テクノロジーを活用した数学的活動の教材開発とその有効性に関する研究

２００５年

兵庫教育大学大学院
連合学校教育学研究科
教科教育実践学専攻
（上越教育大学）

佐　伯　昭　彦

目　　次

第１章　序論

１．１　高等学校における数学教育の現状と課題 ………………………… 1

１．２　研究の目的と方法 ………………………………………………… 11

１．３　本論文の構成 …………………………………………………… 21

第２章　テクノロジーを活用した数学的活動

２．１　数学的活動とテクノロジー活用の意義 …………………………… 25

２．２　グラフ電卓を活用した数学的活動 ………………………………… 53

２．３　ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学と実現象とのつながり ………… 91

第３章　通常の数学授業における数学的活動とその実践

３．１　単元の導入時における数学的活動 ………………………………… 123

　　－ 極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 －

３．２　単元の展開中における数学的活動 ………………………………… 139

　　－ 極座標における正葉曲線の数学的活動 －

３．３　単元のまとめにおける数学的活動 ………………………………… 153

　　－ ３次関数のグラフの種類を探究する数学的活動 －

第４章　数学と他教科とを関連づけた数学的活動とその実践

４．１　数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要 ………… 189

４．２　数学的モデルの有用性に関する生徒の意識変容 ……………………… 201

４．３　数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法 ……………………… 211

　　－ 回帰モデル機能を用いたより良いモデル化 －

４．４　数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化 ……………………… 225

　　－ 「お湯の冷め方」実験における生徒の実データ解析方法 －

第５章　研究のまとめと今後の課題

５．１　研究のまとめ …………………………………………………… 241

５．２　今後の課題 ……………………………………………………… 247

謝辞 ………………………………………………………………… 249

研究業績 …………………………………………………………… 251

巻末資料 …………………………………………………………… 255

第１章

序　論

１．１　高等学校における数学教育の現状と課題

１．はじめに

戸瀬・西村（1999）が大学生を対象に実施した学力調査結果が発端となり「学力低下」，「学力崩壊」，「学びからの逃走」など，現在の子どもたちを象徴する言葉が流行する昨今,「学力低下」に関する議論がマスコミを含めて様々な形で展開されている（和田・西村・戸瀬，1999；岩川・汐見，2001；大野・上野，2001；中井，2001；戸瀬・西村，2001；市川，2002）．

ここでは，高等学校における数学教育の現状と課題について，国立教育政策研究所（2004a）が実施した平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査[1]の調査結果を参考に，①高校生の数学学力，②数学学習における高校生の意識，③教師の数学指導状況，の三つの観点について分析・考察する．さらに，平成 15 年度に実施した新学習指導要領は,高等学校における数学教育の現状に対して何を求めているのかについて考察する．

２．高校生の数学学力

学力低下論争の発端となった戸瀬・西村（1999）の調査は，計算技能に関する問題のみで，彼らの調査結果から全体的・総合的に学力が低下したと言えるかどうかは疑問が残る．しかし，調査問題には，小学校で学習する四則演算や分数計算が含まれており，これらの計算が出来ない大学生がいたことは衝撃的な事実であった．この事実をもとに，岡部他（1999）は著書「分数が出来ない大学生」で，大学入試の科目数の削減と高等学校の「選択中心の教育課程」による弊害を示し，さらには，新学習指導要領での学習時間と学習内容の削減による更なる学力低下を危惧した．学力低下の実態を明確に示す長期的で体系的な調査は実施されていないが，国際教育到達度評価学会（IEA：The International Association for the Evaluation of Educational Achievement）が実施した TIMSS（The Third International Mathematics and Science Study）調査や，澤田（2002）が実施した学力調査結果から，中学校の学力は僅かに下降傾向にあることが明らかになった．一方，高等学校の学力調査に関しては，国立教育政策研究所（2004a）が実施した平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査の数学Ⅰの結果から，設定通過

[1] 国・公・私立高等学校（全日制課程）の第３学年を対象に平成 14 年 11 月 12 日に実施された．数学Ⅰの調査実施生徒数は，問題Ａ（15 問）が 15,770 名，問題Ｂ（15 問）が 15,693 名であった．

率[2]と比較して上回るまたは同程度[3]と考えられる問題数の合計は，30 問中 6 問であり，想定されていた学力よりも低いことが分かった．特に，二次関数では，関数の式とそのグラフとの関係の理解が不十分であること，さらに，三角比を扱う「図形と計量」については，無解答率が 25％を超えた問題が 6 問中 4 問で高く，この主な要因として三角比の記号の意味が十分に定着していないことが明らかになった．

３．数学学習における高校生の意識

佐藤（2000，2001）は，「学力低下」以上に深刻な現象として，学びから拒絶し学びから逃走する子どもたちの学習離れの現象を問題として取り上げている．佐藤は，この「学びからの逃走」の現象の裏づけとして，中学生を対象にした TIMSS の調査結果から，校外の学習時間の減少と教科嫌いの 2 点を上げている．数学に関しては，校外の学習時間が平均 0.8 時間で国際平均（0.9 時間）より低く，数学教科が「好き」と「大好き」と応えた生徒は 53％でチェコに続いて 2 番目に低い結果であった．また，我が国は数学学習に対する態度[4]に関しても肯定的な割合が最も低い国であることが明らかになった．

この傾向は，OECD（経済協力開発機構）が 2003 年に実施した「生徒の学習到達度調査」（PISA :Programme for International Student Assessment）の結果も同様であった．特に，数学への興味・関心や楽しさに関する 4 つの質問項目，「数学についての本を読むのが好きである」，「数学の授業が楽しみである」，「数学を勉強しているのは楽しいからである」，「数学で学ぶ内容に興味がある」に対して，肯定的に回答した我が国の生徒の割合は，それぞれ 13％，26％，26％，33％であり，いずれも OECD 平均より少ないことが明らかになった．さらに，「学んだ数学を日常生活にどう応用できるかを考えている」，「数学を勉強するときは，数学と他の教科で習った事柄を関連付けようとしている」，「数学を勉強するときは，ここで学ぶのは何なのかをはっきりさせることからはじめる」に対して，肯定的に回答した我が国の生徒の割合は，それぞれ 13％，15％，26％であり，いずれも OECD 平均より極端に少ないことが明らかになった（国立教育政策研究所編，2004b）．

また，国立教育政策研究所（2004a）が実施した平成 14 年度高等学校教育課程実施

---

[2] 設定通過率とは，学習指導要領（平成元年告示）に示された内容について，標準的な時間をかけ，かつ，指導要領作成時に想定された学習活動が行われた場合，個々の問題ごとに正答，準正答数の割合の合計である通過率がどの程度になるかを想定した数値である．

[3] 設定通過率を中心に上下それぞれ５％の幅に収まっているものを「設定通過率と同程度」，この幅を越えているものを「設定通過率を上回る」としている．

[4] 数学に対する態度の結果は，「数学の勉強は楽しい：46％」「数学はたいくつだ：35％」「数学はやさしい教科だ：13％」「数学は生活で大切だ：71％」「数学を使う仕事をしたい：24％」で，何れの項目においても生徒の意識は国際的に低い結果であった．

状況調査の質問紙調査においても同様で，校外での学習を全く，または，ほとんどしないと回答した生徒は 42.7%を示した．さらに，「数学が好きだ」に対して肯定的な回答をした生徒は 37.3%，「数学の授業がどの程度わかりますか」に対しては 35.3%で，「数学を勉強すれば，ふだんの生活や社会生活の中で役立つ」に対しては 33.3%，「将来，数学の勉強を生かした仕事をしたい」に対しては 12.4%で，数学に対する好感度は何れの項目も低い結果であった．

このように学習時間と数学に対する好感度の二つの観点において佐藤が指摘する「学びからの逃走」を裏づける調査結果が得られているが，本当に高校生達は「学びから逃走」したいと思っているのであろうか？ 次に，佐藤の指摘とは違った観点からこの疑問を考察してみることにする．

図 1-1-1 は，国立教育政策研究所（2004a）が調査した「勉強をしたい」と思う生徒の学ぶ意欲についての 7 項目の結果を示している[5]. これらの項目で生徒が肯定的に回答した項目は，「よい成績をとれるよう，勉強したい」に対して 60.5%，「入学試験や就職試験に役立つよう，勉強したい」に対して 71.2%，「自分の好きな仕事につけるよう，勉強したい」に対して 84.6%，「分からないことでも自分の力で答えを見つけられるよう，勉強したい」に対して 66.8%，「ふだんの生活や社会生活の中で役立つよう，勉強したい」に対して 68.2%であった．一方，否定的に回答した項目は，「父や母にほめられるよう，勉強したい」に対して 16.7%，「先生にほめられるよう，勉強したい」に対して 12.5%であった．これらの「勉強をしたい」という学ぶ意欲の調査結果から，高校生達は他人の為に勉強をするのではなく，自分の為に勉強をしたいと考えており，高校生達は学びから逃走しているとは言えないように思われる．

[5] 図 1-1-1 に示す結果は，数学 I の対象者のみの結果である．

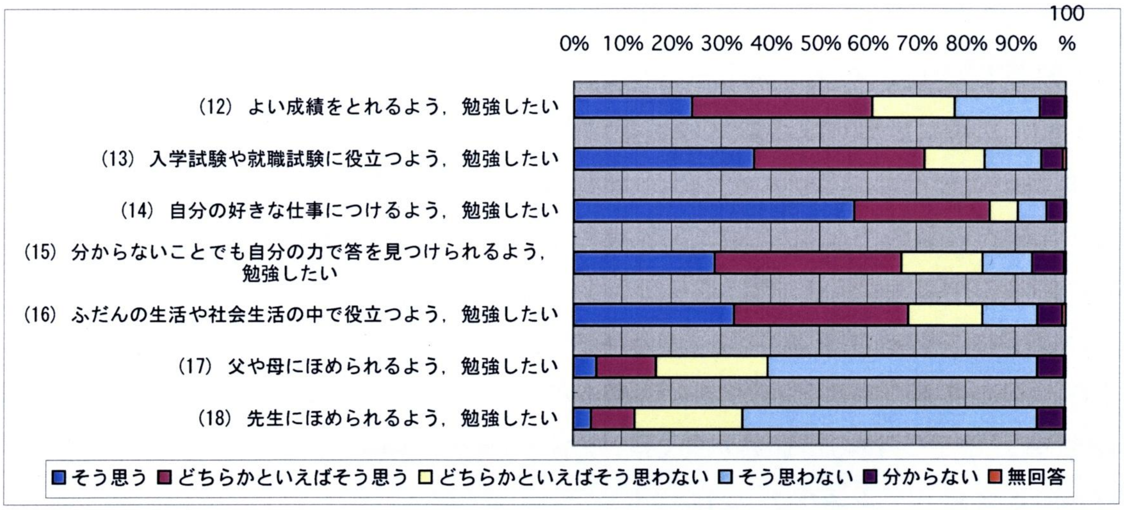


図 1-1-1.「勉強したい」と思う生徒の学ぶ意欲の調査結果

次に，数学の問題を解くときの高校生の考え方について，図 1-1-2 に示す国立教育政策研究所（2004a）の調査結果をもとに考察する．これらの項目で生徒が肯定的に回答した項目は,「数学の問題を解くとき，前に解いた問題と似ているところや違っているところがどこかなどを考えようとしていますか」に対して 62.4%,「数学の問題が解けなかったとき,自分がなぜ解けなかったかをふり返って考えようとしていますか」に対して 55.0%,「数学の問題の解き方が分からないとき，あきらめずにいろいろ考えようとしていますか」に対して 62.9%であった．これらの結果から，6 割前後の高校生は，数学の問題を解くときは以前に解いた解法を参考にし，解けない場合はあきらめずに解けない原因をふり返って問題解決していることが分かり，この項目に関しても高校生たちは決して学びから逃走しているとは判断できないと思われる．一方，否定的に回答した項目は,「数学で新しい内容を勉強したとき，前に勉強したこととどのような関係があるかを考えようとしていますか」に対して 39.6%,「数学の問題が解けたとき，別な解き方を考えようとしていますか」に対して 19.9%,「数学で新しい内容や考えなどを勉強したら，自分の身のまわりの場面などで使ってみますか」に対して 9.7%であった．これらの項目に関しては，高校生の意識向上を図るには，教師の指導の工夫改善が望まれると考える．

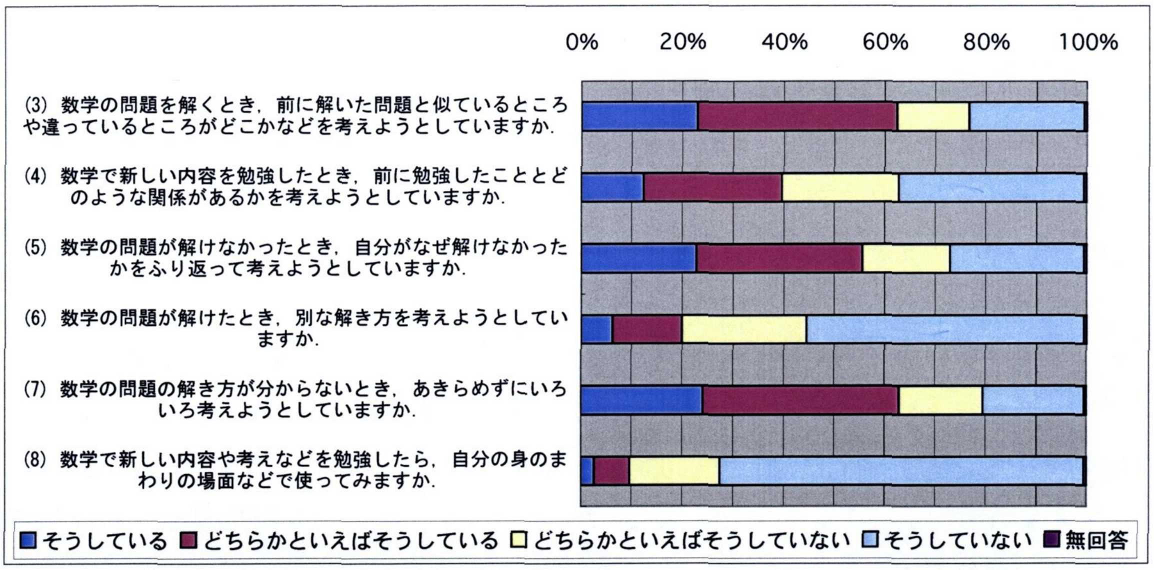


図 1-1-2. 数学の問題を解くときの生徒の考え

以上の結果から，現在の高校生は学校外での学習時間が少なく，数学に対する好感度が低くい反面，自分のために「勉強をしたい」という学ぶ意欲を持ち，数学の問題を解くときは以前に解いた解法を参考にし，解けない場合はあきらめずに解けない原因をふり返って問題解決していることが分かった．このことに関して，「学びからの逃走」を指摘する佐藤（2000）は，「勉強」と「学び」とを区別し，子どもたちは強制的な勉強から逃走しているのであって，子どもたちは自分自身のための学びから逃走しているのではないことを次のように述べている．

「「学び」からの逃走を克服するためには，「勉強」から「学び」への転換をはかる必要があります．これまで「『学び』からの逃走」と呼んできましたが，「勉強からの逃走」といったほうがより正確でしょう．勉強を拒絶し嫌になっている子どもも，学びには飢えており，授業の改革によってひたむきに学びに向かう姿は多くの教室で見られる光景です．」（p.54）．

学ぶ意欲を持ち，問題を解くために一生懸命に努力をしている高校生に対して，数学が分かる高校生を増やし，数学に対する好感度を向上させるために，我々教師はどのような指導の工夫改善を行えば良いのであろうか．次に教師の数学指導状況について考察してみる．

４．教師の数学指導状況

図 1-1-3 は，国立教育政策研究所（2004a）が調査した教師の数学指導状況[6]についての 6 項目の結果を示している．これらの項目で教師が積極的に行っている指導項目は，「理解が不十分な生徒に対し，授業の合間や放課後などに更に指導していますか」に対して肯定的に応えた教師は 64.6%，続いて，「発展的な課題を取り入れた授業を行っていますか」に対して 44.2%であった．一方，積極的に行っていない指導項目は，「コンピュータを活用した授業を行っていますか」に対して 2.6%，「学校図書館を活用した授業を行っていますか」に対して 0.7%，「作業的・体験的な活動を取り入れた授業を行っていますか」に対して 20.4%，「実生活における様々な事象との関連を図った授業を行っていますか」に対して 29.7%であった．この調査結果から，高等学校の教師は，理解が不十分な生徒に対する指導は熱心であるが，教師がコンピュータを活用した授業，作業的・体験的な活動を取り入れた授業，さらに実現象との関連づけた授業が行われていないことが明らかになった．

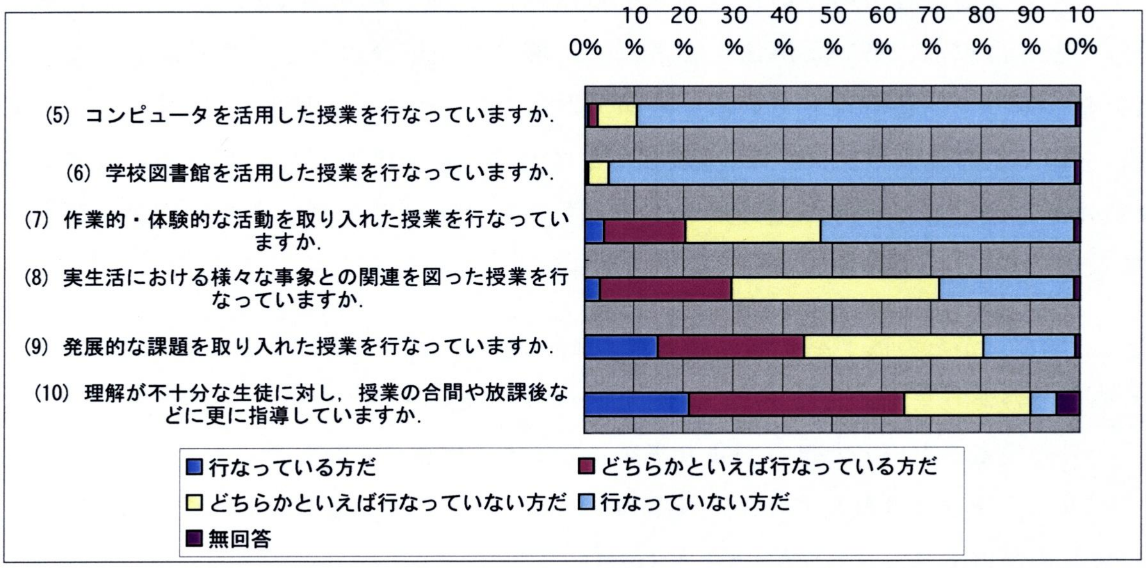


図 1-1-3．教師の数学指導状況

特に教師のコンピュータ活用状況について，文部科学省（2001，2003，2004）がホームページで公開している「学校における情報教育の実態等に関する調査結果」を参照すると，表 1-1-1 に示すように，高等学校の数学教員で「コンピュータを操作でき

6　数学の教師 897 名を対象に実施された．

る教員の割合[7]」と「コンピュータで指導できる教員の割合[8]」は，教員研修等により年々増加していることが分かる．しかし，表 1-1-1 に示す平成 14 年度の結果と，平成 14 年度に実施した国立教育政策研究所（2004a）の調査結果（図 1-1-3）とを総合的に考察すると，「コンピュータを操作できる教員」が 93.7%，「コンピュータで指導できる教員」が 50.3%に対して，「コンピュータを活用した授業を行っている教員」が僅かに 2.6%である矛盾が見えてくる．つまり，約半数の教員がコンピュータを活用して授業が出来るにも関わらず，実際にはコンピュータの授業を全く行っていない事実が明らかになった．この原因には，学校にあるコンピュータが授業で自由に使えない，学習用の教材が充実していない，教材開発のためのノウハウや時間がない等が考えられる．

表 1-1-1. 高等学校における数学教員のコンピュータ活用等の実態

	平成11年度	平成12年度	平成13年度	平成14年度	平成15年度
コンピュータを操作できる教員の割合	84.4	89.5	91.9	93.7	94.5
コンピュータで指導できる教員の割合	38.1	39.6	42.1	45.9	50.3
調査人数	23,540	23,061	22,749	22,645	-

この結果から，数学教師が行っている指導方法は，教科書と黒板とノートを使った座学中心の授業が行われていることが分かる．特に，生徒が数学と実現象とを関連づけることができない事実は，教師が授業に作業的・体験的な活動や実現象を取り扱っていないことに原因があると考えられる．さて，このような指導を行う教師が，現行の学習指導要領に掲げられている目標を達成するような授業を展開できるのであろうか．これについて現行の学習指導要領を参考に考察することにする．

---

[7] 以下の操作例のうち，２つ以上の操作ができる場合に該当
a) ファイル管理ができる
b) ワープロソフトウェアで文書処理ができる
c) 表計算ソフトウェアを使って集計処理ができる
d) データベースソフトウェアを使ってデータ処理ができる
e) インターネットにアクセスして必要な情報を検索し，利用することができる
f) プレゼンテーションソフトとプロジェクタを使って，文字や画像情報等により概要説明ができる
g) 電子メールの利用において，受信・送信，添付ファイルの送付，添付ファイルの圧縮・解凍等の操作ができる
h) 学校のホームページの作成・変更等ができる
i) 教育用ソフトウェアを使用してコンピュータを活用した授業等ができる
j) 大型教材提示装置（プロジェクター等）によってコンピュータ画面上のネットワーク提供型コンテンツや電子教材などを提示しながら授業等ができる

[8] 教材ソフトウェア，インターネット等を使用してコンピュータを活用したり，大型教材提示装置（プロジェクタ）によってコンピュータ画面上のネットワーク提供型コンテンツや電子教材などを提示しながら授業等ができる場合に該当

５．現行の学習指導要領

ここでは，平成 11 年に公表された現行の高等学校学習指導要領の中から，特徴的な「数学的活動」と「総合的な学習の時間」の２項目について，これらの項目を高等学校の実際の授業で実施する際に考えられる課題について考察する．

(a) 数学的活動

高等学校学習指導要領（数学）の目標は，「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる」であり，これは従前（平成元年版）の目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」が付加されただけの変更である（文部省，1999a）．

高等学校学習指導要領解説−数学編 理数編−によると，数学的活動とは，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直感，類推，帰納，演繹などの内的な活動の相互作用のことであり，テクノロジーの積極的な活用により，生徒の数学に対する興味・関心を換気し，論理的思考力，想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うことを求めている（文部省，1999b）．このことから，現行の学習指導要領では，完全学校週５日制の導入に伴って，学習時間と学習内容といった量的な削減が行われた反面，数学的活動を取り入れることで質的な学習の変換を目指していることが分かる．しかし，図 1-1-3 に示した教師の数学指導状況の調査結果から，「コンピュータを活用した授業を行っていますか」を肯定的に応えた教師が 2.6%，「作業的・体験的な活動を取り入れた授業を行っていますか」に対しては 20.4% である現状を考えると，高等学校数学科の目標として新しく掲げた数学的活動を実施することが困難であるように思われる．このため，数学的活動を行うための教材開発と実践評価を目的とした実践研究，および，教師教育を早急に取り組むべき大きな課題であると考える．

(b) 総合的な学習の時間

現行の学習指導要領におけるもう一つの大きな改訂点は，「総合的な学習の時間」が新しく創設されたことである．この「総合的な学習の時間」は，地域や学校，生徒の実態に応じて，既存の教科の枠を超えた横断的・総合的な学習や生徒の興味・関心等に基づく学習など創意工夫を生かした教育活動を行なうものとされている（文部省，1999a）．さらに「総合的な学習の時間」の具体的な学習目標及び学習内容や学習活動等については，各学校に委ねられている．つまり，数学と他教科との枠を超えた横断的・総合的な学習により，社会や実現象における数学の有用性を感得させる授業を行なう機会が数学教員に与えられた訳である．しかし，国立教育政策研究所（2003）が

報告した「総合的な学習の時間実践事例集（高等学校編)」によると，移行期間中（平成13年度から14年度）に積極的に推進した7つの高等学校では，数学に関連した内容は殆ど実践されていないことが明らかである．さらに，図1-1-3に示した教師の数学指導状況の調査結果から,「実生活における様々な事象との関連を図った授業を行っていますか」を肯定的に応えた教師が29.7%である現状を考えると，数学授業で学習した内容を「総合的な学習の時間」で取り扱われる可能性は薄いと考える．このため，「総合的な学習の時間」で数学を取り扱うための教材開発と実践評価を目的とした実践研究，および，教師教育を早急に取り組むべき課題であると考える．

6．まとめ

ここでは，高等学校における数学教育の現状と課題について，国立教育政策研究所（2004a）が実施した平成14年度高等学校教育課程実施状況調査の調査結果を参考に，①高校生の数学学力，②数学学習における高校生の意識，③教師の数学指導状況，の三つの観点で考察した．

その結果，現在の高校生の数学に関する学力は低下の傾向にあり，学校外での学習時間が少なく，数学に対する好感度が低くい傾向にあることが明らかになった．しかし，その反面，高校生は自分のために「勉強をしたい」という学ぶ意欲を持ち，数学の問題を解くときは以前に解いた解法を参考にし，解けない場合はあきらめずに解けない原因をふり返って問題解決していることが分かった．次に，教師の数学指導状況は，理解が不十分な生徒に対する指導は熱心であるが，教師が作業的・体験的な活動を取り入れた授業，コンピュータを活用した授業，さらに実現象と関連づけた授業が行われていないことが分かった．

一方，現行の学習指導要領は,「数学的活動」や「総合的な学習の時間」を取り入れることにより，生徒が自ら学び自ら考える力や創造性の基礎となる力を育成する教育の質的な変換を図っている．つまり，この質的な変換により，生徒の数学学習に対する興味・関心をもたせ，さらには学習への意欲を高める指導を我々数学教師に期待している訳である．しかし，教師の数学指導状況の現状を考えると,「数学的活動」や「総合的な学習の時間」を実施するためには，作業的・体験的な活動を取り入れた授業，コンピュータ等のテクノロジーを活用した授業，さらには実現象と関連づけた授業に関する教材開発と評価を目的とする実践的研究を行なうことが今後の大きな課題であると筆者は考える．

引用文献・参考文献

1) 市川伸一（2002）．学力低下論争．ちくま新書．

2) 岩川直樹，汐見稔幸（2001）．「学力」を問う −だれにとっての だれが語る「学力」か．草土文化．

3) 国立教育研究所（1997）．中学校の数学教育・理科教育の国際比較 −第３回国際数学・理科教育調査報告書−．東洋館出版社．

4) 国立教育政策研究所（2003）．総合的な学習の時間実践事例集（高等学校編）．ぎょうせい．

5) 国立教育政策研究所（2004a）．平成１４年度高等学校教育課程実施状況調査．http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm.

6) 国立教育政策研究所編（2004b）．生きるための知識と技能２ −OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2003 年調査国際結果報告書−．ぎょうせい．

7) 中井浩一（2001）．論争・学力崩壊．中公新書ラクレ．

8) 岡部恒治，戸瀬信之，西村和雄（1999）．分数ができない大学生．東洋経済新報社．

9) 大野晋，上野健爾（2001）．学力があぶない．岩波新書．

10) 文部科学省（2001）．学校における情報教育の実態等に関する調査結果．http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/13/09/010911.htm.

11) 文部科学省（2003）．学校における情報教育の実態等に関する調査結果．http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/15/07/03070501.htm.

12) 文部科学省（2004）．学校における情報教育の実態等に関する調査結果．http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/16/07/04072101.htm.

13) 文部省（1999a）．高等学校学習指導要領．

14) 文部省（1999b）．高等学校学習指導要領解説 −数学編理数編−．実教出版．

15) 佐藤学（2000）．「学び」から逃走する子どもたち．岩波ブックレット No.524.

16) 佐藤学（2001）．「子どもたちは何故「学び」から逃走するか」．中井浩一著「論争・学力崩壊」．中公新書ラクレ．pp.173-190.

17) 澤田利夫（2002）．学力は低下しているか −学力調査報告書−．平成 12−13 年度科学研究費補助金（基盤研究 (C)(1)：課題番号 12680190．代表：澤田利夫）研究報告書．

18) 戸瀬信之，西村和雄(1999)．「日本の大学生の数学力 −学力調査−」．岡部恒治他編著「分数ができない大学生」．東洋経済新報社．pp.249-264.

19) 戸瀬信之，西村和雄(2001)．大学生の学力を診断する．岩波新書．

20) 和田秀樹，西村和雄，戸瀬信之（1999）．算数軽視が学力を崩壊させる．講談社．

1．2　研究の目的と方法

1．研究の目的

1．1節では，高等学校における数学教育の現状に対して，作業的・体験的な活動を取り入れた授業，コンピュータ等のテクノロジーを活用した授業，さらには実現象と関連づけた授業を実施する必要があり，このための教材の開発と評価に関する実践的研究を行なうことが今後の大きな課題であると筆者は主張した．

我が国の高等学校学習指導要領に初めてコンピュータ等のテクノロジーが登場したのは，平成元年の改訂であり，第2章第4節第3款の内容の取扱いで「各科目を通して，コンピュータ等の教育機器を活用して指導の効果を高めるようにすること.」と明記された（文部省，1989a）．数学教育におけるコンピュータ活用は，伝統的な練習-演習様式の CAI 教材，シミュレーション，数学教育用ソフト[1]など，その活用は学習内容と指導方法によって様々である（清水，1997）．これに対して，平成元年の高等学校学習指導要領解説が意図するコンピュータ活用は，コンピュータを教え込み指導の補助的な活用，または，効率化を図るための CAI 教材的な活用ではなく，生徒が探究的思考や発見的考察行う知的活動の教具として活用することを次のように述べている（文部省，1989b）．

「情報化社会に必要な数学的な資質を養うには，コンピュータを有効に活用することが必要となる．コンピュータを活用した学習は，探究的思考や発見的考察を通して，生徒の数学的な経験を豊かにすることができる．ところで，コンピュータを活用した数学の学習は，情報処理の手ほどきを目的とするのではなく，コンピュータを知的活動の教具として活用することを目指すものである．そのため，コンピュータの活用は，生徒が数学を楽しく学習することができるよう，新たな指導方法や教材の開発につながるものでなくてはならない.」(p.13)

さらに，文部省（1992）が出版した「高等学校 数学 指導資料 指導計画の作成と学習指導の工夫」では，コンピュータを活用することの意義として(1)コンピュータの必

---

[1] 数学教育用ソフトとは，以下の３つのタイプの数学用ソフトのことである．(1)Reduce，Derive，Mathematica，Maple などの数式処理システム．(2)Function Grapher，Grapes などのグラフィングツール．(3)Geometer's Sketchpad，Cabri Geometry，Geometric Constructor などの作図ツール．

要性と(2)数学の実験的性格の２点を以下のように述べている．

「(1)**コンピュータの必要性**

コンピュータを教えることがねらいではない

近年におけるコンピュータの発展と普及は，これまでの予想をはるかに上回っている．特に，コンピュータは教育の強力な道具として，もはや無視することができない対象ともなっている．（中略）目的とするところは，生徒の学習への関心を高め，理解を助け，思考力を鍛え，創造性を発揮させることにある．そのためには，指導形態の工夫改善をも含めて考えていかなければならない．

(2)**数学の実験的性格**

操作・実験により納得できるように

数学では，伝統的に理論構成の体系化が重視されてきた．その重要性を否定するものではないが，高等学校段階の教育では，おのずから専門の数学とは違った態度が必要な場合がある．指導にあたっては，定理の証明よりも，まず，操作・実験により具体例を通して事実そのものを納得させることが大切である．具体的な数値などに関する実験・実習を通して，初めて定理の意味が理解できる場合も多い．このような目的には，コンピュータは有用な機器である．なお，ここでコンピュータというときは，単にパソコンだけでなく各種の電卓も併せて考えている．

数学の理論の発見や発展はどのようになされたか

数学は論証の学問であると言われる．そのこと自体は正しいのであるが，数学の定理の発見や発展は必ずしも論理のみによるものではない．歴史を調べると，まず具体的な実例による「実験」を通した深い洞察により，結果の予測が行われ，その後に厳密な証明が与えられるという形で，数学の理論が作られた場合が多い．

（中略）特に，教育の場においては，具体例に対する実験事実から，次第に一般化して公式や定理に至る経過を実習するという進め方が，真の理解を深めるためには不可欠となってきている．

以前は，数学の研究や教育に当たって，そのような実験自体が極めて限られた場合にしか可能でなかった．しかし，現在では，コンピュータを活用することにより，ある種の実験は容易になり，短時間に多くのデータを集めることが可能に

なった．そのようなデータから法則を帰納していく教育が，コンピュータを活用する数学教育の一つの有力な形態として期待されている．」（pp.91-92）

ここで述べているコンピュータ等の活用の意義では，実験・観察・操作・実習などの外的な数学的活動を通して数学の法則や規則を帰納的に発見し，かつ，それを一般化や論証と言った内的な数学的活動によって公式や定理を作り上げるといった創造性を発揮する新たな学習形態を期待していたと考えられる．つまり，今次の学習指導要領の目標に掲げた「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」教育が，従前の学習指導要領で既に求められていたのである．

実際に，数学教育用ソフトの開発・普及，インターネットの発達，さらに，グラフ電卓やデータ収集機などの登場により，テクノロジーを活用した数学的活動の実践・研究が行われるようになった（竹之内，1985；岡森，1987；寺田他，1989；礒田他，1992；一松，1995；寺田他，1995；能田他，1996；Ｂ．ケリー，1997；飯島，1997；守屋他，1997；佐伯他，1997；清水他，1999；足利，2000；村上，2000）．しかしながら，指導の効果が高まった報告は多くあるが，１．１節の高等学校における数学教育の現状と課題で述べたように，実際の教育現場ではテクノロジーを活用した数学的活動はあまり行われていないのが現状である．

この原因には，教師教育，テクノロジー導入の財政，現場での教材研究の時間不足などが考えられる．しかし，普及されない原因を研究サイドから考察すると，これまでの研究報告は，テクノロジーを活用することにより，どんな教育が展開できるかについての事例や，トピック的な授業や少人数を対象とした授業での成果報告が多く，以下の項目に関する実践的な研究報告が少ないことが考えられる．

・実際の授業での効果的なテクノロジー活用：
　カリキュラムに位置づけられた実際の授業において，テクノロジーを活用した主体的な数学的活動がどのように効果的に活用・展開できるかについての実践的な研究

・生徒の数学的活動における学習行動に関する報告：
　テクノロジーを活用した数学的活動において，個々の生徒がどのようにテクノロジーと関わることにより，従来の紙と鉛筆（paper and pencil）の学習と違った学習行動が行えるのかについての実証的な研究

つまり，実際の授業において，テクノロジーをどのように活用すれば従来と違った生徒主体による数学的活動が行え，その結果，どのように生徒が創造性を発揮する効果的な授業が展開できるかについての実践的な研究が必要であると考える．

筆者は，高等専門学校の数学授業で，生徒の主体的な数学的活動を支援するパート

ナーとしてグラフ電卓とデータ収集機等のハンドヘルド・テクノロジーを積極的に活用してきた．このパートナーは，決して自分から生徒に働きかけはしないが，生徒がハンドヘルド・テクノロジーに主体的かつ積極的に働きかけることにより，生徒とハンドヘルド・テクノロジーとの間により良いパートナーシップが生じる．この関係により，規則や性質を発見しようとする数学的活動の萌芽が生徒に起こり，規則や性質の数学化，仮説の検証・修正，数学的考察・処理，数学的結果の検証など，全ての数学的活動がハンドヘルド・テクノロジーとの「対話」によって行われるものと考えた．このように，生徒とハンドヘルド・テクノロジーとの間により良いパートナーシップを築くことにより，生徒自らの力で既習事項を関連づけながら数学を発展的に創りだす創造的な授業が展開できると考えた．

上記の考えを実際の授業で明らかにするため，本研究では以下の２点を研究の目的とした．

(1) ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的活動において，生徒が発見した多様な規則や考え方を授業に積極的に活用し，既習の数学的知識・技能・考え方と関連づけることによって，授業がより発展的に展開できることを実証的に明らかにする．

