことができれば，ANNA 数の現象の説明の場面においても，経験を生かした操作的証明の構想ができるのではないかと予想される．このような一連の学習プロセスをデザインし，操作的証明の構想に関する生徒の反応を明らかにすることが課題である．

そこで，ANNA 数の現象等を題材とした操作的証明の学習の前段階として，おはじきの操作に関する基礎的な経験を与える学習活動を組み込んだとき，生徒はおはじきと位取り表を用いた操作的証明を自ら構想できるのか，また，どのように操作的証明を構想していくのか，ということを明らかにするため，教授実験を企画・実施し，生徒の反応を分析することを通して学習環境デザインへの示唆を得ることとした．

２．教授実験の概要

教授実験は，平成 25 年 3 月に，熊本県内の公立中学校第 1 学年の生徒 2 名を対象 *に行った．特に今回は，操作的証明の構想に関わる生徒の思考プロセスを詳細に検討するため，通常の学級における実験授業という形ではなく，ペアの生徒に対する教授実験という形で調査を行った．調査対象となった中学校第 1 学年の男子生徒 2 名は，平均的な学力レベルの生徒であり，第 1 学年の 3 学期ということで，文字を用いた説明については，未習の段階の生徒である．同じクラスに属しており，普段から一緒に授業を受けている生徒であるため，教授実験においてもスムーズな意見交換が行われていた．

教授実験は，生徒のペアに対して，調査者が課題を提示し，自由に相談しながら解決していくという形式で行ったが，探究活動や操作的証明の構想の過程で，生徒の思考や発言について調査者が確認しながら進めていった．また，行き詰っている場合などには，必要に応じて調査者がヒントや助言を与えた．教授実験の様子はビデオに記録し，発問および生徒の会話の分析を行った．

---

*教授実験に当たっては，調査対象となる生徒の反応が特異なものでないことを確認するため，今回の調査対象となった男子生徒 2 名のペアの他に，女子生徒 2 名のペアに対しても予備実験を行った．その結果，課題に対する反応等については，男子生徒のペアと女子生徒のペアの間で大きな違いは見られなかったため，ここでは，男子生徒のペアについてのみ反応等を分析し，報告することとする．

教授実験は,「おはじきと位取り表の表現や使い方」に関する確認と，3 つの探究的な課題（「9 個のおはじきで作られる 3 桁までの整数」,「ANNA 数の現象」,「魔法の数の現象」）から構成した．それぞれの学習活動の概要については，以下の通りである．

①おはじきと位取り表による数の表現や使い方

第 3 章で行ったインタビュー調査の内容を参考に, おはじきと位取り表を用いた数の表現方法とおはじきの移動によって数がどのように増減するかを確認した後, 繰り下がりを伴う 3 桁の減法の計算（332－233，321－123）をおはじきと位取り表を用いて計算し，その結果を説明するという活動を行った．

②9 個のおはじきで作られる 3 桁の整数

3 桁の位取り表に 9 個のおはじきを用いて表現することができる数は何通りあるかを書き出し，それらがすべて 9 の倍数であることを説明する学習活動を行った．3 桁の位取り表に 9 個のおはじきで表すことのできる自然数は，全部で 55 通りあり，これらは，9 からおはじきを移動させることによって，つくられるが，おはじきの移動による数の増減がすべて 9 の倍数であることから，つくられる数はすべて 9 の倍数であることが説明される．

③ANNA 数の現象

第 4 章で行った実証的研究において用いた題材である．3443 と 4334 のような 2 つの ANNA 数の差について成り立つ性質を探究し，ANNA 数の差が ANNA 数を構成する 2 数の差の 891 倍であることを説明する学習活動を行った．位取り表上におはじきを用いて，例えば 3443 を表現し，これを 4334 につくり変える操作によって 891 増えることから，2 つの ANNA 数の差が 891 であることが説明される．また，2442 や 3663 のように，ANNA 数を構成する 2 数の差が 2 以上の場合にも 891 増える操作を 2 回，3 回行うということによって，ANNA 数の差が 891 の倍数であることが説明される．

④魔法の数の現象

第 4 章において, ANNA 数の数学的パターンの発展課題として紹介した題材である. 2345, 4567 などのように，各位の数字が連続する 4 桁の自然数に 3087 という魔法の数を加えると 5432，7654 のように，各位の数字の並びが逆順になるという現象を扱い，その理由を説明する学習活動を行った．ANNA 数の場合の操作的証明と同様に，位取り表上におはじきで表現された 1234 を 4321 につくり変える操作を通して，それらの差が 3087 であること

が説明される．

教授実験では，操作的証明の構想において，教師の意図的な方向付けを行うのではなく，おはじきと位取り表の操作に関する基礎的な学習経験を組み入れることによって, 操作的証明を構想できるようになるかを見るために，学習活動を構成した．上記の展開においては，①がおはじきと位取り表の使い方に関する基礎的な学習経験となり, ②以降の探究課題において操作的証明が構想しやすくなるということが期待される．また，②から③，④へと学習活動が進むに従って, おはじきと位取り表を用いた操作的証明に関する学習経験が蓄積され, 操作的証明の構想が洗練されていくことが期待される．

なお，教授実験は，1 回につき約 40 分間，2 回に分けて行った．展開の概要は表 5-1 の通りである．

【表 5-1 ：教授実験の展開】

日付・時間	探究課題	学習活動
第 1 回調査 （3 月 15 日） 40 分間	①おはじきと位取り表の表現と使い方	(1)おはじきと位取り表による数の表現 (2)おはじきと位取り表による簡単な計算
	②9 個のおはじきで作られる 3 桁までの数	(1)探究課題の理解 (2)3 桁の数の探究とパターンの発見 (3)おはじきと位取り表を用いた操作的証明
第 2 回調査 （3 月 27 日） 40 分間	③ANNA 数の現象	(1)探究課題の理解 (2)ANNA 数の差の探究とパターンの発見 (3)おはじきと位取り表を用いた操作的証明
	④魔法の数の現象	(1)探究課題の理解 (2)おはじきと位取り表を用いた操作的証明

３．教授実験の結果と分析

ここでは，教授実験で行った 4 つの学習活動（「位取り表とおはじきの表現や使い方」「9 個のおはじきで作られる 3 桁までの整数」「ANNA 数の現象」「魔法の数の現象」）ごとに，生徒の反応を分析し，学習環境デザインに向けて得られた示唆を示す．なお，調査対象となった 2 名の生徒を，ここでは B1，B2 として表現することとする．

（１）おはじきと位取り表の表現と使い方

【生徒の反応】

位取り表におはじきで表現された 234 を読み取る課題，また，自分の位取り表に 405 という数を表現する課題に関しては，B1，B2 とも迷うことなく答えることができた．

また，123 を表した位取り表において，一の位から百の位へ 1 つおはじきを動かすといくつ増えるかという課題に対しては，少し考えたが，「100 増えて 1 減るので 99 増えた」という説明ができた．

233 と 332 の差を求める課題を提示すると，両者ともおはじきと位取り表を用いて計算しようとしたが両者のおはじきの操作には違いが見られた．B2 は，233 を表し，一の位のおはじきを 1 個百の位に移動させ，100－1＝99 増えたと判断したが，B1 は，233 を表し，十の位から百の位へおはじきを 1 つ，一の位から十の位へおはじきを 1 つ動かし，90 増えて 9 増えるので 99 増えたと判断した．

さらに，123 と 321 の差を求める課題を提示すると，両者とも 123 を位取り表上に表した後，一の位のおはじきを百の位へ 2 つ動かして差を求めようとしていたが，説明の仕方は，B1 は「99 が 2 回増える」と説明したのに対して，B2 は「200 増えて 2 減る」と説明した．B1 は B2 の説明を聞いて「200－2」のほうが計算が簡単であると判断して，説明の仕方を B1 と同じように修正した．

【考察】

ここでの B1，B2 の反応を見る限り，おはじきと位取り表による数の表現や繰り下がりのある減法の計算への活用については，問題なく理解されていることが分かる．また，2 数の差を求める課題において B1 と B2 のおはじきの操作や説明の方法は異なっていたが，他者の操作や説明をもとに自分の説明を修正するという場面を見ることができた．233 と 332 の差を求める課題において，B1 は自分がおはじきを 2 個動かしているのに対して B2 は 1 個のおはじきの移動だけで説明しているのを見て，123 と 321 の差を求める次の課題では，おはじきの操作の仕方を修正しているし，説明の仕方についても B2 の説明を聞いて，99＋99 から 200－2 へと説明方法を修正している．このように，課題に対する操作的証明が 1 通りではないことや，それらを比較検討することによって，生徒は自分の操作的証明をより良いものへと修正していくということが確認できた．