(2) 個々の生徒がどのようにハンドヘルド・テクノロジーと対話をしながら数学的活動を行っているのかについて，生徒が記述したレポートを基に明らかにする．

２．研究の方法

本研究の目的を達成するために以下の方法で研究を行った．

(1) 授業に基づいた実践的な研究

本研究では，以下の二つのタイプにおける数学的活動の教材を開発し，実際の授業での生徒の活動・反応や生徒が記述したレポート内容を分析することで教材の有効性を明らかにする．

◆タイプ１：通常の数学授業を補完する数学的活動

金沢工業高等専門学校の２年生[2]と３年生[3]を対象に，通常の数学授業を補完する数

---

[2] 「微分積分学Ｉ」の授業を週３時間（45 分）行っている．内容は，一学期に数列，二学期に極限，微分係数，導関数（基本的な関数［整関数・有理関数,］，積・商の導関数，合成関数の導関数），三学期に指数関数・対数関数・三角関数・逆三角関数の導関数，微分の応用（増減表，関数の最大・最小，接線と法線，速度と加速度）を学習する．

[3] 一・二学期に「数学Ⅲ」の授業を週６時間，三学期に「応用数学Ｉ」の授業を週６時間行っている．内容は，一学期に行列式，不定積分，二学期に定積分，面積・体積高次導関数，変曲点，三学期に媒介変数や極方程式を使った面積・体積，第二次導関数と曲線の凹凸，媒介変数・極座標と曲線，平均値の定理と応用，テイラーの定理を学習する．

学的活動の授業を行った．実施した教材の内容は，「極限」，「極方程式のグラフ」，「3次関数のグラフの種類」である．「極限」の実践は単元の導入時に行った数学的活動で，「極方程式のグラフ」は単元の授業中に学習している内容をより深く理解するための数学的活動である．さらに，「3次関数のグラフの種類」は，単元のまとめや発展的な学習としての数学的活動である[4]．

◆タイプ2：数学と他教科を関連づけた総合的な学習の時間での数学的活動

金沢工業高等専門学校の「数物ハンズオン」[5]として1年生と2年生を対象に数学と物理とを関連づけた総合的な学習の時間（以下，総合学習と呼ぶ）のカリキュラムを構築し実践した．この授業における数学的活動では，物理現象のデータをハンドヘルド・テクノロジーで収集し，それを数学的に解析し，最終的には，解析した数学的モデルの物理的意味の解釈，さらに数学的モデルの検証・評価を行うことを目的としている．

(2) 本研究で活用するテクノロジー

本研究で活用するハンドヘルド・テクノロジーは，タイプ1の通常の授業ではグラフ電卓を活用し，タイプ2の総合的な学習の時間では，グラフ電卓とデータ収集機（CBL［Calculator-Based Laboratory］，各種センサー）[6]を活用した．このように本研究ではテクノロジーを限定したが，本研究で得られる知見は，他のテクノロジー活用にも示唆を与えると考える．

以下に，グラフ電卓とハンドヘルド・テクノロジーを採用した理由を示す．

(a) タイプ1におけるグラフ電卓

本研究のタイプ1の数学的活動では，主にグラフ電卓のグラフを表示するGRAPH表示機能（図1-2-1）と数表を表示するTABLE機能（図1-2-2）を活用した[7]．この他にも，グラフ電卓には多くの機能を有するが，本研究では，この二つの機能だけでも十分に有効な数学的活動が行えることを示す．また，本研究における数学的活動を支

---

[4] 金沢工業高等専門学校では，幾何関係の授業を行っていないので，幾何学習における数学的活動は本研究の対象外とする．

[5] 金沢工業高等専門学校では，平成8年4月より，ものづくりと工学的実験を5年間通じて行う授業「創造設計」を開設した．この授業は，下級生では工学への動機づけと基礎理論の定着，上級生では創造性・独創性をもった技術者の育成を目的としている．下級生で実施している「創造設計Ⅰ・Ⅱ」では，「数学・物理系」「電気工学系」「機械工学系」の三つの系統がローテーションで行われ，授業は必修である．筆者らは「数学・物理系」を担当しており，通称「数物ハンズオン」と呼んでいる．「数物ハンズオン」は，年間3－4のテーマ（1テーマは3週間［45分×6時間］）で3人の教師がティーム・ティーチングで実施している．この授業の基本方針は，平成8年に中央教育審議会（1996）が「第1次答申」で提案した［生きる力］を育てるための横断的・総合的な学習と基本的に同じ考えである．詳しくは第4章を参照．

[6] これ以降，グラフ電卓とデータ収集機及び各種センサーのことを「ハンドヘルド・テクノロジー」と呼ぶ．

[7] 実際の授業では，TRACE機能やZOOM機能などの機能を活用した生徒もいた．

援する教具としてコンピュータ上で動作するグラフィング・ツール（Mathematica, Maple, Grapes など）の活用も考えられるが，①操作性が簡単である，②通常の教室で使える，③授業以外の宿題においても使える，④安価なので一人一台の使用が可能である，といった理由からグラフ電卓を本研究の教具として採用した．

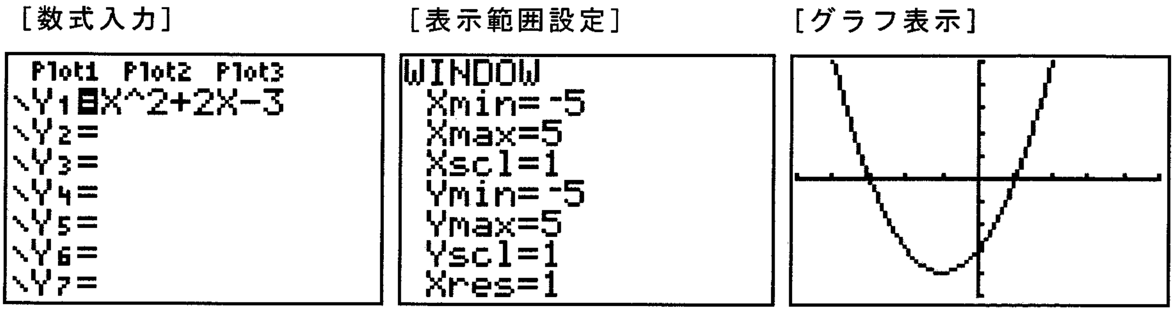


図 1-2-1．グラフ電卓のグラフ表示機能

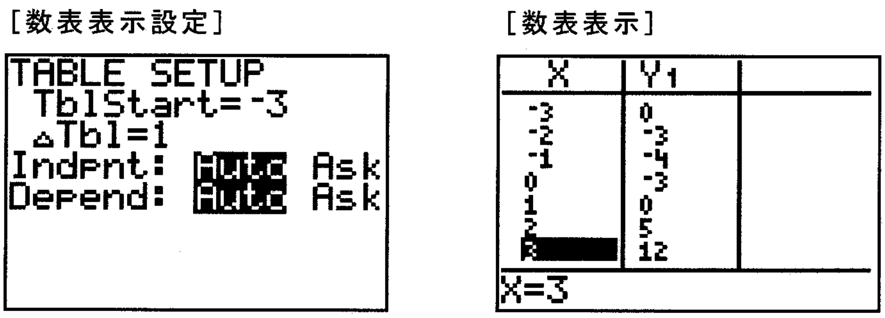


図 1-2-2．グラフ電卓の数表機能

(b) タイプ２におけるグラフ電卓とデータ収集機

図 1-2-3 に「数物ハンズオン」で使用した実験装置の一例を示す．データ収集機(CBL)，グラフ電卓と各種センサー（距離，音，温度，電流・電圧など）は，手のひらサイズで持ち運びが容易であり，しかも，操作が簡単である．さらに，安価であるため，少人数のグループで１台ずつの実験環境を整えることができ，生徒主体による実験が可能である．図 1-2-3 に示すように，データ収集機とセンサーで得られた実験データは，グラフ電卓のリストに格納され時系列のグラフとして表示されるため，生徒は得られた実験データを加工して数学的に解析し，最終的には，解析した数学的モデルの物理的意味の解釈を行うことができる．これらのハンドヘルド・テクノロジーを活用することにより，実験データの収集から解析・考察までの一連の数学的活動が容易に行うことが可能となった．（佐伯他，1997；佐伯・氏家，1999；佐伯，2000；梅野，2002）．

筆者は，これらのハンドヘルド・テクノロジーが，①「数物ハンズオン」の目的を補助する道具として適している，② 実験操作が容易であることから実験の経験が少ない生徒にとって適している，といった理由で「数物ハンズオン」の実験装置として採用した．

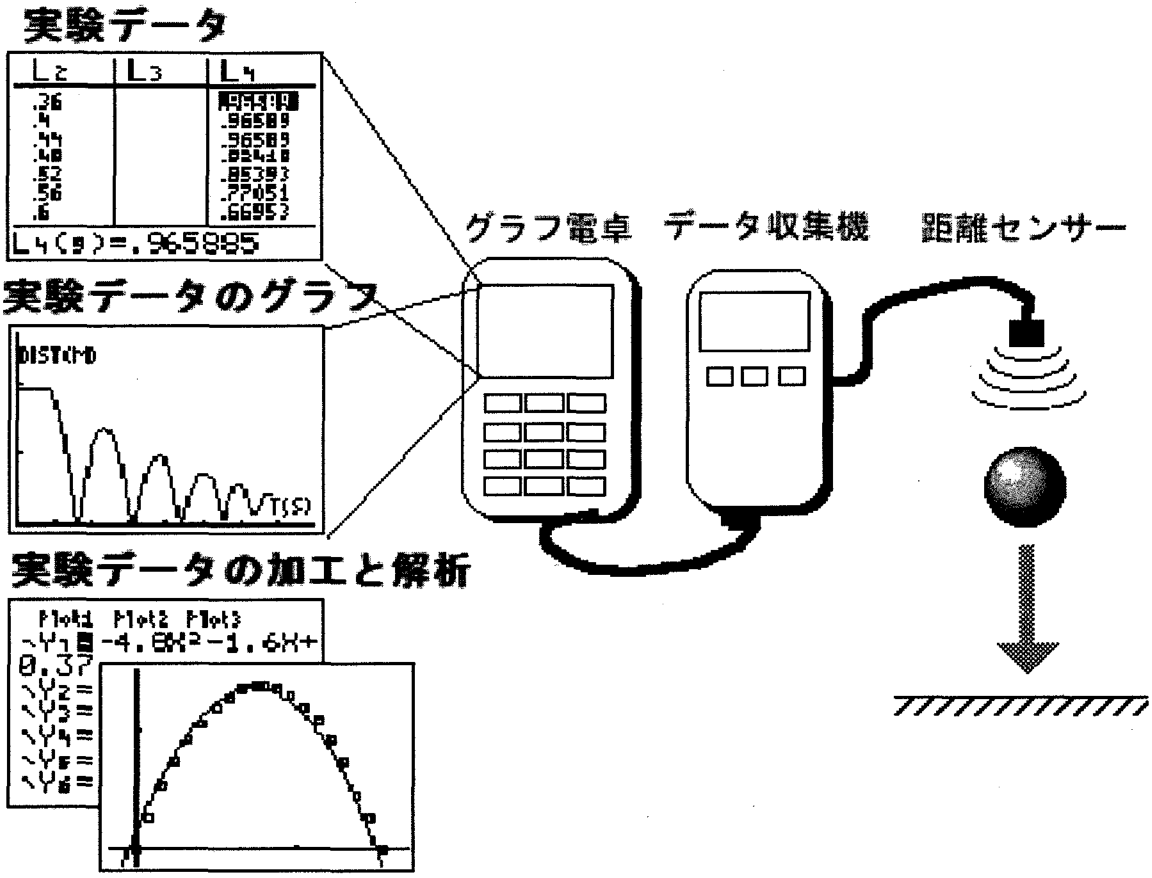


図 1-2-3．実験装置例（ボールの実験）

(3) 本研究における評価方法

本研究での評価方法は，生徒がどのようにテクノロジーと対話をしながら主体的な数学的活動を行い数学的な規則や特徴を発見したのか，さらに，その結果をどのように考察したのかについて，生徒のレポート内容を分析することで数学的活動の有効性を明らかにする．

評価方法としては，①実験群と統制群による統計的比較，②授業前と授業後のアンケートによる生徒の態度の変容分析，③授業中における発話プロトコールの分析，④授業後のインタビューによる調査，などが考えられる．しかし，本研究では，生徒が発見した多様な規則や考え方を授業に積極的に活用することを目的とするため，①生

徒個々の反応を授業に反映させる必要性，②生徒の反応を次の授業[8]で活用するために短時間で生徒の反応を評価する必要性，といったことから生徒のレポート内容を分析する手法を採用した[9].

3．研究の成果

本研究で行ったタイプ１の実践結果から，通常の数学授業におけるグラフ電卓は生徒の主体的な数学的活動を支援する良いパートナーとして有効であることが明らかになった．詳しくは第３章で紹介する．さらに，タイプ２の実践結果から，数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」においても同様に，ハンドヘルド・テクノロジーは生徒の主体的な数学的活動を支援する良いパートナーとして有効であることが明らかになった．詳しくは第４章で紹介する．

以上のことから，テクノロジーを活用した数学的活動は，生徒とテクノロジーとの間により良いパートナーシップを築くことにより，生徒自らの力で既習事項を関連づけながら数学を発展的に創りだす創造的な授業が展開できたと結論づけた．

---

[8] 少なくとも１週間以内に生徒の反応を分析し，授業に活用することが大切であると考える．

[9] 他の評価方法を否定しているのではなく，幾つかの評価方法を組み合わせることにより，より多角的で有効な評価が行えると考える．

引用文献・参考文献

1) 足利裕人（2000）．グラフ電卓で楽しむプログラミングワールド．大河出版．

2) B．ケリー（1997）．グラフ電卓で探る数学の世界．清水克彦監訳．現代数学社．

3) 飯島康之編著（1997）．ＧＣを活用した図形の指導．明治図書．

4) 礒田正美，大久保和義，飯島康之（1992）．メディアを活用する数学科課題学習 －場面からの問題作成による授業改善－．明治図書．

5) 一松信（1995）．グラフ電卓を数学に －活用の意義と教材集－．教育社．

6) 岡森博和編著（1987）．数学教育とパソコン．第一法規．

7) 文部省（1989a）．高等学校学習指導要領．

8) 文部省（1989b）．高等学校学習指導要領解説 －数学編理数編－．ぎょうせい．

9) 文部省（1992）．高等学校 数学 指導資料 指導計画の作成と学習指導の工夫．学校図書．

10) 守屋悦郎，吉村啓編著（1997）数学教育とコンピュータ．学文堂．

11) 村上温夫（2000）．IT でめざせ，教育革命 －発見・探究の喜びをインフォメーションテクノロジーで！．新曜社．

12) 能田伸彦，中山和彦編著（1996）．自ら学ぶ図形の世界 －先生・生徒・コンピュータが作る新しい授業－．筑波出版会．

13) 佐伯昭彦，礒田正美，清水克彦編著（1997）．テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー．明治図書．

14) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999).「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」．日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」．産業図書．pp.295-313．

15) 佐伯昭彦（2000）．数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究ー身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業ー．平成 10ー11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書．

16) 清水克彦（1997）．「数学教育におけるテクノロジー活用の歴史的変遷」．佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」．明治図書．pp.5-21．

17) 清水克彦，垣花京子編著（1999）．コンピュータで支援する生徒の活動 －数学科・図形分野での新しい展開－．明治図書．

18) 竹之内脩（1985）．コンピュータと数学教育．日本評論社．

19) 寺田文行，吉村啓編（1995）．数学教育とコンピュータ．日本評論社．

20) 寺田文行，巻久，吉村啓編著（1995）．グラフ電卓で数学する．共立出版．

21) 中央教育審議会（1996）．２１世紀を展望した我が国の教育の在り方について（第1次答申）． http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/chuuou/toushin/960701.htm.

22) 梅野善雄（2002）．「数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果」．工学教育．50．1．pp.22-27.

1．3　本論文の構成

本論文は，以下の５つの章から構成されている．

第１章では，我が国の高等学校の数学教育における現状と課題について，①高校生の数学学力，②数学学習における高校生の意識，③教師の数学指導状況，の三つの観点から分析・考察した．さらに，これらの考察に基づいて，本研究の目的と方法について述べた．

第２章では，テクノロジーを活用した数学的活動の特徴と課題について，先行研究をもとに分析・考察した．はじめに，数学的活動におけるテクノロジー活用の意義について，①数学的活動の捉え方，②数学活動を支援するテクノロジー活用方法の分類と我が国における実践的研究の活用事例，について明らかにした．次に，タイプ１の数学授業で活用するグラフ電卓の研究成果と課題について，①グラフ電卓の活用研究の変遷，②グラフ電卓活用の利点，③グラフ電卓の誤表示による誤認識の弊害と教育的利用，の三つの観点を明らかにした．さらに，タイプ２の総合学習で実践する数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の研究成果と課題について，①数学的モデリングの捉え方，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究，について明らかにした．

第３章では，タイプ１の数学的活動での授業内容とその成果について記述した．実際に実践した数学的活動は，①単元の導入時に行った数学的活動［極限の実践］，②単元の授業中に学習している内容をより深く理解するための数学的活動［極座標の実践］，③単元のまとめや発展的な学習としての数学的活動［３次関数の実践］，の３つの種類である．これらの実践について，グラフ電卓を活用した教材を開発し，実際に授業を行い，生徒のレポートを基に生徒の数学的活動を分析した結果，以下のことが明らかになった．

(1) 授業の導入時での極限に関する数学的活動では，生徒が掴んだインフォーマルな概念・考え方を授業に活用し，数学的な定義と記号に置き換えながら授業を行うことができた．グラフ電卓活用による生徒のインフォーマルな理解とフォーマル

な数学の理解との数学的なつながり（connections）は，NCTM（1989）のスタンダードで強調されているが，我が国で実証的に明らかにした実践は本研究が初めてである．

(2) グラフ電卓を活用した主体的な数学的活動では，生徒は多様な規則を発見し，既習の知識・技能を総合的に活用しながら問題解決を行うことができた．さらに，発見した規則が成り立つ理由を生徒自らが数学的に考察するオープンエンドアプローチ的な授業を展開することができた．グラフ電卓を活用したオープンエンドアプローチ的な数学的活動の研究報告は，我が国では西村（1996）の実践研究が特徴的である．西村の実践では，オープンエンドな課題から得られた多様な関数関係を解決する道具としてグラフ電卓が活用されたのに対して，本研究では，多様な規則を発見する段階から問題を解決する段階までの全ての段階において，グラフ電卓を活用したオープンエンドアプローチ的な数学的活動が展開できたと言える．

(3) 発見した規則が成り立つ理由を生徒自らが考察し記述することにより，既習の知識・技能を総合的・発展的に活用する機会を生徒に与えることができた．

(4) グラフ電卓の誤表示の原因を生徒自らが追究することで，生徒は誤表示によるグラフの誤認識を自らの力で回避することができた．これに関する実証的な研究は我が国におけるテクノロジー活用の研究では例がない．

(5) 生徒の主体的な数学的活動では，生徒は数学的活動のパートナーであるグラフ電卓との対話を行うことで，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に作用させながら，生徒が発見した数学的内容を創り上げる創造的な活動を行うことができた．生徒とグラフ電卓との対話の重要性を実証的に示した研究報告は，我が国では片岡（1996）以外には見られない．片岡の実践研究では，生徒が作成したグラフとグラフ電卓が表示したグラフが異なった場合，生徒に認知的葛藤が生じ，その結果，手計算とグラフ電卓との往復を繰り返すことで，生徒が問題解決の新しい視点を発見したことを報告している．これに対して，本研究では，多様な規則を発見する段階から問題を解決する段階までの全ての数学的活動において，生徒はグラフ電卓を数学的活動のパートナーとして，対話を繰り返しながら，自らの力で数学を高めていく創造的な数学的活動を行ったことが明らかになった．

第４章では，数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要と実践の成果について述べた．「数物ハンズオン」は，平成８年度に全国に先駆けて実施した

総合学習である[1]．さらに，「数物ハンズオン」で取り扱っているテーマ群は，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリング過程の能力の育成を考慮して構成されており，カリキュラムに位置づけられた数学的モデリングの授業は，我が国で初めての実践である．その結果，以下のことが明らかになった．

(1)　２年間の「数物ハンズオン」を受講した生徒を対象に調査したアンケート結果から，実験結果を数式（数学的モデル）で表すことの有用性に関する生徒の意識は，３テーマ終了時に対して７テーマ終了時の方が向上していたことが分かった．特に，「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内容を記述した生徒が増えていたことが分かった．これまでの実践研究では，１つの実践を行ったあとに調査した生徒の意識・態度から結論づけているのに対して，長期間の実践における生徒の数学に対する有用性の意識を調査した研究は，我が国では初めてである．

(2)　グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性と，最適な数学的モデルを選択する数学的活動では，生徒たちは自らの考えで①妥当性の検討基準の設定，②現実場面との対比による検討，③二つの数学的モデルの併用，など多様な検討を行っていた．この数学的活動では，グラフ電卓をブラックボックスとして扱うのではなく，グラフ電卓に表示された数学的モデルを生徒自身の自由な発想で検討する道具として取り扱った．そのため，生徒達は自由な発想でグラフ電卓と対話をしながら，数学的モデルの妥当性の検討とより良いモデル化の検討を行っていたことが分かった．この結果，本教材での手法は，ハンドヘルド・テクノロジーの活用によるボタンプレッシングの危険性を解消する一つの教育的方法を示唆するものと考える．

(3)　「お湯の冷め方」実験では，グラフ電卓の回帰モデル機能で得られた数学的モデルを現実場面と関連づけながら評価・解釈し，最終的には生徒自らの考えで数学的モデルを修正することができた．グラフ電卓の回帰モデル機能には制限[2]があるため，現実現象に適した数学的モデルが得られるとは限らない．しかし，生徒たちはグラフ電卓が算出した数学的モデルを鵜呑みにしないで，現実にお湯が冷める現象とグラフ電卓の結果を関連づけながら数学的モデルを修正した．グラフ電卓の回帰モデル機能が算出した数学的モデルを修正した事例は，Zbiek (1998) が

---

[1] 平成８年に中央教育審議会 (1996) は，「第１次答申」で［生きる力］を育てるための横断的・総合的な学習を提案している．

[2] 例えば，グラフ電卓の指数回帰機能では，$y = a \times b^x$ の数学的モデルを算出することができるが，室温Ｃ度まで冷めるお湯の変化を表す数学的モデル $y = a \times b^x + c$ はこの機能では求めることはできない．

教員志望の大学生を対象にした実践研究以外には報告されていない．しかし，本研究の成果により，高校生でもグラフ電卓が算出した数学的モデルと現実場面と関係づけながら数学的モデルの修正ができることが明らかになった．

第５章では，本研究における結論をまとめ，さらに，今後の課題について述べた．

引用文献・参考文献

1) 片岡啓（1996）．「高校「微分法」におけるグラフ電卓の活用」．日本数学教育学会誌．数学教育．第78巻．第7号．pp.14-19.

2) NCTM（1989）．Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics．NCTM.

3) 西村圭一（1996）．「探究活動中心の授業に関する一考察 -テクノロジーを利用して-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第78巻．第9号．pp.21-26.

4) 中央教育審議会（1996）．２１世紀を展望した我が国の教育の在り方について（第１次答申）．http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/chuuou/toushin/960701.htm.

5) Zbiek, R. M.（1998）．" Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models"．Journal for Research in Mathematics Education．Vol.29．No.2．pp.184-201.

第２章

テクノロジーを活用した数学的活動

２．１　数学的活動とテクノロジー活用の意義

１．はじめに

平成11年に公表された高等学校学習指導要領（数学）の目標は，「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる」であり，これは従前（平成元年版）の目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」が付加されただけの変更である（文部省，1999a）．

ここでは，先行研究をもとに①数学的活動の捉え方と②数学的活動を支援するテクノロジー活用について考察する．

２．数学的活動の捉え方

現行の学習指導要領が新しく述べる「数学的活動」とは，何を意味しているのであろうか．我々教師は，日々の授業で生徒と一緒に数学に関する学習活動を行っているが，これらの学習活動は，学習指導要領が述べる「数学的活動」とは言わないのであろうか．ここでは，数学的活動の捉え方について先行研究をもとに考察する．

(1) 学習指導要領解説が述べる数学的活動

数学的活動とは，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直感，類推，帰納，演繹などの内的な活動のことであり,高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-では，以下の三つの思考過程を数学的活動として記述している（文部省，1999b）．

「高等学校ではさらに，次のような思考活動を数学的活動ととらえている．

・身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動

・設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し，その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等（以下「数学的知識」という）を構成する活動

・数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

高等学校における数学的活動では，内的な活動が中心となるが数学化の場面や数学的考察・処理の過程では，観察，操作，実験などの外的な活動も含まれている.」（pp.9-10）

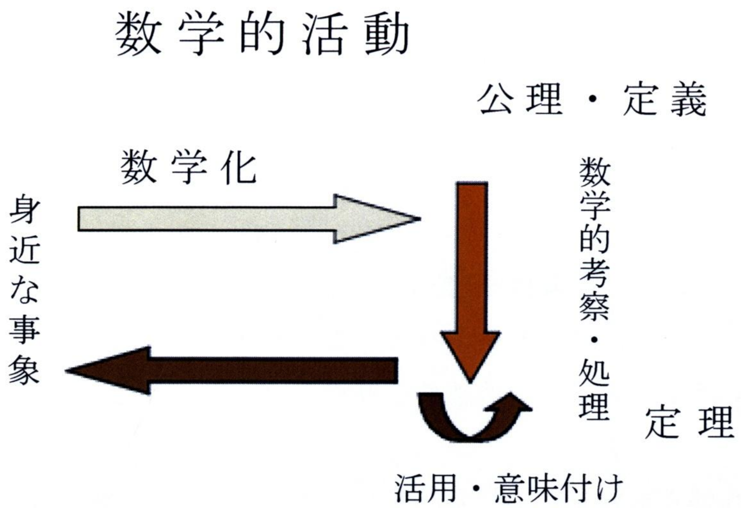


図 2-1-1. 数学的活動の模式図

また，数学的活動において，生徒の主体的な活動を促すことを，以下のように強調している（文部省，1999b）.

「今回の目標の改訂で重視した数学的活動は，活動の目的を一層明確にし生徒の主体的な活動を促すとともに，次のような点を強調するものである.

・身近な事象との関連を一層図り，数学化の過程を重視する.

・主体的に様々な問題解決の方法を味わったり，問題解決の後も自らの思考過程を振り返ったり，その意味を考え，より発展的に考えたり，一般化したりして問題の本質を探ろうとするなど，数学的考察・処理の質を高める.

・見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり，見いだした数学的知識をいろいろな場面に活用したりする.」（pp.10-11）

観察，操作，実験・実習などの外的な数学的活動は，生徒たちの想像力及び直観力によって行われるため，生徒たちは沢山の規則や性質を発見し，発見する楽しさから数学への興味・関心を引き起こす．しかし，この外的な数学的活動で終わるのではなく，生徒自らが発見した規則や性質，または，疑問等に対して，内的な数学的活動を通して，生徒が既習事項と関連づけて自らの力で考え，生徒が「なるほど！」と納得したときに確かな知識が築き上げられると考える．このように，外的な活動と内的な活動の相互作用による数学的活動は，生徒自身による数学の再生産という論理的かつ創造的な学習を行うために必要不可欠な活動であり，新学習指導要領では以下のよう

に述べている（文部省，1999b）.

> 「小学校や中学校の目標には，数学的活動などの「楽しさ」が示されていて，高等学校の目標にはそのことについての直接的な表現はない．しかし，この数学的活動では，数学が作られてきた過程を追体験するなど発見の喜びや活動の楽しさを味わうことができ，小学校や中学校と同様実質的に「楽しさ」を含んでいる．
> 　ただ，高等学校の目標では「楽しさ」にとどまるのではなく，数学的活動を通して，数学への興味・関心を一層喚起するとともに，論理的思考力，想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うことを目指している．」(p.11)

以上のことから，学習指導要領解説が述べる「数学的活動」には，①生徒主体による活動，②外的活動と内的活動の相互作用，③発見する楽しさによる創造性の育成，といったキーワードが浮かび上がってくる．以下に，これらのキーワードについて考察する．

(2) 生徒主体による数学的活動と教師主導による数学的活動とのバランス

数学的活動の「活動」を辞書[1]で調べると以下の２つの意味が記述されている．

活動①：はたらき動くこと

活動②：いきいきと行動すること

人間以外の物体に関する「活動」は，「火山活動」「火成活動」「天体活動」など，活動①の意味として使われる．

一方，人間に関する「活動」を考察すると，任務として行なう「活動」の「復旧活動」「救援活動」「地下活動」「就職活動」などは，活動①の意味である．これに対して，「ボランティア活動」「クラブ活動」「特別活動」などは，人間個人の自主的・自発的な「活動」であれば，それらに従事している人間は「いきいき」としているので活動②の意味として捉えることができる．しかし，これらの「活動」が強制的・義務的になれば，従事している人間は単に「はたらき動く」だけになり，活動①の意味に変わってしまう．つまり，個人内の自主的・自発的といった内発的動機づけ，または，個人外の強制的・義務的といった外発的動機づけによって，個人の活動が活動①にも活動②にも変わってしまうのである．

このような意味で数学的活動を捉えると，従来の教師主導による授業での数学的活動は，教師から与えられた課題を生徒が決められた手順で解決する活動①のタイプの数学的活動であると考えられる．これに対して，生徒主体による数学的活動は，生徒

[1]　「広辞苑 第五版」岩波書店

が自ら課題を見つけ自らの力でいきいきと問題解決する活動②のタイプの数学的活動であり，まさに現行の学習指導要領のねらいとする自ら学び，自ら考える力の育成が可能となる．

デューイ（1957）は，「学校と社会」で子どもの活動の個性化について次のように述べている．

「子どもたちは活動する瞬間，自ら個性化する．かれらは一群ではなくなり，各自それぞれにはっきりした個性的な人間になる.」（p.43）

つまり，デューイの立場で数学的活動を解釈すると，個々の生徒が個人的な人間として活動する主体的な学習を数学的活動として捉えることができる．しかし，日々の授業を考えると，授業の全ての時間を生徒主体による授業は可能であろうか．筆者は，生徒主体の数学的活動と従来の教師主導による数学的活動とのバランスが重要であると考える．これについて，先行研究をもとに考察する．

オープンエンド アプローチを提唱した島田（1977，1995）は，数学に関係する全ての思考活動を数学的活動として，図 2-1-2 に示す模式図を用いて数学的活動を表わしている．島田は，従来の教室で行われていた多くの学習活動は，教師によって数学的に言い換えられた段階ｇから出発していることを指摘している．つまり，従来の学習活動は教師主導による数学的活動として捉えることができる．これに対して，オープンエンド アプローチは，個々の生徒がａの現実世界から出発して，ｆからｇへの抽象化，理想化，簡単化の過程によって発見した多様な規則やきまり，さらには，ｎからｏへの一般化の過程によって得られた一般理論を授業で積極的に活用することから，生徒の個性を尊重した生徒主体による数学的活動として捉えることができる．このように島田が述べる数学的活動は教師主導と生徒主体の両方の活動として捉えることができるが，島田は，従来の教師主導による数学的活動を行う通常の授業の中に，生徒主体による数学的活動を補完的に組み入れることを次のように提案している．

「算数・数学教育における子どもの学習活動の中に，ｆ→ｇ→ｌ→ｍの過程やｎ→ｏの過程に相当することを含めるべきであることは，当然であるといえよう．

この過程の活動は，従来行われている活動と二者択一的な関係にあるものではなく，それらが互いに他を補う補完的な関係にある．この補完的な関係を生かしていくためには，ｆ→ｇ→ｊ→ｌ→ｍ→ｇ→…という過程のすべてを含む大がかりな学習単元を年に１，２回試みるというよりも，従来の素材を適宜に変形したものを用いる小規模なまとまりを作り，多面的な答をくふうする機会を多くすることの方が望ましい．この過程の特徴は，結果が一定に指定されず，発想のいか

んによって多様な定式化が可能であり，そこに既習の知識なり，考え方，見方が生かされる点にある．

そこで，多様な定式化が，子どものそれまでの学習範囲から見て可能であるように条件設定をした小規模な問題を用意し，これを，他のアプローチによる指導–評価の計画とないまぜにした指導–評価の計画を立て，これによって指導を進めるというのが，オープンエンド アプローチである．

本書で以下に説明するのは，このような形態の授業だけで全体を覆うことを主張するものでなく，全体計画の中の不可欠な一部としてこのようなことを取り上げてみてはどうかという提案である.」（pp.20-21）

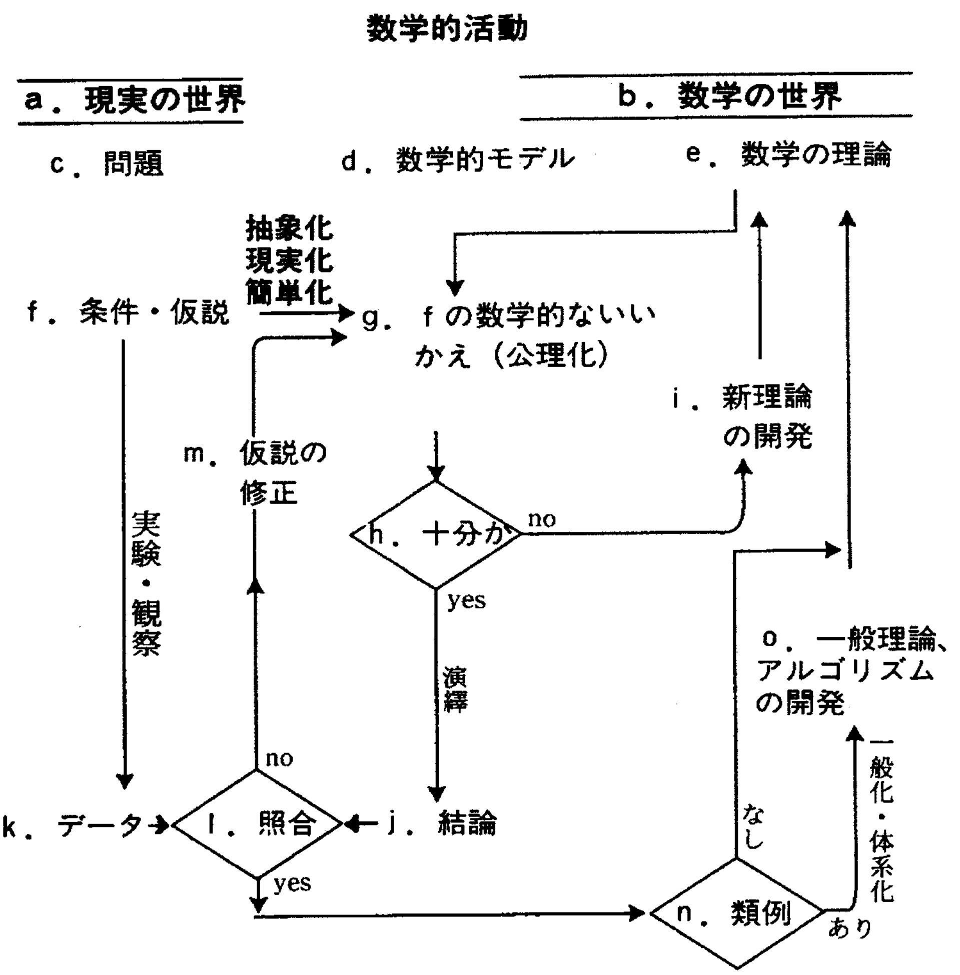


図 2-1-2．数学的活動の模式図[2]

[2] 島田茂編著（1995）．新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ，東洋館出版，p.15.