（２）９個のおはじきで作られる３桁までの数

【生徒の反応】

課題を提示したのち，協力して，何通りあるかを探すよう指示したが，B1，B2 ともそれぞれで課題に取り組んでいた．両者とも位取り表上に 9 つのおはじきを並べては記録するということを繰り返しながら探していたが，特に B1 は，1 つの位に 9 個のおはじきを置いた状態からおはじきを動かしていって数をつくっていくという方法を試みており，規則的に数を構成していくことによって，「もれなく，重複なく」数を数え上げようとしていることが分かる．

時間の関係で，全て見つけることはできなかったが，正解を提示するまでに，B1 は，42 通りの数を書きだしていた．正解である 55 通りの数を示し，これらの数がどのような数であるかを尋ねると，B1 は「全部 9 の倍数」と答えた．これまでの学習経験において「各位の数字の和が 9 ならば，その数は 9 の倍数である」という定理を知識として知っていたようであった．

すべて 9 の倍数であることを説明するように求めると，B1 と B2 が「どんな数も各位の数字を足し合わせた数で割れる」という定理があったのではないかということについて議論していたが，結局は，「各位の数字の和が 9 の倍数であれば，その数も 9 の倍数である」という定理を間違って記憶していたため，議論が混乱していた．再度，9 個のおはじきで作られる数は必ず 9 の倍数になることを説明するよう求めると，約 10 分間にわたって位取り表上でおはじきを操作しながら考えていたが，どのように説明するかについては，方針が立たなかった．

調査者が 1 の位におはじきを 9 個並べ，9 を表していることを確認した後，一の位から十の位へおはじきを 1 つ動かすと 9 増え，一の位から百の位へおはじきを 1 個動かすと 99 増えるということを B1，B2 に確認し，これをもとに説明ができないかを問いかけたところ，B1 は，おはじきを動かすとすべて 9 の倍数分だけ増減するので，全部 9 の倍数になるということ説明できた．この B1 の説明を聞いて B2 は 9 を表したおはじきを 45 につくり変えて 36 増えたことを確認し，納得していた．

【考察】

この課題は，おはじきと位取り表を用いた操作的証明の最初の段階で扱うには，難しい課題であった．まず 55 通りすべてを見つけるということが難しく，さらに，すべて 9 の倍数であるこということを説明するためには，「もとにする数（ここでは 9）が 9 の倍数である」

ということと,「おはじきをどのように移動させても 9 の倍数分だけ増減する」というおはじきの操作に伴う数の変化の特徴を組み合わせて説明をしなければならないため, 難易度が高いと考えられる．結局，B1，B2 は 55 通りすべてを書き出すことはできず，9 の倍数になることの説明においても，調査者がヒントを与えて方向付けを行うまで，操作的証明を構想することはできなかった．

しかし,「9 が 9 の倍数である」ということと,「おはじきを動かすと 9 の倍数分だけ増減すること」を確認してやると，それらを組み合わせて「9 個のおはじきでつくられる数はすべて 9 の倍数である」ことが説明できることを納得しており, おはじきの移動ということが説明の上で重要な役割を果たすということは認識できたようであった．

なお，この課題が終了した後，B1，B2 に，9 の倍数であることを説明するときに前段階で行ったおはじきと位取り表の操作に関する学習を想起したかどうかを聞いてみると, 何となくおはじきを使うのだろうということは感じていたが, 基本的には別の課題として取り組んでいたということであった．このことから，少なくともこの課題に関しては，おはじきと位取り表の表現と使い方に関する基礎的な学習が，証明の構想のためには機能しておらず，教師のヒントによって証明が納得されたということが分かる．

（３）ANNA 数の現象

【生徒の反応】

前回の教授実験から約 2 週間の期間があったため，教授実験の最初に 1 回目の学習で行ったことを簡単に復習した後，第 2 回目の課題に取り組んだ．

ANNA 数がどのような数であるかについて説明し, 自由に ANNA 数をつくってその差を求めさせると，B1 は 3553 と 5335，B2 は 2442 と 4224 の差を求め，ともに 1782 となった．さらに別の例でも確かめるように指示すると，様々な ANNA 数をつくって差を計算することを通して，ANNA 数の差がすべて 891 の倍数であることに気づき，さらに，それが 891×（最初に選んだ 2 数の差）であることを導くことができた．ただ,「ANNA 数の差は，最初に選んだ 2 数の差の 891 倍である」という定理の表現に関しては難しかったようで，調査者が確認しながら表現を整理し，ようやくまとめることができた．ANNA 数の差に関するパターンを発見して定理の形で表現するまでにかかった時間は約 7 分である．

ANNA 数の差が最初に選んだ 2 数の差の 891 倍であることを，おはじきと位取り表で説明するように求めると，B1 は 3443 を，B2 は 1221 を位取り表上に表して説明しようとし

た．この段階で，具体的な一例で説明しようとすることに特に抵抗はない様子であり，両者とも，百の位から千の位へおはじきを 1 つ動かし，十の位から一の位へおはじきを 1 つ動かすという操作から，ANNA 数の差が 891 であることを確認した．その後，最初に選んだ 2 数の差が 2 や 3 の場合についても考えようとしていたが，うまく説明の方針が立たないようであった．

調査者が，B1 に対して説明するよう求めると，3443 を 4334 につくり変える操作をもとに，最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合，ANNA 数の差が 891 になることを説明した．5665 や 2332 など，最初に選んだ 2 数の差が 1 である別の ANNA 数についてもいえるのかどうかを確認すると，同じ操作になるから差も変わらないという説明をすることができ，「百の位から千の位へおはじきを 1 つ動かし，十の位から一の位へおはじきを 1 つ動かす」という操作が「891 増える」という現象に結びつくことが整理されたようであった．

この後，最初に選んだ 2 数の差が 1 以外の場合の ANNA 数の差についても聞いてみると，B1 は，4664 を位取り表上に表し，「百の位から千の位へおはじきを 1 つ，十の位から一の位へおはじきを 1 つ動かすと 891 増えるので，この操作を 2 回することになるので 891 ×2 だけ増える」という説明を行うことができた．さらに，最初に選んだ 2 数の差が 3 の場合はどうかと尋ねると，今度は B2 が，6996 を 9669 につくり変える操作をしながら，「891 増える操作が 3 回分なので，891×3 が差となる．」という説明を行った．

【考察】

この課題は，これまでの研究の実験授業においても用いてきた課題であり，ANNA 数の差に関するパターンを発見し定理として表現する段階までは，これまでの実験授業と同様の反応を見ることができた．

しかし，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を構想する段階では，生徒は，これまでの実験授業のときとは異なる反応を見せた．これまで行った実験授業では，多くの生徒が「筆算再現型」のおはじき操作によって ANNA 数の差が 891（もしくはその倍数）になることを示そうとしていたが，今回の教授実験では，「筆算再現型」の説明を構想することはなく，初めから 3443，1221 といった具体的な ANNA 数を位取り表上に表し，それをもう一方の ANNA 数につくり変えるという操作を行い，説明しようとしていた．（このような反応は，予備実験を行った女子生徒のペアにおいても同様であった．）これは，第 1 回目の教授実験において扱った「①おはじきと位取り表の表現や使い方」「②9 個のおはじきで作られる 3 桁までの整数」についての学習活動が影響したものと思われるが，②の課題に対する操作的

証明の構想に当たっては，①の学習経験が機能していなかったことを考えると，②の課題での学習経験が ANNA 数の現象に関する操作的証明の構想に対して影響を与えたとみることができる．つまり，「ある数からある数へつくり変える際のおはじきの操作が一定の数の増減を意味しており，それを用いて数の性質を説明することができた」という経験が，ANNA 数の課題での操作的証明の構想に影響を与えたということである．このことは，おはじきと位取り表の使い方についての学習経験が操作的証明の構想に結びつくわけではなく，初めは誘導的であったとしても，おはじきの操作によって数の性質を説明することができたという経験をして初めて，操作的証明の構想が可能となるということを意味している．

また，ANNA 数の現象に関する操作的証明の構想に関して言えば，「最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合」と「最初に選んだ 2 数の差が 2 以上の場合」に分けて証明を構想させることは有効であることも分かった．教授実験では，はじめは，最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合の ANNA 数の差については説明できていたが，最初に選んだ 2 数の差が 2 以上の場合については説明の方針が立っていなかった．しかし，最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合について口頭で説明することを通して思考が整理され，そのあとには，最初に選んだ 2 数の差が 2 以上の場合は，891 増える操作を複数回することになるという説明を構想することができていた．このように，ある段階で操作的証明を口頭で説明させ，思考を整理してやることが，次の段階の操作的証明の構想に対して有効に働くということを示した例であると言えよう．これまでの実験授業においても，教師による指導上の工夫として，最初に選んだ 2 数の差が 1 の場合と 2 以上の場合に分けて証明を構想させるということは行われていたが，今回の教授実験によって，そうした指導上の工夫が，生徒の思考プロセスを整理するという意味で効果的であるということが明らかになった．

（４）魔法の数の現象

【生徒の反応】

課題を示し，1234 や 3456 など，各位の数字が連続するような 4 桁の自然数に「魔法の数 3087」を加えるよう指示した．B1，B2 とも，いくつかの例で確かめて，「魔法の数 3087 を加えると各位の数字の並びが逆転する」という現象を確認した．