次に，古藤（1991）が主張する Do Math について考察する．Do Math の活動は，生徒が主体的に数学を理解したり創り上げたりする活動であることから，古藤が主張する Do Math は生徒主体による数学的活動であると捉えることができる．古藤は，Do Math の指導類型を以下の４つの場面に分類し，教師主導のなかに生徒主体の Do Math 的な活動を取り入れる必要性を述べている．

① 計算などの訓練を重視する授業
② 概念・法則などの理解を大切にする授業
③ 子供たちの発見の喜びを大切にする授業
④ 子供たちの追究体験を大切にする授業

以上のことから，本研究で取り扱う数学的活動とは，第１章の研究の方法で述べたように，生徒の主体的な数学的活動を中心に授業を展開し，さらに，生徒が発見した規則や性質を教師主導の数学的活動に積極的に活用しながら，両方の数学的活動が相互に補完する形で授業を発展的に展開する活動として捉えることにする．

(3) 外的な数学的活動と内的な数学的活動との相互作用

高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-では,高等学校の数学的活動は内的な活動が中心となるものの，数学化の場面や数学的考察・処理の過程では観察，操作，実験・実習などの外的な活動も含まれることを記述している（文部省，1999b）．ここでは，外的な活動と内的な活動の相互作用について根本（1999）と黒澤（1999）の見解をもとに考察する．さらに，生徒の外的な数学的活動を促すための「身近な事象」とは何かについて考察する．

根本（1999）は，問題解決過程での活動を physical な側面と mental な側面とに分けて表し，外的行為は内的行為の活性化を促し，内的行為は外的行為を誘発するものとして，双方の相互的かつサイクリックな活動が知的充足を高めるとしている．

「ア）計算処理や図形の具体的操作など客観的に観察が可能な活動（外的行為）
イ）類推したり，振り返って考えたりするなどの内面的な活動（内的行為）」
(p.27)

黒澤（1999）は，図 2-1-3 に示すように，「算数的活動」を具体的操作（現物実験）と念頭操作（思考実験）の往復を繰り返しながら「数学的な高まり」のある「操作」の連続的な集合体として捉えている．黒澤が示す具体的操作と念頭操作は，学習指導要領の外的な活動と内的な活動として解釈でき，時間経過とともに双方の活動を繰り返しながら数学を創造していく活動が黒澤の模式図から解釈することができる．

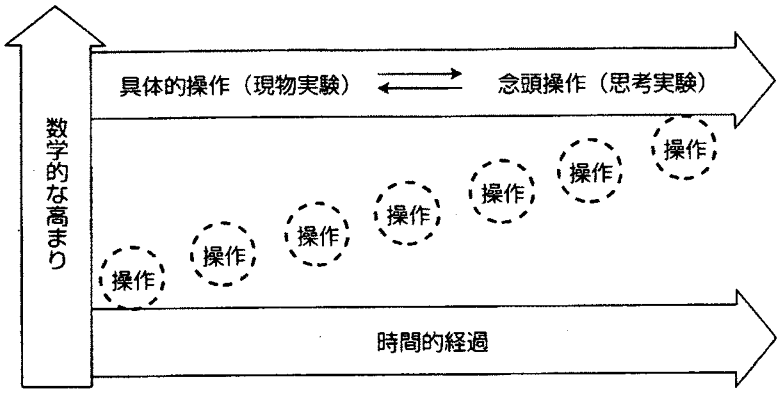


図 2-1-3. 具体的操作と念頭操作による数学的な高まり[3]

このように根本と黒澤の見解を参考にすると，数学的活動とは，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連させながら，生徒が具体的な操作や観察・実験で得たことを数学的な内容に高めていくことが重要であると考える.

これに関して，デューイ（1975b）は，生徒自らが実際に経験する直接的経験と，授業における言語や記号によって媒介された間接的経験とが実り豊かに結びつく教材の重要性について以下のように述べている.

> 「これ（直接的経験）[4]は，単に量とか大きさの問題ではない．十分な直接的経験とは，それよりももっと質の問題である．つまり，それは，記号的な教材と容易にしかも実り豊かに結びつくような種類のものでなければならないのである．教授活動が記号という媒体による事実や観念の伝達を安全に開始することができるようになるためには，その前に，学校教育は，本人自ら情況に関与することによって教材の意味やその教材に含まれている問題を切実に感じさせるような，本物の情況を与えなければならないのである．その結果生ずる経験は，生徒の立場から言えば，それだけで，やる価値があるものであり，教師の立場から言えば，記号を伴う教授内容を理解するのに必要な教材を与える手段でもあり，開かれた心という態度や，記号によって表された教材についての関心を引き起こす手段でもあるのである.」（pp.63-64）

高等学校学習指導要領解説−数学編 理数編−が示す数学的活動の模式図（図 2-1-1）には，数学的活動は「身近な事象」を取り上げることから始まることを示している（文部省，1999b）が，次に，生徒の主体的な数学的活動を促す引き金となるべき「身近な

[3] 黒澤俊二（1999）．なぜ「算数的活動」なのか．東洋館出版．p.61.
[4] カッコ内は，筆者が加筆した．

事象」とは何かについて考察してみる．

まず，「身近な事象」の「身近」を辞書[5]で調べてみると，以下の２つの意味が記述されている．

身近①：自分の身に近いこと．身に近い所．身辺．「−に迫る」

身近②：自分と関係の深いこと．日常慣れ親しんでいること．「−な問題」

生徒の具体的な操作・活動によって生じている事象が，ただ単に生徒の近くで起きている身近①の意味として事象として捉えるのではなく，生徒がその事象を自分自身の課題として「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を生徒の内面に駆り立てさせるような事象，つまり，外的な数学的活動では，身近②の意味の事象として生徒が深く関わることが重要であると筆者は考える．

さらに，「身近な事象」の「事象」は，辞書で以下のように記述されている．

事象：ことの成り行き・様子．ことがら．

数学的活動の実践研究には，日常的な事象や自然現象を数学化する事例が多い（永田，1999；長崎，2001；日本数学教育学会研究部，2001；坂本，2002；永田，2002）．しかし，辞書的に解釈すれば，生徒が数学学習で扱う数表，グラフ，幾何図形なども「事象」として捉えることができると筆者は考える．このことを島田（1995）は，数学的活動の模式図（図 2-1-2）を用いて以下のように述べている．

「まずはじめに，ａ．**現実の世界**とｂ．**数学の世界**とがあり，現実の世界には，何らかの意味でｃ．**問題**があり，解決をせまっているとする．ここでいうａの現実の世界というのは，必ずしも物理的な経験世界だけを意味するものと限る必要はない．ｂの数学の世界より抽象度の低い世界であってもよい．」(p.14)

つまり，生徒が外的な数学的活動において深く関わる「身近な事象」とは，日常的な事象や自然現象だけでなく，数表，グラフ，幾何図形など数学的な事象も含むものとして解釈することができる．

以上の考察から，本研究における「身近な事象」とは，生徒が主体的に行う外的な数学的活動に関わる全ての事象に対して，生徒自身が事象と深く関わることで生徒の内面に「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を引き起こす事象を「身近な事象」として解釈することにする．さらに，生徒の知的好奇心を引き起こす「身近な事象」を取り扱った数学的活動の実践では，外的な数学的活動と内的な数学的活動が相互に作用させながら数学的内容を高める教材開発が大きな鍵となってくると考える．

---

[5] 「広辞苑 第五版」岩波書店

(4) 数学的活動と創造性

ここでは，学習指導要領の目的に記述された「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」の文言について，数学的活動と創造性との関係について考察する．

学校数学における創造性テスト[6]を開発研究している斎藤（1998）は，学校教育における創造性を以下のように定義している．

「本人にとって新しい価値があり，その学習集団の構成員に評価されるものを発想したりつくり出したりする能力及び人格特性である.」(p.20)

確かに，学校数学において生徒が社会的に評価されるオリジナルなものをつくり出すことは稀である．しかし，既成の学問体系としてでき上がった数学を文化の継承として教え込むのでなく，子ども自身が数学を作り上げ，それが子ども本人にとってもクラスの友達や教師にとっても価値があると認識することが大切である．

平林（1987）は，彼の主張する数学教育の活動主義的展開において，子どもたちが自ら数学を創りだしていく数学的活動を行うために，教師主導による知識注入型の教育（外在的数学観による数学教育）から子ども主体による知識再生産型の教育への質的変換を以下のように記述している．

「もともと数学は，数学者の内からの創造である．もし，それを子どもの内部での再生産という形で学習されるならば，それは，これまでの外在的数学観による数学教育と異なった教育学を必要とするであろう.」(p.26)

また，菊池（1969）は，子どもたちが自ら数学を創り出していく数学的活動が「数学的な考え方」の育成にも繋がるとことを以下のように述べている．

「数学を創り出した人の気持ちで授業が展開されるとき，初めて”数学的な考え方”もあらわに姿をみせることになろう.」(p.4)

黒澤（1999）も菊池と同様に，算数的活動は生徒主体の創造的活動であり，「数学的な考え方」を生徒が見いだす場であること主張している．

「確かに，「算数的活動」という文言を入れることによって，「自ら一する」子ども，いわゆる「生きる力」を算数科でも育てることを再認識しようというねらいを感じとることができる．

　しかし，それだけではない．私は，前章で述べたように，「算数的活動」といっ

---

[6] 創造性テストに関しては，以下の文献を参照．（斎藤，1999；秋田，2001；斎藤・秋田，2001；斎藤・秋田，2002；斎藤・秋田，2003；秋田・斎藤，2004；斎藤，2004）

たところに，積極的にその意味を見いだしたい．

それは，『数学的な考え方』を育てる場という意味である．「具体的な操作から思考実験へ」，すなわち，「現物実験から思考実験へ」という変容を生みだし，その変容に『数学的な考え方』を見いだし育てようという意味である．「算数的活動」とは，そのような変容の場なのである．

『数学的な考え方』を見いだす場であるから，「算数的活動」は，「自ら一する」という子どもの主体的な創造活動である．そしてそこには，より簡潔に，より明確に，より統合されたものへという数学的な高まりが見られるのである．」（pp.56-57）

以上のことから，本研究における創造性とは，生徒が主体的な数学的活動を通して規則やきまりを発見し，さらに，既習事項と関係づけながら自らの力で数学を創りだすことを創造性と解釈する．

３．数学的活動を支援するテクノロジー活用

平林（1987）は，算数・数学的教具の一般的な概念として，①自主的な子どもの活動性を誘発すること，②数学的概念を構成・形成するための活動的基盤を与えること，の２点をあげている．例えば，机上の１枚の紙片や１本の糸くずでも，上記の２点を踏まえた上で活用されれば数学的教具となることを述べている．一方，どんなに素晴らしい教具を活用しても，教具の用途が誤っている場合や，生徒の主体的な数学的活動を誘発しない場合は，数学的活動として相応しい教具とは言えないと指摘している（p.349）．

高等学校学習指導要領解説−数学編 理数編−は，生徒の主体的な数学的活動をより充実するために，テクノロジーの積極的な活用を述べているが，実際にどのようにテクノロジーを効果的に活用すべきであろうか．

ここでは，先行研究をもとに，生徒の主体的な数学的活動を支援するためのテクノロジー活用について考察する．なお，ここで考察するテクノロジーとは，コンピュータ，インターネット，ハンドヘルド・テクノロジー（電卓，グラフ電卓［数式処理機能付きのグラフ電卓と，数式処理機能のないグラフ電卓］，データ収集機と各種センサー）など，テクノロジー全体を考察の対象とする．

(1) テクノロジー活用の歴史的変遷

数学教育におけるテクノロジー活用は，1950 年代後半に始まり現在に至っている．その間，技術の進歩とともにテクノロジーが急激に発達したことや，数学教育用の汎

用ソフトが開発されたこと，さらに，指導観や指導方法の違いによって，テクノロジー活用が多種多様に変化してきた．ここではテクノロジー活用の歴史的変遷について考察する．

a．コンピュータ主導による学習［1960 年代〜1970 年代］

1958 年米国 IBM 社とハーバード大との協力により世界で始めて CAI システム（Computer Assisted Instruction）の開発研究が行われた．1960 年代から 1970 年代の実践的活用の CAI システムとしては，イリノイ大学の PLATO やスタンフォード大学 IMSSS が有名である．特にスタンフォード大学が開発実践した算数の練習-演習様式の CAI は，小学校 1 年から 6 年における教材が体系的に開発されており，1966 年一1967 年で 1500 名以上の生徒が教材を使用した． CAI 教材のタイプは，①練習-演習様式［drill and practice］，②個別教授様式［tutorial］，③問合せ様式［inquiry］，④ゲーム・シミュレーション様式［game and simulation］，⑤問題解決様式［problem solving］の 4 つのタイプがある（Holtzman，1977a；Holtzman，1977b；教育工学研究成果刊行委員会，1977）．しかし，実践的に活用された教材は①練習-演習様式と②個別教授様式が多く，これらの教材は，教師が意図する指導内容と方法があらかじめコンピュータに組み込まれているため，コンピュータが次に学習する内容を生徒の反応によって選択するコンピュータ主導型の学習が展開されていた．

b．コンピュータとの対話による生徒主体の学習［1980 年代］

1980 年代に入って，汎用の数学教育ソフトが開発されるようになった．特に，数式処理システム（CAS：Computer Algebra System），探究的データ解析（Exploratory Data Analysis）用のソフトやグラフィングツールなどによって，手作業では膨大な時間や労力を必要とした数学的実験や観察による探究活動が，瞬時にかつ容易に実行することが可能となった．このため，1985 年 3 月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書「数学・数学教育に対するコンピュータと情報科学の影響」では，コンピュータの活用によって，生徒自身に数学を探究させ，数学を発見させる探究的数学（Exploratory Mathematics）の重要性が強調された（Howson A.G. and Kahane J.-P.，1986）．ここで述べられている探究的数学とは，コンピュータ上に表示された事象を生徒が主体的に観察することにより，規則や定理を実験的，帰納的に発見し，仮説を立て，さらに，自らの仮説を証明する数学的活動のことを意味している．この報告書では，コンピュータを活用した数学的活動によって，生徒の行動や能力が良い方向に変容することを以下のように述べている．

「もし，生徒が（コンピュータによって）彼らに提示されている数学的現象に応じて認知的に活発であれば，彼らは概念的教材をより良く学習し，数学的なアイ

ディアに関して自律的な行動パターンをより良く発達させることができるであろう．この活動は，数学的対象と過程を表す心的イメージの形成からなるべきである．また，心的イメージを操作する技術の発達も含めるべきである．このように，生徒は数学的に考える能力を増進することができる．」(pp.25-26)

また，この報告書では，数式処理システムを使った探究的数学の事例とコンピュータグラフィックスを使った微積分の探究的数学の事例を数多く紹介している（Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R., 1986；Murakami H. and Hata M., 1986；Tall D. and West B.，1986）．特に，Lane らは，多くの発見を必然的に伴うオープンエンド的な優れた事例と実践展開例を紹介している．

さらに，Steen（1986）は，コンピュータのことを「数学を話す生き物（mathematics-speaking beings)」と称して，コンピュータの無い時代では天才的な生徒のみが発見という経験が出来たのに対して，生徒とコンピュータとの会話により，多くの生徒が自力で発見の喜びを得ることができると述べている．つまり，生徒とコンピュータとのより良いパートナーシップを築くことにより，創造的で発見的な学習が展開できることを主張していると考える．

このように，ストラスブールの会議では，コンピュータを活用した生徒主体による探究的数学が強調されたことが特徴であるが，その反面，1970 年代に研究実践が行われていたコンピュータ主導によるCAI教材について殆ど議論されていないことも特徴の一つとしてあげられる．このことは，1982 年 10 月に米国メリーランド州カレッジパークで開催された米国科学財団（National Science Foundation：NSF）の作業会議の報告書「数学教育とコンピュータ」においても同様であった（Fey，1987）[7]．

以上のことから，1980 年代におけるコンピュータ活用は，コンピュータ主導型の学習から生徒主体によるコンピュータ活用へのパラダイムシフトが行われたと言える．しかし，①テクノロジー技術の進歩（1 年）とカリキュラムの変化（10 年）とのギャップ，②生徒一人に一台のコンピュータを設置するための価格的困難，③教師教育，などの課題が指摘されていた（Burkhardt，1986）．

c．テクノロジー活用の携帯化［1980 年下旬～1990 年上旬］

グラフ電卓は，日本のカシオによって 1986 年に世界で初めて技術者向けに開発された（Harvey et. al.，1995；Waits and Demana，2000）．オハイオ州立大学の Waits 教授と Demana 教授は，このグラフ電卓を教育用に改良し，1980 年下旬から教材開発と教師教育を目的とした研究活動を世界で初めて行った（佐伯，1996）．グラフ電卓は，通

[7] Fey (1987) の報告書では，テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践も強調されている．詳しくは２．３節で述べる．

常の関数電卓の機能はもちろんのこと，関数，媒介変数方程式，極方程式，漸化式のグラフに関する機能と簡単な統計処理機能を持っている．つまり，コンピュータ上で動作していたグラフィングツールと統計パッケージの簡易版が，手のひらサイズのグラフ電卓で実行可能となったわけである．価格はコンピュータと比べると安価であるため一人一台の所有が可能で，携帯性もよく，教室内外を問わず，何時でも何処でも必要な時にグラフ電卓を使った数学的活動が行えるようになった．

全米数学教師協議会（NCTM）が1989年に発表した「学校数学のためのカリキュラムと評価の基準（スタンダード）」の第9学年から12学年のスタンダードにおいて，グラフ電卓とコンピュータの活用について以下のような原則を記述している．

「◆グラフ電卓（Scientific calculators with graphing capabilities）は，全ての生徒にいつでも有効であるだろう．
◆コンピュータは，提示の目的のために全ての教室で常に有効であるだろう．さらに，全ての生徒は個人作業やグループ作業でコンピュータにアクセス可能であるべきである．」(p.124)

このように，NCTMのスタンダードでは，生徒主体による数学的活動を支援するために，誰もがいつでも何処でも必要な時に使用できるグラフ電卓の活用，および，教室に設置されたコンピュータを活用（教師の提示用と生徒の作業用），の両方のテクノロジー活用を推奨した．

さらに，1994年にはデータ収集機（CBL）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが開発され，実現象を取り扱った数学的モデリングの場面においても，誰もがいつでも何処でも必要な時に生徒主体による数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．

d．テクノロジー活用の多様化［1990年中旬以降］

1990年代中旬以降は，数式処理機能付きのグラフ電卓の活用，インターネットを活用した遠隔教育や協調学習，World Wide Web上にあるデータリソースの活用など，数学的活動の内容や目的に応じてテクノロジーの活用が多様化してきた．

(2)我が国における実践的な先行研究の分類

ここでは我が国におけるテクノロジー活用の実践的な先行研究を分類する[8]．テクノロジーの活用方法は，①テクノロジー主導型CAI，②教師による視覚的提示，③プログラミング，④生徒主体による数学的活動，の4つの基準で分類した．なお，分類の

[8] 実際の授業でテクノロジーを活用した実践的な研究論文を調査の対象とした．CAIシステムの開発，数学用ソフトの開発，研究のレビュー等の論文は対象外とした．

対象は，日本数学教育学会誌の数学教育（1980 年以降）に掲載された論文を参考とした．

a．テクノロジー主導型 CAI

表 2-1-1 は，テクノロジー主導型 CAI の先行研究を示している．この表から，我が国におけるテクノロジー主導型 CAI の実践研究は，1990 年中旬まで行われていたが，それ以降はシミュレーション型の CAI が 2 件のみであることが分かる．この結果から，我が国におけるテクノロジー主導型 CAI の実践研究は，ストラスブールの会議から約 10 年後に漸く終わりを遂げたと言える．しかし，研究面や学校教育現場では CAI 学習が使用されなくなったのに対して，現在では家庭学習，生涯学習や資格試験用の市販の CAI 教材，さらに，学習塾や社員教育用の CAI 教材など，多くの CAI 教材が開発され活用されている．しかも，これらの CAI 教材は，従来のドリル，チュートリアル，シミュレーションに加えて，静止画，動画，インターネットなどの機能が多様化している．

表 2-1-1．テクノロジー主導型 CAI に関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー
1983	瀬崎強一	コンピュータ	ドリル
1985	小川幹夫	コンピュータ	ドリル
1989	杉田孟	コンピュータ	チュートリアル＋ドリル
	斎藤昇	コンピュータ	ドリル
	橘川孚	コンピュータ	ドリル
1990	高遠節夫，栗本育三郎	コンピュータ	ドリル＋数式処理
	吉田信也	コンピュータ	チュートリアル＋シミュレーション
1991	斎藤昇	コンピュータ	チュートリアル＋シミュレーション
	松本博史，山上成美	コンピュータ	シミュレーション
	石崎学	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
	志賀清一	コンピュータ	視覚的提示＋ドリル
	藤岡典夫，保積均	コンピュータ	ドリル
1992	野嵜睦美，重松敬一	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
	大石正佳，松尾吉晃，寺田文行	コンピュータ	チュートリアル＋ドリル
1993	北村光一	コンピュータ	ドリル
	大内俊二	コンピュータ	シミュレーション
1995	石崎学	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
1998	滝沢昌弘	コンピュータ	シミュレーション
2002	村田緯和雄	コンピュータ	シミュレーション

b．教師による視覚的提示

表 2-1-2 は，教師による視覚的提示の先行研究を示している．このテクノロジー活用は，黒板とチョークでは表現しづらい幾何図形（三次元を含む），グラフ（三次元を含む）や動画などを大型プロジェクタや大型モニタで視覚的に提示する方法である．1994 年以降の研究が見られないのは，コンピュータのグラフィック作成ソフトやプレゼンテーションソフトが発達したことや教室におけるプロジェクタ設置の普及率が高くなったことが原因だと思われる．

表 2-1-2. 教師による視覚的提示に関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー	備考
1986	永嶋賢一，車浩	コンピュータ	視覚的提示＋シミュレーション	
1989	高木鋼一	コンピュータ	視覚的問題の提示	
	稲田康隆，他10名	コンピュータ	視覚的提示＋ヒントと確認	
	渡辺俊明	コンピュータ	視覚的提示	
1990	円福寺恭司	コンピュータ	視覚的提示	生徒による解答の視覚的検証にも併用
	緒方優，肥後昭治	コンピュータ	視覚的提示	
1991	井上正記	コンピュータ	シミュレーション	
1993	鈴木守	コンピュータ	シミュレーション	
1994	黒木史敏	コンピュータ	視覚的提示	生徒による解答の視覚的検証にも併用
	荒井久雄	コンピュータ	視覚的提示＋シミュレーション	
	鈴木守	コンピュータ	視覚的提示	
2001	水谷尚人	コンピュータ	作図ツール	

c. プログラミング

表 2-1-3 は，プログラミングに関する先行研究を示している．従前の学習指導要領では，プログラミングを通して数学内容や概念を理解することが強調されていたが，数学教育用ソフトやグラフ電卓の出現によって，実践的な研究は１件のみであった．

表 2-1-3. プログラミングに関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー
1989	石川順一	コンピュータ	関数のグラフ

d. 生徒の主体的な数学的活動

表 2-1-4 は，生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究を以下の４つのカテゴリーに分類したものである．

① 規則・性質の発見及び検証の道具

例えば，x^n-1を数式処理システムで因数分解して，整数nと因数との間に見られる規則や性質を発見し，その規則や性質が成り立つ理由を数学的に解決する数学的活動である．ここでのテクノロジーは，規則・性質を発見する道具，発見した規則・性質が成り立つことを検証する道具，さらに，証明するときに数学的処理を補助する道具として活用される．生徒がこの数学的活動よって発見する規則・性質は多様である場合が多く，オープンエンドアプローチの実践として展開することができる．

② 問題解決の道具

教師から与えられた課題を数学的に解決するとき，数学的処理を補助する道具としてテクノロジーを活用する数学的活動である．

③ 数学的モデリングを補助する道具

数学的モデリング過程において，実際の事象からデータを収集するための道具，データを数学的に処理する道具，得られた数学的結果を実事象で検証する道具と

してテクノロジーを活用する数学的活動である．

④ 作品制作の道具

例えば，関数を使ってのグラフアートや，プログラムを使って三次元アートを作成するなど，作品を制作する道具としてテクノロジーを活用する数学的活動である．

表 2-1-4 の結果から，我が国では，ストラスブールの会議の約 10 年後の，1990 年中旬からテクノロジーを活用した生徒主体による数学的活動の実践研究が盛んに行われるようになったことが分かる．さらに，数学的活動で活用されているテクノロジーは，グラフ電卓，数式処理システム，作図ツール，データ収集機（CBL／CDA[9]）と各種センサー，インターネットなど，数学的活動の内容によってテクノロジーの活用が多様化している．特に，1998 年以降から数学的モデリングの実践研究が増えているのは，データ収集機（CBL／CDA）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが活用できるようになったことが大きな要因であると思われる（表 2-1-5）．

表 2-1-4．生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究[10]

年	著者	機種	カテゴリー	活動の分類
1991	德峯良昭	コンピュータ	自作ソフト（統計処理）	問題解決
1993	滝井哲也	コンピュータ	自作ソフト（統計処理）	規則・性質の発見・検証
	大西正和	コンピュータ	自作ソフト（作図ツール）	規則・性質の発見・検証
1995	久保良宏，藤澤由美子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	持永純子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	垣花京子，清水克彦	コンピュータ	作図ツール	問題解決
1996	柳本哲	コンピュータ	シミュレーションソフト	数学的モデリング
	中込雄治	グラフ電卓	グラフ表示	作品制作
	片岡啓	グラフ電卓	グラフ表示	問題解決
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	グラフ表示	問題解決
1997	辻宏子	コンピュータ	作図ツール	問題解決
	村上温夫，松本茂樹	コンピュータ	数式処理＋インターネット	規則・性質の発見・検証
	松本茂樹	コンピュータ	数式処理＋インターネット	規則・性質の発見・検証
1998	宮川健	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	佐伯昭彦，氏家亮子	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	鈴木純子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
1999	松嵜昭雄，礒田正美	グラフ電卓	測定データ＋グラフ表示	数学的モデリング
	永田裕一郎，他３名	コンピュータ	作図ツール	規則・性質の発見・検証
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
	深澤一幸	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
2000	永井正洋，岡部恭幸	コンピュータ	インターネット	問題解決
2001	西村圭一	グラフ電卓	社会現象データ＋グラフ表示	数学的モデリング
2002	福沢俊之	コンピュータ	作図ツール	問題解決
	臼田三知永	コンピュータ	3Dグラフィックスソフト	作品制作
2003	佐伯昭彦，氏家亮子	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	水谷尚人	コンピュータ	簡易CADソフト	作品制作
	中村好則	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	小寺隆幸	グラフ電卓	自然現象データ＋グラフ表示	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	測定データ＋最大値機能	数学的モデリング
2004	佐伯昭彦，黒木伸明	グラフ電卓	グラフ表示＋TABLE機能	規則・性質の発見・検証

9　CBL（Calculator-Based Laboratory）はテキサス・インスツルメント社のデータ収集機で，CDA（Casio Data Analyzer）はカシオ社のデータ収集機である．

10　西村（1996）の実践は，生徒が発見した多様な関数関係を授業で展開するオープンエンドアプローチを取り入れている．しかし，授業でのテクノロジー活用は，生徒が発見した関数関係を数学的に探究または問題解決する道具として活用されているため，分類を「問題解決」とした．

表 2-1-5. 生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究の発表件数

分類	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	計
規則・性質の発見・検証				2		2		2	1	1					1	9
問題解決		1				1	2	1			1		1			7
数学的モデリング							2		4	3		1		4		14
作品製作							1						1	1		3

(3) 考察

表 2-1-6 は，我が国におけるテクノロジー活用に関する実践的な研究件数の推移を表している．この表から，1995 年を境に，テクノロジー主導型から生徒主体による数学的活動へと研究の対象が移っていることが分かる．

表 2-1-6. テクノロジー活用に関する実践的な研究件数の推移

分類	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04	計
テクノロジー主導型CAI	1		1				3	2	5	2	2		1			1				1			17
教師による視覚的提示				1			3	2	1		1	3							1				11
プログラミング							1																1
生徒の主体的な数学的活動									1		2		3	5	3	5	4	1	1	2	5	1	33

次に，生徒の主体的な数学的活動の 4 つのカテゴリーの中から，本研究で実践する，① 規則・性質の発見及び検証の道具的活用と，③ 数学的モデリングを補助する道具的活用について考察する．

まず最初に，① 規則・性質の発見及び検証の道具的活用の研究について，表 2-1-7 に授業形態の分類を示す．授業形態は，村上他（1997）と松本（1997）以外は，通常の数学授業を補完する目的でテクノロジーが活用されている．次に，表の“Open／Closed”の欄は，数学的活動で使われた題材がオープン，または，クローズドであるかについて示したものであるが，以下の基準に従って分類した．

◆ クローズドな数学的活動

生徒が発見する規則が授業で学習する内容に収束するように展開するクローズドな数学的活動のことである．例えば，グラフィングツール（グラフ電卓，数式処理ソフト，関数グラフソフトなど）を活用して，$y = ax^2 + bx + c$ の各係数にいろんな値を代入し，表示された複数のグラフを観察することで，各係数とグラフの移動・拡大・縮小との関係（規則）を生徒に発見させるといったタイプの数学的活動である．この数学的活動による授業は，授業内容が発散することなく教師の意図する内容に授業が展開されるが，生徒が発見した他の規則は取り扱われないといった欠点がある．

◆オープンエンドな数学的活動

生徒が発見する多様な規則を授業の中に積極的に取り入れるオープンエンドな数学的活動のことである．例えば，数式処理ソフトを活用して，$n=1,2,3,\cdots$に対するx^n-1の因数分解の結果を観察し，多様な規則［例えば，全てのnにおいて必ず$(x-1)$の因数が現れる，nが偶数の場合は必ず$(x+1)$の因数が現れる，などの多様な規則］を発見，さらに，規則の証明や反例を考えるといったタイプの数学的活動である．

これら２つのタイプの数学的活動は，学習内容・目的等に応じて実践すべきであり，必要に応じてクローズドな活動とオープンエンドな活動のバランスの取れた授業を展開すべきであると考える．

次に数学的活動の評価を考察すると，生徒の反応や生徒・教師のアンケートによる評価が多い．一方，村上他（1997），松本（1997），佐伯他（2004）の評価方法は，個々の生徒が記述した内容（発見や数学的に検証・証明した記述内容）を基に，個々の生徒が数学的活動で何を考え行動したかにつて分析している．こういった個々の生徒の活動内容を分析した研究は少なく，今後の研究に期待すべき評価方法であると考える．

表 2-1-7．規則・性質の発見及び検証の実践研究での授業形態

年	著者	授業形態	対象	Open／Closed	評価方法
1993	滝井哲也	授業の補完	中学：２クラス（?）	オープン?	授業中の生徒の反応，授業後の生徒の感想
	大西正和	授業の補完	中学：１クラス（?）	オープン?	授業中の生徒の反応，授業参観した教師の意見
1995	久保良宏，藤澤由美子	授業の補完	中学：４クラス（284名）	クローズド＋オープン	アンケートによる意識調査
	持永純子	授業の補完	高校：１クラス（38名）	クローズド	授業者と参観者によるアンケート，生徒によるアンケート
1997	村上温夫，松本茂樹	公開実験	フリー	オープン	インターネットに投稿された記述内容
	松本茂樹	公開実験	フリー	オープン	インターネットに投稿された記述内容
1998	鈴木純子	授業の補完	高校：１クラス（38名）	クローズド	生徒によるアンケートとインタビュー
1999	永田裕一郎，他３名	トピック	中学：抽出（４名）	オープン	生徒の発話プロトコール
2004	佐伯昭彦，黒木伸明	授業の補完	高専：２クラス（80名）	オープン	ワークシート

次に，③ 数学的モデリングを補助する道具的活用の研究について，表 2-1-8 に授業形態の分類を示す．授業形態は，総合学習，課題学習，選択学習が多いが，数学的活動を長期間に渡って体系的に実践しているのは柳本（1996），佐伯他（1998），佐伯他（2003）である．これに対して，西村（1998），西村（2001），中村（2003）は，通常の数学授業の中でテクノロジーを活用した数学的モデリングを行っているのが特徴的である．なお，授業形態の「トピック」とは，特に授業形態が記述されていなかった論文，または，研究のために特別に行われた授業のことを指す．

次に授業の評価方法について考察すると，授業後の生徒の意見や感想を分析したも

のが多いが，上記の①規則・性質の発見及び検証の研究と比較すると，授業中の生徒の反応，発話プロトコール，生徒のプレゼンテーション内容，生徒のワークシートなどを基にした評価が多いことが分かる．このように，数学的モデリングにおける実践研究では，生徒が実際に行った数学的活動の内容を分析しているのが評価の特徴であると言える．

表 2-1-8．数学的モデリングを補助する実践研究での授業形態

年	著者	授業形態	対象	評価方法
1996	柳本哲	総合学習・課題学習	中学：１クラス（42名）	ワークシート，生徒の感想
	大澤弘典	総合学習・課題学習	中学：１クラス（28名）	授業中の生徒の反応＋プロトコール
1998	宮川健	トピック	高校：２クラス（62名）	事前と事後調査
	西村圭一	授業の補完	高校：１クラス（５名）	授業中の生徒の反応＋プロトコール，ワークシート
	佐伯昭彦，氏家亮子	総合学習	高専：３クラス（169名）	生徒のプレゼン内容とOHPシート
	大澤弘典	トピック	中学：希望者（４名）	授業中の生徒の反応
1999	松嵜昭雄，礒田正美	トピック	高校：２クラス（90名）	生徒の意見・感想
	大澤弘典	授業の補完	中学：１クラス（32名）	授業中の生徒の反応
	深澤一幸	トピック	高校：希望者（16名）	授業中の生徒の反応，授業後の生徒の感想
2001	西村圭一	授業の補完	高校：１クラス（40名）	授業後の感想
2003	佐伯昭彦，氏家亮子	総合学習	高専：２クラス（約100名）	生徒のプレゼン内容とOHPシート
	中村好則	授業の補完	高校（聾）：１クラス（４名）	実験中の発話，授業後の感想
	小寺隆幸	選択授業	中学：１クラス（25名）	授業中の反応，授業後の感想
	西村圭一	選択授業	中学：１クラス（12名）	授業中の発話，ワークシート，授業後の感想

４．まとめ

本節では，先行研究をもとに，本研究で取り扱う①数学的活動の捉え方と，②数学的活動を支援するテクノロジー活用方法について考察した．

その結果，本研究で取り扱う数学的活動とは，生徒の主体的な数学的活動を中心に授業を展開し，さらに，生徒が発見した規則や性質を教師主導の数学的活動に積極的に活用しながら，両方の数学的活動が相互に補完する形で授業を発展的に展開する活動として捉えることにした．特に，生徒が主体的に行う外的な数学的活動では，生徒の内面に「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を引き起こすための教具として，グラフ電卓とデータ収集機等のハンドヘルド・テクノ

ロジーを活用することにした．これらのハンドヘルド・テクノロジーは，知的好奇心を引き起こすだけではなく，生徒がハンドヘルド・テクノロジーとの間に良いパートナーシップを築き上げることにより，生徒はハンドヘルド・テクノロジーと対話を通して，外的な活動と内的な活動を相互に作用した数学的活動を行うことができると考えた．このような生徒主体による数学的活動を通して，生徒は身近な事象から規則や性質を発見し，さらに，既習事項と関連づけながら自らの力で数学を創りだす創造的な授業が展開できると考えた．

引用文献・参考文献

1) 秋田美代（2001）．数学教育における創造性の育成に関する研究．兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科博士論文．

2) 秋田美代，斎藤昇（2004）．「関数領域における創造性と構造的関連の理解との関係 ‐一次関数を対象として‐」．全国数学教育学会誌．第 10 巻．pp.107-122.

3) 荒井久雄（1994）．「コンピュータを活用した数学の授業」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 76 巻．第 9 号．pp.23-28.

4) Burkhardt H.（1986）. "Computer-aware Curricula: Ideas and Realization". In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.147-155.

5) デューイ（1957）．学校と社会．宮原誠一訳．岩波文庫．

6) デューイ（1975a）．民主主義と教育（上）．松野安男訳．岩波文庫．

7) デューイ（1975b）．民主主義と教育（下）．松野安男訳．岩波文庫．

8) 円福寺恭司（1990）．「基礎解析の微分法におけるパソコン利用」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 72 巻．第 1 号．pp.18-26.

9) Fey J.T.（1987）．数学教育とコンピュータ．成嶋弘監訳．東海大学出版会．

10) 深澤一幸（1999）．「テクノロジーを活用した教材開発に関する研究 ‐角度センサーの開発とその教材‐」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 81 巻．第 11 号．pp.17-24.

11) 福沢俊之（2002）．「作図ツールを使った証明問題の解決活動における教師の支援のあり方について」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 84 巻．第 7 号．pp.10-18.

12) 藤岡典夫，保積均（1991）．「CAI 教材の作成とその活用 ‐解析分野の指導を通して‐」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 73 巻．第 11 号．pp.13-21.

13) Harvey J.G., Waits B.K. and Demana F.（1995）. "The Influence of Technology on the teaching and Learning of Algebra". Journal of Mathematical Behavior. Vol.14. pp.75-109.

14) 平林一榮（1987）．数学教育の活動主義的展開．東洋館出版．

15) Holtzman W.H.編（1977a）．CAI システムⅠ：基礎編．木村捨雄，細井正訳．共立出版．

16) Holtzman W.H.編（1977b）．CAI システムⅡ：実践編．木村捨雄，細井正訳．共立出版．

17) Howson A.G. and Kahane J.-P.（1986）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. 植竹恒男監訳（1989）．数学教育とコンピュータ．日本数学教育学会編訳．聖文社．

18) 稲田康隆，他 10 名（1989）.「パソコンを使った指導の工夫」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 5 号. pp.9-13.

19) 井上正記（1991）.「数学の学習におけるパソコンの効果的な活用 −シミュレーションの特性を生かして−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 9 号. pp.7-13.

20) 石川順一（1989）.「パソコンによる関数のグラフ」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 7 号. pp.43-49d.

21) 石崎学（1991）.「ニューメディアを活用した指導法の研究 −自己学習力の育成を目指して−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 7 号. pp.35-44.

22) 石崎学（1995）.「数学科における生徒の探究心を養う指導法の研究 −感動をよび起こす教材ソフトの開発と実践−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第３号. pp.2-10.

23) 垣花京子，清水克彦（1995）.「図形の証明問題での測定の役割 −コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 11 号. pp.17-22.

24) 片岡啓（1996）.「高校「微分法」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.14-19.

25) 菊池兵一（1969）. 数学的な考え方を延ばす指導. 北辰図書.

26) 北村光一（1993）.「生徒の実態に応じた数学指導の改善 −学習意欲，興味・関心，主体性に乏しい生徒のために−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第 7 号. pp.27-34.

27) 小寺隆幸（2003）.「事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導 −生物の個体数の変化を素材として−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.3-14.

28) 古藤怜（1991）. 算数・数学科における *Do Math* の指導. 東洋館出版.

29) 久保良宏，藤澤由美子（1995）.「中学校数学科におけるグラフ電卓利用の視点と授業例 −中学１．２年の関数指導を中心に−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 5 号. pp.2-10.

30) 黒木史敏（1994）.「コンピュータを利用した授業の工夫 −コンピュータの有効利用を主眼にして−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 76 巻. 第 9 号. pp.10-17.

31) 黒澤俊二（1999）. なぜ「算数的活動」なのか. 東洋館出版.

32) 教育工学研究成果刊行委員会（代表 大塚明郎）編（1977）. 教育工学の新しい展開. 第一法規.

33) Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R.（1986）. ”Computer-based Symbolic

Mathematics for Discovery". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.133-146.

34) 松本博史，山上成美（1991）.「授業書＜速度計＞ −教具・パソコンを利用した微分の導入−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第５号. pp.24-33.

35) 松本茂樹（1997）.「ICME8/TG4 における遠隔数学教育“公開実験”事例 −「数式処理システム」を用いた「発見的学習」による「x^n-1の因数分解」の探求−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第３号. pp.9-15.

36) 松嵜昭雄，礒田正美（1999）.「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察 −クランク機構の関数関係の把握−」日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第３号. pp.20-25.

37) 水谷尚人（2001）.「空間図形の指導における教具の効用に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第５号. pp.2-9.

38) 水谷尚人（2003）.「簡易 CAD ソフトを用いた空間図形の学習指導に関する研究 −空間を把握する能力の育成を目指して−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第５号. pp.12-18.

39) 宮川健（1998）.「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 −事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第１号. pp.9-14.

40) 持永純子（1995）.「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づくりの授業を取り入れた「二次関数」の指導−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第９号. pp.22-30.

41) 文部省（1999a）. 高等学校学習指導要領.

42) 文部省（1999b）. 高等学校学習指導要領解説 −数学編理数編−. 実教出版.

43) Murakami H. and Hata M. (1986). "Mathematical Education in the Computer Age". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.85-94.

44) 村上温夫，松本茂樹（1997）.「インターネット時代の数学教育 −遠隔教育，特に ICME8/TG4 での実験を中心として−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第３号. pp.2-8.

45) 村田緯和雄（2002）.「高校数学の課題と新教科「情報」」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第３号. pp.28-33.

46) 中込雄治（1996）.「小型コンピュータの活用で変化する指導形態について −ポケ

コンやグラフ電卓が数学の授業に及ぼす効用-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 7 号．pp.9-13.

47) 中村好則（2003）．「聾学校におけるテクノロジー活用による実験・観察を取り入れた指導の効果 -高等部における「音の探究」の指導事例を通して-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 9 号．pp.18-25.

48) 長崎栄三編著（2001）．算数・数学と社会・文化のつながり ―小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して―．明治図書．

49) 永井正洋，岡部恭幸（2000）．「分散型ネットワーク上における数学科共同学習の展開 -２校間での CSILE 型データベース使用と環境のデザイン-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 82 巻．第 5 号．pp.13-22.

50) 永嶋賢一，車浩（1986）．図形指導におけるパソコンの利用について」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 68 巻．第 7 号．pp.15-20.

51) 永田潤一郎（1999）．「数学でみる活動を重視した授業の構成（１） -車椅子とスロープの傾斜に注目した授業実践を通じて-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 81 巻．第 5 号．pp.2-11.

52) 永田潤一郎（2002）．「数学でみる活動を重視した授業の構成（３） -評価の視点の具体化について-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 84 巻．第 1 号．pp.2-12.

53) 永田裕一郎，牧野智彦，本多英之，礒田正美（1999）．「中学校段階における作図ツールによる変換の指導可能性に関する研究 －反転変換を範例に移動から変換への考え方の発展を目指して－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 81 巻．第 9 号．pp.10-16.

54) NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. VA.

55) 根本博（1999）．数学的活動と反省的経験．東洋館出版．

56) 日本数学教育学会研究部編（2001）．数学的な活動を通した数学基礎と総合的な学習．東洋館出版．

57) 西村圭一（1996）．「探究活動中心の授業に関する一考察 -テクノロジーを利用して-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 9 号．pp.21-26.

58) 西村圭一（1998）．「CBL／CDA を利用した三角関数の指導に関する研究 -「音」を題材として-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第 7 号．pp.11-19.

59) 西村圭一（2001）．「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 83 巻．第 11 号．pp.2-12.

60) 西村圭一（2003）．「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践 -紙パ

ックジュースを題材に−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.31-39.

61) 野嵜睦美, 重松敬一 (1992).「コンピュータ利用による中学校数学指導の研究 −FCAI による等積変形の指導について−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 74 巻. 第 5 号. pp.2-11.

62) 緒方優, 肥後昭治 (1990).「高専における陰関数の存在定理の指導について」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 72 巻. 第 1 号. pp.31-40.

63) 小川幹夫 (1985).「パソコン利用による数学問題演習 (行列) の一試行」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 67 巻. 第 7 号. pp.21-28.

64) 大石正佳, 松尾吉晃, 寺田文行 (1992).「CSC (Curriculum Supported by Computer) −創造力の養成に向けて−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 74 巻. 第 11 号. pp.28-37.

65) 大西正和 (1993).「学校教育におけるコンピュータの利用 −図形指導を支援する教材ソフトの開発と活用−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第 7 号. pp.2-9.

66) 大澤弘典 (1996).「現実場面に基づく問題解決 −グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.16-20.

67) 大澤弘典 (1998).「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 −テープレコーダのカウンター問題−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.30-33.

68) 大澤弘典 (1999).「肥満とやせの判定基準づくり −数学を核とした総合的な学習の時間の展開例−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 11 号. pp.5-9.

69) 大内俊二 (1993).「Buffon の”針”の問題の”正多角形”への拡張 −理論・シミュレーション・実験のための教材として−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第 9 号. pp.27-32.

70) 佐伯昭彦 (1996).「米国の教育におけるテクノロジー活用 −T^3 国際会議と授業参観の感想−」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.465. pp.77-84.

71) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (1998).「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム−身近な物理現象を数学的にモデル化する授業−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.

72) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003).「数学的モデル化過程における学習者の実データ解析方法−「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 3 号. pp.12-21.

73) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）.「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 ―グラフ電卓を活用した数学的活動―」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 86 巻. 第 9 号. pp.13-20.

74) 斎藤昇（1989）.「個の生徒の発達段階に応じて自動的に問題選定を行う CAI」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 5 号. pp.27-32.

75) 斎藤昇（1991）.「学習意欲を高めさせる CAI のコースウェア設計」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 1 号. pp.10-20.

76) 斎藤昇(1998).「創造性創出過程のモデルの構築とその実践」. 日本科学教育学会. 第 21 巻. 第 2 号. pp19-27.

77) 斎藤昇（1999）.「数学教育における創造性に関する態度尺度の開発 −小学校６年生・中学１・２・３年生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第 5 巻. pp.35-46.

78) 斎藤昇，秋田美代（2001）.「数学教育における児童の創造性の発達に関する研究−小学校３・４・５・６年生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第 7 巻. pp.19-30.

79) 斎藤昇，秋田美代（2002）.「数学における創造性と学習成績との関係（Ⅱ）−中学校２年「一次関数」を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第 8 巻. pp.177-186.

80) 斎藤昇，秋田美代（2003）.「数学の図形領域における創造性の発達に関する研究−図形の証明を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第 9 巻. pp.181-191.

81) 斎藤昇（2004）.「算数の図形領域における創造性の発達に関する研究−小学生・中学生・大学生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第 10 巻. pp.95-106.

82) 坂本雄士（2002）.「課題学習の導入に関する一考察」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第 5 号. pp.13-19.

83) 瀬崎強一（1983）.「中学校数学指導におけるマイコン利用 ―基礎的な計算の個別指導を中心―」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 65 巻. 第 5 号. pp.2-6.

84) 志賀清一（1991）.「基礎的概念理解のためのコンピュータの活用について」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 9 号. pp.23-32.

85) 島田茂編著（1977）. 算数数学科のオープンエンドアプローチ. みずうみ書房.

86) 島田茂編著（1995）. 新訂 算数数学科のオープンエンドアプローチ. 東洋館出版.

87) Steen L.A.（1986）. "Living with a New Mathematical Species". In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.52-60.

88) 杉田孟（1989）.「VTR・CAI 併用の学習指導 ―接線の指導―」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 3 号. pp.43-56.

89) 鈴木純子（1998）.「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づく

りを取り入れた「三角関数」の指導−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第９号. pp.25-29.

90) 鈴木守 (1993).「高校数学における論理的な思考力と直観力 −パソコンを用いた高校数学の教育理論−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第３号. pp.9-18.

91) 鈴木守 (1994).「パソコンを用いた高校数学の教育理論と実践」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 76 巻. 第 11 号. pp.22-29.

92) 橘川孚 (1989).「数式処理システム APL Math の授業での利用 −数学Ｉ 因数分解を中心として−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第９号. pp.24-34.

93) 高木鋼一 (1989).「パソコンを利用した正弦定理・余弦定理の指導」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第１号. pp.35-39.

94) 高遠節夫, 栗本育三郎 (1990).「画像・音声教材データベース (ASARI-1) の構築 −数学教育への応用−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 72 巻. 第７号. pp.41-48.

95) 滝井哲也 (1993).「個が表現できる授業 −コンピュータの活用を中心にして−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第３号. pp.2-8.

96) 滝沢昌弘 (1998).「地図と数学」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 11 号. pp.17-22.

97) Tall D. and West B. (1986). "Graphic Insight into Calculus and Differential Equations". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.107-119.

98) 徳峯良昭 (1991).「パソコンを利用して統計の授業をおもしろくする工夫」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第３号. pp.11-20.

99) 辻宏子 (1997).「コンピュータ環境での作図活動の効果 −平面図形の学習での図の図形としての認識を促す場の検討−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第 11 号. pp.11-19.

100) 臼田三知永 (2002).「３次元コンピュータグラフィックスを活用した数学教材の実践例」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第９号. pp.29-33.

101) Waits B.K. and Demana F. (2000). "Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future". In Burke M.J. (Ed.). 2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century. NCTM. pp.51-66.

102) 渡辺俊明 (1989).「パソコンを用いた学習指導の研究 −２年図形の基本的な性質編−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第７号. pp.28-42.

103) 柳本哲 (1996).「中学校における数学的モデリングについて −給水タンクを事例

として−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 5 号．pp.2-9.
104) 吉田信也（1990）．「数学教育とパソコン −『ピタゴラスの定理の学習』を例として−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 72 巻．第 11 号、pp.28-37.

２．２　グラフ電卓を活用した数学的活動

１．はじめに

前節で述べたように，我が国の数学教育におけるテクノロジー活用は，1990 年中旬に，テクノロジー主導型から生徒の主体的な数学的活動へと研究の対象が移っていることが明らかになった．その一つの要因には，手のひらサイズで安価で，かつ，操作性が簡易なグラフ電卓が活用されるようになったことが挙げられる．

グラフ電卓を通常の数学授業に導入すると，授業及び生徒の数学的活動がどのように変化するのであろうか．グラフ電卓を生徒に与えれば，生徒は勝手に主体的な数学的活動を行うとは限らない．生徒がグラフ電卓を適切に活用する必要性を感じる教材開発，学習環境の設定，教師の役割など，授業の目的に応じた事前の準備が大切であると筆者は考える．

本節では，数学的活動におけるテクノロジーの対象を，本研究のタイプ１（通常の数学授業を補完する数学的活動）で活用するグラフ電卓に焦点を絞って，①数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷，②グラフ電卓活用の利点，③グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用，の３つの観点について考察することにする．

２．数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷

1986 年に，日本のカシオによって世界で初めてのグラフ電卓 fx-7000G が技術者用に開発された（Harvey et. al.，1995；Waits and Demana，2000）．この技術者用に開発されたグラフ電卓がどのようにして数学教育界で活用されるようになったのであろうか．ここでは，グラフ電卓活用の先進国である米国の変遷について，さらに，我が国の変遷について述べる．

(1) 米国におけるグラフ電卓活用

表 2-2-1 に示すように，数学教育でのグラフ電卓の活用は，オハイオ州立大学の Waits B.K.教授と Demana F.教授が 1986 年に執筆した教材 Precalculus：A Graphing Approach の原案をもとに，オハイオ州コロンバスの高校で授業を行ったことから始まった．彼らは，数学の学習指導におけるグラフ電卓等のテクノロジー活用に関する教師教育と，テクノロジー活用の専門家や質の高いスタッフ養成を目的としたワークショップ T^3（Teachers Teaching with Technology）を 1987 年に設立し，さらに，プレカリキュラス

におけるコンピュータと電卓活用の講習会 C^2PC（Computers and Calculators in Precalculus）を 1988 年の夏に開催した（Demana and Waits, 1992 ; Harvey et. al., 1995 ; Farrell, 1996 ; Waits and Demana, 2000）．

その翌年（1989 年）に，全米数学教師協議会（NCTM）が「学校数学のためのカリキュラムと評価の基準（スタンダード）」の第９学年から 12 学年のスタンダードで，グラフ電卓とコンピュータの活用を推奨したことにより，学校現場でのテクノロジー活用の推進が全国レベルで行われた．

1990 年代には，グラフ電卓の機能が高機能かつ多機能に発達した．例えば，ヒューレットパッカードは，世界に先駆けて数式処理（CAS）の機能を持ったグラフ電卓 HP-28S と HP-48SX を開発し，Dick（1992）は CAS 機能付きのグラフ電卓を"スーパー電卓（Super Calculator）"と呼んでいる．また， 1994 年にはデータ収集機（CBL）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが開発され，実現象を取り扱った数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana, 2000）．さらに，1996 年には，CAS 機能と作図ツール（Cabri Geometry）を備えたグラフ電卓 TI-92 が開発され，手のひらサイズのテクノロジーで幾何学習の数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana, 2000）．

1995 年には，AP カリキュラスの試験の一部でグラフ電卓（数値的な微分積分計算と方程式の根を求めることができるグラフ電卓）の使用が可能となった（瀬沼, 1995a ; Simonsen and Dick, 1997 ; Dunham, 1998）．また，NCTM が 2000 年に発表したスタンダード 2000 においても，グラフ電卓とコンピュータの活用が推奨され，さらに，CBL を活用した事例も紹介された．

表 2-2-1．米国におけるグラフ電卓活用の研究及び実践に関する変遷

年	グラフ電卓に関する主な出来事
1986	オハイオ州立大Bert K. Waits教授とFranklin Demana教授によってグラフ電卓を活用した教材"Precalculus: A Graphing Approach"が開発された．
1987	グラフ電卓などのテクノロジーを活用した教育に関するワークショップT^3(Teachers Teaching with Tecnology)が開催された．
1988	オハイオ州立大学でC^2PC (Calculator and Computer Precalculus Curriculum) 講習会が開催された．
1989	NCTMの９学年から１２学年のスタンダードでグラフ電卓活用が推奨された．
1992	CAS付きのグラフ電卓が" Super Calculator" と呼ばれた．
1994	CBLが開発された．
1995	APカリキュラスの一部の問題でグラフ電卓の使用が可能となった．
1996	CASと作図ツール付きのグラフ電卓TI-92が開発された．
2000	NCTMの９学年から１２学年のスタンダード2000においてもグラフ電卓とコンピュータのテクノロジー活用が推奨された．さらに，CBLの活用も紹介された．

Dunham（1998）は，グラフ電卓に関する97本の先行研究（学術論文，口頭発表の論文，博士論文など）を総括した論文の中で，グラフ電卓等の携帯型の装置が他のテクノロジー以上に使われるようになった原因を３つあげている．

①NCTMのような全国組織の推奨

②SATやAPカリキュラスのような標準化テストでの電卓の使用許可

③低価格，携帯性，使用の簡易性

一方，Dunham（1998）は，グラフ電卓の普及が高まった反面，NCTMが要求するレベルまで教育実践が達していない原因を以下のように指摘している．

①電卓の台数不足とカリキュラム教材の不足

②現職教員の教育機会の欠如

③指導計画のための時間の不足

④活用に関する教師の動機づけの欠如

⑤限られた行政支援

さらに，Dunham（1998）は，グラフ電卓を使用することに対する教師の不安を４つあげている．

①生徒の計算技能の低下

②生徒の松葉づえ的な電卓利用

③生徒の基礎概念の未習得

④電卓が利用できる場面のみの効果

これに対して，Dunham（1998）は，今後解決すべき課題を３つ述べている．

「解決すべき３つの課題は，以下の通りである．

(1)研究が電卓利用の基礎となり推薦を支援することについて，一般の人（親や教師）が理解するための手段を講ずることによって，我々のサイド（問題点）をより良い情況にする．

(2)現職教育や教育プログラムは，電卓活用の指導方法を教師に訓練するだけでなく，数学と数学指導についての教師の信念を刺激するように計画する．

(3)継続的な教師教育と支援を提案する．」[1]

(2) 我が国におけるグラフ電卓活用

表2-2-2は，グラフ電卓に関して我が国で最初に行われた主な出来事の一覧を示している．グラフ電卓が我が国で初めて紹介されたのは，1993年に開催された文部省の情報教育指導者講座で，カシオが世界で始めてグラフ電卓を開発した７年後のことで

[1] カッコ内は筆者が加筆した．

ある（瀬沼，1995a；瀬沼，1997）．この1993年には，文部省の科学研究費補助金による研究（瀬沼，1993），日数教の数学教育論文発表会での口頭発表（倉井，1993），さらに，修士論文の発表（加藤，1993；小出，1993）など，この年は我が国におけるグラフ電卓活用研究の元年とも言える．

1994年には，瀬沼の科研費による研究成果が数学教育関係の雑誌に連載された（瀬沼，1994b；瀬沼，1994c；桁元・瀬沼，1994；久永・瀬沼，1994；久保・瀬沼，1994；森田・瀬沼，1994；筒井・瀬沼，1994；倉井・瀬沼，1994）．また，グラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した数学的モデリングの教材開発に関する修士論文が発表された（鹿野，1994）．

1995年には，グラフ電卓に関する著書が出版され（寺田他編，1995；一松編，1995），さらに，グラフ電卓を活用した実践の成果が研究論文として日本数学教育学会の学会誌に掲載された（久保他，1995；持永，1995）．

1996年には，金沢工業高等専門学校の新入生全員がグラフ電卓TI-82を購入し，通常の数学授業と総合学習「数物ハンズオン」でグラフ電卓を活用した授業が行われた（氏家他，1996；佐伯他，1996；佐伯他，1999；佐伯，2000）．これにより，これまでは研究授業やトピック的な授業でグラフ電卓が活用されていたのに対し，グラフ電卓を活用した実践が実際のカリキュラムにおける授業で実施されるようになった．さらに，1997年にはグラフ電卓活用で先駆的な実践を行っている教員約150名が集まり，第１回のT^3 Japanが東京で開催され，現職教員による実践研究の情報交換が行われた．

1998年には，グラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した数学的モデリングの実践成果が研究論文として学会誌に掲載された（宮川，1998；西村，1998；佐伯他，1998a）．さらに，文部省の科学研究費補助金によってグラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した研究が行われた（佐伯，2000）．

1999年に公表された高等学校指導要領解説-数学編 理数編-では，生徒の主体的な数学的活動をより充実するためのテクノロジー活用を推奨しており，その中に「グラフ表示などができる電卓」の文言が記述された（文部省，1999）．2000年には，福井工業高等専門学校の新入生全員が数式処理付きのグラフ電卓TI-89を購入し，通常の数学授業で活用された（井之上，2000；坪川他，2002）．さらに，2002年には，数式処理付きのグラフ電卓TI-92またはVoyage200を活用した中高一貫校用の教科書が出版され，大阪府の清風中学校・高等学校の数学授業で使用された（公庄他，2002a；公庄他，2002b；公庄他，2002c；公庄他，2002d；公庄・森田他，2002；公庄・高野他，2002；公庄他，2004a；公庄他，2004b；公庄他，2004c）．

以上ことから 1993 年に我が国に初めて紹介されたグラフ電卓活用は，最初の 3 年間は研究授業やトピック的な授業が行われていたが，1996 年を境に，実際のカリキュラムに位置づけられた数学授業での活用，文部省の学習指導要領での推奨，さらに教科書の出版など，数学授業におけるグラフ電卓活用の基礎が整いつつあるように見える．しかし，１．１節で示した国立教育政策研究所（2004）の調査結果を参照すると，テクノロジーを活用する数学教員が 2.6％であることは事実である．この要因はどこにあるのだろうか？ Dunhaum（1998）が米国の課題を示した以外に，もっと大きな課題が我が国に存在するように思われる．

表 2-2-2．我が国におけるグラフ電卓活用の研究及び実践に関する変遷

年	グラフ電卓に関する主な出来事
1986	カシオが世界で始めて技術者向けにグラフ電卓fx-7000Gを開発した．
1993	文部省の情報教育指導者講座でグラフ電卓が紹介された．
	科研費によるグラフ電卓の研究が行われた．
	日本数学教育学会・第26回数学教育論文発表会でグラフ電卓を活用した実践研究が報告された．
	修士論文でグラフ電卓を活用した実験・観察型の教材開発の研究が行われた．
1994	グラフ電卓に関する論文が数学教育関係の雑誌（明治図書）に連載された．
	修士論文でグラフ電卓とCBL/CDAをを活用した実験・観察型の教材開発の研究が行われた．
1995	グラフ電卓に関する著書が出版された．
	日本数学教育学会誌にグラフ電卓を活用した研究論文が掲載された．
1996	金沢高専の新入生全員がグラフ電卓TI-82を購入した．
	金沢高専でグラフ電卓とCBLを活用した総合学習が実施された．
1997	第１回T^3 Japan年会が東京で開催された．
1998	日本数学教育学会誌にグラフ電卓とCBL/CDAを活用した研究論文が掲載された．
	科研費によるグラフ電卓とCBL/CDAを活用した研究が行われた．
1999	高等学校学習指導要領解説-数学編・数理編-に「グラフ表示などができる電卓」の文言が記述された．
2000	福井高専の新入生全員がCAS付きグラフ電卓TI-89を購入した．
2002	グラフ電卓（TI-92またはVoyage200）を活用した中高一貫校用の教科書が出版された．

３．グラフ電卓活用の利点

清水（1997）は，テクノロジーの活用の利点について数学的現象の視覚化（visualization）と実験・観察アプローチの二点をあげている．数学的現象の視覚化（visualization）とは，従来の代数的解法や演繹的証明などの抽象的記述をグラフや幾何図形などの具体的な表現で表すことである．さらに，実験・観察アプローチとは，視覚化された具体物を観察することにより生徒が帰納的に規則や性質を発見しながら数学を創り上げていく数学的活動のことである．清水が述べる実験・観察アプローチは，1991 年に米国の大学の数学教育で注目された実験室アプローチ（Laboratory Approach）を参考にしている．Leinbach（1991）は，著書「微積分の指導のための実験室アプローチ」において，実験室アプローチに必要な五つの活動（①観察［Observation］，②同定［Identification］，③探究［Exploration］，④分析［Analysis］，

⑤説明［Explanation］）を指摘している．

数学的現象の視覚化（visualization）と実験・観察アプローチの利点は，グラフ電卓を活用した場合も同様である．以下では，①グラフ電卓の効果的な活用方法と②教室内での数学的活動への影響について先行研究をもとに考察する．

(1) グラフ電卓の効果的な活用方法

ここではグラフ電卓の効果的な活用方法について，①帰納的な数学的活動による規則・性質の発見，②多表現の関連づけによる理解の深化，③生徒の主体的な数学的活動による数学間のつながり，の三つの観点について考察する．なお，これらの観点は，それぞれが独立したものではなく，それぞれが相互に関連して数学的活動を行うことが重要であると考える．

ａ．帰納的な数学的活動による規則・性質の発見

Skemp（1986）は，彼が主張する数学学習の第一原理で，概念を理解するために適切な事例を示すことの重要性を次のように述べている．

> 「ある個人がすでに持っている概念より高次な概念は，単なる定義によっては理解されない．唯一の方法は，適切な事例の集合を示すことである．」（p.30）

グラフ電卓等のテクノロジー活用によって，手作業では膨大な時間や労力を必要とした数学的実験や観察が瞬時にかつ容易に行えるため，Skemp の述べる数学的活動が可能となった．つまり，生徒はテクノロジーと対話をしながら主体的に実験・観察し，数学的な規則・性質を帰納的に発見し，仮説を立て，さらに，仮説を数学的に証明する数学的活動が行えるようになったのである．

Banchoff（1991）は，複数の実例を実験・観察する探究を「実例の族の探究（Investigating Families of Examples)」として，その有効性について次のように述べている．

> 「(テクノロジーを活用した）実験室的経験は，無関係な事例の集まりを取り扱うのではなく，むしろ実例の族を取り扱う方が特に効果的であることが分かった．[2]」（p.5）

この探究方法は，グラフ表示機能を使って関数の規則・性質を観察する探究と，数式処理の因数分解や展開の機能を使って代数の規則・性質を観察する探究の二通りがある．磯田（1997）は前者を「関数族の探究」と述べているため，本研究では後者を

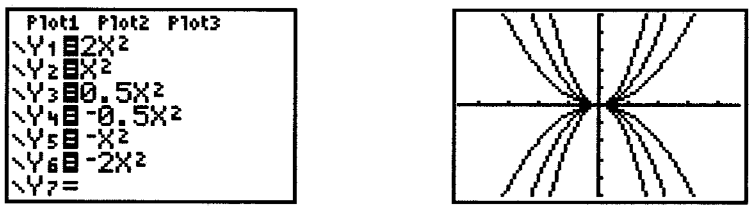
[2] カッコ内の文章は筆者が加筆した．

「代数族の探究」とする．以下に「関数族の探究」と「代数族の探究」について先行研究をもとに考察する．

①関数族の探究

図 2-2-1 に，２次関数における関数族の探究例を示す．図に示した $y=ax^2$ の関数族では係数 a と放物線の開きとの関係，さらに，$y=x^2-3x+c$ の関数族では係数 c と y 軸方向の平行移動または y 切片との関係についての探究であり，生徒はグラフ電卓に表示された複数のグラフを観察・実験することで規則を発見する事例である．

【 $y=ax^2$ の関数族】



【 $y=x^2-3x+c$ の関数族】

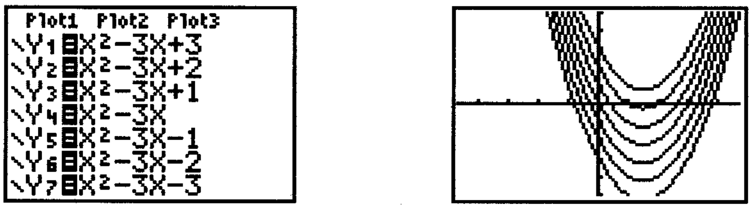


図 2-2-1．関数族の探究の事例

NCTM（1989）は関数族の探究[3]を以下のように推奨している．

「全ての生徒は，係数 a，b，c，d のさまざまな変化に対して $y=af(bx+c)+d$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフとどのように関連するかをユーティリティで探究すべきである．」(p.155)

さらに，Hector (1992) は，教科書による関数族の事例には限りがあるのに対して，グラフ電卓では多くの事例を探究できるため，代数的表現とグラフ的表現を関係づけることができることを次のように述べている．

「簡単な操作トレーニングにより，生徒はグラフ電卓を使って曲線の一群（families）をグラフ化することができ，代数的表現とグラフ的表現の関係を発見することができる．（中略）．教科書は，$y=\sin x$ と $y=\sin 2x$ のグラフを示すであろう．しかし，生徒が一般形式 $y=a\sin(bx+c)+d$ での作業で，グ

[3] NCTM（1989）のスタンダードでは，classes of functions（関数の類）と記述している．スタンダード 2000 においてもテクノロジーを活用した関数族の探究を推奨している．

ラフがどのように変化するかを観察するために係数 a, b, c, d に異なった値を選んで行う探究は強いインパクトがある．従って，生徒はグラフ的表現と代数的表現の関係を発見するように求めることができる．」(pp.131-133)

我が国においてもグラフ電卓を活用した関数族の探究が実践されており，その研究成果が研究論文として公表されている（久保・藤澤，1995；持永，1995；鈴木，1998；公庄，1999；中村・森本，1999；井之上，2000；佐伯・黒木，2004a；梅野，2004b)．これらの研究では，生徒が発見した規則・性質は多様であり，しかも，教師が授業前に想定していた規則・性質以上のことを生徒が発見しており，オープンエンドアプローチ的な数学的活動が行われている．さらに，公庄（1999)，佐伯・黒木（2004a)，梅野（2004b）では，生徒が発見した規則について，生徒自らの力で既習事項を使って規則が成り立つ理由を記述しているのが特徴的である

本論文では，関数族の探究に関して，３．２節で極方程式を使った正葉曲線の規則を探究する数学的活動，さらに，３．３節で３次関数のグラフの種類と規則を探究する数学的活動について詳しく報告する．

②代数族の探究

代数族の探究は，1985 年３月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書の中でコンピュータの数式処理システムを使った事例が紹介されている(Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R., 1986; Murakami H. and Hata M., 1986)．グラフ電卓に数式処理システムが付加されるようになってから代数族の探究がグラフ電卓上で行えるようになった．図 2-2-2 に，因数分解における代数族の探究例を示す．この探究では x^n-1 をグラフ電卓で因数分解して，整数 n と因数との間に見られる規則や性質を発見し，その規則や性質が成り立つ理由を数学的に解決する数学的活動である．

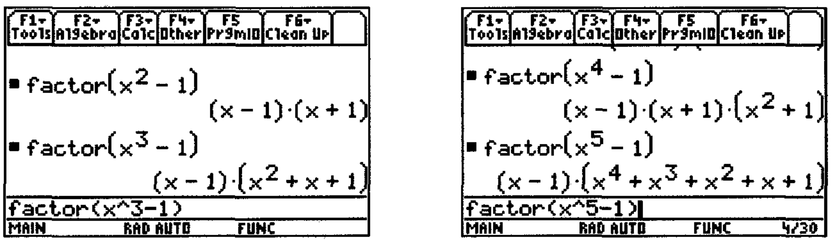


図 2-2-2．因数分解における代数族の探究例

我が国におけるグラフ電卓を活用した代数族の探究の実践研究は，公庄（2000)，阿蘇 (2002)，坪川他 (2002) によって成果が報告されている．これらの実践についても，オープンアプローチ的な数学的活動が行われている．

ｂ．多表現の関連づけによる理解の深化

NCTM（1989）の第９学年から第 12 学年のスタンダード６（関数）では，関数の学習において全ての生徒が代数的表現，グラフ的表現，数値的表現の多表現（multiple-representation）を利用して関数を表現し分析することができ，かつ，表現間を相互に翻案できることを要求している．

同様に，第９学年から第 12 学年のスタンダード 13（微分積分学の概念的理解）では，グラフ的な観点と数値的な観点の両方に基づく微分積分学の概念についてのインフォーマルな探究を含む必要性を求めており，このためのテクノロジー活用を次のように述べている．

「このスタンダードでは，全ての生徒または大学進学を希望する生徒に対して，高等学校の微積分学のフォーマルな学習を主張しているのではない．むしろ，微積分学の中心的な概念 － 極限，曲線下の面積，変化率，さらに接線の傾き － を体系的であるがインフォーマルに探究する機会を生徒に要求する．これらの中心的概念は，関数の深い理解や，現実現象についての問題を表現し解決するための有用性に貢献するものである．

（略）

教授は，電卓とコンピュータテクノロジーの両方を活用して，高度に探究的で，かつ，数値的経験と幾何的（グラフ的）経験に基づくべきである．教授活動は，操作的（代数的）テクニックを発達させるよりも微分積分学の確かな概念的な土台を生徒に与えることを目的とすべきである．[4]」（p.180）

Dick（1992）は，数式処理付きのグラフ電卓が多表現を関連づけた微積分の学習に合理的であることを次のように述べている．

「手で長たらしい計算やグラフを描画することは時間の浪費であることから，代数的表現に頼るのは最も効果的なアプローチではない．数値的表現とグラフ的表現へのアクセスへの改善によって，スーパー電卓（数式処理付きグラフ電卓）は生徒が数値的かつグラフ的手法を活用することを合理的にした．それらは多表現を強調する微積分カリキュラムのためにオーダーメイドした装置のように思える．」（p.148）

さて，グラフ電卓を使って微分積分学の概念的な土台をどのようにインフォーマルに生徒は探究できるのであろうか．ここでは，グラフ電卓で多表現を関連づけながら

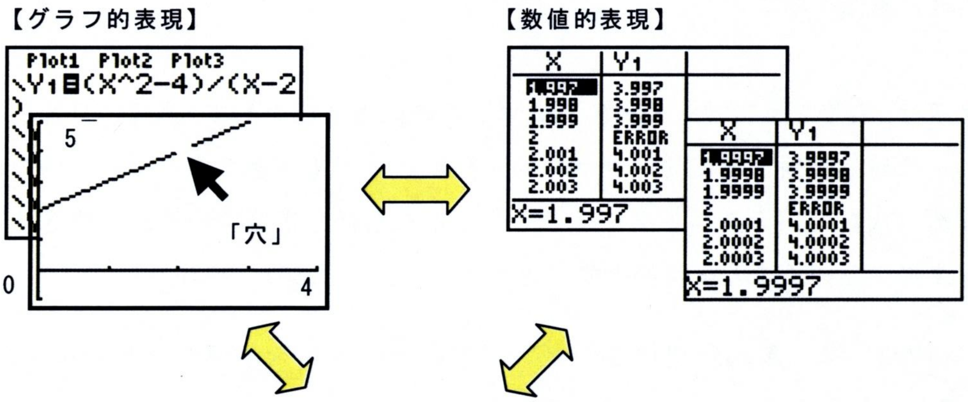
[4] カッコ内は筆者が加筆した．

2．2　グラフ電卓を活用した数学的活動

関数の振る舞いを探究する数学的活動として，①local behavior の探究（例えば，関数の連続性，不連続，穴［removable discontinuity］，漸近線，凹凸，接線など）と②end behavior の探究[5]（例えば，$x \to \infty$など）について考察する．