このような現象が起こる理由を，おはじきと位取り表で説明するよう求めると，しばらく考えた後，B2 は位取り表上に 1234 を表し，それを 4321 につくり変えようとし始めたが，この段階では，まだどのように変化させるかはわかっていない様子であった．B1 は，B2 の

このような行動を見て，自分も 1234 を位取り表上において，4321 への変形を考え始めた．B1 は，1234 の一の位のおはじきを 3 つ千の位へ移動させ，その操作の意味を計算しようとするが，3000－3 とすべきところを，2700－27 としてしまって混乱していた．B2 は B1 の操作を見て，同様の操作を行い，「3000 増えて 3 減る」とつぶやき，さらに，十の位から百の位へおはじきを 1 つ動かして，「10 減って 100 増える」とつぶやいていた．B1 は，B2 のつぶやきを聞いて，自分の計算が間違っていることに気づき，計算を修正しようとした．最終的に，B2 が，「一の位から千の位へおはじきを 3 つ動かすと 3000 増えて 3 減るので 2997 増える．十の位から百の位へおはじきを 1 つ動かすと 100 増えて 10 減るので 90 増える．これらを合わせると，2997+90＝3087 増えたことになる．」という説明を完成させた．

さらに，B1 は 3456 の場合で，B2 は 2345 の場合で確認しようとし，おはじきの操作が同じであることから，別の場合でも同様の結果になることを納得したようであった．

調査者が説明するよう求めると，B1 と B2 は説明の仕方をしばらく相談し，最終的に B2 が，「例えば，2345 なら，，，，まず，一の位を 3 個千の位へ移すと，3000 増えて 3 減るので，2997 になって，あ，増えた．それで十の位を 1 個百の位へやると，90 増えたことになって，それを足すと 3087 になって，最初の数の逆さまの数になっていて，その差が 3087 なので，どの連続する数でもその差が 3087 になっているから，反対の数になる．」と説明した．

調査者が，2345 以外の場合はどうかと尋ねると，B2 は，「逆さの数にしたい時には，必ず，一の位を 3 つ動かして，十の位を 1 つ動かすことになる．」というように，操作が同じであることを根拠として説明できていた．

【考察】

この課題では，これまでの学習経験が基礎となって，他の課題に比べて操作的証明の構想が洗練されていることが分かる．おはじきと位取り表による説明を求めた直後に，1234 を例としてそれを 4321 につくり変える操作を行おうとしており，また，1234 の例について説明した後，2345 や 3456 といった例でも試してみて同様の操作であることを根拠に，一般的に成り立つということを示す操作的証明を構想できていた．このことは，「②9 個のおはじきで作られる 3 桁までの整数」の学習において誘導的に構想した操作的証明を基礎的経験として，「③ANNA 数の現象」において自ら操作的証明を構想した経験が加わり，「④魔法の数の現象」では，それまでの学習経験を洗練させることによって，よりよい操作的証明を構想できるようになったということを示していると言えよう．

また，この課題では，操作的証明を構想していく際に，他者の操作や説明を見て自分の操作的証明を構想したり修正したりするという場面を見ることができた．1234 を例とした操作的証明を構想しようとするときに，B2 は B1 の着想を見て同様の操作をやってみようとしているし，B1 は B2 のつぶやきを聞いて自分の計算のミスに気づき修正している．このようなことは，操作的証明を構想する際には，他者の着想や構想と比較しながら考えるということが有効に機能するということを示唆している．

４．教授実験から得られた示唆

ここでは，「おはじきと位取り表による操作的証明」を構想する教授実験を通して，「課題探究として証明すること」のカリキュラムに位置づく学習環境デザインのためにいくつかの示唆を得ることができた．

まず，1 つ目は，おはじきと位取り表による証明の構想のためには，おはじきと位取り表の使い方に関する学習だけでは不十分であり，例え初めは教師による誘導的な指導であったとしても，おはじきの操作によって数の性質を証明できたという学習経験が必要であるということである．今回の教授実験は，「①おはじきと位取り表の表現や使い方」「②9 個のおはじきで作られる 3 桁までの整数」「③ANNA 数の現象」「④魔法の数の現象」という 4 つの課題から構成されていたが，①の学習だけでは②の段階で操作的証明を構想することができず，②の学習で誘導的にではあるが操作的証明を行ったことによって，③の段階では自ら操作的証明を構想することができ，④ではさらに洗練された操作的証明を構想・構成することができていた．

2 つ目は，操作的証明を構想していく際に，ある段階で自分の行った操作を説明することが有効であるということである．操作的証明は，具体的な操作を根拠として説明しようとするものであるが故に，自分の操作を口に出して説明してみることによって，思考が整理され，操作的証明の構想がよりスムーズに行えるようになるということである．学習環境のデザインにおいては，いきなり完全な操作的証明を構成しようとするのではなく，ある段階で行った操作を整理してみることによって，次の段階の操作的証明を構想できるような段階を組んでやることが肝要であろう．

3 つ目は，操作的証明を構想する際には，他者の着想や構想と比較しながら考えるということが有効に機能するということである．「④魔法の数の現象」の学習では，生徒同士がお互いの着想やつぶやきをもとに自分の操作的証明を修正しながらより良い操作的証明を構

成していくプロセスを見ることができた．このことは，操作的証明を構想する学習活動をデザインする際に，グループやペアによる相互作用を取り入れた学習を展開することが必要であるということを示唆している．

以上のような実験授業の分析から，生徒自身が操作的証明そのものを構想することができるような学習環境のデザインを具体化することができれば，「課題探究として証明すること」のカリキュラムにおいて，第Ⅰ期の学習レベルの移行を支える学習活動として，操作的証明を位置付けることが可能であろう．また，「課題探究として証明すること」のカリキュラムでは中学校３年間の論証指導が対象とされているが，操作的証明は，小学校高学年段階から始まる演繹的な推論の学習を支える学習活動であるととらえるならば，小学校高学年段階を対象として，おはじきと位取り表を用いた学習環境のデザインを行い，中学校段階での論証指導に接続していくということも必要であろう．

３節　操作的証明の発展性

本節では，「課題探究として証明すること」のカリキュラムに見られるような，「探究・発見・理由づけ」といった一連の学習活動や，「評価・改善・発展」をも含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving）」の学習に，操作的証明が基礎的な役割を果たすことを前提として，操作的証明がどのような発展性を有するかについて考察を行う．特に，数学の学習においては必要不可欠とされる「練習」に着目し，操作的証明をどのように練習と結び付け，知識･技能の定着を図っていくかということについて，その可能性を検討する．その際，従来から行われてきたドリル型の練習ではなく，ドイツの数学教育学者ヴィットマンの提唱する本質的学習環境（Substantial Learning Environment）の考え方の中にある「生産的練習」という概念に着目し，その性格や特徴を明らかにするとともに，操作的証明との結びつきについて検討する．

１．算数・数学科の学習における「練習」の考え方

算数・数学科の学習指導においては，扱われる概念そのものが抽象的であるがゆえに，できるだけ具体的なモデルを用いて導入を図り，それらを徐々に一般化して概念形成を図るということが行われる．それと同時に，獲得した抽象的概念を様々な場面において活用できるようにするためには，「練習」を通して概念の定着を図る必要がある．伝統的な算数・数学

科の学習指導においては，この定着のための「練習」は，ドリル形式の繰り返し練習によって担われてきたといえる．

平成２０年１月の「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申)」においても，改善の基本方針の中で，数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から，反復（スパイラル）による教育課程の編成を可能にすることが提言されるなど，「練習」の役割が重視されてきているといえよう．

しかし一方で，学習意欲の向上という観点からみると，これまでの算数・数学科の学習指導で行われてきたドリル型の「練習」は，児童生徒の好ましい学習態度を形成するものであるとは言い難い．授業中や家庭学習での課題として繰り返し行われるドリル型の「練習」を通して，児童生徒は「教わった公式をいかに問題に適用していくか.」という思考に終始し，本来の算数・数学科の学習指導において身に付けるべき学習態度や数学という教科に対する考え方などが偏ってしまう傾向にあることもまた事実である．

また，概念形成を主な目的として展開される問題解決型の学習指導と，概念の定着のためのドリル型の練習を中心とした学習指導は，分離して行われることが多いため，思考力や判断力，表現力を育成しようとする問題解決型の学習指導に時間をかけすぎると，基礎的な知識や技能を定着させるための練習に十分な時間をとることができないといったジレンマが，学校現場において存在することもまた事実である．