① local behavior **の探究**

図 2-2-3 に，グラフ電卓を活用したグラフ的表現，数値的表現，さらに，代数的表現を関連づけた local behavior の探究の具体例を示す．教科書では，代数的表現による解法のみが記述されているのに対して，グラフ電卓のグラフ機能を活用すると $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ のグラフが直線であり，しかも，$x=2$ で不連続であることが視覚的に観察することができる．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能で関数の値が限りなく 4 に近づいていることを数値的に観察することができる．このように，$y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ の不連続点をグラフ的，数値的，代数的に関連づけて探究することで，生徒は local behavior に関するより深い理解を得ることができる．



【代数的表現】

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

図 2-2-3．多表現の関連づけによる local behavior の探究

我が国におけるグラフ電卓を活用した local behavior の探究の実践研究は，佐伯（1998b），佐伯・黒木（2004a），佐伯・黒木（2004b）によって報告されている．

本論文の３．１節では，多表現を関連づけた local behavior の探究を通して極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動について詳しく報告する．

---

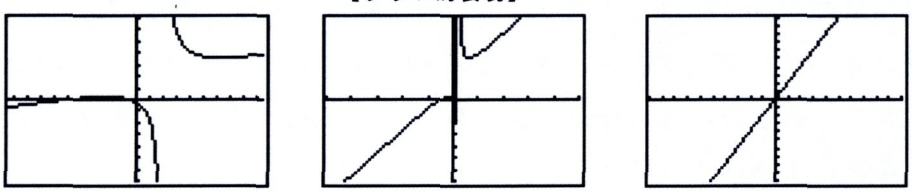
[5] NCTM のスタンダード，および，スタンダード 2000 では，global behavior と記述している．

② end behavior の探究

図 2-2-4 に，グラフ電卓を活用したグラフ的表現，数値的表現，さらに，代数的表現を関連づけた end behavior の探究の具体例を示す．この事例は，Hector（1992），Waits and Demana（1998），NCTM（2000）の事例を参考に作成した．

図のように，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ のグラフをグラフ電卓で広範囲に表示すると，グラフが直線的に近似することがグラフ的に観察することができる．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能で x の絶対値を大きくすると，y の値が一次関数的に増加していることが数値的に観察することができる．このことを代数的に確認するために分数関数を $f(x)=2x+15+\dfrac{36}{x-2}$ に変形し $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{36}{x-2}=0$ であることを適用すると，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ は $x\to\pm\infty$ において一次関数 $g(x)=2x+15$ に近似できることが分かる．このように，$f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ の $x\to\pm\infty$ における振る舞いをグラフ的，数値的，代数的に関連づけて探究することで，生徒は end behavior に関するより深い理解を得ることができる．

【グラフ的表現】



$-9.7\leqq x\leqq 9.7$, $-70\leqq y\leqq 70$　　$-50\leqq x\leqq 50$, $-70\leqq y\leqq 70$　　$-1000\leqq x\leqq 1000$, $-1000\leqq y\leqq 1000$

【数値的表現】

X	Y1
-30000	-59985
-20000	-39985
-10000	-19985
0	-3
10000	20015
20000	40015
30000	60015

X=-30000

【代数的表現】

$$f(x)=\frac{2x^2+11x+6}{x-2}=2x+15+\frac{36}{x-2}$$

図 2-2-4．**多表現の関連づけによる end behavior の探究**

我が国におけるグラフ電卓を活用した end behavior の探究の実践研究は，片岡（1996），佐伯（1998b）によって成果が報告されている．特に片岡の研究では，生徒が増減表を使って描いたグラフとグラフ電卓の表示結果が異なった場合，生徒が持っている知識

との「葛藤」が生じ，手計算（代数的表現）と電卓（グラフ的表現）との往復を繰り返しながら $x \rightarrow \pm\infty$ の場合のグラフの振る舞い（end behavior）を生徒自らが調べており，生徒主体による数学的活動として高く評価できると考える．

c．テクノロジー活用による数学内容間のつながり

NCTM（2000）のスタンダード2000では，数学をより深く理解するために数学内容間のつながりを認識し使うための道具として，テクノロジーの活用の必要性を次のように述べている．

「（内容が）豊かな問題，数学的思考を支援する環境，さらに，様々な数学的ツールすべてのものへのアクセスは，数学をつながりのある全体とみなす生徒の能力に貢献する．[6]」（p.359）

これまでの先行研究を調べると，テクノロジーを活用した数学内容間のつながりには以下の２通りの研究があると思われる．

①概念形成及び学習経験のつながり

②生徒の主体的な数学的活動におけるつながり

以下に，これらのつながりについて考察する．

①概念形成及び学習経験のつながり

グラフ電卓活用の利点は前述したように，1)関数族の探究による規則・性質の発見と 2)多表現を関連づけたグラフの振る舞いを探究することである．Hector（1992）は，初等関数の学習でこれらの学習方法を経験することが，微分積分学の学習基盤としてつながることを次のように述べている．

「（グラフ電卓を活用する）目的は，初等関数における規則とグラフについて豊かな基盤となる経験を育成すること，かつ，グラフを伴った規則を認識させることである．これらの経験は，後で学習する極限，連続，導関数，曲線による面積，さらに，グラフ的に導入することができる他の微分積分の概念に対して，しっかりした基盤を形成する．[7]」(p.133)

同様に，Demana 他（1993）は，教科書「Precalculus Mathematics – A Graphing Approach –」の分数関数の学習目的でテクノロジーを活用による分数関数と極限の学習との関連づけを次のように述べている．

「生徒は，分数関数の end behavior モデルと漸近線を記述することで極限の概念を

[6] カッコ内は筆者が加筆した．
[7] カッコ内は筆者が加筆した．

調べる.」(p.215)

西村 (1996) は, オープンエンドな課題を取り扱って, 生徒が考えた１次・２次・三角・逆三角・指数・無理・分数関数, および, それらの合成関数の関係について, グラフ電卓を使ってグラフ的・数値的に問題解決した授業事例を報告している. オープンエンドアプローチでは, 生徒が発見した規則や関係の中で, 未学習の規則や関係を授業で取り扱うことが困難であることが指摘されているが, 西村の研究では, グラフ電卓の活用により未学習の関数関係をグラフ的・数値的に調べる数学的活動が行われている. 西村の研究成果によって, グラフ電卓等のテクノロジーを活用した関数の指導展開, さらに, 関数内容間のつながりを強調した発展的な指導の可能性が示された.

②生徒の主体的な数学的活動におけるつながり

グラフ電卓を活用した生徒の主体的な数学的活動に関する研究では, 生徒が自らの力で既習事項を積極的に活用して問題解決した事例や, 未学習事項を発展的に活用した事例が報告されている (例えば, 久保・藤澤, 1995 ; 中込, 1996 ; 公庄, 1999 ; 坪川, 2002 ; 梅野, 2004a ; 梅野, 2004b ; 佐伯・黒木, 2004a ; 佐伯・黒木, 2004b).

久保・藤澤 (1995), 中込 (1996), 坪川 (2002), 梅野 (2004a) は, グラフ電卓の画面をキャンバスにして複数の関数方程式を使って絵 (アート) を作成するグラフ・アートの実践を報告している. 彼らの論文に掲載された生徒の作品を見ると, 教師指導型の座学では見られないような生徒の生き生きとした数学的活動が見えてくる. しかも, 単なる「お絵書き」ではなく, べき関数, 無理関数, 指数関数, 対数関数, 三角関数などの多様な関数が使用されており, 作品の創作過程には既習の数学的知識が関連づけて駆使されていることが窺われる. 梅野 (2004a) は, 生徒の作品を詳細に分析した結果, グラフ・アートの教育上の意義を次のように述べている.

「(ⅰ)作成しようとする図形の構成曲線は, どのようなタイプの関数のグラフかを判断すること.
(ⅱ)そのグラフが図形の該当部分に表示されるようにするには, どのような平行移動や対称移動を行えばよいかを考えること.
(ⅲ)係数等を適切に決めて, その関数の式を具体的に決定すること.
(ⅳ)複数のグラフで構成されるときは, その接続箇所の座標を決めること.」
(p.194)

また, 生徒が積極的に既習事項をつなげる活動以外に, 作品を作成する数学的活動で未学習の内容を発見した事例も報告されている (久保・藤澤, 1995).

公庄 (1999), 梅野 (2004b), 佐伯・黒木 (2004a), 佐伯・黒木 (2004b) は, 生徒

が発見した規則・性質が成り立つ理由を生徒が自主的に考察し，生徒自らが既習事項をつなげながら問題解決した実践例を報告している．

本論文では，生徒自らが既習事項をつなげて問題解決した事例として，３．２節で極方程式を使った正葉曲線の規則を探究する数学的活動，さらに，３．３節で３次関数のグラフの種類と規則を探究する数学的活動について詳しく報告する．

(2) 教室内での数学的活動への影響

NCTM（1989）第９学年から第 12 学年のスタンダードでは，テクノロジーを活用した新しい教室活動（Classroom dynamics）の展開を求めている．

> 「豊かなテクノロジー環境に応じた指導パターンの変化における最も基本的な意義は，教師と生徒が本来のパートナーとなって数学的な考えを展開し，数学的問題を解決する新しい教室活動を展開することである．」(p.128)

実際に数学授業でグラフ電卓が活用されると，生徒の数学的活動にどのような影響があるのであろうか．ここでは，まず最初に，我が国における先行研究を参考に，グラフ電卓を活用した授業の数学的活動への影響についてまとめてみる[8]．

①数学に対する興味・関心・意識の向上
（久保・藤澤，1995；井之上，2000；梅野，2001；梅野，2002；梅野，2003；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

②数学学習の楽しさ
（久保・藤澤，1995；梅野，2004a）

③数学学習に対する不安の減少
（梅野，2002）

④数学理解の深まり
（梅野，2002；梅野，2003）

⑤主体的な数学的活動［問題解決活動，探究活動］
（久保・藤澤，1995；中込，1996；西村，1996；梅野，2004a；梅野，2004b；佐伯・黒木，2004a）

⑥発展的な数学的活動
（久保・藤澤，1995；片岡，1996；西村，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

⑦創造的な数学的活動

[8] ここにあげた項目は，生徒に対するアンケート調査，授業を実施した教師に対するアンケート調査，授業を実施した教師の観察結果など，それぞれの先行研究によって異なる．

（中込，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

⑧生徒間，生徒-教師間の数学的コミュニケーションの増加

（持永，1995；西村，1996；阿蘇，2002；坪川，2002）

⑨生徒とグラフ電卓との対話による数学的活動［外的活動と内的活動の相互作用］

（持永，1995；片岡，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

①－④は数学学習に対する生徒の態度に関する影響，⑤－⑦は教師主導型の講義から生徒の主体的な数学的活動への変化に伴う学習活動に関する影響，さらに，⑧－⑨は教室内の学習環境に関する影響についての評価であり，それぞれの項目が好意的に変化したことが報告されている．

Dunham（1998）は，グラフ電卓に関する文献レビューの教室活動（Classroom dynamics）の項目で，「グラフ電卓の最も大きな影響の一つは，教室の雰囲気の変化とNCTM（1989）が構想する学習環境の確立である」と述べ，グラフ電卓活用による教室活動への影響をまとめている．以下では，その文献レビューの中から，グラフ電卓を活用した6人の授業をビデオで分析したFarrell（1996）の研究と，1年間グラフ電卓を活用した27人の教師に対するインタビュー内容を詳細に分析したSimonsen and Dick（1997）の研究について簡単に紹介する．

【Farrellの研究】

この研究の目的は，高等学校のプレカリキュラスの教室で，教師と生徒の役割と活動を観察し分析することであった．この研究の対象となった6人の教師は，高等学校の数学に電卓とコンピュータの導入を企画しているカリキュラム開発プロジェクトに参加した教師の中から採用され，全員がC^2PC教材を使ったプレカリキュラス数学の授業をほぼ1年間授業した教師であった．連続した10時間の授業がビデオ撮影され，実験的な研究授業やトピック的な話題を扱った特別授業ではなく，各教師には通常の授業の手順と方法を最低限守ることが要求された．教室で使用した教科書は，グラフィングユーティリティ（電卓またはコンピュータ）を使用することを前提とした教科書で，全ての生徒はグラフ電卓とコンピュータに頻繁にアクセスした．さらに，教師は，グラフィングユーティリティを接続できるオーバーヘッドディスプレイ装置を使用した．

この研究の分析方法は，撮影された最初の6時間分の授業を5分間隔のセグメントに分割し，テクノロジー活用のセグメントにおける教師と生徒の役割と活動と，非活用のセグメントにおける教師と生徒の役割と活動についての比較が行われた．なお，テクノロジーを活用したセグメントは56％で[9]，テクノロジーを活用しなかったセグ

[9] テクノロジー活用の内訳は，グラフ電卓のみを活用したのは43％，コンピュータのみを活用し

メントは 44%であった．以下に研究成果を簡単に示す．

表 2-2-3 に，教師の役割と教授活動についての分析結果を示す．

教師の役割に関しては，テクノロジー活用の方が，課題設定と説明の役割が減り，生徒の相談と生徒と一緒に探求する役割が増えた．特に，相談の役割は，全ての教師において，テクノロジー活用が非活用を上回っていた．説明の役割は，６人中５人の教師において，テクノロジー活用が非活用を下回っていた．課題設定の役割は，６人中４人の教師において，テクノロジー活用が非活用を下回っていた．

次に，教師の教授活動に関しては，テクノロジー活用の方が，説明（講義）の活動が少なくなり，生徒のグループ活動がかなり増えたことが明らかになった．

表 2-2-3．教師の役割と教授活動における比較

［教師の役割］

	Without Technology	With Technology
Manager	100	96
Task setter	82	75
Explainer	91	75
Consultant	19	43
Fellow investigator	6	17
Resource	3	5

［教授活動］

	Without Technology	With Technology
Exposition	59	41
Practice	53	56
Discussion	5	5
Investigation	27	25
Applied mathematics	6	7
Problem solving	3	5
Group work	2	29

表 2-2-4 に，生徒の役割と学習活動についての分析結果を示す．

生徒の役割に関しては，テクノロジー活用の方が，課題設定，生徒同士の相談，他の生徒と一緒に探究する活動が増えた．つまり，テクノロジーを活用することにより，生徒が主体的に課題を設定し，生徒同士がコミュニケーションをしながら共に探究を行う役割が増えたことが明らかになった．

生徒の学習活動に関しては，テクノロジー活用の方が，講義形式が減り，記述活動（電卓，コンピュータにデータを入力する活動を含む)，探究活動，問題解決活動，及び，高いレベルの思考活動が増えたことが明らかになった．

表 2-2-4．生徒の役割と学習活動における比較

［生徒の役割］

	Without Technology	With Technology
Manager	0	6
Task setter	10	27
Explainer	6	11
Consultant	7	20
Fellow investigator	0	11
Resource	2	2

［学習活動］

	Without Technology	With Technology
Didactic	98	87
Symbolizing	44	91
Investigating	54	87
Problem solving	2	20
Higher level thinking	29	36

たのは 27%，さらに，両方のテクノロジーを活用したのが 30%であった．

以上の結果から，テクノロジーを活用することにより，教師の役割や教授活動が変わり，生徒の教室での活動（グループ作業，探究活動，問題解決活動）が活発になったことが明らかになった．さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化されており，NCTM（1989）が提唱する「教師と生徒が本来のパートナーとなって数学的な考えを展開し，数学的問題を解決する新しい教室活動」が展開されたと言える．

【Simonsen and Dick の研究】

この研究の目的は，数学教室におけるグラフ電卓の影響に関する教師の認識を調査することであった．1991 年に 36 校の高等学校に数式処理付きのグラフ電卓（HP-48S）が 30 台と OHP 用投影装置が寄付され，寄付された教師は，１日の講習会の参加が義務づけられ，希望者には１週間の講習会が開講された．１年後の 1992 年３月から４月の４週間の間にインタビューが行われ 27 人の教師がインタビューに応じた．何れの教師も教師経験が約 15 年で，修士が 19 名で，博士が１名であった．さらに，26 名（男性 19 名：女性７名）が１日講習会を受け，15 名が１週間の講習会を受けた．１週間の講習会を受講しなかった教師の６名は，既に他の機種を授業で活用していた．インタビューは電話で行われ，５つの項目（①グラフ電卓利用の利点，②グラフ電卓利用の欠点，③授業活動，④カリキュラムと評価，⑤教師支援と展開）についての自由回答式の質問（open-ended questions）が行われた．

表 2-2-5 にインタビュー内容の分析結果を示す．この表は，授業でのグラフ電卓の活用頻度（(a)週に１度以上活用する［８名］，(b)週に１度は使わないが１ヶ月に１度以上活用する［10 名］，(c)特定の簡単な話題に散発的に活用する［９名］）よってグループ化されている．以下に分析結果を簡単にまとめる．

・<u>グラフ電卓利用の利点（Advantages of Calculator Use）</u>

「細かい計算からの解放（67%）」，「即時フィードバックの有効性（63%）」，「視覚化の向上（56%）」の項目で好意的な結果が得られた．これらの項目に関しては，グループ間における差は見られなかった．

・<u>グラフ電卓利用の欠点（Disadvantages of Calculator Use）</u>

「授業実行の財政困難とアクセス不足（59%）」は，寄付された 30 台のグラフ電卓が各学校の数学教師で分配（シェア）されたため，生徒一人に１台の使用や宿題での使用が出来なかったことが原因であった．「セキュリティの問題（52%）」は，グラフ電卓を良く使う教師が問題としてあげている．さらに「操作練習に使用する時間（41%）」と「電卓依存への不安（37%）」は，グラフ電卓を良く使う教師はあまり問題としていなく，むしろグラフ電卓を使わない教師が問題として取り上げている．

2．2　グラフ電卓を活用した数学的活動

・授業活動（Classroom Dynamics）

全ての項目においてグループに関わらず好意的な意見が多かった．つまり，グラフ電卓を活用することにより，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，共同学習などによって生徒がお互いに助け合いながら学習できることを多くの教師が認めていることが明らかになった．

・カリキュラムと評価（Curriculum and Evaluation）

「教材の準備時間の増加（78%）」と「数学的深まりの増加（59%）」を認めた教師が多かった．多くの教師は，グラフ電卓の活用が教師の評価手続にほとんど影響がないことを示した．さらに，試験でのグラフ電卓活用に関心を示した教師が多かった．特に，数学的深まりを認めた半分以上の教師は，テスト問題がオープンエンドで数学的思考を引き出す問題に変わったことを述べた．また，グラフ電卓を週に1回以上使用したクラスの生徒は，試験でのグラフ電卓の使用を認めたのに対して，残りのあまり使用しなかったクラスの生徒は，試験でのグラフ電卓の使用を認めなかった．この結果は，グラフ電卓を活用した授業，または，活用しない授業によって，生徒の試験に対する考え方に差異があることを示している．これは，グラフ電卓使用と非使用によってテスト問題の内容が異なることに要因があると思われる．

「AP 試験への影響（22%）」が低いのは，調査を行った 1991 年−1992 年には AP 試験でのグラフ電卓の使用が認められていなかったためである[10]．このため，グラフ電卓の必要性を感じていた当時の教師が，AP 試験終了後の4週間の授業で集中的にグラフ電卓を使用した授業を行ったことが Simonsen の論文で報告されている．

・教師支援と展開（Professional Support and Development）

「テクノロジー指向の教材の要求（74%）」，「教師教育の追加要求（71%）」，「教師ネットワークの要求（52%）」を認めた教師が多かった．Simonsen は，教師教育と支援を行うためには，(a)グラフ電卓の適切な台数，(b)カリキュラムに直接的に関連する教材，(c)技術的な補助，(d)教師の専門的な向上と展開を目指した支援環境，の必要性を述べている．

---

[10] 1995 年から AP 試験の一部でグラフ電卓の使用が認められた．

表 2-2-5. グラフ電卓の使用頻度における教師の認識結果

傾向	1週間に1回以上	1週間に1回未満で1ヶ月に1回以上	特定の簡単な話題における散発的な使用	合計
	n=8	*n=10*	*n=9*	*n=27*
電卓利用の利点				
細かい計算からの解放	6	6	6	18
即時フィードバックの有効性	6	5	6	17
視覚化の向上	5	4	6	15
関係づけの展開	4	2	2	8
電卓利用の欠点				
授業実行の財政困難とアクセス不足	4	6	6	16
セキュリティの問題	6	3	5	14
操作練習に使用する時間	1	6	4	11
電卓依存への不安	2	4	4	10
授業活動				
教師主導型の減少	6	4	7	17
オープンエンド問題の増加	5	4	6	15
発見学習の促進	5	3	6	14
共同学習の増加	7	6	5	18
生徒の数学に関する議論の増加	5	3	5	13
生徒の参加の増加	4	5	4	13
生徒の意気込みの増加	4	5	4	13
カリキュラムと評価				
準備時間の増加	6	7	8	21
数学的深まりの増加	5	6	8	19
技術的公開の必要性	1	2	4	7
AP試験への影響	1	2	3	6
教師支援と展開				
テクノロジー指向の教材の要求	6	6	8	20
教師教育の追加要求	5	7	7	19
教師のネットワークの要求	4	5	5	14
電卓の追加要求	5	2	3	10
継続的な教師のｺﾐｭﾆｹｰｼｮﾝの要求	3	3	1	7

以上に示した先行研究の調査結果から，グラフ電卓を活用した授業では，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化された授業活動が展開されたことが明らかになった．

本論文の第3章で示すグラフ電卓を活用した授業においても同様な結果が観察されているが，本論文では，特に生徒とグラフ電卓とのコミュニケーションに焦点を絞り，生徒がグラフ電卓をパートナーとしてどのように数学的活動を行ったかについての分析を行った．

4．グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用

上記において，グラフ電卓は，手のひらサイズで操作性が簡単なことから，関数グラフの特徴を掴む数学的活動として有効に活用することができ，かつ，教室内の活動も活発になることを示してきた．一方，グラフ電卓には，液晶の制約や性能上の問題から誤った結果を表示することがあり，生徒に誤解を与える危険性も含んでいることが，これまでの先行研究で指摘されている（Demana and Waits, 1988 ; Goldenberg, 1989; Dion, 1990 ; Dick, 1992 ; Hector, 1992 ; Donley and Elizabeth, 1993 ; Williams, 1993 ; Hansen, 1994; Ward, 1998 ; Krumpe and Keiser, 2003）．この現象に対して，Dick（1992），Hansen（1994），Krumpe and Keiser（2003）は，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導方法について述べている．ここでは，①グラフ電卓の誤表示の種類，②誤表示の原因，③誤表示の教育的利用，について先行研究をもとに考察する．

(1) グラフ電卓の誤表示の種類

Dick（1992）は，グラフ電卓を活用する際に必要な技能として①数値的技能（Numerical Skills)，②グラフ的技能（Graphical Skills)，③記号的技能（Symbolic Skills)，④翻案技能（Translation Skills）[11]を挙げている．その中のグラフ的技能では，液晶画面の制約の問題や不適切な Window の設定による誤表示に対処すべき教育的観点を三つ強調している．以下に，具体的な事例をもとに簡単に説明する．

1．有限な表示画面外に存在するグラフ

図 2-2-5 に示すように，3次関数 $y = x^3 - 6x^2 + 10$ のグラフを $-5 \leq x \leq 5$，$-10 \leq y \leq 10$ の範囲で Window を設定すると，放物線のようなグラフが描かれる．このように，設定した Window 外に存在する3次関数のグラフの一部が表示さ

[11] 数値的表現，グラフ的表現，代数的表現の3つの表現間を互いに関連づけて言い換える技能のことである．

れていないため，３次関数のグラフの特徴を理解していない生徒が誤解をする可能性がある．

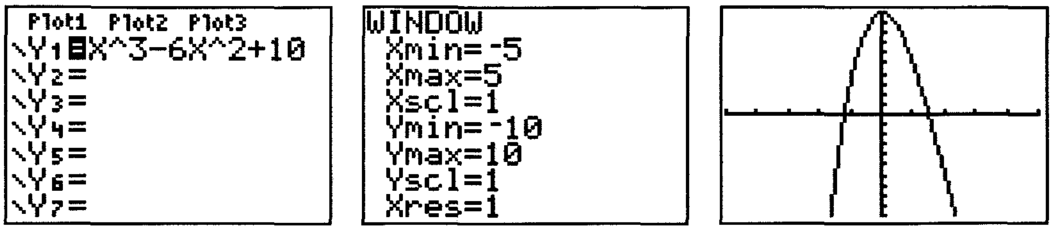


図 2-2-5. Window 設定外に存在するグラフ

２．スケール（ズームインはグラフの広域情報を，さらに，ズームアウトはグラフの局所情報を不明瞭にする）

前述の図 2-2-4 では，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ の Window 設定範囲を広げてズームアウトすると一次関数 $g(x)=2x+15$ に近似できることをグラフ的に示した．一方，Window 設定範囲を小さくしてズームインすると，不連続点の振る舞いや曲線が直線に近似できることをグラフ的に示すことができる．このようにグラフ電卓では，ズームインとズームアウトによって，end behavior と local behavior の振る舞いを観察できる利点があるが，このことを過度に一般化すると逆に生徒に誤解を与える可能性がある．

３．数値的精度の限界（丸めエラーは，座標を描くためのピクセルを離散的に選択することに影響を与える）

図 2-2-6 に示すように，３次関数 $y=x^3+1$ と $y=x^3+x^2+1$ のグラフを $-5\leqq x\leqq 5$，$-10\leqq y\leqq 10$ の範囲で Window を設定すると，$x=0$ 近辺で二つのグラフが一致しているように見える．しかも，$y=x^3+x^2+1$ のグラフは極値がないようなグラフに見える．これが数値的精度の限界による誤表示である．

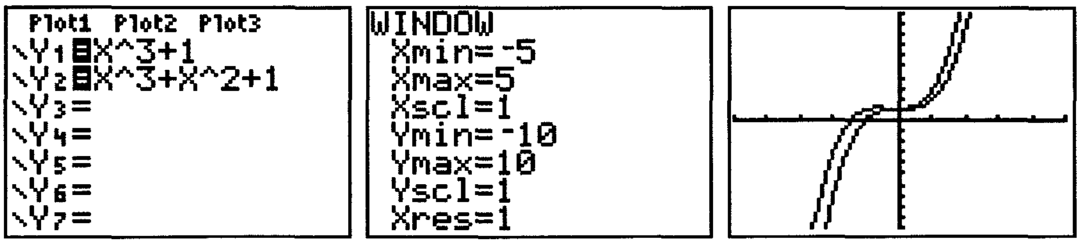


図 2-2-6. 数値的精度の限界による誤表示

本論文の３．３節では，３次関数の種類を発見する数学的活動において，自分で作成した増減表とグラフ電卓の結果を比較しながら不適切な Window 設定を適切なグラフに修正した事例を報告する．

(2) 誤表示の原因

ここでは①取り除き得る不連続点（removable discontinuity）と②周期関数の事例をもとに，グラフ電卓の誤表示の原因について考察する．

まず最初に，グラフ電卓のグラフ表示の仕組みについて説明する．図 2-2-7 に示すように，グラフ電卓（TI-83）の液晶画面は，横が 95 個のピクセル数，縦が 63 個のピクセル数で構成されている[12]．グラフ表示の仕組みは，横が 95 個のピクセルに対応する x の値を関数に代入して得られた座標を結んで表示している．ここで，左から n 番目のピクセルに対する x の値を X_n（ただし $1 \leq n \leq 95$ の整数）と定義すると，定義域 $[X\min, X\max]$ におけるピクセルの間隔は 94 個であるため，X_n は初項 $X_1 = X\min$，公差 $d = \dfrac{X\max - X\min}{94}$ の等差数列であることが分かる．つまり，一般項 $X_n = Xmin + \dfrac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$ をもとに，グラフ電卓は $(X_n, f(X_n))$ と $(X_{n+1}, f(X_{n+1}))$ を計算し，この２点を結んでグラフを描いている（ただし $1 \leq n \leq 94$）．

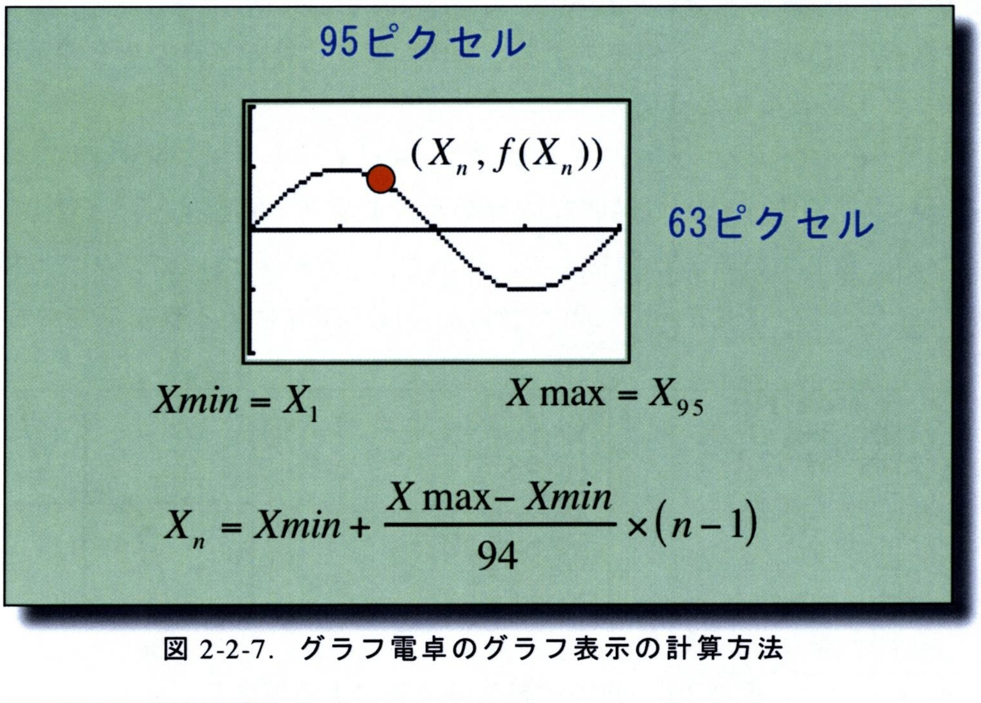


図 2-2-7．グラフ電卓のグラフ表示の計算方法

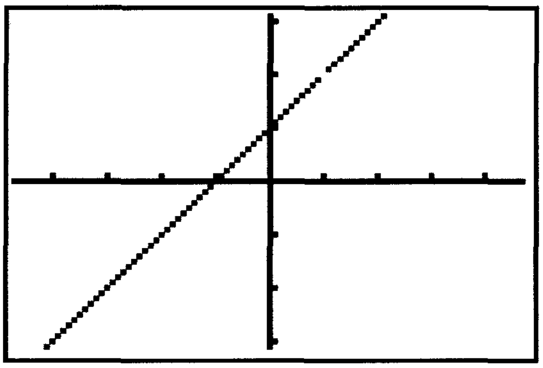
[12] TI-89 は，横が 159 個のピクセル数，縦が 77 個のピクセル数で構成されている．このため，文中に書かれている等差数列の数字 95 を 159 に，さらに，数字 94 を 158 に置き換えて式を適用すると，TI-89 でも同じ現象が生じる．

a．取り除き得る不連続点（removable discontinuity）の誤表示

Dick（1992）は，取り除き得る不連続点（removable discontinuity）を持つ関数のグラフの「穴」[13]は，Window の設定によって 3 種類（① 1 ピクセルが欠ける，②“ジャンプ”または“ドロップ”のように急激に変化する，③連続に見える）のグラフが表示されることを示している．以下に分数関数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ を事例に 3 種類のグラフを示す．

① 1 ピクセルのみが欠ける「穴」

図 2-2-8 は，グラフの表示範囲が $-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-3.1 \leqq y \leqq 3.1$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $-4.7 \leqq x \leqq 4.7$ であるため，横方向に 1 ピクセル増えるとxの増分が 0.1 となる．このため，左から 58 番目のピクセルのx座標が 1 で，これに対応するy座標が「値なし」となり不連続点が表示されないことになる．一方，yの表示範囲が $-3.1 \leqq y \leqq 3.1$ であるため，縦方向に 1 ピクセル増えるとyの増分も 0.1 となる．この結果，座標$(1,2)$に対応する 1 ピクセルのみが表示されないことになる．



$-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-3.1 \leqq y \leqq 3.1$

n	Xn	$f(Xn)$
1	-4.7	3.7
:	:	:
56	0.8	1.8
57	0.9	1.9
58	1.0	ERROR
59	1.1	2.1
60	1.2	2.2
:	:	:

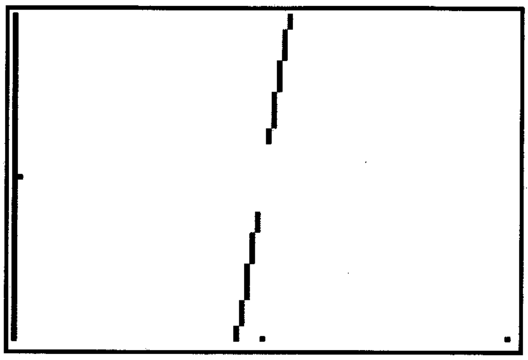
図 2-2-8．1 ピクセルが表示されない「穴」の例

②急激にジャンプする「穴」

図 2-2-9 は，グラフの表示範囲が $0 \leqq x \leqq 2$，$1.9 \leqq y \leqq 2.1$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ であるため，左から 48 番目のピクセルのx座標が 1 で，これに対応するy座標が「値なし」となり不連続点が表示されないことになる．一方，yの表示範囲が $1.9 \leqq y \leqq 2.1$ であるのに対して，「穴」前後の 47 番目と 49 番目のピクセルのy座標が $1.97872 \leqq y \leqq 2.02130$

[13] Dick（1992），Murdock, J. 他（1998）と Hornsby, J.他（1999）は，removable discontinuity のことを「穴（hole）」と記述している．

であるため，縦軸方向の約２割が表示されないことになる．このため急激にジャンプしたように見える．



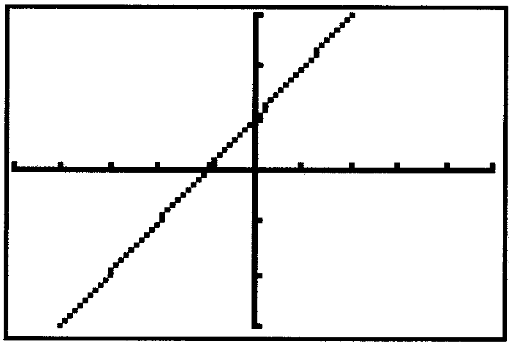
$0 \leqq x \leqq 2$，$1.9 \leqq y \leqq 2.1$

n	Xn	$f(Xn)$
1	0.00000	1.00000
:	:	:
46	0.95745	1.95745
47	0.97872	1.97872
48	1.00000	ERROR
49	1.02130	2.02130
50	1.04260	2.04260
:	:	:

図 2-2-9．急激にジャンプする「穴」の例

③連続に見える「穴」

図 2-2-10 は，グラフの表示範囲が $-5 \leqq x \leqq 5$，$-3 \leqq y \leqq 3$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $-5 \leqq x \leqq 5$ であるため，左から 57 番目のピクセルの座標が $(0.95745,\ 1.95745)$で，58 番目のピクセルの座標が $(1.06380,\ 2.06380)$ となり，これらの２点を結ぶため不連続点である「穴」が連続して見えることになる．



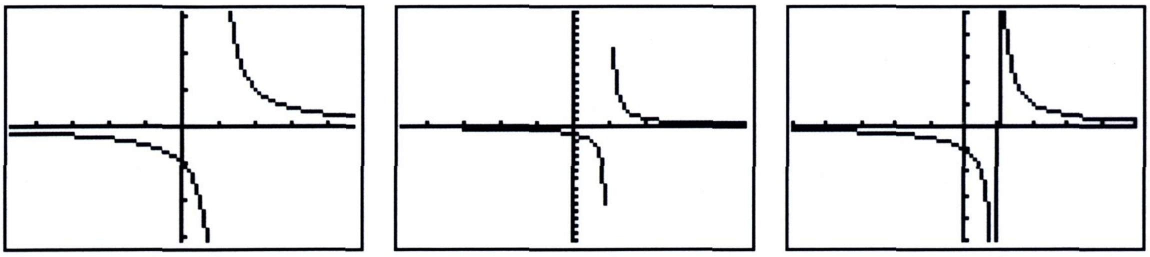
$-5 \leqq x \leqq 5$，$-3 \leqq y \leqq 3$

n	Xn	$f(Xn)$
1	-5.0	-4.0
:	:	:
56	0.85106	1.85106
57	0.95745	1.95745
58	1.06380	2.06380
59	1.17020	2.17020
:	:	:

図 2-2-10．連続にみえる「穴」の例

以上のように，不連続点である「穴」は，Window の設定によって３種類のグラフが表示される．図 2-2-11 に $y=\dfrac{1}{x-1}$ のグラフを示すように，漸近線の場合も同様に３種類のグラフが表示される．最初のグラフは正常なグラフ，二番目のグラフは yの表示

範囲を広げると二つの曲線が途切れるグラフ，三番目のグラフは二つの曲線が直線で結ばれるグラフである．これらの誤表示も上記で示したグラフ電卓のグラフ表示の仕組みに原因がある．



$-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-3.1 \leqq y \leqq 3.1$　$-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-15 \leqq y \leqq 15$　$-5 \leqq x \leqq 5$，$-5 \leqq y \leqq 5$

図 2-2-11．漸近線に関する誤表示

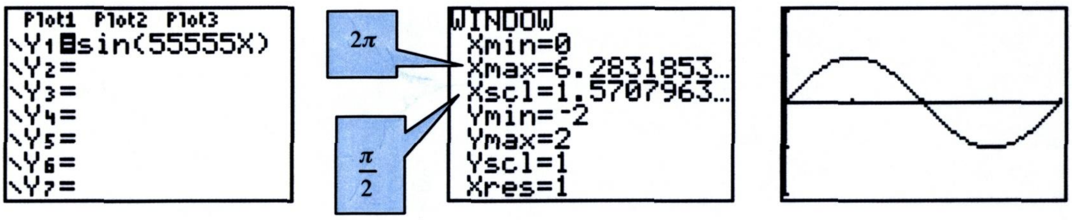
上記の考察から，不連続点の「穴」や漸近線が教科書どおりに綺麗に表示できるのは，特殊な Window 設定が必要であることが分かる．実際に，本論文の３．１節で行った極限の数学的活動では，生徒たちは連続に見える「穴」のグラフや双曲線が直線で結ばれる現象を沢山観察していた．しかし，生徒達はグラフ的な観察だけではなく，TABLE 機能を使って数値的に「穴」や漸近線が生じることを確認したり，また，分数関数の方程式を変形して代数的に確認している生徒もいた．このように，グラフ電卓を使った数学的活動では，グラフ的表現の観察だけではなく，３つの表現を総合的に観察・検証する必要があることが明らかになった．

ｂ．周期関数の誤表示

ここでは周期関数の周期性によって，グラフ電卓が誤ったグラフを表示する４つの事例とその原因について示す．

①事例１：関数

$y = sin55555x$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で１周期しか表示されない誤表示．



【誤表示の原因】

- $f(x) = sin\,x$，$g(x) = sin55555\,x$，$Xmin = 0$，$X\max = 2\pi$ とする．
- X_n を求める．

$$X_n = Xmin + \frac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$$
$$= 0 + \frac{2\pi - 0}{94} \times (n-1) = \frac{2\pi}{94} \times (n-1) = \frac{\pi}{47} \times (n-1)$$

● $f(X_n)$，$g(X_n)$ を比較する．

(1) $f(X_n) = sin\, X_n = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$

(2) $g(X_n) = sin\, 55555 X_n = sin\left\{55555 \times \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\left(1182\pi + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)\right\}$

$$= sin\left\{1182\pi(n-1) + \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = f(X_n)$$

591(n-1) 回転

ゆえに，$f(X_n) = g(X_n)$ であるから，$y = sin 55555x$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で１周期しか表示されないことが明らかである．

【 $y = sin 55555x$ 以外の関数】

● $h(x) = sin(mx)$ とする．

● $h(X_n) = sin(mX_n) = sin\left\{m \times \frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$

$= sin\left\{\left(2\pi p + \frac{\pi}{47}\right) \times (n-1)\right\}$ と仮定すると

p(n-1) 回転と仮定

$$m \times \frac{\pi}{47}(n-1) = \left(2\pi p + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)$$

p	*m*
1	95
2	189
3	283
:	:
591	55555
:	:

∴　$m = 94p + 1$ の場合，１周期しかグラフが表示されない．

②事例２：関数

$y = sin\,x$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 378\pi$ の範囲で１周期しか表示されない誤表示.