例えば，図５-５は，第２学年から第３学年にかけて行われてきた整数の乗法に関する学習が完成する単元の単元末の練習問題の一部である．


1 計算をしましょう。

① 6×70　② 8×50　③ 3×26　④ 32×40

⑤ 50×90　⑥ 14×23　⑦ 21×19　⑧ 30×28

⑨ 62×95　⑩ 76×49　⑪ 86×57　⑫ 98×68

⑬ 532×24　⑭ 978×48　⑮ 609×34　⑯ 214×80

答えのところに色をぬろう。

78	322	399	400	420	840
1280	3724	4500	4902	5890	6664
12768	17120	20706	46944		

【図５-５：整数の乗法の練習問題】（東京書籍，新しい算数３下，p.71）

ここでは，16 題の乗法に関する計算問題が配置されており，基本的に児童は，これらの

問題を順に解いて答えを求めることが期待される．自学自習が行えるよう，乗法の計算問題を解いた後，答えを下の四角の中から選んで色を塗っていくよう工夫されているが，特にこれらの問題を解くことによって，何らかの数学的なパターンの発見や探究的な要素があるわけではない．伝統的な練習のスタイルをとっており，計算技能の定着に特化した学習活動の設定であるといえよう．

このようなドリル型の練習は，一定の学習活動が展開した後に，別途設定される学習活動であり，「探究，発見，理由づけ」といった一連の学習活動や「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving）」の中に位置づけることは難しい．もちろん，これまでも「練習」という学習活動は，探究的な学習活動とは別に行われてきたが，探究的な学習活動の中に定着のための練習の要素を組み込むことができれば，より効果的な探究的学習活動を展開することができるだろう．また，探究的学習活動に組み込まれた「練習」という概念を志向することによって，探究と習得とのバランスの問題が改善されることが期待できる．

２．生産的練習の概念

操作的証明の概念を提唱したドイツの数学教育学者ヴィットマンは，探究的な学習活動に「練習」という概念を組み込むことを志向している．ここでは，そのヴィットマンが提唱する「生産的練習」という概念について，その概要を示すとともに，具体例を通して，その特徴を明らかにする．

（１）生産的練習とは

ヴィットマンらによって 1987 年に創設された数学教育の研究開発プロジェクト“mathe2000”においては，就学前から小学校，中学校，高等学校，大学の教員養成までを１つの全体と見た数学教育の総合的な研究活動を行っており，本質的学習環境と呼ばれる学習環境の開発とデザインを軸に，数学教育改革を目指している．このプロジェクでは，全段階の学校教育における一般的学習目標として，次の４つが示されている．

①数学化する：現実状況を数学言語に翻訳し，数学的に解決し，結果を現実的状況で解釈する能力

②発見する：状況を実験的に探究し，関係や構造を発見し，構造を発明する能力

③推論する：数学的事態や現象を理由づける能力

④表現する（コミュニケートする）：数学的事態や現象を観察し，考察し，理由づけ，評価し，それを口頭でも筆記でも表現する能力

プロジェクト“mathe2000”では，これらの一般的学習目標（能力の育成）は，内容と別に習得されるものではなく，内容的目標（知識や技能の習得や習熟）と相補的に捉えられるべきものであり，それらを同時に達成しようとすることを重視している．これはつまり，従来の算数・数学の学習指導においては，数学的な思考力や判断力といった能力の育成と，数学的知識の習得や計算技能の習熟は別に行われるものとする考え方に立っていたため, 問題解決的な授業を行った後は, ドリル的な学習を通して習熟を図るという学習スタイルがとられてきたが, 練習を単なる定着のためのドリルと捉えるのではなく，思考を深め一般的な学習能力の育成につながる練習の活動を開発していこうとする動きである．

生産的練習とは，そのような考えに立って，プロジェクト“mathe2000”において開発された初等数学教科書『数の本』（Das Zahlenbuch）の中で，一般的学習目標と内容的学習目標の同時的な達成のために展開されている練習様式である．ヴィットマンは，本質的学習環境開発のためのガイドラインを示した論文（Wittmann(2005)）の中で，生産的練習について，次のように述べている．

> ある種の数学についての長期的なスパンでの習得・習熟ということに関して何が実際的な問題かというと，その内容をいかに導入するかではなく，いかに練習するかということにある．・・・（中略）・・・伝統的にスキルの練習は，学校というシステムや教科書の中に,「ドリルと練習」という伝統的な形で，しっかりと定着してきた．しかし，パターンの科学としての数学という数学観は, このシステムと相性がいいわけではない．このようなジレンマを解消するために, スキルの練習に対する新しい種類のアプローチが必要であった．ビンター（Heinrich Winter）の画期的な論文には，スキルの練習をいかに発見学習の原理に調和させるかということが示されている（Winter(1984)）．ビンターのアイデアを詳しく考察する中で,「生産的練習」という概念が開発され，スキルの練習のための本質的学習環境のデザインということが，mathe2000 の中心的な仕事となった．（Wittmann(2005)）

上記より，生産的練習とは，一般的学習目標と内容的学習目標の同時的な達成のために，

ビンターの練習に対するアイデアを基にしてヴィットマンらによって開発されたものであるといえる．特に，生産的練習においては，練習という概念を単なるドリルという位置づけで捉えるのではなく，パターンが組み込まれた課題に取り組むことを通して，そのパターンを発見し，探究し，推論し，コミュニケートすることができるような学習活動として捉えている点に，大きな特徴がある．

（２）生産的練習の具体例

ここでは，ヴィットマンら(2004)の編纂した初等数学教科書『数の本』(Das Zahlenbuch）から生産的練習の具体例として，「美しい包み」「美しい包み？」「数の石垣」「計算三角形」の４つを挙げ，それぞれの特徴を示す．

①「美しい包み」

「美しい包み」は，生産的練習として代表的なものであり，図５-６に示すように 4 題程度の計算問題が組になった計算練習様式である．しかし，これらは従来よく見られるような数値がランダムに配置されたドリル型の練習問題ではなく，問題もしくは答えの間に，ある種のパターンが組み込まれている．

a)	b)	c)	d)	e)
14＋8	39＋9	34＋10	4＋90	20＋10
25＋8	38＋8	35＋20	15＋80	31＋8
36＋8	37＋7	36＋30	26＋70	42＋6
47＋8	36＋6	37＋40	37＋60	53＋4

【図５-６美しいつつみ】（Das Zahlenbuch，2.Schuljahr，pp.43）

例えば，a）の問題では，加数は 8 で変わらず，被加数が１１ずつ増えているという問題になっている．このことによって当然答えも１１ずつ増えていくことになる．他の問題にも様々なパターンが組み込まれており，児童は計算問題を解きながら，組み込まれているパターンを探し，発見したパターンを理由づけたり，他者とのコミュニケーションを通して「美しい包み」に含まれる数学的パターンについて議論したりすることが期待されるのである．

②「美しい包み？」

図５‐７に示した「美しい包み？」は，「美しい包み」と同様の計算練習様式であるが，異なるのは，組み込まれたパターンの中に，意図的にパターンが崩れる問題を仕組んでいることである. これは, パターンのみに着目して実際に計算しないということを防ぐ意味もあり, １つ１つの問題に注意深く取り組む学習態度を形成するねらいがある.

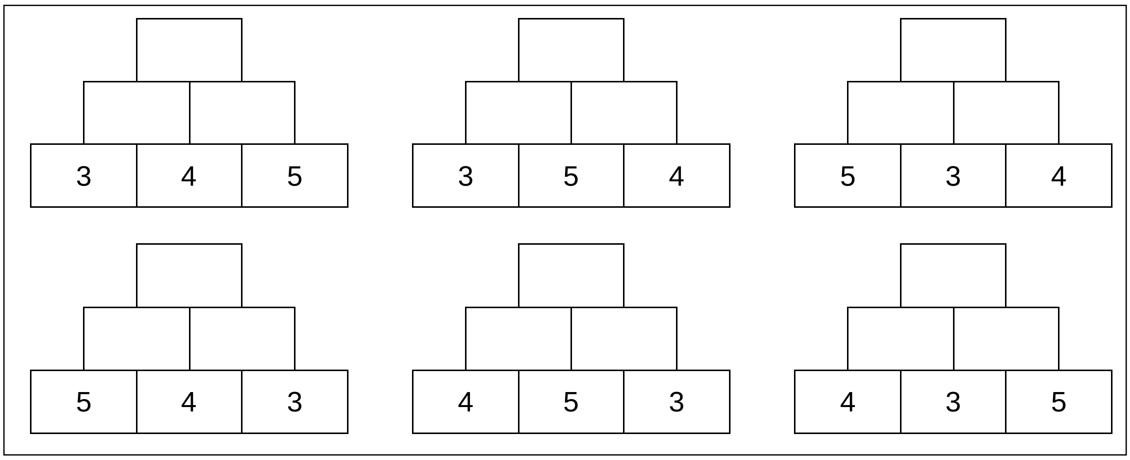
a)	b)	c)	d)
41＋40	28＋15	24＋56	8＋ 3
43＋38	38＋16	36＋46	19＋14
45＋36	48＋17	47＋36	20＋25
46＋34	58＋18	58＋26	41＋36
49＋32	78＋19	69＋16	52＋47

【図５−７：美しい包み？】（Das Zahlenbuch，2.Schuljahr，pp.47）

例えば，a) の問題では，被加数が 2 ずつ増え，加数が 2 ずつ減っていくというパターンを想定しているので，答えは常に 81 となるはずであるが，4 番目の計算式の被加数が 46 となっているため，この問題の答えだけが 80 となってしまっている．児童は，それぞれの計算問題においてパターンを探すことと同時に，そのパターンが崩れているところを見つけ，修正し，完全な「美しい包み」にすることが期待されるのである．

②「数の石垣」

「数の石垣」は，図５‐８に示したような石垣を模したマス目に，数を入れて完成させていく計算様式である. 隣り合う石垣に入る数の和がそれらの上の石垣に配置されるように数を当てはめていくことが求められる．パズルを埋めるようにして問題を解いていくのだが, 最初に与えられる数の配置を工夫することによって, 加法のみを用いて完成させる問題や減法のみを用いて完成させる問題，加法・減法の両方を使って完成させる問題を作ることができる. また, 頂上の石垣と, 最下段の両端に数を配置すると, 残りの部分を求めるためには, 試行錯誤をしたり何らかの代数的な操作を必要としたりする問題となる．さらに，数の石垣では，それぞれの石垣に数を入れて完成させるだけではなく，完成した石垣を観察し，そこにどのようなパターンが組み込まれているかを探究的に発見することが期待されている.

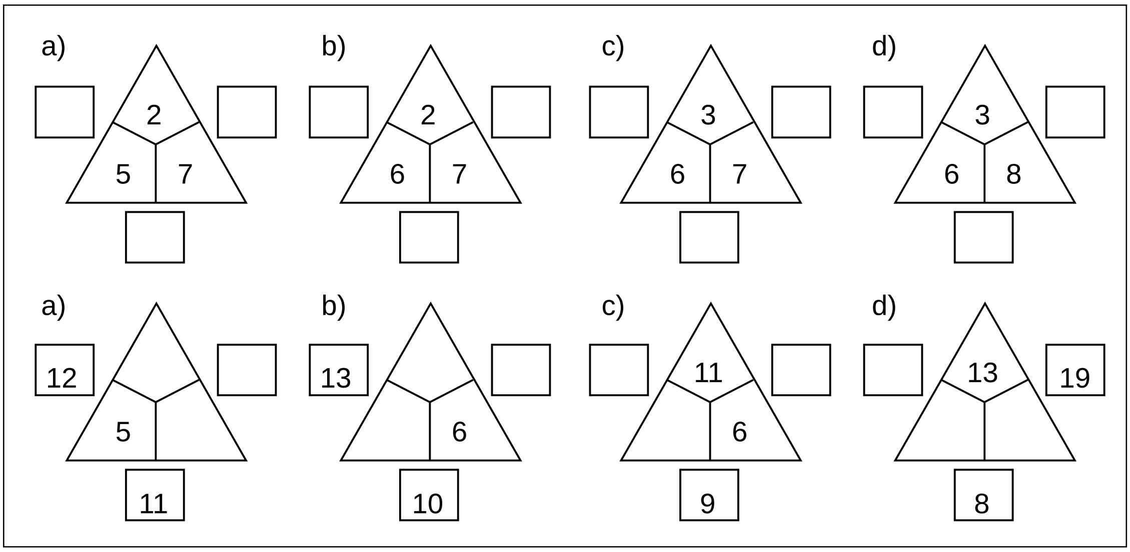


【図５-８：数の石垣】（Das Zahlenbuch，1.Schuljahr，pp.67）

例えば，図５-８の６つの数の石垣はどれも１段目の数が３，４，５の３つの数からつくられている．それぞれの石垣を完成することは，加法のみを用いて簡単に行うことができるが，ここでは，１段目の３，４，５の３つの数をどのように配置するかによって，頂上の数がどのように変わってくるのかを探究し，パターンを発見することが求められる．この場合，頂上の石垣に入る数が最も大きくなるのは，１段目の真ん中の石垣に５が配置されている場合で，逆に頂上の石垣に入る数が最も小さくなるのは，１段目の真ん中に３が配置されている場合である．これらのパターンを注意深く観察することによって，頂上の石垣に入る数は，１段目の両端の数と，１段目の真ん中の数の２倍を加えたものであるという数の石垣の構造を理解することが期待される．

③「計算三角形」

図５-９に示した「計算三角形」は，三角形の内部に３つ，外部に３つの数が配置されるように，数を当てはめていく計算様式である．三角形の内部にある３つのうち２つの数の和を，それらの２数の外側の四角に入れてすべてのマスを完成させることが求められる．これも，「数の石垣」と同様に，加法のみを用いる問題や加法減法の両方を用いる問題，さらに，試行錯誤や計算の工夫を要する問題などさまざまなタイプの問題設定が可能な練習様式である．パズルのようにして完成させることが求められるが，単にそれぞれの計算三角形を完成させるだけではなく，完成させた後に，どのようなパターンが組み込まれているかを探究し，パターンを発見するとともに，そのような数学的パターンが現れることを理由づけしたり，他者に説明したりすることが期待されている．



【図５-９：計算三角形】（Das Zahlenbuch，2.Schuljahr，pp.10）

例えば，図５-９の上段の問題では，a)，b)，c)，d)と進むにしたがって，計算三角形の内側の数の 1 つが 1 増えていることが分かる．このような配置の問題を解くことによって，内側の数が 1 増えると，外側の数の 2 か所で 1 増えることが観察され，計算三角形の構造を理解できるように意図されている．

また，下段の問題では，空欄に数を入れて完成させると，内側の上の数が 2 ずつ増え，内側の左の数が 1 ずつ減っており，このことによって，外側の左の数は 1 ずつ増え，外側の右の数は 2 ずつ増え，外側の下の数は 1 ずつ減るということが観察される．

このように，生産的練習には，それぞれある種のパターンが組み込まれており，児童は計算問題を解きながら，それらのパターンを探究し，発見したパターンについては，理由を考え説明することが期待されるのである．このような練習問題を使って学習することによって，単なる知識の習得や技能の習熟だけではなく，パターンを発見したり，そのパターンが表れる理由を推論して説明したり，といった一般的学習目標に掲げられたような能力の育成にも寄与できるのである．

（３）「操作的証明」と「生産的練習」との結びつき

ヴィットマンの提唱する生産的練習は，一般的学習目標と内容的学習目標の同時的な達成のための練習であり，単なるドリルという位置づけではなく，パターンが組み込まれた課題に取り組むことを通して，そのパターンを発見し，探究し，理由づけることを想定した学習

活動である．では，そのような特性をもつ「生産的練習」をどのように「操作的証明」に結びつけ，「探究，発見，理由づけ」さらには「評価，改善，発展」まで含む総合的な学習プロセスとして位置付けていけばよいのであろうか.

ヴィットマンは，初等数学における操作的証明の概念について書かれた論文の中で，「操作的証明」と「生産的練習」との関係について，次のように述べている．

> しかるべくデザインされた学習環境では，いつも，（美しい包みのように）続けていく計算や（パターンの）構成や実験から学習がスタートする。この方法においては,「準現実(quasi-reality)」が創り出され，それは，現象を観察することやパターンを発見することや推測を定式化することを可能にし，ついには，そのパターンを説明する(つまり証明する)ことを可能にする。これらの操作的証明が基礎をおく操作は，この最初の段階で，自然に導入される。学習環境がより深く探究される一方で，この「準現実」への言及は，継続的になされる。特に，スキルの習得は，繰り返しチェックし，論拠を確かめることを要求される。（Wittmann(2009)）

つまり，ヴィットマンは，操作的証明を用いて説明を行う数学的命題は，ある種の数学的パターンから導出されるものであり,「探究，発見，（操作的証明による）理由づけ」という一連の学習活動を想定するならば, 証明すべき数学的パターンの探究, 発見の段階において, 当該の数学的現象を繰り返しチェックすることが求められ，この「繰り返しチェックして確かめる」という活動自体が生産的練習に該当するということを主張しているのである．

操作的証明が，適切に表現された数学的対象に対する操作の結果を根拠として，数学的パターンの成り立つことを説明しようとする証明方法である以上, 証明すべき数学的パターンは，適切に表現された数学的対象であることが求められる．つまり，どのような数学的命題でも操作的証明が可能であるわけではなく，繰り返し操作を行い，パターンをチェックする中で，導出された数学的パターンを証明するという場面において，操作的証明は本来の機能を発揮し，「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動を実現するのである．

したがって，広義の「証明すること（Proving)」の視点に立った学習環境のデザインにあたっては，次のような学習軌道が想定される．

①生産的練習として設定された学習課題の解決.