【誤表示の原因】

● $f(x) = sin\,x$，　$Xmin = 0$，　$X\max = 378\pi$　とする

● X_n　を求める.

$$X_n = Xmin + \frac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$$

$$= 0 + \frac{378\pi - 0}{94} \times (n-1) = \frac{378\pi}{94} \times (n-1) = \frac{189\pi}{47} \times (n-1)$$

● $f(X_n)$　を求める.

$$f(X_n) = sin\,X_n = sin\left\{\frac{189\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\left(4\pi + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)\right\}$$

$$= sin\left\{4\pi(n-1) + \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$$

2(n-1) 回転

$\therefore\quad f(X_n) = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$　となり，

これは事例１の　$Xmin = 0$，　$X\max = 2\pi$　の場合と同じ値になるので $f(x) = sin\,x$　は，定義域 $[0, 378\pi]$ で１つの波が表示される.

【定義域 $[0, 378\pi]$ 以外の範囲】

● $X\max = W$　とすると　$X_n = \frac{W}{94}(n-1)$

● $f(X_n) = sin\left\{\frac{W}{94}(n-1)\right\}$

$$= sin\left\{\left(2\pi\,p + \frac{2\pi}{94}\right) \times (n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47} \times (n-1)\right\}$$

と仮定すると

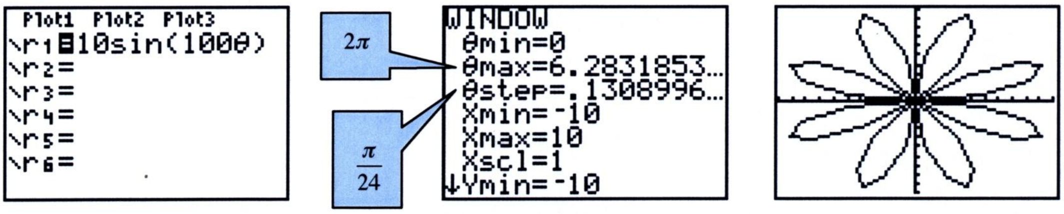
$\frac{W}{94}(n-1) = \left(2\pi\,p + \frac{2\pi}{94}\right)(n-1)$　だから　$\frac{W}{94} = 2\pi\,p + \frac{2\pi}{94}$

$\therefore\quad W = 188\pi \times p + 2\pi$　の場合，１つの波が表示される.

p	W
1	190 π
2	378 π
3	566 π
4	754 π
：	：

③事例３：極方程式

$\theta step = \dfrac{\pi}{24}$ の場合に， $r = 10\,sin100\theta$ のグラフが $r = 10\,sin4\theta$ と同じグラフを描く誤表示．



【誤表示の原因】

- $R_1(\theta) = 10sin\,4\theta$， $R_2(\theta) = 10sin\,100\theta$

  $\theta min = 0$， $\theta \max = 2\pi$， $\theta\,step = \dfrac{\pi}{24}$ とする

- θ_n を求める．

  $\theta_n = \theta min + \theta step \times (n-1)$

  $= 0 + \dfrac{\pi}{24} \times (n-1) = \dfrac{\pi}{24} \times (n-1)$

  $\theta step = \dfrac{\theta\max - \theta min}{n-1}$ だから

  $\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{2\pi - 0}{n-1}$ より $0 \leqq n \leqq 49$

- $R_1(\theta_n)$， $R_2(\theta_n)$ を比較する．

  (1) $R_1(\theta_n) = 10sin\left\{4 \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\} = 10sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\}$

  (2) $R_2(\theta_n) = 10sin\left\{100 \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\}$

  $= 10sin\left\{\dfrac{25\pi}{6}(n-1)\right\} = 10sin\left\{\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)(n-1)\right\}$

  $= 10sin\left\{4\pi(n-1) + \dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\} = 10sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\} = R_1(\theta_n)$

  2(n-1) 回転

【 $r = 10sin\,100\theta$ 以外の極方程式】

- $R_3(\theta) = 10sin(m\theta)$ とする．

- $R_3(\theta_n) = 10sin(m\theta_n) = 10sin\left\{m \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\}$

  p(n-1)回転と仮定

  $= 10sin\left\{\left(2\pi\,p + \dfrac{\pi}{6}\right) \times (n-1)\right\}$ と仮定すると

$$m \times \frac{\pi}{24}(n-1) = \left(2\pi p + \frac{\pi}{6}\right)(n-1)$$

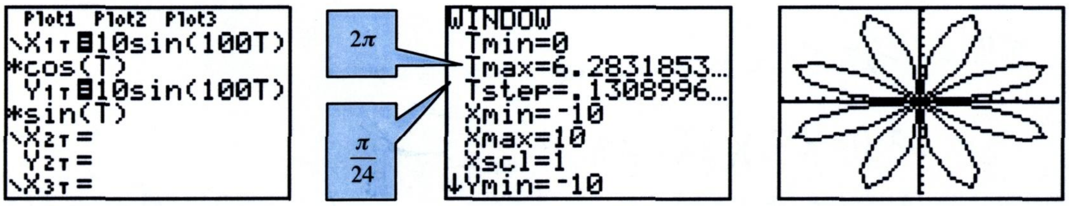
$\therefore$　$m = 48p + 4$ の場合，

$r = 10\sin 4\theta$ と同じグラフが表示される．

p	m
1	52
2	100
3	148
4	196
5	244
：	：

④事例４：媒介変数方程式

$tstep = \dfrac{\pi}{24}$ の場合に，$x = 10\sin 100t \times \cos t$，$y = 10\sin 100t \times \sin t$ のグラフが $x = 10\sin 4t \times \cos t$，$y = 10\sin 4t \times \sin t$ と同じグラフを描く誤表示．



【誤表示の原因】

事例３と同じであるので省略する．

(3) 誤表示の教育的利用

Dick（1992）は，グラフ電卓の誤表示の現象を避けるのではなく，むしろ生徒の注意をグラフ電卓の限界・制限に向かせることによって，誤った結論を防ぐより良い懐疑心を育てることの必要性を述べている．Hansen（1994），Krumpe and Keiser（2003）は，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導方法について述べている．しかし，生徒自身の力で問題解決した事例研究は，佐伯・黒木（2004c）以外に見られないように思われる．

佐伯・黒木（2004c）は，正葉曲線の数学的活動において，$r = 10\sin 100\theta$ と $r = 10\sin 4\theta$ が同じグラフになる現象を不思議に思った生徒の疑問を取り上げ，その原因をクラス全体に考察するように求めた．その結果，二人の生徒が誤表示の原因のレポートを提出した．

図 2-2-12 は，誤表示の原因を代数的に考察した生徒のレポートである．この生徒の記述の「実際に $\dfrac{\pi}{24}$ ずつして代入していくとよく分かる．」では，$r = 10\sin 100\theta$ と

$r=10\,sin4\theta$ の θ に $\dfrac{\pi}{24}$ の自然数倍を代入していることが窺われる．実際に $\theta=\dfrac{\pi}{24}$ を代入して計算している部分では，三角関数の周期性の性質 $sin(\theta+2n\pi)=sin\theta$ を使ってそれぞれの値が一致することを確認している．さらに，θ を一般化して，$r=10\,sin100\theta$ の n ステップ目の動径が $\left(4\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\times n$ となり，動径は $4\pi\times n$ 回転して $r=10\,sin4\theta$ の動径と一致することを代数的に考察し，その結果，両方のグラフが同じになることを結論づけた．

$r=10\sin(100\theta)$ と $r=10\sin(4\theta)$ と同じ？

$\theta step=\frac{\pi}{24}$ とした時、

実際に $\frac{\pi}{24}$ ずつに代入していくとよく分かる。

$\sin\left(100\times\frac{\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{25}{6}\pi\right)=\sin\left(4\pi+\frac{1}{6}\pi\right)=0.5$

$\sin\left(4\times\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{1}{6}\pi=0.5$ → 同じ値が出てくる

$\sin(100\theta)$ は、$\frac{\pi}{24}$ ずつ回っていく分だけ、$\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\times n$ (n:整数)

となり $4\pi\times n$ 分 $\sin(4\theta)$ よりは進んでいるが値は等しくなってしまう。

よってグラフは同じくなる。

図 2-2-12．グラフの誤表示を代数的に解決した生徒のレポート

図 2-2-13 は，数表と弧度法の周期性を考察して結論づけた生徒のレポートである．この生徒も，WINDOW 設定の θ step が $\dfrac{\pi}{24}$ であることに着目して，$r=10\,sin100\theta$ と $r=10\,sin4\theta$ の数表を $\theta=\dfrac{\pi}{24}$ の自然数倍ごとに求め，それぞれの値が一致することを数値的に確認している．次に，$\theta=\dfrac{\pi}{24}$ の場合について，$100\theta=\dfrac{25}{6}\pi$ の動径は円を２回転して $4\theta=\dfrac{1}{6}\pi$ に一致することを図的に考え，他の場合も同様に円を回転して動径が一致することを調べ，２つのグラフが同じになると結論づけている．さらに，この考え方を発展させて，$r=10sin2\theta$ と $r=10sin50\theta$ が同じグラフ（レポートでは

$2\theta = 50\theta$ と記述）であることなど，同じ現象を起こす事例を幾つも推測し，その推測をグラフ電卓で検証していることが分かる．このように，この生徒は，単に原因を数学的に追及するだけでなく，グラフ電卓を数学的活動のパートナーとして何度も対話を繰り返すことにより，誤表示の原因を発展的に考察し，検証したと言える．

(1) 規則の理由

規則　$r=10\sin(100\theta)$ が $r=10\sin(4\theta)$ と同じ?

$n=4$ の場合

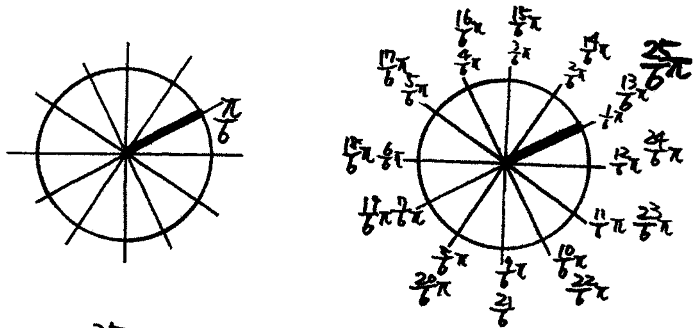
θ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{2}{24}\pi$	$\frac{3}{24}\pi$	$\frac{4}{24}\pi$	$\frac{5}{24}\pi$	$\frac{6}{24}\pi$	$\frac{7}{24}\pi$	$\frac{8}{24}\pi$	$\frac{9}{24}\pi$	$\frac{10}{24}\pi$	$\frac{11}{24}\pi$	$\frac{12}{24}\pi$	…
4θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	…
r	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0	…

$n=100$ の場合

θ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{2}{24}\pi$	$\frac{3}{24}\pi$	$\frac{4}{24}\pi$	$\frac{5}{24}\pi$	$\frac{6}{24}\pi$	$\frac{7}{24}\pi$	$\frac{9}{24}\pi$	$\frac{10}{24}\pi$	$\frac{11}{24}\pi$	$\frac{12}{24}\pi$	…	
100θ	0	$\frac{25}{6}\pi$	$\frac{50}{6}\pi$	$\frac{75}{6}\pi$	$\frac{100}{6}\pi$	$\frac{125}{6}\pi$	$\frac{150}{6}\pi$	$\frac{175}{6}\pi$	$\frac{200}{6}\pi$	$\frac{225}{6}\pi$	$\frac{250}{6}\pi$	$\frac{275}{6}\pi$	…	
r	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0	…

$\theta=\frac{\pi}{24}$ のとき　$4\theta=\frac{\pi}{6}$，$100\theta=\frac{25}{6}\pi$ となる

つまり，



このように，$\frac{25}{6}\pi$ は円を2周して $\frac{\pi}{6}$ と同じ位置に戻ってくるので
r が同じ値になりグラフの結果が出てきたのだと思う
他の $\frac{50}{6}\pi$，$\frac{75}{6}\pi$，$\frac{100}{6}\pi$ なども同じように円を何もして $\frac{2}{6}\pi$，$\frac{3}{6}\pi$，$\frac{4}{6}\pi$
などと同じ値になる．
したがって，n の値がどんなものでも $n\theta$ が同じ位置になれば
グラフ電卓の結果は同じになるのである。
$4\theta=100\theta$ の他にも $2\theta=50\theta$，$6\theta=150\theta$，$8\theta=200\theta$
$10\theta=250\theta$ という具合に結果が同じになることがわかった．

図 2-2-13．グラフの誤表示を数値的・図的に解決した生徒のレポート

5．まとめ

本節では，テクノロジーの対象を，本研究におけるタイプ1（通常の数学授業を補完する数学的活動）で活用するグラフ電卓に焦点を絞って，①数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷，②グラフ電卓活用の利点，③グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用，の3つの観点について考察した．

先行研究の調査結果から，1986年に世界で初めて開発されたグラフ電卓が米国の数学教育で積極的に活用されていることが先行研究から明らかになった．一方，我が国では，1993年に初めて紹介され，最初の3年間は研究授業やトピック的な授業が行われ，1996年を境に，実際のカリキュラムに位置づけられた数学授業での活用，文部省の学習指導要領での推奨，さらに教科書の出版など，数学授業におけるグラフ電卓活用の基礎が整いつつあることが分かった．しかし，グラフ電卓の教材の不足，教師教育，財政面の問題等によって，実際の学校現場ではあまり活用されていないことが明らかになった．

次にグラフ電卓活用の利点に関しては，①グラフ電卓の効果的な活用方法と②教室内での数学的活動への影響について先行研究をもとに考察した．グラフ電卓の活用方法は，1)帰納的な数学的活動による規則・性質の発見，2)多表現の関連づけによる理解の深化，3)生徒の主体的な数学的活動による数学間のつながり，の三つの方法が効果的であることが分かった．また，教室内での数学的活動への影響については，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題解決，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化された授業活動が展開されたことが明らかになった

最後に，グラフ電卓の液晶の制約や性能上の問題による誤表示の原因と教育的利用について先行研究をもとに考察した．佐伯（2004c）の研究から，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導が可能であることが明らかになった．

引用文献・参考文献

1) 阿蘇和寿 (2002).「数学の授業における学生の探究活動 -テクノロジーの効果的な活用に向けて-」. 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌. Vol.9. No.1. pp.31-50.

2) Banchoff T. F. (1991). "Computer Laboratory Magnification of Idiosyncracies" . In Leinbach L. C. (Ed.) . The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.1-7.

3) Demana F. and Waits B. K. (1988). "Pitfalls in Graphical Computation, or Why a Single Graph Isn't Enough" . The College Mathematics Journal. 19(2) . pp.177-183.

4) Demana F. and Waits B.K. (1992). "A Computer for *All* Students". Mathematics Teacher. Vol.85. No.2. pp.94-95.

5) Demana F., Waits B.K. and Clemens S.R.(1993). Precalculus Mathematics – A Graphing Approach - (Teacher's Edition / Third Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

6) Dick T. P. (1992). "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 145-157.

7) Dion G. (1990). "The Graphics Calculator: A Tool for Critical Thinking" . Mathematics Teacher. pp.564-571.

8) Donley H. E. and Elizabeth A. G. (1993). "Hidden Behaviors in Graphs" . Mathematics Teacher. Vol.86. No.6. pp.466-468.

9) Dunham P.H. and Dick T. P. (1994). "Research on Graphing Calculators" . Mathematics Teacher. Vol.87. No.6. pp.440-445.

10) Dunham P.H. (1998). "Hand-held Calculators in Mathematics Education: A Research perspective". Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference. http://www.mathforum.com/technology/papers/papers/dunham.html.

11) Farrell A.M. (1996). "Roles and Behaviors in Technology Integrated Precalculus Classrooms". Journal of Mathematical Behavior. Vol.15. pp.35-53.

12) Goldenberg E. P. (1989). "Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions" . Journal of Mathematical Behavior. 7. pp.135-173.

13) Harvey J.G., Waits B.K. and Demana F. (1995). "The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra". Journal of Mathematical Behavior. Vol.14. pp.75-109.

14) Hansen W. (1994). "Using Graphical Misrepresentation to Stimulate Student Interest" . Mathematics Teacher. Vol.87. No.3. pp.202-205.

15) Hector J. H. (1992). "Graphical Insight into Elementary Functions" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 131-137.

16) 久永靖史，瀬沼花子（1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その３） 中学校３年／課題学習における利用」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.437. pp.86-93.

17) 一松信（1995). グラフ電卓を数学に －活用の意義と教材集－. 教育社.

18) Hornsb J. and Lial M.L.(1999). A Graphical Approach to Precalculus – (Second Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

19) 井之上和代(2000).「TI-89 を利用した２次関数の学習から見る高専の数学教育」. 福井工業高等専門学校・研究紀要・自然科学・工学. 第 34 号, pp.95-105.

20) 磯田正美（1997).「数学内の関連づけを促す実験・観察アプローチ －表現変更型推論による仮説検証型探究を通して－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－」. 明治図書. pp.35-48.

21) 片岡啓（1996).「高校「微分法」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.14-19.

22) 加藤達也(1993). グラフ電卓を用いたラボラトリーアプローチについての一考察. 筑波大学大学院修士論文.

23) 小出岳夫（1993). 数学教育における visualization の役割についての研究. 筑波大学大学院修士論文.

24) 国立教育政策研究所（2004). 平成１４年度高等学校教育課程実施状況調査. http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm.

25) 久保良宏，瀬沼花子（1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その４） 中学校２年／一次関数における利用」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.438. pp.85-92.

26) 久保良宏，藤澤由美子（1995).「中学校数学科におけるグラフ電卓利用の視点と授業例 －中学１．２年の関数指導を中心に－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第５号. pp.2-10.

27) 公庄庸三(1999).「Ｍ．Ｔ．Ｔの実践報告」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.3. pp.174-179.

28) 公庄庸三（2000).「数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる」. 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌. Vol.7. No.1. pp.146-150.

29) 公庄庸三，他 15 名（2002a). 代数学Ｉ. 東京書籍.

30) 公庄庸三，他 14 名（2002b）．幾何学入門．東京書籍．

31) 公庄庸三，他 14 名（2002c）．幾何学Ｉ．東京書籍．

32) 公庄庸三，他 16 名（2002d）．幾何学Ⅱ．東京書籍．

33) 公庄庸三，森田啓，他 13 名（2002）．代数学入門．東京書籍．

34) 公庄庸三，高野良昭，他 16 名（2002）．関数入門．東京書籍．

35) 公庄庸三，他７名（2004a）．関数Ｉ．東京書籍．

36) 公庄庸三，他 10 名（2004b）．関数Ⅱ．東京書籍．

37) 公庄庸三，他８名（2004c）．離散数学．東京書籍．

38) 倉井庸維（1993）．「高等学校におけるグラフ電卓の授業実践研究」．日本数学教育学会．第 26 回数学教育論文発表会論文集．Vol26．pp.371-376．

39)倉井庸維，瀬沼花子（1994）．「グラフ電卓を使った新しい指導（その７）　高校／回帰直線の指導の実験的な試み」．教育科学・数学教育．明治図書．No.441．pp.93-100．

40) Krumpe N. and Keiser J.W.（2003）．"Getting to Know a Calculator's Numerical Limitations"．Mathematics Teacher．Vol.96．No.2．pp.138-140．

41) Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R.（1986）．"Computer-based Symbolic Mathematics for Discovery"．In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）．The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching．ICMI Study Series．Cambridge University Press．pp.133-146．

42) Leinbach L. C.（1991）．"INTRODUCTION: The Laboratory Approach to Teaching Calculus"．In Leinbach L. C. (Ed.)．The Laboratory Approach to Teaching Calculus．MAA Notes Vol.20．pp.ⅶ-ⅷ．

43) 柗元新一郎，瀬沼花子（1994）．「グラフ電卓を使った新しい指導（その２）　中学校３年／二次関数」．教育科学・数学教育．明治図書．No.436．pp.87-94．

44) 宮川健（1998）．「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 −事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第１号．pp.9-14．

45) 持永純子（1995）．「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づくりの授業を取り入れた「二次関数」の指導−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 77 巻．第９号．pp.22-30．

46) 文部省（1999）．高等学校学習指導要領解説 −数学編理数編−．実教出版．

47) 森田真康，瀬沼花子（1994）．「グラフ電卓を使った新しい指導（その５）　高校／微分・積分の「関数の極限」」．教育科学・数学教育．明治図書．No.439．pp.101-108．

48) Murakami H. and Hata M.（1986）．"Mathematical Education in the Computer Age"．

In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.85-94.

49) Murdock J., Kamischke Ellen and Kamischke Eric(1998). Advanced Algebra Through Data Exploration – A Graphing Calculator Approach -. Key Curriculum Press.

50) 中込雄治（1996）.「小型コンピュータの活用で変化する指導形態について －ポケコンやグラフ電卓が数学の授業に及ぼす効用－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第78巻. 第7号. pp.9-13.

51) 中村好則，森本明（1999）.「グラフ電卓の活用が聾学校高等部の数学科指導へもたらす効果」. ろう教育科学. Vol.41. No.2. pp.89-98.

52) NCTM（1989）. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. VA.

53) NCTM（2000）. Principles and Standards for School Mathematics. Reston. VA.

54) 西村圭一（1996）.「探究活動中心の授業に関する一考察 －テクノロジーを利用して－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第78巻. 第9号. pp.21-26.

55) 西村圭一（1998）.「CBL／CDAを利用した三角関数の指導に関する研究 －「音」を題材として－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第7号. pp.11-19.

56) 佐伯昭彦，氏家亮子，槻橋正見（1996）.「テクノロジーを活用した数学と科学との統合教育の授業設計(1) ー統合教育の基本構想についてー」. 日本科学教育学会第20回年会論文集. Vol.20. pp.273-274.

57) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998a）.「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム－身近な物理現象を数学的にモデル化する授業－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第9号. pp.10-18.

58) 佐伯昭彦（1998b）.「分数関数のグラフの振る舞いをインフォーマルに探求する役割について ーグラフ電卓を活用した探求ー」. 筑波数学教育研究. 第17号. pp.77-86.

59) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999).「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」. 日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」. 産業図書. pp.295-313.

60) 佐伯昭彦（2000）. 数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究ー身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業ー. 平成10ー11年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.

61) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004a）.「グラフ電卓を活用した極座標における正葉曲線に関する数学的活動とその有効性」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.28.

No.5. pp.325-334.

62) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004b).「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第９号. pp.13-20.

63) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004c).「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第28回年会論文集，Vol.28. pp.377-378.

64) 瀬沼花子（1994a). 算数・数学教育における電卓・グラフ電卓を利用する教材の開発. 平成５年度科学研究費補助金（奨励研究Ａ：課題番号 05780155，代表：瀬沼花子）研究成果報告書.

65) 瀬沼花子（1994b).「グラフ電卓を使った新しい指導（その１） グラフ電卓を利用する授業の実験的試みの背景」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.435. pp.86-93.

66) 瀬沼花子（1994c).「グラフ電卓を使った新しい指導（その８） まとめと今後の課題」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.442. pp.87-94.

67) 瀬沼花子 (1995a).「数学教育におけるグラフ電卓の国内外の研究や実践の動向」. 寺田文行，巻久，吉村啓編著「グラフ電卓で数学する」. 共立出版. pp.10-22.

68) 瀬沼花子（1995b). 電卓・グラフ電卓を利用した算数・数学教育 −小学校から大学まで−. 平成６年度科学研究費補助金（一般研究Ｃ：課題番号 06680189，代表：瀬沼花子）研究成果報告書.

69) 瀬沼花子（1997).「グラフ電卓とコンピュータ」. 日本数学教育学会編「学校数学の授業構成を問い直す」. 産業図書. pp.315-330.

70) 鹿野敏一（1994). 高等学校数学におけるテクノロジーを用いた数学的モデル化の教材開発に関する研究. 筑波大学大学院修士論文.

71) 清水克彦（1997).「数学教育におけるテクノロジー活用の歴史的変遷」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.5-21.

72) Simonsen L.M. and Dick T.P. (1997). "Teachers' Perceptions of the Impact of Graphing Calculators in the Mathematics Classroom". Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Vol.16. pp.239-268.

73) Skemp R.R. (1986). The Psychology of Learning Mathematics (Second Edition). Penguin Books.

74) 鈴木純子（1998).「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づくりを取り入れた「三角関数」の指導−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第９号. pp.25-29.

75) 寺田文行，巻久，吉村啓編著（1995）．グラフ電卓で数学する．共立出版．

76) 坪川武弘，井之上和代，長水壽寛，宮田一郎，柳原祐治（2002）．「グラフ電卓（TI-89）を活用した新しい数学教育の試み」．高専教育，第 25 号．pp.251-256．

77) 筒井康行，瀬沼花子（1994）．「グラフ電卓を使った新しい指導（その６）　高校／方程式の実数解の個数」．教育科学・数学教育．明治図書．No.440．pp.98-105．

78) 氏家亮子，佐伯昭彦，槻橋正見（1996）．「テクノロジーを活用した数学と科学との統合教育の授業設計(2) ―統合教育の教材開発について―」．日本科学教育学会第 20 回年会論文集．Vol.20．pp.275-276．

79) 梅野善雄（2001）．「数式処理電卓を用いた微積分教育の改善」．日本数学教育学会高専・大学部会論文誌．Vol.8．No.1．pp.13-30．

80) 梅野善雄（2002）．「数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化」．高専教育．Vol.25．pp.175-180．

81) 梅野善雄（2003）．「関数教育における数式処理電卓の短期利用とその効果」．日本数学教育学会高専・大学部会論文誌．Vol.10．No.1．pp.27-36．

82) 梅野善雄（2004a）．「グラフ電卓を利用したグラフ・アートと関数理解」．高専教育．Vol.27．pp.191-196．

83) 梅野善雄（2004b）．「３次・４次関数に関する高専１年生の発見」．Teachers Teaching with Technology Japan．Vol.8．pp.160-165．

84) Waits B.K. and Demana F.（1998）．"The Role of Hand-Held Computer Symbolic algebra in Mathematics Education in the Twenty-first Century: A Call for action!". Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference . http://mathforum.org/technology/papers/papers/waits/waits.html.

85) Waits B.K. and Demana F.（2000）．"Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future". In Burke M.J.（Ed.）．2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century．NCTM．pp.51-66．

86) Ward（1998）．"Graphing Calculator-Associates Strategies Used by and Misconceptions of High School Students" . Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference.
http://mathforum/technology/papers/papers/ward.html.

87) Williams C.G.（1993）．"Looking Over Their Shoulders: Some Difficulties Students Have with Graphing Calculators" . Mathematics and Computer education . 27(3) . pp.198-202.