②生産的練習に組み込まれた数学的パターンの探究と発見

③適切に表現された数学的対象による操作を通した繰り返しのチェック

④操作を繰り返す中での操作的証明の構想と構成

⑤評価，改善，発展

つまり，広義の「証明すること（Proving）」の視点に立った学習環境のデザインにおいては，まず，生産的練習としての課題の解決からスタートし，基礎的なスキルの練習を行いながら，そこに組み込まれた数学的パターンを探究することになる．ここで，設定される生産的練習は，おはじきや位取り表のような表現媒体を用いて適切に表現される数学的対象であることが必要である．なぜなら，適切に表現された数学的対象に対する操作を繰り返すことによって，発見された数学的パターンは繰り返しチェックされ，その操作を振り返ることを通して操作的証明が構想，構成されることとなるからである．もちろん，これらのプロセスは，児童生徒個人で行われるだけではなく，他者とのコミュニケーションを通して探究して発見した数学的パターンを確信したり，操作的証明のアイデアを着想したりすることが期待される．操作的証明によって証明された数学的パターンは，評価，改善されたり，新しい数学的パターンへと発展されたり，最終的には，一般性を保証するための形式的証明へと展開していくことが期待されるのである．

以上，広義の「証明すること（Proving）」の視点に立った学習環境のデザインにおける操作的証明の機能について考察を進めてきたが，ここで示した学習軌道は，非常にオーソドックスな科学的探究のプロセスであると言える．現象に出会い，それを解決する中でパターンを導出し，操作的にそれを確認することを通して理由づけを行い，最終的には一般的に成り立つ命題として理解されるというプロセスは，算数・数学科の学習活動だけにとどまるものではなく，学校教育全般において志向されるべき学習プロセスであると考えられる．

第５章のまとめ

本章では，「探究，発見，理由づけ」や「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点から，操作的証明の機能について考察した．特に，操作的証明の構成に関わる教授実験を行い，その分析を通して学習環境デザインのための知見を導出した．さらに，操作的証明と練習との結びつきに着目し，「生産的練習」という練習を取り込むことによって，操作的証明を取り入れた学習環境をより総合的なものとする可能性について言及した．

まず，操作的証明の機能に関しては，「課題探究として証明すること」のカリキュラム開発における研究の枠組みを参考とし，中学校３年間にわたる学習レベルの移行において，操作的証明は第Ｉ期の移行を支える役割を担うことを明らかにした．

次に，この学習レベルの移行においては，証明の構想に関わるプロセスが，探究的な学習活動の重要な要素となることから，どのような学習環境のデザインを行えば，生徒自身が操作的証明を構成，構想できるようになるのかを明らかにするための教授実験を実施した．その結果，「自らの操作を他者に説明する活動」や「他者の操作を観察する活動」が操作的証明の構想において有効に機能することが明らかとなった．

さらに，操作的証明の発展性として，算数・数学科の学習指導では重要な概念である「練習」に着目し，知識や技能の定着に関する学習活動も含めた学習環境のデザインについて考察した．ヴィットマンが提唱した生産的練習という概念を取り上げ，その性格を明らかにするとともに，生産的練習を取り込んだ一連の学習活動を具体化するための学習軌道を設定し，「探究，発見，理由づけ」や「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点に立った学習環境デザインに，学習内容の定着という視点も含めたより総合的な学習環境のデザインの可能性を示した．

【第５章における引用・参考文献】

ヴィットマン, E. Ch. (2004). 國本景亀・山本信也(訳).『PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム，算数・数学 授業改善から教育改革へ』，東洋館出版社.

國本景亀 編著(2007a).「うつくしい算数練習帳 低学年―グングン伸びる創造力！」，東洋館出版社.

國本景亀 編著(2007b).「美しい算数練習帳 中学年―グングン伸びる創造力！」，東洋館出版社.

國本景亀 編著(2008).「美しい算数練習帳 高学年―グングン伸びる創造力！」，東洋館出版社.

佐々祐之(2005).「本質的学習場にもとづく授業デザインの研究～「数の石垣」の拡張と授業実践からの考察～」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 12 巻, pp.1-13.

下田桑太郎(2010).「算数科教育における「生産的練習」に関する研究 ～小学校低学年の「数と計算」領域に焦点を当てて～」，熊本大学大学院教育学研究科修士論文.

中央教育審議会(2008).『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申)』，中央教育審議会.

藤井斉亮 他(2011).「新しい算数３下」，東京書籍，p.71.

溝口達也・松本寿子(2008).「小学校第 2 学年の図的代数における一般化を志向した授業の設計：大学と附属小学校の連携による協同的授業設計とその実践」，鳥取大学地域学部紀要『地域学論集』，第 5 巻，第 2 号，pp129-139.

宮崎樹夫・佐々祐之・辻山洋介(2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発～中学校第二学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想～」，『日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集』，pp17-24.

宮崎樹夫・藤田太郎(2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発～我が国の中学校数学科における必要性とこれまでの成果～」，『日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集』，pp1-8.

山本信也 編著(2006).『ドイツからやってきた計算学習 数の石垣』，東洋館出版社.

Chino, K. ,Fujita, T. ,Komatsu, K. ,Makino, T. ,Miyakawa, T. ,Miyazaki, M. ,& Tsujiyama, Y. (2010). An assessment framework for students' abilities/competencies in proving, *Proceedings of EARCOME5* (Vol. 2, pp.416-423), Tsukuba: Inamoto Printig Co. Lt.

Stylianides, A. J. (2007), Proof and proving in school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, pp.289‐321.

Stylianides, G. J.,& Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights frompsychological research into students ' ability for deductive reasoning, *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), pp.103-133.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004), *Das Zahlenbuch, 1.Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004), *Das Zahlenbuch, 2.Schuljahr*, Klett.

Wittmann, E. Ch. (2005). Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood, *Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium, July 7-9.

Wittmann, E. Ch. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference ICMI Study 19 : Proof and Proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education"*, Taiwan, 10-15.May 2009, organized by ICMI.

終章

本研究の総括と今後の課題

終章　本研究の総括と今後の課題

終章では，本論文でこれまで行ってきた研究の全体を振り返り，そこから得られた知見を整理しまとめるとともに，今後の課題を明らかにする.

１節　本研究の総括

本研究では, 小学校段階から中学校段階での理由づけの活動としての論証指導に焦点を当て，従来，中学校から扱われてきた形式的証明とヴィットマンの提唱する操作的証明とを対比しながら，操作的証明の役割と機能について考察してきた．特に，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを行い，試行授業，実験授業を繰り返す中で学習環境のリデザインを繰り返しながら,「探究，発見，理由づけ」や「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスの中での操作的証明の特徴を明確化することができた．ここでは，各章において行ってきた研究を振り返り，そこから導出された知見をまとめることとする.

まず，序章においては，学校教育における論理的思考力・表現力等の育成の重要性が高まる中，他者への説明活動やコミュニケーション活動のための基礎的な能力として，論証能力が学校教育における重要な位置を占めるようになってきていることを踏まえ,「探究, 発見, 理由づけ」という一連の学習活動，さらには「評価，改善，発展」を含む総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点に立った論証指導の改善を志向する必要があるという問題意識をまとめた．その上で，本研究では，小学校から中学校にかけて算数・数学科という教科指導において主に行われている論証指導を取り上げ, その改善のための方策を検討するという研究の目的を設定した．また，研究の方法として，ヴィットマンが提唱する操作的証明という概念を取り上げ，その性格を明らかにするとともに，操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを行い，論証指導における操作的証明の機能について，教育実践学的な視点から実証的な考察を行うということを述べ，全体の章構成を示した.

第１章では，学習活動としての論証指導の現状を把握するために，小学校段階から中学校段階にかけて算数･数学科という教科において主に行われている論証に関わる学習活動について，学習指導要領，教科書，各種学力調査の結果，先行研究等を分析し，課題の整理を行った．特に，本研究での中心的概念である操作的証明という証明方法の特性に考慮して，こ

こでは，数の性質について扱う代数的証明に焦点化し，学習指導の現状を分析した．

第２章では，論証指導に関する先行研究を整理し，一般的に数学的な命題の証明に用いられる形式的証明に対峙する概念として，厳密な論理性に縛られることなく図や操作を通して命題の正しさを説明しようとする前形式的証明という概念の特徴を明らかにした．その上で，前形式的証明の１つと位置付けられるヴィットマンが提唱する「操作的証明」という概念を取り上げ，その性格を明らかにするとともに，操作的証明の具体的な事例として，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り上げ，操作的証明がいかに学習活動として具体化されるのか，また，その教育的意義や発展性としてどのような可能性を持つのかについて考察を行った．

第３章では，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた具体的な学習環境のデザインのために，児童生徒の既習知識・技能を把握するための実証的研究として，おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を実施し，その結果を分析，考察した．小学校高学年から中学校段階にかけての学習環境デザインを想定するという意味で，小学校第５学年の児童を対象としたインタビュー調査を行った結果，小学校高学年という発達段階の児童に関しては，おはじきと位取り表による数の表現については問題なく理解できるものの，おはじきの操作の意味理解に関しては，教師による指導が必要であるとともに，筆算等の計算技能だけではなく，数を柔軟に見る見方などに関する素地的経験が必要であることが明らかとなった．