２．３　ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学と実現象とのつながり

１．はじめに

２．１節では，高等学校学習指導要領解説−数学編 理数編−が推奨する数学的活動の模式図（図 2-1-1）に示された「身近な事象」の解釈を，日常的な事象や自然現象だけでなく，数表，グラフ，幾何図形などの数学的な事象をも含むと捉え，両者の事象におけるテクノロジー活用の意義について考察した．さらに，２．２節では，本研究におけるタイプ１の数学的活動，つまり，数表，グラフ，幾何図形などの数学的な事象を取り扱った数学活動でのグラフ電卓活用について考察した．

本節では，本研究におけるタイプ２の数学的活動，つまり，日常的な事象，自然現象，社会現象等の実現象と数学とをつなげる数学的活動に焦点を絞り，ハンドヘルド・テクノロジーの活用がこの数学的活動にどのように影響を与えるかについて考察する．ここで考察する実現象と数学とをつなげる数学的活動は，1960 年代後半から議論されている「応用（Application)」,「モデリング（Modelling)」の研究を参考に，①数学的モデリングの捉え方，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究，について考察する．

２．数学的モデリングの捉え方

(1) 数学的モデリングの研究動向

Kaiser-Messmer（1991）は，数学教育現代化の構造指向によって完全に排除されていた「応用」「モデリング」が 1960 年代後半からリバイバルしたことを述べている．この発端となったのは，*Educational Studies in Mathematics* の創設編集者である Freudenthal が司会をしたコロキューム「Why to Teach Mathematics so as to be Useful?」が 1968 年の創刊号に記載されたことが要因としてあげられる（三輪，1983；三輪，2004）．このコロキュームで Freudenthal（1968）は，それまでの数学教育の問題点を次のように述べている．

「多くの生徒は学校数学での経験を適用することができない．物理または化学の実験のみならず日常生活のもっとも些細な情況（場面）でさえ適用できない．」(p.5)

この問題点に対して，Freudenthal（1968）は，数学を閉じたシステムではなく，「現実世界の現象を数学化する活動」と「数学を数学化する活動」として捉えることを次のように強調した．

> 「問題は，どんな種類の数学を教えるかではなく，どのように数学を教えるべきかである．第一において，数学とは現実を数学化（mathematizing）することを意味し，数学を使うものにとって，数学化とは数学の最終的な解釈（final aspect）である．
> （中略）
> 人間が学ぶべきことは，閉じたシステムとしての数学ではない．むしろ活動としての数学，現実を数学化する過程としての数学，そして可能であれば数学を数学化する過程としての数学を学ぶべきである．」(p.7)

また，1969 年に開催された数学教育世界会議（ICME : International Congress on Mathematical Education）の第 1 回大会では，Pollak の全体講演「我々は，どのように数学の応用を教えるか？」が行われ，それ以降 2004 年の ICME-10 に至るまで，応用，数学的モデリング，問題解決，他教科との関連が 4 年ごとに議論されている．さらに，1983 年 7 月に ICTMA（International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling）の第 1 回大会がイギリスで行われ，この会議は 2 年ごとに開催されている．2004 年 2 月には，ドイツのドルトムントにおいて ICMI Study 14「数学教育における応用とモデリング（Applications and Modelling in Mathematics Education）」が開催され，23 カ国から 75 名の参加者により，モデリングと応用に関する研究動向について議論が交わされた（Blum et al，2002；松嵜，2003；Hans-Wolfgang and Blum(eds.)，2004；池田，2004b；松嵜，2004）．このように過去 35 年間において，数学的モデリングに関する多くの議論が国際会議で行われている．

一方，米国においては，NCTM（1979）が 1976 年から研究調査した結果をまとめた Yearbook「Applications in School Mathematics」を発行し，1980 年には学校数学の応用に関するソースブック「A Sourcebook of Application of School Mathematics」を MAA との共同によって出版するなど，学校現場での数学的モデリングの実用化が図られてきた．さらに，NCTM（1989）の第 9 学年から第 12 学年のスタンダードでは，スタンダード 1 ［問題解決としての数学］，スタンダード 4 ［数学的つながり］，スタンダード 5 ［代数］，スタンダード 6 ［関数］，スタンダード 7 ［総合的な視点からの幾何学］，スタンダード 9 ［三角関数］において，実世界の問題場面に応じて数学的モデリング

の過程を適用することを推奨している．また，NCTM（2000）の第９学年から第 12 学年のスタンダード 2000 では，代数スタンダード，幾何学スタンダード，データ解析と確率スタンダード，表現スタンダードで数学的モデリングの活用を取り上げ，数学的モデリングの重要性を次のように記述している．

「数学のもっとも効果的な利用の一つは，現象の数学的モデリングである．全てのレベルの生徒は，彼らのレベルに適切な方法で多様な現象を数学的にモデル化する機会を持つべきである．」(p.39)

以上のように，米国では学校数学における数学的モデリングの推奨を組織的レベルで行われていることが特徴である．

一方，我が国では，島田（1977，1995）のオープンエンドアプローチ研究や，三輪（1983）の先駆的な研究を背景に，学習者が数学を活用して自然・社会現象の問題を解決する数学的モデリングの理論研究と実践研究が，1990 年代より徐々に行われ，その成果が関連学会の学術雑誌，著書，文部科学省・科学研究費補助金の報告書，修士論文等で報告されている（例えば，Matsumiya 他，1989；池田他，1992；池田他，1993；鹿野，1994；松宮他，1995；小寺，1996；大澤，1996；柳本，1996a；太田，1997；佐伯他，1997；Ikeda 他，1998；池田，1998；宮川，1998；西村，1998；布川，1998；大澤，1998a；大澤，1998b；佐伯他，1998；深澤，1999；池田，1999；小寺，1999a；小寺，1999b；枌元，1999；松嵜他，1999；大澤，1999；太田，1999；佐伯他，1999；杉山，1999；植野，1999a；植野，1999b；加藤，2000；枌元，2000；佐伯，2000；池田，2001；小寺，2001；長崎編，2001；西村，2001a；西村，2001b；Stephens M.他，2001；柳本，2001；池田，2002；加藤他，2002；熊谷，2002；太田，2002；佐伯，2002；Isoda 他，2003；小寺，2003；中村，2003；西村，2003a；西村，2003b；佐伯，2003；佐伯他，2003a；佐伯他，2003b；佐伯他，2003c；池田，2004a；池田，2004b；清野，2004；長崎他，2004；熊谷，2004)．

(2) 数学的モデルと数学的モデリングの定義

ここでは，本論文における「数学的モデル」，「数学的モデリング」の定義について述べる．

a．数学的モデル

三輪（1983）は，数学的モデルを「モデルは，対象とする事象，それを取り扱う目的と手法によって，それを表わすのに，ことば，図などの視覚的手段，数や式などの数学的手段など，いろいろのしかたがある」と定義づけており，数学以外のことばと図などの視覚的手段を含めているのが特徴的である．

池田（1998b）は，数学的モデルを「モデルとは，ある目的から，実際場面での中で特に重要だと思われる側面をそのまま保ちながら，それ以外の関係の薄い側面を捨象することによってつくられるものだといえます．特に，数式，量，図形等に関するモデルを数学的モデルと呼ぶことにします．」と定義し，さらに，数学的モデルの類型を詳細に行っている．

西村（2001a）は，「数学的モデルとは，事象を，ある目的に従って，数学的な処理が可能な，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何的表現によって表したモデル」と定義づけている．

この他，研究者によって若干異なるが，本論文の４章に示す実践研究では，生徒達自身が行った数学的な処理は，数値的表現，グラフ表現，代数的表現に分類できるため，本論文における「数学的モデル」は西村の定義に従うことにする．

ｂ．数学的モデリング

「数学的モデリング」，「数学的モデル化」，「モデリング」など，研究者によって異なるが，本論文ではそれらを同義として，ここでは，Pollak（1980），三輪（1983），池田（1999）の研究を参考に「数学的モデリング」を考察する．

池田（1999）は，数学的モデリングを「実際の問題の解決を目標に，実際の問題を数学化して数学的モデルをつくり，解釈・検討して不都合が生じれば数学的モデルの修正を適宜繰り返し，より適した数学的モデルをつくっていく活動を意味するものとする．」と定義している．

Pollak（1980）は，「数学と他の学科との相互作用」において，応用数学についての４つの定義を示している．その中で，数学以外の分野および日常生活への数学の真の応用は，以下に示す定義(3)，(4)の性格を持つべきだと述べている．

定義(3)：応用数学は数学以外の分野あるいは実生活の場面に始まり，数学的解釈つまりモデルを作成し，そのモデル内で数学的作業を行い，そして得た結果をもとの場面に適用することを意味する．

定義(4)：応用数学は人々がその暮しの中で数学を応用するときに実際にしていることを意味する．これは(3)と似ているが，通常，数学以外の世界と数学の間の輪を何回も回ることを含んでいる．

三輪（1983）は，Pollak の定義を参考に数学的モデリングの過程を以下の４段階で表している（図 2-3-1）．

(1) その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）．

(2) 定式化した問題を解く（数学的作業）．

(3) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価

する（解釈・評価）．

(4)　問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）．

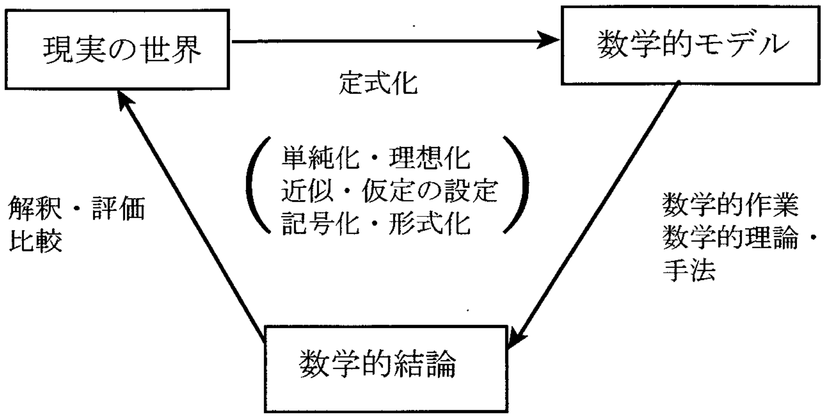


図 2-3-1．数学的モデリングの過程（三輪 1983）[1]

三輪の数学的モデリングの「定式化」～「解釈・評価」は，Pollak の定義(3)に相当し，「より良いモデル化」は Pollak の定義(4)に相当する．さらに，三輪の数学的モデリングの４段階と池田の定義を比較すると，使用している用語が若干異なるが，内容的には同じ定義であると考えられる．さらに，図 2-3-1 に示した数学的モデリングの過程の模式図は，文部省（1999）が高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-で示した数学的活動の模式図（図 2-1-1）とほぼ同義であると解釈できる．

これまでの研究では,数学的モデリングの過程の図式化が様々に記述されている(例えば，Kerr et al.，1979；Cobitt et al.，1979；Burghes，1980；Fey ，1987；Clatworthy et al.，1987；Galbraith et al.，1990；池田他，1992；池田他，1993；Blum，1998；小寺，1999b；西村，2001a；西村，2001b)．しかし，それぞれの模式図は，研究の目的や方法によって若干異なるだけで，それぞれの活動内容の解釈はほぼ同じであると考えられる．従って，本論文では，三輪（1983）の定義と模式図を参考にする．

(3) 数学的モデリングの重要性と課題

ここでは，数学教育における数学的モデリングの重要性と課題について三輪（1983）の研究をもとに考察する．

a．数学的モデリングの重要性

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的重要性について次の三つの理由をあげている．

---

[1] 三輪（1983）の論文では，図中の定式化が「定型化」となっている．これは誤植であると考えられるため，図 2-3-1 では「定式化」とした．

「①数学の応用が著しく広くなった情況にかんがみ，応用が教育の不可欠な要素であるという認識が高まって，学校数学をもっと応用可能なものにしようとする．

②数学的モデル化過程に数学的な考え方のさまざまの側面が含まれているので，その育成をモデル化過程を通してはかろうとすることがあげられる．

③数学的モデル化過程は，現実の問題の取り組みであることから，単なる知的好奇心以上に，数学教育に対する動機づけを与えるとともに，事象との対決を通して知識の開発される過程に積極的に参加させようとすることがあげられる．特に，モデル化において開発される探求的創造的な面は，数学だけでなくすべての面で必要とされるものである．こういった知識開発の活動としての面は，数学的活動と広く呼ばれるものの一側面ということができるが，きわめて知的であること，また，探求的であることの特徴から，いっそうの重要性を増すことが考えられる．[2]」（p.122）

上記の理由は，数学的モデリングを単なる現実場面の応用として捉えるだけではなく，数学的モデリングの活動を通して，数学的な考え方の育成，さらには，数学的活動以上に探究的創造的な知識開発活動といった高次元目標の育成を指摘しており，数学的モデリングを研究・実践する上で示唆に富む．特に，第三の理由は，小倉（1972）が主張する科学的精神の育成にも繋がると考えられる．

ｂ．数学的モデリングの課題

三輪（1983）は，数学的モデル化の第１の教育的問題点として，定式化，解釈・評価，より良いモデル化は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることを指摘している．これに関して，池田（1999）は，数学的モデル化過程を経験していない大学生を対象とした調査において，数学的モデル化過程を促進する考え方は，中・高等学校での純粋数学の指導によって自動的に育成されない結果を明らかにしている．このように現在の研究では，三輪の指摘する問題点を解決するには至っていないのが現状である．ここでは，この問題点について①カリキュラムに関する課題，②教師に関する課題，③生徒に関する課題，の三つの面から考察する．

①カリキュラムに関する課題

カリキュラムに含まれる必修数学の内容に加えて，問題解決，モデリングと応用を取り扱うために十分な時間が持てないことが課題として指摘されている（三輪，1983；

---

[2] 筆者が三輪（1983）の文献をもとに編集した．

Blum and Niss, 1989 ; Blum, 1991).

この課題を克服しない限り，学習時間と学習内容の量的な削減が行われた現行の学習指導要領では，カリキュラムに位置づけられた数学的モデリングを導入することは困難であるように思われる．しかし，これまでの実践研究をレビューすると，「総合的な学習の時間」や中学校での「選択学習」などの纏まった時間を活用して，数学的モデリングの実践が行われている実践が増えてきた．特に，Stephens・柳本（2001）は，必修科目以外の授業で数学的モデリングを行う意義について，数学的モデリングの過程の育成の視点から次のように述べている．

「この数学的モデリングの過程は，一般的に数学を現実問題に応用する場合のプロセスを述べているが，学校数学の中ではすべてのプロセスを生徒に考えさせるのは無理があり，学習効果などを考えても実際的ではない．中学生に始めの条件整理をさせようとしても知識経験不足もある．そのような部分は教師が補い，可能な部分はなるべく生徒に考えさせ，数学を応用することについての学習体験を積ませることがより重要である．

筆者は，このような数学の応用の学習を，「課題学習」を含む必修の数学の時間，「総合的な学習」の時間，「選択教科」の数学の時間の中で可能な限り多く取り扱うのがよいと考える．」(p.28)

佐伯・氏家（1998, 1999, 2003a, 2003b, 2003c）が実践する「数物ハンズオン」は，「総合的な学習の時間」で行う数学的モデリングと「必修科目」で学習する数学内容との関連づけが行われているのが特徴である．これに関しては，本論文の４．１節で詳しく紹介する．

一方，西村（2001b）は，「数列」の単元で数学的モデルの作成や数学的作業の過程を取り入れながら，生徒の未習（等差数列と等比数列）の数学的な概念や手法を学習する方法を取り入れている．西村は，この学習方法を「概念学習型」と呼び，数学的モデリング教材を通して多くの数学的な概念や手法の学習を構成するのが特徴的であり，数学的モデリングを取り入れた新しいカリキュラムを開発する上で示唆に富むと考える．

②教師に関する課題

Blum and Niss（1989）は，数学的モデリングを授業で行う際の教師の資質の問題を以下のように述べている．

「問題解決と数学外の世界との関連づけは，指導をオープンにするため，教師にとって大変な労力を要し，かつ，生徒の達成度の評価を困難にする．さらに，多

くの教師は，彼らが自分で勉強した科目以外の応用事例を取り扱うことが出来ないと感じているようである．多くの教師は，十分な事例を知らないし，実際の授業で事例を適用するために十分な時間を持たない．」(p.12)

実際に，国立教育政策研究所（2004）の調査結果では，実際の授業で実生活の事象との関連を図った授業を行っている教師が少ないことが明らかになった[3]．この対策として，教員養成及び現職教員を対象とした教師教育の必要性が考えられるが，実際にはあまり行われていないのが我が国の現状である．しかし，佐伯（2003）によるハンドヘルド・テクノロジーを活用した教材開発研究の報告，西村（2004）による米国の教科書の分析をもとにした教材開発と授業実践の報告，さらに，太田（2004）による数学科教員養成課程における数学科教育法の受講生や現職の現職教員の研究会での教材開発研究の報告など，今後の研究成果が期待される．

③生徒に関する課題

Blum and Niss（1989）は，生徒が数学的モデリングを実行するときに，生徒が感じる障害を通常の数学学習と比較して次のように述べている．

「他教科における問題解決，モデリングと応用は，疑いもなく生徒にとって大変な労力を要し，かつ，予測がつかない数学学習に変えてしまう．計算のような機械的な数学的作業は，多くの生徒に人気がある．なぜならば，生徒たちは簡単に把握でき，さらに，あるレシピに従うだけで問題を解決することができるのである．」(p.12)

つまり，数学的モデリングの過程を実行する際に必要な知識・技能が通常の数学学習と異なること，さらに，数学以外の知識・技能が必要であることなど，前述したカリキュラムに関する課題と深く関係していることが三輪（1983），池田（1999），Stephens・柳本（2001）らによって指摘されている．この課題に対して，池田（2004）は，数学的モデリングを熟知していない中学校３年生を対象に，数学的モデリングを促進する考え方を指導する系列を考案した全10回の実践内容を評価し，その有効性を実証的に明らかにしている．また，佐伯・氏家（2003a）は，総合学習「数物ハンズオン」における２年間のカリキュラムを，定式化（数学的モデルの作成），解釈・評価，より良いモデル化の能力について段階を追って徐々に育成するようにテーマ及び教材を構成している．その結果，数学的モデルである数式（数学的モデル）を活用して実現象の問題を解決することの有用性に関する生徒個々の意識が向上したことを明らか

[3] １．１節の図 1-1-3（p.6）を参照．

にしている．これに関しては，本論文の４．２節で詳しく紹介する．

以上，三つの観点から数学的モデリングの課題を考察したが，三輪（1983）は，これらの課題を克服するためにはコンピュータ等のテクノロジーが重大な武器になることを指摘している．次に，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題について考察する．

３．数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題

NCTM（1989）の第９学年から第12学年のスタンダードでは，数学的モデリングにおけるテクノロジーの適切な活用を次のように推奨している．

> 「この（数学的モデリングの）過程が正規で基本的に支持されるカリキュラムを通して繰り返されることと，電卓とコンピュータテクノロジーの適切な生徒の使用を必要としていることは，このスタンダードの意図することである．[4]」（p.138）

スタンダードが適切なテクノロジー活用を強調しているのは，教材開発及び実践において，我々教師はテクノロジー活用の“光”と“影”を意識する必要があるからである．ここでは，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題について考察する．

(1) 数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義

これまでの先行研究を参照すると，数学的モデリングに関する教授・学習を改善するためのテクノロジー活用の意義は，①データ収集の補助，②実データ解析の補助，③シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つに集約されると考える．以下にそれらについて簡単に考察する．

ａ．データ収集の補助

1980年代後半に米国のTERC（Technical Education Research Centers）は，NSFの基金援助（MDR-8550373）とアップルコンピュータ社の支援を受けて，MBL（Microcomputer Based Lab:マイクロコンピュータ支援の実験）活動の教材開発を行った（Barclay，1989）．このTERCモデリングプロジェクトでは，MBLシステムの温度センサー，音センサー，距離センサー等のセンサーで収集した実データをコンピュータに転送し，そのデータを表計算ソフトEXCELとモデリング図式化プログラムSTELLAで分析する教材の試作が行われた．これにより，物理現象や化学現象の実データが正確にかつ簡単に収集することが可能になった．1994年には，このシステムが

[4] カッコ内は筆者が加筆した．

CBLとしてグラフ電卓で活用できるようになり，誰もがいつでも何処でも必要な時に生徒主体によるデータ収集が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．

また，インターネットの発達により，いろんな情報資源が公開されている既存データを簡単に入手することが可能になった．

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：MBLやCBLは，簡単にかつ正確に実データを収集できるため，数学的モデリング過程の数学化，数学的処理，解釈・検証等に時間をかけることができる．

利点２：CBLは，手のひらサイズで持ち運びが出来るため，実験室以外の一般教室や野外で実験を行うことができる．また，安価なので数人で１台の実験環境を整えることができる．

利点３：インターネットは，目的に応じて多角的に容易にデータを収集できるため，数学的モデリング過程の数学化，数学的処理，解釈・検証等に時間をかけることができる．

b．実データ解析の補助

1982年10月に米国メリーランド州カレッジパークで開催された米国科学財団（National Science Foundation：NSF）の作業会議の報告書（Fey，1987）や，1984年にオーストラリアで開催されたICME-5のテーマグループ６（応用とモデリング）の報告書（Lesh et al，1986），さらに，1985年３月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書（Howson and Kahane，1986）など，1980年代に開催された会議では，探究的データ解析（Exploratory Data Analysis）の重要性を強調した．探究的データ解析とは，コンピュータの機能を活用して実データを多角的・機能的に観察・実験，及び，解析することである．例えば，実データの小数計算や近似値計算を電卓で実行する計算の簡略化，コンピュータの数値的，グラフ的，代数的機能や数式処理機能を活用した数学的処理，統計パッケージや表計算ソフトを活用したデータ処理やグラフ化，さらに，統計パッケージの統計処理や回帰モデル機能を活用した数学的モデルの算出，などが考えられる．

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：機械的な計算やグラフ化の労力を軽減することにより，数学的モデリング過程の解釈・検証等に時間をかけることができる．

利点２：コンピュータで数値的，代数的，グラフ的に実行した結果を探究することにより，問題場面が多角的に分析でき，現象をより良く理解することができる．

利点３：テクノロジーが持つ機能（例えば，回帰モデル機能や最大値・最小値を求める機能など）を活用することにより，中学校段階でも未学習や高度な内容の現

象を取り扱うことが可能である．さらに，数学が不得手な生徒にとっても同様に数学的モデリングの活動に取り組むことができる．

c．シミュレーションによる実験・探究の補助

シミュレーション学習とは，自然・社会現象をコンピュータ等のテクノロジーで模擬実験しながら，その現象の背後に存在するモデルを発見することである．シミュレーションを活用した実践研究は，コンピュータの教育活用の創世記である1960年代当初から行われており，実際に実験できない危険な現象の実験や，装置が大掛かりでコストがかかる実験等に有効であることが研究で明らかにされている（Holtzman, 1977a；Holtzman, 1977b）．1980年代に開催された会議においても，数学的モデリングの過程でのシミュレーション活用の重要性が議論されている．例えば，Fey（1987）は，シミュレーションの利点を次のように述べている．

「モデリングの概念の学習においても，コンピュータの補助は，そのシミュレーションを支援できる点で，印象的である．（略）このようなシミュレーションの繰り返しによって，仮説の変更とその結果の観察といったモデリングの基礎作業を実際に示すことができる．（略）これらのコンピュータによる実験は，数学とそれが表現する情況との間の関係を洞察するためにはかけがえのないものである．」（p.138）

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：数値的，グラフ的にシミュレートすることにより，現象をより良く理解することができる．

利点２：実際に体験できない現象をバーチャルに体験・実験することが可能である．

(2) 数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の課題

上記のように，電卓やコンピュータ等のテクノロジーを適切に活用することにより，数学的モデリングに関する教授・学習が改善できることが明らかになった．しかし，その反面，Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，問題解決，モデリングと応用におけるテクノロジー活用の課題とリスクについて以下のように警告している．

①テクノロジーの多用により，基本的な計算やグラフの技能・能力の低下が予想されるため，これらの技能・能力の価値の引き下げが，逆に，全ての生徒に対して，数学指導を大変な労力を要することになる．

②シミュレーションやコンピュータ・グラフィックスが，実際の実験や実物の代用として提供された場合，逆に，現実性が失われる可能性がある．

③機械的かつレシピ調のモデリングを強要する教材ソフトウェアは，生徒の知的な

数学的モデリングの活動を単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性がある．

④教師や生徒がテクノロジーの技術的な面や活動に興味を持つことにより，数学的モデリングの過程で現象を熟考する本来の活動が阻止される可能性がある．

Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，これらの課題とリスクを克服する唯一の方法は，生徒と教師が課題とリスクに気づくことだと述べている．しかし，2004 年 2 月にドイツのドルトムントで開催された ICMI Study 14「数学教育における応用とモデリング（Applications and Modelling in Mathematics Education)」のディスカッション・ドキュメント（Blum et al，2002）には，上記の課題の一部が記述されており，現状ではテクノロジー活用の課題とリスクが克服されたとは言えないようである．

本研究で実践した「数物ハンズオン」は，通常の数学授業と分離した総合学習で実施しているため課題①の問題はない．また，２年間の総合学習で取り扱った６つのテーマは，全て CBL を活用して実データを収集しているため課題②の問題もない．次に，課題③と課題④に関しては，グラフ電卓と CBL の操作を極力簡単化した．さらに，生徒の知的好奇心を引き出すように教材を設計し，かつ，生徒が数学的モデリングの活動を行っている際に気づいたことや疑問に思ったことなどをワークブックに記述させるようにした．その結果，生徒達は，ハンドヘルド・テクノロジーに自ら主体的・積極的に働きかけ，パートナーシップを築きながら数学的活動を行っていた．詳しくは第４章で紹介する．

４．数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の対象を，本研究で活用するハンドヘルド・テクノロジー［グラフ電卓，データ収集機（CBL / CDA)，各種センサー］に焦点を絞って，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法について考察する．

(1) 数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

ここでは，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法について，①データ収集の補助，②実データ解析の補助，③シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つ観点について紹介する．

ａ．データ収集の補助

テクノロジーを活用しない実験では，膨大な量のデータや厳密なデータ，例えば，1／50 秒単位で自由落下運動のデータを収集することは困難であった．しかし，1990

年中旬に開発されたデータ収集機［テキサス・インスツルメンツ社の CBL（図 2-3-2）とカシオ社の CDA（図 2-3-3)］と各種センサーを活用すると，手軽に簡単に物理現象や化学現象のデータが収集できるようになった．しかも，手のひらサイズで持ち運びが容易であるため，実験室以外の教室や野外においても実現象データが収集でき，安価であるため，少人数のグループで１台ずつ使用する実験環境が実現できるため，生徒自らが目的をもって実験データを収集し解析するといった生徒主体による実験と数学的モデリングの活動が可能である．データ収集機には，光，温度，電流・電圧，距離，音，圧力，力，ＰＨ，加速度センサーなどのセンサーが使用可能である．

図 2-3-2．CBL と音センサー

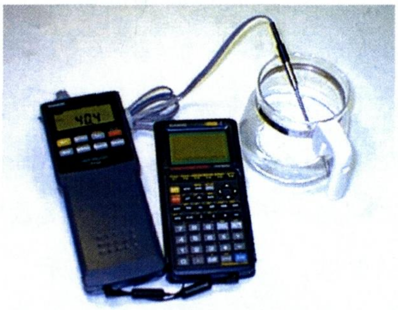


図 2-3-3．CDA と温度センサー

図 2-3-4 にグラフ電卓，データ収集機，距離センサー間におけるデータの流れを示す．最初に①では，グラフ電卓上がデータ収集機とセンサーを動作させる初期設定値（データ採取間隔，測定単位等）を転送する．②では，データ収集機がセンサーからアナログデータを採取し，デジタルデータに変換する．最後に③では，グラフ電卓はデジタルデータを受け取り，リストにデータを格納し，グラフ画面上にデータの散布図を表示する．この散布図を観察することで，実データをモデル化する関数を算出・検証することが可能である．

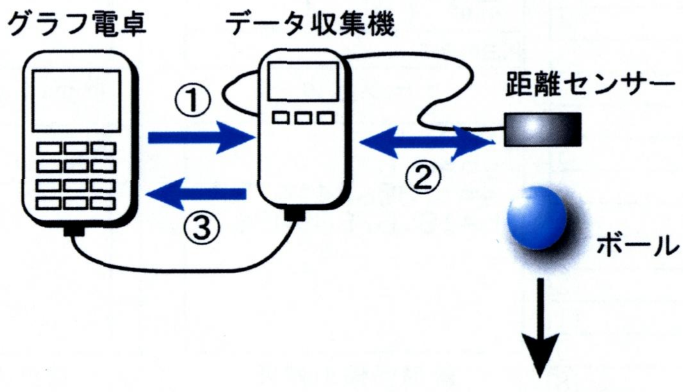


図 2-3-4．グラフ電卓，データ収集機，距離センサー間のデータ移動

b．実データ解析の補助

テクノロジーの特徴である数値的，グラフ的，代数的表現の多表現を関連づけながら実データを多角的に解析する，あるいは，統計パッケージに含まれる機能を使って簡易的に解析することによって，実現象をより深く数学的に解析することが可能になることは既に述べた．ここでは，グラフ電卓の①統計パッケージの回帰モデル機能，②CALC 機能，の活用方法について紹介する．

①統計パッケージの回帰モデル機能

グラフ電卓には，リスト機能で入力されたデータをもとに，メジアン・メジアン線，線形回帰，指数回帰，成長曲線回帰などの数学的モデルを簡単に算出する回帰モデル機能がある．この機能により，未学習の関数を取り扱うことが可能となり，その結果，グラフ電卓が算出した複数の数学的モデルの候補の中から，一番適切なモデルを選択するといった数学的モデルを評価・検証する活動に焦点をあてることができる．

図 2-3-5 に回帰モデル機能を用いた数学的モデルの算出方法の例を示す．表に示した高度と外気温は，2002 年 3 月 21 日，成田上空のエア・カナダ AC03 便が着陸態勢に入ってから成田空港に着陸するまでの間，機内のモニタに表示されたデータを筆者が記録したデータである．このデータをグラフ電卓のリストに入力し，STAT PLOT 機能で散布図を表示し，線形回帰機能で算出すると $y=-0.0067x+18.678$ が得られ，グラフもほぼデータと一致する結果が得られた．xの係数-0.0067は高度 1 m の温度変化であり，これはほぼ理論値に一致する．さらに，定数項の18.678は高度 0 m の気温であり，これもほぼ妥当な値と考えられる．

高度［m］	外気温［℃］
10400	−55
10100	−51
8800	−41
8200	−36
8100	−34
6600	−23
4607	−9
2742	2
2163	5
2132	4
1825	6
1306	9
853	12
850	11
380	15
44	18

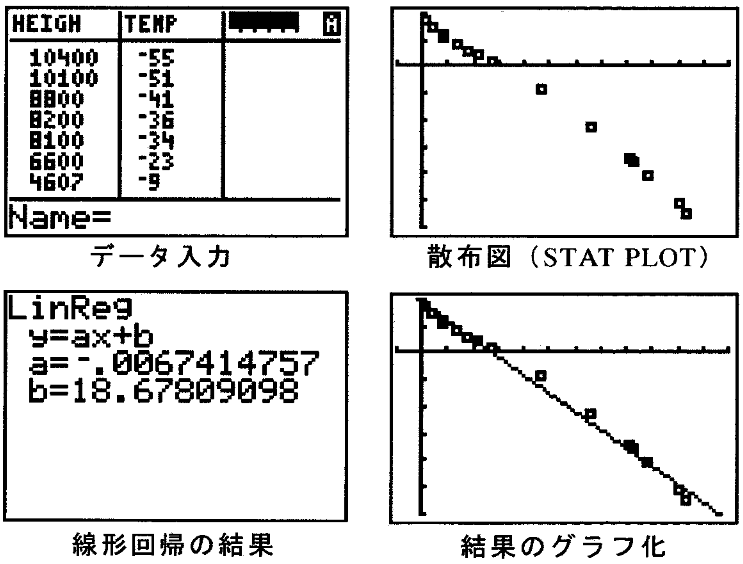


図 2-3-5．線形回帰機能による数学的モデルの算出とグラフ化

回帰モデル機能は，簡単に数学的モデルが算出できるため，関数を学習したばかりの中学生や数学が不得手な生徒にとってモデル化が困難であった現象を取り扱うことができる利点がある．特に，大澤（1996，1998a）のバトンパスの実践研究では，中学生が回帰モデル機能を活用して，算出した複数の数学的モデルの中から一番適切な数学的モデルを選択し，かつ，生徒が平行移動の考え方を活用して数学的モデルを目的に適するように修正した活動が特徴的である．

しかし，こういった利点がある反面，仕組みがブラックボックスであるため，回帰分析の理論を学習していない生徒が道具の使い方を誤ると，数学的モデリング過程における数学的作業は，グラフ電卓のボタンを押す操作だけに終わり「より良いモデル化」が行われない危険性があることが先行研究で指摘されている（Blum and Niss，1989；Blum，1991）．

この課題に対して，本研究では，グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性と，最適な数学的モデルを選択する数学的活動を実践した．その結果，生徒たちは自らの考えで 1)妥当性の検討基準の設定，2)現実場面との対比による検討，3)二つの数学的モデルの併用，など多様な検討を行ったことが明らかになった．詳しくは，4．3節で紹介する．

②CALC 機能

数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の利点で，数値的，代数的，グラフ的に実行した結果を探究することにより，問題場面が多角的に分析でき，現象をより良く理解できることは既に述べた．グラフ電卓には，TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能といった機能を有するが，ここでは CALC 機能を活用した事例を紹介する．

図 2-3-6 は，グラフ電卓（TI-83）の CALC 機能の画面である．それぞれの機能を簡単に紹介する．

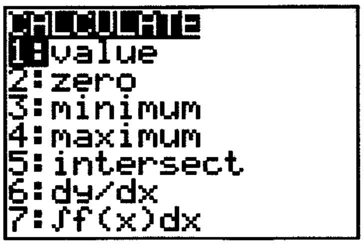


図 2-3-6．CALC 機能の一覧

1:value：指定した x の値に対する座標をグラフ上に示す．

2:zero：指定した範囲内での x 切片の座標をグラフ上に示す．

3:minimum：指定した範囲内での最小の座標をグラフ上に示す．

4:maximum：指定した範囲内での最大の座標をグラフ上に示す．

5:intersect：二つの関数の交点の座標をグラフ上に示す．

6:dy／dx：指定したグラフの座標における接線の傾き（微分係数）を算出する．

7:∫f(x)dx：指定したグラフの範囲における定積分を算出する．

CALC 機能を使った数学的モデリングの活用方法として，西村（2003a）の紙パック

ジュースを題材に簡単に紹介する．西村の取り上げた課題は，「 横 18.8cm，縦 18.4cm の長方形の紙を使って，ジュースを入れる紙パックを作ろうと思います．この紙から 250ml 用の紙パックは作ることができるでしょうか．ただし，のりしろは，すべて８mm とします.」である．まず最初に，生徒は実際の紙で直方体のパックを作成し，容積を表す方程式を求めた．この式が未学習である３次関数であるため，問題を解決する方法を生徒と議論したところ，「$y=250$ のグラフを出して，それとの交点を求めればよい」という考えが出た．このため，CALC 機能の 5:intersect を使って交点を求めた（図 2-3-7）．さらに，生徒から容積の最大に関する意見が出たために CALC 機能の 4:maximum を使って最大値を求めた（図 2-3-8）．

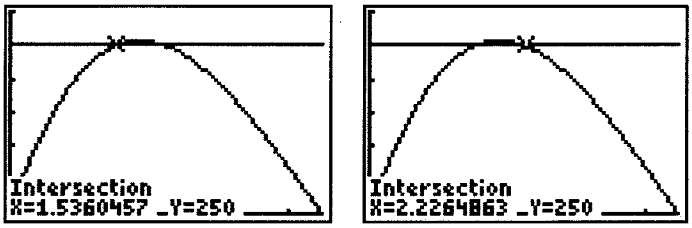


図 2-3-7．交点を求める機能

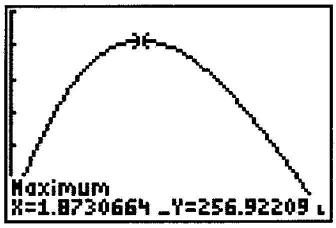


図 2-3-8．最大値を求める機能

この題材は，高等学校の微分法の応用として取り扱う題材であるが，西村は中学生を対象に CALC 機能を適材適所で活用しながら，しかも，単なるボタンプレッシングではなく，生徒の意見を適切に取り入れながら数学的モデリングの活動を行ったのが特徴的である．西村（2003a）は，題材の発展的な学習としての位置づけを次のように述べている．

> 「本課題では，３次関数や多変数関数が登場するので中学生にとっては高度な内容である．そこで，それらの関数のグラフ化や代数的処理の困難性を軽減するために，グラフ電卓や表計算ソフトを利用することを前提とする．
>
> そして，本課題を中学校における関数の学習全体に関わる発展として位置づけ，具体的な事象から，関数関係を見出し，事象・表・式・グラフを相互に関連づけながら考察する能力を一層伸ばすことをめざす.」(p.33)

池田（2004a）の数学的モデリングを促進させる実践においても，西村と同様な考え方でグラフ電卓を積極的に活用している．

本研究の実践では，特に CALC 機能の使用を行っていないが，生徒が自ら積極的に TABLE 機能，TRACE 機能を使って，現象を数値的，グラフ的に考察している様子が観察されている．

c．シミュレーションによる実験・探究の補助

自然・社会現象をコンピュータ等のテクノロジーでシミュレーションすることの有効性については既に述べた．グラフ電卓が持つ簡易プログラムを使用すると，簡単なシミュレーションが生徒の手元で，しかも，何時でも何処でも実行することが可能になった（Embse and Engebretsen，1996）．一方，プログラミングの知識がない人でも，自然・社会現象を表す数学的モデルを媒介変数方程式や数列の漸化式を入力するだけで，現象を視覚的・動的に観察することができる．ここでは，Demana and Waits（1993）の論文を参考に，媒介変数方程式を使った粒子運動のシミュレーションを紹介する．

数学 III の微分法の応用問題として，「y軸と平行な直線上を運動する粒子の位置が $y = s(t) = 2t^3 - 13t^2 + 22t - 5$ で表される時，(a)粒子の運動が方向を変えるのは何秒後か？ (b)方向を変える位置を求めよ．(c) $1 \leq t \leq 3$ のとき速度が最小となるのは何秒後か？」といった問題が取り扱われている．これを図 2-3-9 で示すように媒介変数方程式を使うと，粒子運動の位置と速度の関係が視覚的かつ動的に観察することができる．さらに，座標を調べる TRACE 機能やグラフを拡大する ZOOM 機能を用いると速度が最小となる位置をグラフ的・数値的に観察することができる．これにより，この問題を代数的に解く動機づけや意義を生徒に持たせることができる．また，粒子運動の位置を表す数学的モデル $y = s(t)$ を自由に変更することにより，粒子運動の位置と速度の関係，さらに，第二次導関数を入力することで加速度との関係も視覚的・動的に探究することができる．