第４章では，インタビュー調査から得られた知見をもとに，学習環境デザインの対象を，文字を用いた形式的証明を学習する中学校第２学年の生徒に設定し，ANNA 数の数学的現象を題材とした学習環境のデザインを行った．学習環境デザインにあたっては，試行授業，附属中学校での実験授業，公立中学校での実験授業と３回にわたる実証的研究を通して，それぞれの授業を詳細に分析し，学習環境のリデザインを繰り返した．特に，附属中学校で行った実験授業では，代数的証明を扱う同単元において，操作的証明を取り入れた学習活動を行う実験群と，操作的証明を行わず形式証明のみを学習する対照群とに分け，生徒の学習活動や理解の様相を比較分析することを通して，操作的証明を取り入れた学習活動の特徴を詳細に分析した．このような実証的研究と理論的分析を繰り返すことによって，操作的証明が，生徒の数学的パターンの探究的活動の助けとなることや，操作的証明を取り入れることによって，形式的証明の一般性に関する議論を促進することができ，証明の意義の理解に効果的に機能するということなどを明らかにすることができた．

第５章では, 広義の論証指導としての「証明すること (Proving)」を捉える枠組みとして, 「課題探究として証明すること」という考え方を参考として，命題の生成，証明の構想・構成，評価・改善，発展という理由づけのプロセスの中で，操作的証明がどのように機能するのかを考察した．また，一連の学習プロセスにおける証明の構想に着目して，中学生を対象として行った教授実験の分析から，操作的証明の構想に関する知見を得ることができた．さらに，操作的証明の発展性として，「練習」という概念との結びつきに着目し，ヴィットマンの生産的練習という概念を参考にして，操作的証明の発展性について考察した．

「探究，発見，理由づけ」といった一連の学習活動，さらに「評価，改善，発展」も含めた総合的な学習プロセスとしての「証明すること（Proving)」の視点から，操作的証明について考察を行い，実証的研究を通した学習環境のデザインを繰り返すことによって，主な知見として，次の５点が明らかとなった．

①操作的証明は，生徒の探究的活動を促進するツールとして機能すること．

②操作的証明の構想や形式的証明への移行に関しては，ある程度，生徒の操作に関する素地的経験や学習活動における教師の方向付けが必要であること．

③操作的証明の学習は，論理記号等を用いた形式的証明の一般性，つまり証明の意義の理解に関する議論を促進すること．

④操作的証明は，「課題探究として証明すること」において，初期の論証指導を支える役割を担うこと．

⑤操作的証明の発展性として，「生産的練習」を用いた学習環境のデザインが有効であること．

上記５点のうち，特に①から③は，操作的証明の概念を理論的側面から整理するだけではなく, おはじきと位取り表による操作的証明を用いた代数的証明に関する具体的な学習環境のデザインと実証的研究を繰り返す中で明らかとなった知見であり, 理論と実践の往還の中で，論証指導における操作的証明の教育的意義を明らかにするとともに，操作的証明を取り入れた具体的な学習環境デザインの汎用性を確認することができた．特に，これまで理論的には前形式的証明の一部として位置付けられ, 小規模な教授実験等によってその様相が語られてきた操作的証明という概念を, 学校教育における授業という形で具体化する実証的研究を通して, その特徴や教育的意義について考察した初めての研究であり, 教育実践学という側面からも重要な研究成果を得ることができたといえよう．

２節　今後の課題

本研究では,「探究，発見，理由づけ」という一連の学習活動として，また,「評価，改善，発展」をも含む総合的な学習プロセスとしての広義の「証明すること（Proving)」の視点から操作的証明について考察を行い, 操作的証明を適切に位置づけた学習環境のデザインとその実証的研究を行ってきた．その中で，論証指導における操作的証明の役割や機能をある程度特定することはできたが，具体的な学習環境のデザインという意味では，まだまだリデザインの余地がある．また，操作的証明の構想や形式的証明への移行に関しては，明らかになっていない部分もあり, さらなる学習環境のリデザインと実証的研究が必要であるといえるだろう．ここでは，操作的証明に関する今後の課題をまとめておく．

１．操作的証明の構想と構成の様相

まず１つ目は，操作的証明の構想や構成に関する課題である．本研究では，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを行ったが, 操作的証明そのものの構想や構成に関しては, 生徒の素地的経験や教師による方向付けが必要であることが明らかとなった．第５章においては，教授実験の分析から，操作的証明の構想に関わって，自己の操作を説明する活動や他者との相互作用が有効に機能することは確認されたが, 具体的な授業レベルで教師の手立てとしてどのような工夫が可能なのかという点については, 明らかにされていない. 証明の構想や構成のプロセスに焦点化した学習環境のデザインと実証的研究を行い，学習環境デザインの具体化を図っていく必要があるだろう．

２．形式的証明への移行

２つ目は，操作的証明から形式的証明への移行の段階に関わる課題である．本研究の第４章では，ANNA 数の数学的パターンを題材としたおはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインと実証的研究から，形式的証明への移行のためには，証明のプロセスを記述するという学習活動を設定し, 具体的特殊に対する操作の結果を根拠とする操作的証明の特性を顕在化することが有効であることが示されたが，國本が言うように，前形式的証明（操作的証明）が,「形式的証明を生成し，それを納得・確信する手段となること」については，具体的なレベルで確認することができなかった．最終的に生徒が生成した形式的証明に対して，操作的証明がどのような役割を果たすのか，また，どのような操作的証明が形式的証明の生成に寄与するのかということを明らかにするために, さらなる実証

的研究が必要であろう.

３．操作的証明の適用範囲の拡張と総合的な学習環境のデザイン

３つ目は, 操作的証明を用いた学習環境のデザインに関する課題である. 本研究を通して, 操作的証明が,「探究, 発見, 理由づけ」や「評価・改善, 発展」を含む総合的学習プロセスとしての「証明すること（Proving）」において重要な役割を果たすことは一定程度示すことができたが, 今回対象とした操作的証明は, おはじきと位取り表を用いた操作的証明に限定したものであった. 操作的証明自体は, 適切に表現された数学的対象に対して施された操作の結果にもとづく証明であり, おはじきと位取り表を用いた操作的証明以外にも, 様々な数学的表現媒体を用いた操作的証明が考えられるだろう. また, 今回の実証的研究では, 証明の対象とする題材を, 数の性質を扱う代数的証明に限定したが, 実際には, 図形や数量関係など多岐にわたる分野の操作的証明も構想されるべきである. そのような視点から, 操作的証明の適用範囲や用いる表現媒体の拡張を図り, 総合的な学習環境のデザインを行うことが課題としてあげられるだろう.

以上, 本研究を終えるにあたって, 今後の課題を３点にまとめたが, 操作的証明の研究は, 広義の「証明すること（Proving）」の立場からの総合的な学習環境デザインの研究であり, その特性や具体的な学習環境のデザインの手法, 実践における教師の手立てなど, まだまだ研究は緒に就いたばかりであると言える. 今後も, 理論的な研究を深めるとともに, 実証的研究を通して学習環境のデザインを行い, 実践ベースで活用できる研究として継続していきたい.

引用・参考文献

引用・参考文献

【和文】

ヴィットマン, E. Ch. (2004). 國本景亀・山本信也(訳).『PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム，算数・数学 授業改善から教育改革へ』，東洋館出版社.

岡本和夫ほか(2010a).『未来へひろがる数学２』，啓林館.

岡本和夫ほか(2010b).『未来へひろがる数学３』，啓林館.

岡本和夫ほか(2012a).『未来へひろがる数学２』，啓林館.

岡本和夫ほか(2012b).『未来へひろがる数学３』，啓林館.

國宗進 編著(1997).『確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり５』，明治図書.

國本景亀(1990).「数学教育における証明指導」，『数学教育のパースペクティブ』，聖文社, pp.335-354.

國本景亀(1992).「前形式的証明とその教育的意義－証明の社会学的見方に関連して－」,『高知大学学術研究報告』，第 41 巻，pp.1-14.

國本景亀(1994).「証明概念の多様性」,『日本数学教育学会第 27 回数学教育論文発表会論文集』，pp.457-462.

國本景亀(1996).「空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善」，平成 6 年～7 年度科学研究費補助金（一般研究(C)）研究報告書.

國本景亀(2003).「 E. Ch. Wittmann の数学教育論（Ⅱ）−問題解決能力の育成と技能の習得・習熟を結びつける−」,『日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会論文集』, pp.13-18.

國本景亀(2006).「機械論から生命論へ（練習に焦点をあてて）―機械的練習から生産的（創造的）練習へ―」，日本数学教育学会誌『算数教育』，第 88 巻，第 2 号，pp.12-18.

國本景亀(2011).「PISA2003 以後のドイツの数学教育の動向(1)―「実質陶冶」から「数学に固有な形式陶冶」へ―」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 17 巻，第 1 号, pp. 1-8.

国立教育政策研究所(2012a).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～（小学校編）』，教育出版.

国立教育政策研究所(2012b).『全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～（中学校編)』, 教育出版.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2007a).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2007b).『平成 19 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2008a).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2008b).『平成 20 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2009a).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2009b).『平成 21 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2010a).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2010b).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2011a).『解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2011b).『解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2012a).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2012b).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2013a).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校 算数』.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2013b).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学』.

小松孝太郎(2012).『数学的探究における操作的証明の活用の促進に関する研究』, 筑波大学大学院人間総合科学研究科 学位論文.

佐々祐之(2005). 「本質的学習場にもとづく授業デザインの研究～「数の石垣」の拡張と授業実践からの考察～」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 12 巻, pp.1-13.

佐々祐之(2011). 「数学教育における操作的証明に関する研究」, 『日本科学教育学会年会論文集』, vol.35, pp. 52-55.

佐々祐之(2012).「学校数学における代数的証明に関する一考察」,『熊本大学教育学部紀要』, 第 61 号人文科学編, pp.231-239.

佐々祐之(2012).「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究 （Ⅱ）―おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を通して―」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 18 巻, 第 2 号, pp.77-89.

佐々祐之(2012). 「代数的証明における操作的証明の役割～操作的証明による証明の一般性の認識について～」,『日本数学教育学会第 45 回数学教育論文発表会論文集』, 第 2 巻, pp.869-874.

佐々祐之(2013).「代数的証明の学習における操作的証明の役割」,『熊本大学教育実践研究』, 第 30 号, pp.15-22.

佐々祐之(2013). 「課題探究として証明することに関する実践的研究」, 『熊本大学教育学部紀要』, 第 62 号, pp.289-297.

佐々祐之(2014). 「数学教育における「操作的証明（Operative proof）」に関する研究（Ⅲ）―操作的証明を取り入れた教授実験を通して―」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 20 巻, 第 1 号, pp.27-36.

佐々祐之(2014).「数学学習における「練習」に関する一考察 ～E. Ch. Wittmann の生産的練習の概念に着目して～」, 日本学校教育学会誌『学校教育研究』, 第 29 号, pp.100-111.

佐々祐之・樋脇正幸(2011). 「中学校数学科における操作的証明に関する研究～形式的証明へのステップとしての操作的証明～」, 『日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集』, 第 2 巻, pp.735-740.

佐々祐之・山本信也(2009) :「数学教育における操作的証明に関する研究～おはじきと位取り表の事例から～」,『日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集』, pp.553-558.

佐々祐之・山本信也(2010).「数学教育における「操作的証明（Operative proof)」に関する研究―おはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として―」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 16 巻，第 2 号，pp.11-20.

下田桑太郎(2010).「算数科教育における「生産的練習」に関する研究　～小学校低学年の「数と計算」領域に焦点を当てて～」，熊本大学大学院教育学研究科 修士論文.

杉山吉茂ほか(2010a).『新編 新しい数学２』，東京書籍.

杉山吉茂ほか(2010b).『新編 新しい数学３』，東京書籍.

中央教育審議会(2008).『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申)』，中央教育審議会.

一松信 他(2005).『みんなと学ぶ 小学校算数 2 年上』，学校図書，p. 13.

一松信ほか(2010a).『中学校数学２』，学校図書.

一松信ほか(2010b).『中学校数学３』，学校図書.

一松信ほか(2012a).『中学校数学２』，学校図書.

一松信ほか(2012b).『中学校数学３』，学校図書.

樋脇正幸(2011).「中学校数学科における「操作的証明（Operative proof)」の可能性～おはじきと位取り表を用いた ANNA 数の授業実践から～」，九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』，第 18 号，pp.107-120.

樋脇正幸・佐々祐之(2012).「中学校数学科における「操作的証明」に関する研究―文字を用いた説明における「操作的証明」の役割―」，九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』，第 19 号，pp.47-57.

藤井斉亮 他(2011).「新しい算数３下」，東京書籍，p.71.

藤井斉亮ほか(2012a).『新しい数学２』東京書籍.

藤井斉亮ほか(2012b).『新しい数学３』東京書籍.

溝口達也・松本寿子(2008).「小学校第 2 学年の図的代数における一般化を志向した授業の設計：大学と附属小学校の連携による協同的授業設計とその実践」，鳥取大学地域学部紀要『地域学論集』，第 5 巻，第 2 号，pp129-139.

宮崎樹夫・藤田太郎(2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発～我が国の中学校数学科における必要性とこれまでの成果～」，『日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集』，pp1-8.

宮崎樹夫・佐々祐之・辻山洋介(2013). 「課題探究として証明することのカリキュラム開発～中学校第二学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想～」,『日本数学教育学会第1回春期研究大会論文集』, pp17-24.

文部科学省(2008a). 『小学校学習指導要領』, 東京書籍.

文部科学省(2008b). 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社.

文部科学省(2008c). 『中学校学習指導要領』, 東山書房.

文部科学省(2008d). 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008a).『平成19年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008b).『平成19年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008c).『平成20年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008d).『平成20年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009a).『平成21年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009b).『平成21年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2010a).『平成22年度 全国学力・学習状況調査【小学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2010b).『平成22年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012a).『全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～ 小学校編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012b).『全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～ 中学校編』, 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012c).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査【小学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2012d).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2013a).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査報告書 小学校 算数』.

文部科学省・国立教育政策研究所(2013b).『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査報告書 中学校 数学』.

山本信也(2004).「「操作的原理」による算数・数学の学習指導―『数の本』における「計算三角形」の扱いを例として―」, 九州数学教育学会誌『九州数学教育学研究』, 第 11 号, pp.1-8.

山本信也(2012).『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望 －E. Ch. ヴィットマンの数学教育学の基本的視角－』, 熊日出版.

【欧文】

Chino, K. ,Fujita, T. ,Komatsu, K. ,Makino, T. ,Miyakawa, T. ,Miyazaki, M. ,& Tsujiyama, Y. (2010). An assessment framework for students' abilities/competencies in proving, *Proceedings of EARCOME5* (Vol. 2, pp.416-423), Tsukuba: Inamoto Printig Co. Lt.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004a). *Das Zahlenbuch, 1. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004b). *Das Zahlenbuch, 2. Schuljahr*, Klett.

Müller, D. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004c). *Das Zahlenbuch, 3. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004d). *Das Zahlenbuch, 4. Schuljahr*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004e). *Das Zahlenbuch, 1. Schuljahr, Lehrband*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004f). *Das Zahlenbuch, 2. Schuljahr, Lehrband*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004g). *Das Zahlenbuch, 3. Schuljahr, Lehrband*, Klett.

Müller, G. N. ,& Wittmann, E. Ch. (2004h). *Das Zahlenbuch, 4. Schuljahr, Lehrband*, Klett.

Sasa, H. , Hiwaki, M. , Yamamoto, S. ,& Fujita, T. (2012). Students' understanding of the generality of algebraic proofs and operative proof in secondary school mathematics education, *The 12th International Congress on Mathematical Education Pre-proceedings*, pp.2166-2174.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik deutschland(Hrsg.)(2005). *Bildungssatandards imFach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15. 10. 2004*, Wolters Kluwer.

Semadeni, Z. (1984). Action Proof in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training, *For the Learning of Mathematics*, 4(1), pp..32-34.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education,* 38, pp.289–321.

Stylianides, G. J. ,& Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning, *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), pp.103-133.

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte-Operation-Wirkung : das oretrative Prinzip in der Mathematikdidakitik, *Mathematiklehren,* 11, pp.7-11.

Wittmann, E. Ch. (1996). Operative Proofs in Primary Mathematics, *Paper presented to Topic Groups 8, "Proofs and proving: Why, when,how?" at the 8th International Congress of Mathematics Education,* Seville.

Wittmann, E. Ch. (1998). Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, 2/3, pp.149-178.

Wittmann, E. Ch. (2001). The Alpha and omega of teacher education : Organization mathematical activities, *In D. Halton(Ed.) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* 239-552.

Wittmann, E. Ch. (2004a). Learning mathematics for teaching mathematics : The notion of operative proof, *Paper presented at TSG3 in 10th ICME,* 4.-11., July, 2004, Copenhagen, Denmark.

Wittmann, E. Ch. (2004b). Empirical Research Centred Arounf Substantial Learning Environments, *Plenary Lecture delivered at the Annual Meeting of the Japanese Society of Mathematics Eduvation*, Okayama, November, pp. 20-22.

Wittmann, E. Ch. (2005). Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood, *Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium, July 7-9.

Wittmann, E. Ch. (2007a). Mathematics as the Science of Patterns – from the very Beginning, *Position paper presented at the conference "The Future of Mathematics Education in Europe"*, Lisbon, 15.-17, 12, 2007, organized by the Academia Europaea.

Wittmann, E. Ch. (2007b). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference "The Future of Mathematics Education in Europe"*, Lisbon, 17. - 19.12.2007, organized by the Academia Europaea.

Wittmann, E. Ch. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics, *Paper presented at the international conference ICMI Study 19 : Proof and Proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education"*, Taiwan, 10-15. May 2009, organized by ICMI.