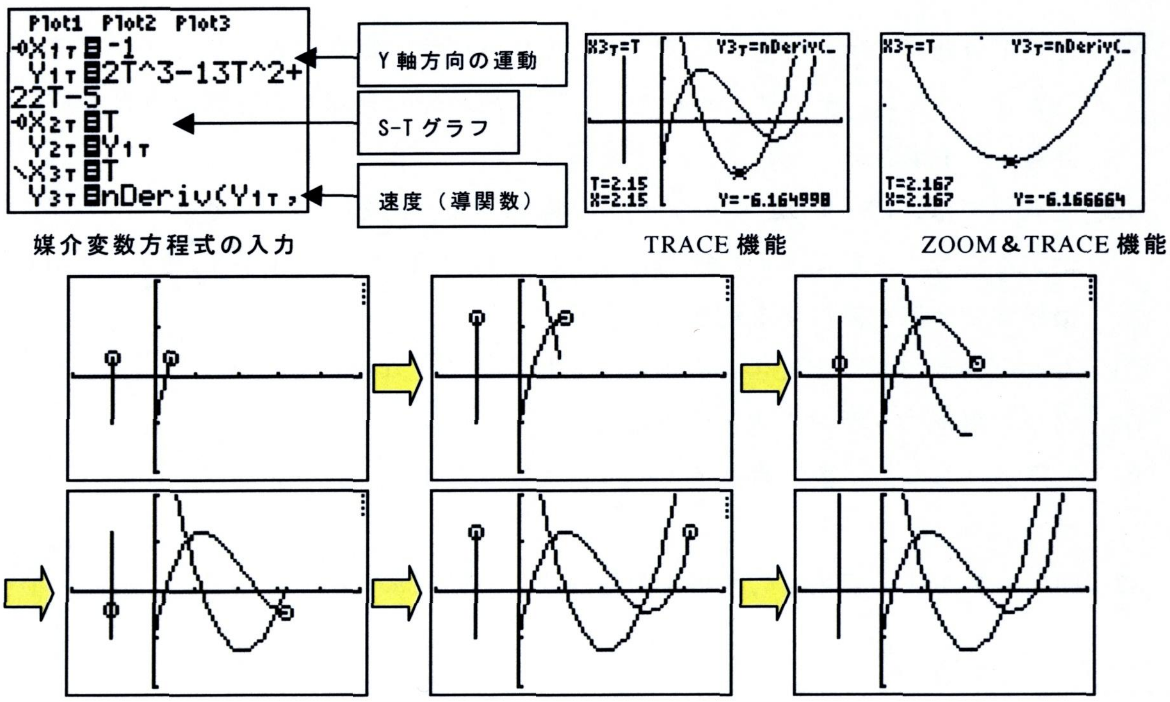


図 2-3-9．媒介変数方程式を用いた粒子運動のシミュレーション

5．我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究

我が国の数学的モデリングに関する実践研究は 1990 年代より徐々に行われたことは既に述べた．さらに，2．1節では，テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究が 1996 年から行われたことを明らかにした[5]．ここでは，我が国の数学的モデリングに関する実践研究の中から，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した実践研究に焦点を絞って，その活用方法について考察する．

表 2-3-1 は，我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究について，教材内容とハンドヘルド・テクノロジーの活用方法についてまとめたものである．ここで取り扱った文献は，数学教育関連学会の学術雑誌，著書，文部科学省科学研究費補助金，さらに，教育研究機関の研究紀要を参考とした．なお，同じ実践内容が記述してある文献に関しては，実践内容が詳しく記述されている文献を採用した．表には，発表年，著者，使用された機材，教材内容，数学的モデリングの各過程におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，さらに，使用されたテクノロジーの機能についてまとめた．数学的モデリングの各過程におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法については，各過程で使用されたテクノロジーの表現の記号を数値的表現（N），グラフ的表現（G），代数的表現（S）とした．さらに，サブ記号として，生徒自身が実行した結果をハンドヘルド・テクノロジーに入力した場合の記号を 1，ボタン押下やコマンド等の命令によってハンドヘルド・テクノロジーが実行した場合の記号を 2 とした．以下に簡単な例で記号を説明する．

N1：定式化の過程では，収集したデータを生徒がグラフ電卓に入力してグラフ化する場合．さらに，その他の過程では，四則演算や三角関数の計算などの単純な計算をする場合．

N2：定式化では，CBL/CDA 等のデータ収集機がデータを収集し，自動的にグラフ化する場合．さらに，その他の過程では，TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能等で数値を算出する場合．

G1：なし（グラフ電卓上で手書きのグラフ作成はできないため）．

G2：グラフ機能でグラフを表示する場合．

S1：生徒が自らの力で数学的モデルの方程式を導き出してテクノロジーに入力する場合．

S2：回帰モデル機能で数学的モデルの方程式を自動的に算出する場合．

---

[5] 表 2-1-4（p.40），表 2-1-5（p.41），表 2-1-8（p.43）を参照．

表 2-3-1．数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

年	著者	対象	機材	教材内容	定式化	数学的作業	解釈評価	より良いモデル化	使用機能
1996	大澤	中３	GC	バトンパス	N1	G2, S2	G2, S2	N2, G2, S1	回帰+グラフ化+TRACE＋TABLE
	柳本	中３	GC+CBL	ボールの落下など	N2	G2, S2	？	？	データ収集+回帰+グラフ化+TRACE
1997	西村，船元，植野	定高４	GC	テープカウンタ	N1	G2, S2	G2, S1	－	回帰+グラフ化
		高２	GC	レコードプレーヤ	－	N2, G2, S1	N2, G2, S1	－	グラフ化+TABLE
	小林	中３	GC+CBL	魔法の壺など	N2	G2	G2	－	データ収集+グラフ化
	氏家，佐伯	高専１	GC+CBL	歩いてグラフ	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
	室岡	高２	GC	音階と振動数	－	N2, G2, S1	N2, S1	N2, S1	グラフ化+TRACE+TABLE
	氏家，佐伯	高専１	GC+CBL	音	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
	鹿野	高１	GC+CBL	温度	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
1998	宮川	高1･2	GC+CBL	歩いてグラフ	N2	G2	G2	－	データ収集+グラフ化
	西村	高３	GC+CBL	音	N2	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	佐伯，氏家	高専１	GC+CBL	温度	N2	N2, G2	N2, G2, S1	－	データ収集＋グラフ化＋TABLE
	大澤	中３	GC	テープレコーダ	N1	N1, S1	N2	N2, G2, S2	回帰＋グラフ化＋TABLE
	柳本	中３	GC	地球平均気温など	N1	N12, G2, S2	？	？	回帰＋グラフ化＋TABLE
1999	松嵜，磯田	高２	GC	クランク機構	N1	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
	大澤	中２	GC	肥満とやせ	N1	N2, G2	N2	－	回帰+相関係数＋相関図
	深澤	高２	GC+CBL	角度の理解	N2	G2	－	－	データ収集＋グラフ化
	船元	中２	GC	イチローの打率	－	－	N2, G2, S1	－	グラフ化+TABLE
	植野	高２	GC	ハンググライダー	N1	G2, S2	G2, S2	G2, S2	回帰＋グラフ化＋残差
	植野	高２	GC	オウム貝	－	N2, G2, S1	－	－	グラフ化+TABLE
	村上	中１	GC	タクシー料金	－	G2, S1	N2, G2	N2, G2	グラフ化＋TRACE（Windowの設定変更）
	佐伯，氏家	高専２	GC+CBL	振り子	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
			GC	振り子（周期）	N1	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
2001	西村	高１	GC	飲料水	N1	N1, G2, S1	N1, G2, S1	G2, S1	数値計算＋グラフ化
	西村	高１	GC+CBL	東京ドーム（落下）	N2	N2, G2, S1	N1, G2, S1	G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	西村	高２	GC	ロックンローラ	－	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
	柳本	中３	GC	クジラ，スギ木材	－	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+TABLE
	Stephens	中学	GC	放射能の半減期	－	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+TABLE
2003	佐伯，氏家	高専２	GC+CBL	温度	N2	N2, G2, S12	N2, G2, S12	N2, G2, S12	データ収集＋グラフ化＋回帰+代入+TRACE
	佐伯，氏家	高専２	GC	コンピュータ台数	N1	N2, G2, S2	N2, G2, S2	N2, G2, S2	グラフ化＋回帰+代入+TRACE
	中村	高２・聾	GC+CBL	音	N2	N2, G2, S1	G2	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	小寺	中３	GC	ウサギの生態	－	N1, G2, S1	G2	N2, G1	数値計算＋グラフ化
	西村	中３	GC	紙パック	－	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+交点+最大値+TABLE
	佐伯	高１	GC+CBL	１秒振り子	N2	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
2004	池田	中３	GC	単利・複利など	－	？	？	？	グラフ化+最大値+最小値+TABLE

注）記号の見方：

	数値的表現	グラフ的表現	代数的表現
生徒が実行	N1	G1	S1
テクノロジーが実行	N2	G2	S2
両者が実行	N12	G12	S12

例外として，「－」はテクノロジーを活用しなかった場合であるが，活動を行わなかったことではない．また，「？」は論文から読み取れなかった場合に使用した．

表 2-3-1 の分析結果を参照すると，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用は，1996 年から徐々に行われていることが分かる[6]．これは，ハンドヘルド・テクノロジーが安価で，かつ，操作性が容易であることが大きな要因であると考える．さらに，何れの実践もハンドヘルド・テクノロジーを効果的に活用することにより，数値的，グラフ的，代数的に数学的モデリングの過程を実行していることが分かる．以下にハンドヘルド・テクノロジー活用の特徴について簡単に紹介する．

①データ収集機の活用

データ収集機の活用で物理と関連づけた実践が容易になり，ボールの落下運動，温度変化，音，音階，速度と加速度，振り子など，数学的モデリングの教材が豊富になった実践（柳本，1996b；小林，1997；鹿野，1997；氏家・佐伯，1997a；氏家・佐伯，1997b；宮川，1998；西村，1998；佐伯・氏家，1998；深澤，1999；佐伯・氏家，1999；西村，2001c；中村，2003；佐伯，2003；佐伯・氏家，2003a；佐伯・氏家，2003b）．

②回帰モデル機能の活用

回帰モデル機能の活用により，未学習内容の関数が数学的モデルとして取り扱われた実践（大澤，1996；柳本，1996b；大澤，1998a；大澤，1998b；柳本，1998；大澤，1999）．

数学的モデルを算出する労力を軽減し，数学的モデリングの他の活動に労力をかけるために回帰モデル機能が活用された実践（西村他，1997；植野，1999a；佐伯・氏家，2003b；佐伯・氏家 2003c）．

③未学習の内容の取り扱い

上記の回帰モデル機能を使用しなくても，生徒が発展的に未学習内容の関数を数学的モデルとして取り扱うことができた実践（[２次関数：西村，2001c][３次関数：西村，2003a][指数関数：Stephens M. and　柳本，2001；小寺，2003；池田，2004a][三角関数：西村，1998][数列：西村，2001b][漸化式：柳本，2001]）．特に，西村（1998，2001b，2001c）の実践は，数学的モデリング教材を通して多くの数学的な概念や手法の学習を構成する「概念学習型」の学習方法が特徴的である．また，小寺（2003）の実践では，事象の変化を差分でとらえる力の育成を目的として中学校の関数指導を位置づけており，高等学校で学習する微分や漸化式につながる点で特徴的である．

---

[6] コンピュータを活用した数学的モデリングの実践研究は，松宮・柳本（1995），柳本（1996），Stephens M. and 柳本（2001）のみである．

④数値的・グラフ的に解決する手法

代数的な解法で問題解決ができない場合，数値的・グラフ的に問題解決を行うために，グラフ電卓の TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能等の機能が活用された実践．

◆TABLE 機能：大澤（1998b），佐伯・氏家（1998），裕元（1999），柳本（2001），西村（2003）

◆TRACE 機能：裕元（1999），村上（1999）

◆ZOOM 機能：裕元（1999）

◆CALC 機能［交点，最大値］：西村（2003a）[7]

⑤数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化の手法

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的意義と問題点の中で，「定式化」，あるいは，「解釈・評価」は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能を要することを指摘している．これに対して，ハンドヘルド・テクノロジーの活用が，データ収集や代数計算における労力を軽減するため，数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化の過程に時間をかけることができるようになった．表 2-3-1 に示した実践研究では，以下の手法で数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化が行われている．

◆プロットしたデータと算出した数学的モデルのグラフとを一致させた手法：
氏家・佐伯（1997a），氏家・佐伯（1997b），西村（1998），佐伯・氏家（1999），西村（2001b），中村（2003），佐伯（2003），佐伯・氏家（2003b），佐伯・氏家（2003c）

◆上記の手法で，特にグラフの平行移動を活用した手法：
大澤（1996），大澤（1998a），佐伯・氏家（2003b）

◆複数の数学的モデルのグラフを同一画面に表示し比較検討した手法：
鹿野（1997），大澤（1998b）

◆プロットしたデータと算出した数学的モデルとの残差を比較した手法：
植野（1999a）

◆数学的モデルから算出した値と実現象データとを比較した手法：
室岡（1997）

◆生徒が算出した数学的モデルをグラフ電卓に入力し，TABLE 機能で求めた数値データをもとに OHP にグラフを描き実物大の写真と重ねて検証した手法：
植野（1999b）

[7] p.106 を参照．

以上，数学的モデリングの実践研究に関する先行研究をもとに，ハンドヘルド・テクノロジー活用の特徴について考察した．表 2-3-1 に示した全ての実践が関数の分野で行われおり，幾何の分野に関する実践が行われていない．このため，グラフ電卓の計算機能（四則演算や三角比など）や作図ツールを活用した数学的モデリングの教材開発，さらに，関数と幾何とを融合した教材開発が今後期待される．

Blum and Niss（1989）は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題として，数学的モデリングは大変な労力を要し，かつ，予測がつかない数学学習であるとして生徒が捉えていることを指摘した．さらに，Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の課題とリスクとして，単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性と，現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性を指摘している．しかし，我が国で行われた何れの実践研究においても，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが報告されている．この結果，我が国における実践研究は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題とテクノロジー活用の課題は，ある程度克服されていると考える．

しかし，表 2-3-1 に示した実践研究は，一部の教育研究者及び実践研究者によるもので，我が国における通常の学校数学で実践されるまでには浸透していない．つまり，数学的モデリングにおけるカリキュラムに関する課題と教師に関する課題は，克服すべき課題として依然として残っている．これらの課題は，個々の教育研究者及び実践研究者レベルの問題ではなく，組織的に取り組む必要があると筆者は考えるが，これまでの実践研究で得られた成果をもとにした教材研究及び実践・評価を継続的に行っていくことが，我々実践研究者に課せられた課題であるとも筆者は考える．

６．まとめ

本節では，本研究におけるタイプ２の数学的活動，つまり，日常的な事象，自然現象，社会現象等の実現象と数学とをつなげる数学的活動に焦点を絞り，①数学的モデリングの捉え方と課題，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド･テクノロジーを活用したモデリングの実践研究，について考察した．

まず，①数学的モデリングの捉え方では，数学的モデリングの研究動向，「数学的モデル」と「数学的モデリング」の定義，数学的モデリングの重要性と課題について，先行研究をもとに考察した．特に，数学的モデリングの課題は，カリキュラム，教師，

生徒の三つの面から考察したが，何れの面も十分に解決されていないことが明らかになった．

次に，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題を考察した．テクノロジー活用の意義は，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つに集約されることが分かった．一方，テクノロジー活用の課題として，1)基本的な計算やグラフの技能・能力の低下，2)実際の実験や実物の代用として提供された場合の現実性の喪失，3)単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性，4)現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性，が指摘されているが，現状ではこれらの課題が十分に克服されたとは言えないことが明らかになった．

また，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法では，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーションによる実験・探究の補助，として有効に活用できることを明らかにした．

最後に，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究では，我が国で公表された先行研究をもとに分析した．その結果，何れの実践研究においても，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが明らかになった．このことから，我が国での実践研究は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題とテクノロジー活用の課題がある程度克服されていることが分かった．しかし，数学的モデリングにおけるカリキュラムに関する課題と教師に関する課題は，これから克服すべき課題として依然として残っていることも明らかになった．

引用文献・参考文献

1) Barclay T. (1989). "MBL to Model: Combining Real World Data with Theoretical Models". In Blum W. et al (eds.). Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Ellis Horwood. pp.357-360.

2) Blum W. and Niss M. (1989) " Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.) . Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.

3) Blum W. (1991). " Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.) . Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29

4) Blum W. (1998). "On the Role of 'Grundvorstellungen' for Reality-Related Proofs – Examples and Reflections". In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich World. England. Horwood Publishing Limited. pp.63-74.

5) Blum W. et al. (2002). "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document". Educational Studies in Mathematics. Vol.51. pp.149-171.

6) Burghes D.N. (1980). "Mathematical Modelling: A positive Direction for the Teaching of Applications of Mathematics at School" . Educational Studies in Mathematics. Vol.11. pp.113-131.

7) Bushaw D., Bell M., Pollak H.O., Thompson M., and Usiskin Z. (1980). A Sourcebook of Applications of School Mathematics. MAA and NCTM.

8) Clatworthy N.J. and Galbraith P.L. (1987). "Mathematical Modelling: Innovation in senior mathematics". Australian Senior Mathematics Journal. Vol.1, No.2. pp.38-49.

9) Corbitt M.K. and Edwards C.H. (1979). "Mathematical Modeling and Cool Buttermilk in the Summer". In Reys R.E. (Ed.). 1979 Yearbook: Applications in school mathematics. NCTM. pp. 217-226.

10) Demana F. and Waits B.K. (1993). "The Particle-Motion Problem" . Mathematics Teacher. Vol.86. No.4. pp.288-292.

11) Embse C.V. and Engebretsen A. (1996). "A Mathematical Look at a Free Throw Using Technology". Mathematics Teacher. Vol.89. No.9. pp.774-779.

12) Fey J.T.（1987）. 数学教育とコンピュータ. 成嶋弘監訳. 東海大学出版会.

13) Freudenthal H.（1968）. "Why to Teach Mathematics so as to be Useful". Educational Studies in Mathematics. Vol.1. No.1/2. pp.3-8.

14) 深澤一幸（1999）.「テクノロジーを活用した教材開発に関する研究 -角度センサーの開発とその教材-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 11 号. pp.17-24.

15) Galbraith P.L. and Clatworthy N.J.（1990）. "Beyond Standard Models – Meeting the Challenge of Modelling" . Educational Studies in Mathematics. Vol.21. pp.137-163.

16) Hans-Wolfgang H. and Blum W. (eds.)（2004）. ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education. Pre-Conference Volume. University of Dortmund , Department of Mathematics, IEEM.

17) Holtzman W.H.編（1977a）. CAI システムⅠ：基礎編. 木村捨雄, 細井正訳. 共立出版.

18) Holtzman W.H.編（1977b）. CAI システムⅡ：実践編. 木村捨雄, 細井正訳. 共立出版.

19) Howson A.G. and Kahane J.-P.（1986）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. 植竹恒男監訳（1989）. 数学教育とコンピュータ. 日本数学教育学会編訳. 聖文社.

20) 池田敏和, 浜泰一（1992）.「高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 74 巻. 第 7 号. pp.42-50.

21) 池田敏和, 山崎浩二（1993）.「高数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第 1 号. pp.26-32.

22) Ikeda T. and Stephens M.（1998）. "Some Characteristics of Students' Approaches to Mathematical Modelling in the Curriculum based on Pure Mathematics". 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.22. No.3. pp.142-154.

23) 池田敏和（1998）.「実世界に役立つ数学」. 樋口禎一・細川尋史・池田敏和著「数学の才能を育てる」. 牧野書店. pp.87-109.

24) 池田敏和（1999）.「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育学論究. Vol.71・72. pp.3-18.

25) 池田敏和（2001）. 数学的モデリングを促進する考え方の指導・評価に関する研究 -指導・評価に向けての基礎的研究-. 平成 11・12 年度文部省科学研究費補助金（奨励研究（A）：課題番号 11780111, 代表：池田敏和）研究成果報告書.

26) 池田敏和（2002）.「中等数学科における数学的モデリング・応用の指導目標に関

する一考察」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第５号. pp.2-12.
27) 池田敏和（2004a).「数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てた指導目標の系列と授業構成に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育学論究. Vol.81・82. pp.3-32.
28) 池田敏和（2004b).「中学校段階におけるモデリング・応用の指導の８カ国における動向−第 14 回 ICMI 研究のワーキンググループの活動を通して−」. 日本科学教育学会第 28 回年会論文集. pp.225-228.
29) Isoda M. and Matsuzaki A. (2003). "The Roles of Mediational Means for Mathematization: The Case of Mechanics and Graphing Tools". 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.4. pp.245-257.
30) Kaiser-Messmer G. (1991). "Application-Orientated Mathematics Teaching : A survey of the Theoretical Debate". In Niss M. et al (eds). Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood . pp.83-92.
31) 加藤竜吾（2000). 理科教材を利用した中学校数学科教材開発に関する研究. 上越教育大学大学院教育学研究科修士論文.
32) 加藤竜吾, 黒木伸明（2002).「目標に多重構造を持つ数学の授業構成について」. 数学教育学会誌. Vol.43. No.1・2. pp.35-42.
33) Kerr D.R. and Maki D. (1979). "Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom". In Reys R.E. (Ed.). 1979 Yearbook: Applications in school mathematics. NCTM. pp. 1-7.
34) 小林力（1997).「日常的な事象の観察から関数の概念を知る −魔法の壷とバンジージャンプをデータ収集機で実験・観察する−」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育―実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善―」. 明治図書. pp.49-57.
35) 小寺隆幸（1996). 地球を救え！数学探偵団［一次関数]. 国土社.
36) 小寺隆幸 (1999a).「カリキュラム構成の視点−数学教育を現実世界に開くために」. 汐見稔幸, 井上正允, 小寺隆幸編「時代は動く！どうする算数・数学教育」. 国土社. pp.164-181.
37) 小寺隆幸（1999b).「現実の事象のモデル化を重視する数学科カリキュラム」. 日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」. 産業図書. pp.221-239.
38) 小寺隆幸（2001).「関数を使うと見えない未来が見えてくる」. 岩川直樹・汐見稔幸編「｢学力」を問う」. 草土文化. pp.78-90.
39) 小寺隆幸（2003).「事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導 −

生物の個体数の変化を素材として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.3-14.

40) 国立教育政策研究所（2004）. 平成１４年度高等学校教育課程実施状況調査. http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm.

41) 熊谷治久（2002）.「数学的モデル化過程を取り入れた授業実践-航空写真の問題を利用して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第９号. pp.21-28.

42) 熊谷治久（2004）.「確かな定式化を目指した数学的モデル化過程の授業-影の長さの問題を利用して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 86 巻. 第 11 号. pp.12-19.

43) Lesh R. , Niss M. and Lee D.（1986）. "Theme Group 6: Applications and Modelling". In Carss M.（eds.）. Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education. Birkhauser Boston, Inc.. pp.197-211.

44) Matsumiya T., Yanagimoto A. and Mori Y.（1989）. "Mathematics of Lake – Problem Solving in the Real World". In Blum W. et al (eds). Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood . pp.87-97.

45) 松宮哲夫，柳本哲編著（1995）. 総合学習の実践と展開-現実性をもつ課題から-. 明治図書.

46) 柗元新一郎（1999）.「中学校における数学的モデル化教材の開発と実践-「イチローのヒット数」をグラフ電卓で求める-」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.183-192.

47) 柗元新一郎（2000）.「数学的モデルをつくることを通して数学の世界を広げていく活動-全身が映る鏡の大きさを考える-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 82 巻. 第１号. pp.10-17.

48) 松嵜昭雄，礒田正美（1999）.「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察 -クランク機構の関数関係の把握-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第３号. pp.20-25.

49) 松嵜昭雄（2003）.「モデリング研究におけるいくつかの課題-14th ICMI Study ディスカッション・ドキュメントを参照して-」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.548. pp.99-103.

50) 松嵜昭雄（2004）.「現実的数学教育（REM）におけるモデリングの捉え方-14th ICMI Study における Gravemeijer の論文より-」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.558. pp.104-108.

51) 宮川健（1998）.「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 -事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌.

数学教育．第 80 巻．第 1 号．pp.9-14.

52) 三輪辰郎（1983）.「数学教育におけるモデル化についての一考察」．筑波数学教育研究．第 2 巻．pp.117-125.

53) 三輪辰郎(2004).「数学教育における数学的モデル化の教授－学習の意義と課題」．日本科学教育学会第 28 回年会，自主企画課題研究・講演資料．

54) 文部省（1999）．高等学校学習指導要領解説 -数学編理数編-．実教出版．

55) 村上豊（1999）.「グラフ電卓の利用を視野においたモデル単元の実践と検討-１次関数・１次方程式・１次不等式・連立方程式を事例に-」．杉山吉茂著「高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究」．平成８～10 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究 A：課題番号 08308014，代表：杉山吉茂）研究成果報告書．pp.97-118.

56) 室岡和彦（1997）.「音階による指数の探究 -LOGO とグラフ電卓を用いて指数のしくみを探る-」．佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－」．明治図書．pp.80-88.

57) NCTM（1979）．Applications in School Mathematics．1979 Yearbook．Reston．VA.

58) NCTM (1989)．Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics．Reston．VA.

59) 長崎栄三編著 (2001)．算数・数学と社会・文化のつながり－小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して－．明治図書．

60) 長崎栄三，西村圭一，五十嵐一博，牛場正則，久保良宏，久永靖史，柗元新一郎（2004）.「数学と社会をつなげる力に関する研究-中学校・高等学校を中心に-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 86 巻．第 11 号．pp.2-11.

61) 中村好則（2003）.「聾学校におけるテクノロジー活用による実験・観察を取り入れた指導の効果 -高等部における「音の探究」の指導事例を通して-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 9 号．pp.18-25.

62) 西村圭一，柗元新一郎，植野美穂（1997）.「数学的モデル化教材の評価に関する研究」．東京学芸大学数学教育研究．第 9 号．pp.41-54.

63) 西村圭一（1998）.「CBL／CDA を利用した三角関数の指導に関する研究 -「音」を題材として-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第 7 号．pp.11-19.

64) 西村圭一（2001a）．数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究-高等学校数学科を中心に-．東京学芸大学大学院教育学研究科修士論文．

65) 西村圭一（2001b）.「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 83 巻．第 11 号．pp.2-12.

66) 西村圭一 (2001c).「ボールを東京ドームの天井に当てるには」. 長崎栄三編著「算数・数学と社会・文化のつながり－小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して－」. 明治図書. pp.156-163.
67) 西村圭一 (2001d).「ロックンローラ（二重観覧車）の動き」. 長崎栄三編著「算数・数学と社会・文化のつながり－小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して－」. 明治図書. pp.164-171.
68) 西村圭一 (2003a).「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践 －紙パックジュースを題材に－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.31-39.
69) 西村圭一 (2003b).「幾何学化をめざす授業の研究」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.3. pp.223-231.
70) 西村圭一 (2004). 中等教育数学科カリキュラムの開発に関する基礎的研究 －米国の教科書の分析及び授業実践を通して－. 平成 15 年度 東京学芸大学附属学校研究会プロジェクト（研究代表：西村圭一）研究成果報告書.
71) 布川和彦 (1998).「教科の知識と問題場面のアプローチ」. 一般教科教育学研究会編「一般教科教育学序説」. 大学教育出版. pp.99-120.
72) 小倉金之助 (1972). 数学教育の根本問題. 玉川大学出版部.
73) 大澤弘典 (1996).「現実場面に基づく問題解決 －グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.16-20.
74) 大澤弘典 (1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究：生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学大学院修士論文.
75) 大澤弘典 (1998b).「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 －テープレコーダのカウンター問題－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.30-33.
76) 大澤弘典 (1999).「肥満とやせの判定基準づくり －数学を核とした総合的な学習の時間の展開例－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 11 号. pp.5-9.
77) 太田伸也 (1997).「生徒に幾何の世界を構成させる図形指導（２）－「写真に写る大きさと距離との関係」を題材に－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第 5 号. pp.24-32.
78) 太田伸也 (1999).「太陽の動きを円錐でとらえる－中学校図形指導改善のための教材開発とその実践の試み－」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.173-182.
79) 太田伸也 (2002).「太陽の動きを捉えるための数学的モデルを作る活動を通して

空間図形の見方を広げる指導」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第 11 号. pp.10-20.

80) 太田伸也（2004）. 数学科の授業改善のための教材開発. 平成 13ー15 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）(2)：課題番号 13680185, 代表：太田伸也）研究成果報告書.

81) Pollak, H.O. (1980).「数学と他の学科との相互作用」. 数学教育国際委員会（ICMI）編. 数学教育新動向研究会訳「世界の数学教育その新しい動向」. 共立出版. pp.299-320.

82) 佐伯昭彦, 礒田正美, 清水克彦編著（1997）. テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー. 明治図書.

83) 佐伯昭彦, 氏家亮子（1998）.「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム －身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.

84) 佐伯昭彦, 氏家亮子(1999).「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」. 日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」. 産業図書. pp.295-313.

85) 佐伯昭彦（2000）. 数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究ー身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業ー. 平成 10ー11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298, 代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.

86) 佐伯昭彦（2002）. 生徒個々の数学的モデリング能力に応じた総合学習の教材開発に関する研究ー簡易テクノロジーを活用した数学と理科との総合学習ー. 平成 12ー13 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 12680291, 代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.

87) 佐伯昭彦（2003）. 数学と物理とを関連させた総合的学習の有効性に関する実証的研究. 平成 12ー14 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（B）：課題番号 12551004, 代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.

88) 佐伯昭彦, 氏家亮子（2003a）.「数学と物理とを統合したクロスカリキュラム型授業の教育効果」. 工学教育. 51 巻 1 号. pp.109-114.

89) 佐伯昭彦, 氏家亮子（2003b）.「数学的モデリング過程における学習者の実データ解析方法-「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 3 号. pp.12-21.

90) 佐伯昭彦, 氏家亮子（2003c）.「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法

-回帰モデル機能を用いたより良いモデル化-」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.5. pp.354-361.

91) 清野辰彦 (2004). 「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の授業-「一次関数とみる」見方に焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第１号. pp.11-21.

92) 鹿野敏一 (1994). 高等学校数学におけるテクノロジーを用いた数学的モデル化の教材開発に関する研究. 筑波大学大学院修士論文.

93) 鹿野敏一 (1997). 「コーヒーはどんなふうに冷めていくの？ -温度の下がり方を関数で探究／データ収集機と数学的モデル化-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育一実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善一」. 明治図書. pp.100-107.

94) 島田茂編著 (1977). 算数数学科のオープンエンドアプローチ. みずうみ書房.

95) 島田茂編著 (1995). 新訂 算数数学科のオープンエンドアプローチ. 東洋館出版.

96) Stephens M., 柳本哲 (2001). 総合学習に生きる数学教育. 明治図書.

97) 杉山吉茂 (1999). 高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究. 平成８－10年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 A：課題番号 08308014, 代表：杉山吉茂) 研究成果報告書.

98) 植野美穂 (1999a). 「グラフ電卓を用いた高校数学教材の開発」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.193-203.

99) 植野美穂 (1999b). 「テクノロジー利用の教材開発」. 杉山吉茂著「高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究」. 平成８－10年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 A：課題番号 08308014, 代表：杉山吉茂) 研究成果報告書. pp.81-88.

100) 氏家亮子, 佐伯昭彦 (1997a). 「一定の速さで歩いた様子を１次関数でモデル化する -速さと速度をデータ収集機で実験・観察する-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育一実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善一」. 明治図書. pp.58-66.

101) 氏家亮子, 佐伯昭彦 (1997b). 「君は音を見たことがあるか？ -周期現象をデータ収集機で実験・観察する-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育一実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善一」. 明治図書. pp.89-99.

102) 柳本哲 (1996a). 「中学校における数学的モデリングについて-給水タンクを事例

として−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 5 号．pp.2-9.

103) 柳本哲（1996b）．「グラフ電卓を活用した数理の総合学習−CBL システムを用いた実験から−」．大阪教育大学数学教育研究．第 26 号．pp.41-54.

104) 柳本哲（1998）．「グラフ電卓を用いた問題解決学習−中学３年の実践内容と生徒の反応−」．大阪教育大学数学教育研究．第 28 号．pp.45-57.

105) 柳本哲（2001）．「動植物を保存しよう−グラフ電卓を使って個体数を調べる」．高階玲治編「算数・数学科から発展する総合学習の学力調査」．明治図書．pp.84-94.

106) Waits B.K. and Demana F.（2000）. "Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future". In Burke M.J.（Ed.）. 2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century. NCTM. pp.51-66.

第３章

通常の数学授業における数学的活動とその実践

３．１　単元の導入時における数学的活動
－ 極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 －

１．はじめに

２．２節において，テクノロジー活用の利点の一つとして，数値的表現，グラフ的表現，代数的表現の多表現を関連づけによる理解の深化について記述した[1]．さらに，NCTM（1989）の第９学年から第 12 学年のスタンダード 13（微分積分学の概念的理解）では，テクノロジーを活用した数値的，グラフ的なインフォーマルな探究が微積分学を学習する確かな基礎づくりとなることを強調していることも示した．これに対して，我が国のグラフ電卓を活用した実践研究では，多表現を関連づけたインフォーマルな数学的活動の実践があまり行われていないことが先行研究から明らかになった．

本研究では，単元の導入時における数学的活動として，極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動を行った．授業では，分数関数の不連続点についてグラフ電卓を活用してグラフ的・数値的に探究する数学的活動を通して，グラフの不連続点が生じる原因を生徒自身の考え方で考察し，その結論を記述させた．さらに，生徒が実験・観察等の外的な活動を通してインフォーマルに理解した考え方をクラス全体に提示して，それらを教科書に記述された数学的な概念や記号に置き換えながら授業を展開した．ここでは，本授業の目的・方法，授業設計の視点，授業の展開，さらに，生徒が行った探究結果について報告する．

なお，本稿では，グラフ電卓を活用した主体的な数学的活動を通して，生徒が未学習の内容を具体的な事例から帰納的に理解することを「インフォーマルに理解する」と定義する．これに対して，「フォーマルに理解する」とは，数学用語，記号，数式，グラフ等で記述された数学の内容を演繹的に理解することを指す．

２．これまでの指導の問題点

現行の学習指導要領解説での極限の取り扱いは，「数学Ⅱ」では，速さや接線の考えから極限を直感的に扱い微分係数や導関数の計算が理解できる程度にとどめている（文部省，1999）．さらに，「数学Ⅲ」では，関数の導関数を求める計算に必要となる内容にとどめている．しかし，教科書の極限の単元では，分母または分子が二次以上である分数関数の計算問題が多く取り扱われている．これは，分数関数は極限の単元

---

[1] ２．２節（pp.61-64）を参照．

以前に学習する関数と比べ，グラフの振る舞いが複雑なことから，local behavior（$x \to a$ でのグラフの振る舞い）と end behavior（$x \to \pm\infty$でのグラフの振る舞い）に関する計算問題が取り扱いやすいためだと考える．

ここで日米の分数関数の取扱いを比較してみる．米国の教科書では，極限を学習する準備として分数関数のグラフの振る舞いを local behavior と end behavior に分類して体系的かつ代数的・数値的・グラフ的に説明している（Demana, et. al,1993; Finney, et. al,1994; Murdock, et. al,1998; UCSMP,1998; Hornsby, et. al,1999）．これは，Demana ら（1993）が分数関数の学習目的で「生徒は，分数関数の end behavior モデルと漸近線を記述することで極限の概念を調べる.」と述べるように， 分数関数の学習と極限の学習との関連づけを意識していることが分かる．

一方，我が国における分数関数の取扱いは，分母・分子が一次のみで，代数計算によるグラフの平行移動に焦点が置かれている．これに対して，極限の学習では分母・分子が二次の分数関数が扱われることが多い．例えば，教科書の例題にある $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ の解法は，図 3-1-1 に示すように代数計算による式展開とグラフで説明されているが，分数が 2 次以上のグラフを正確に描ける生徒は多くはないと思われる．

$$\lim_{x \to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2}(x+2)$$
$$=4$$

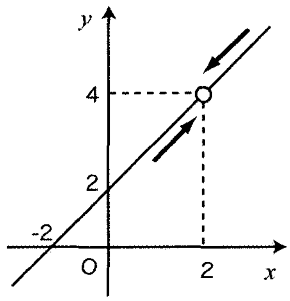


図 3-1-1．教科書の解答例

実際に筆者のクラスで，極限の学習前に $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ のグラフを描かせたところ，図 3-1-2 に示す誤りパターンが見られた．これらの誤りは，(1) x が整数である座標のみでグラフを描いている，(2) $\dfrac{0}{0}=0$ と考えている，が原因である．

このような誤り原因を取り除かない限り，生徒達は極限の問題を代数計算のみで解を算出することが出来ても，分母・分子が二次の分数関数のグラフは未学習であるため，得られた解をグラフ的に数値的に吟味することは出来ないと思われる．

このため，本数学的活動では，極限の単元の導入時に，分数関数 $f(x)$ の不連続点に

関して，x が限りなく a に近づくときの $f(x)$ の振る舞いをグラフ的かつ数値的に観察し，生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動の教材を開発した．

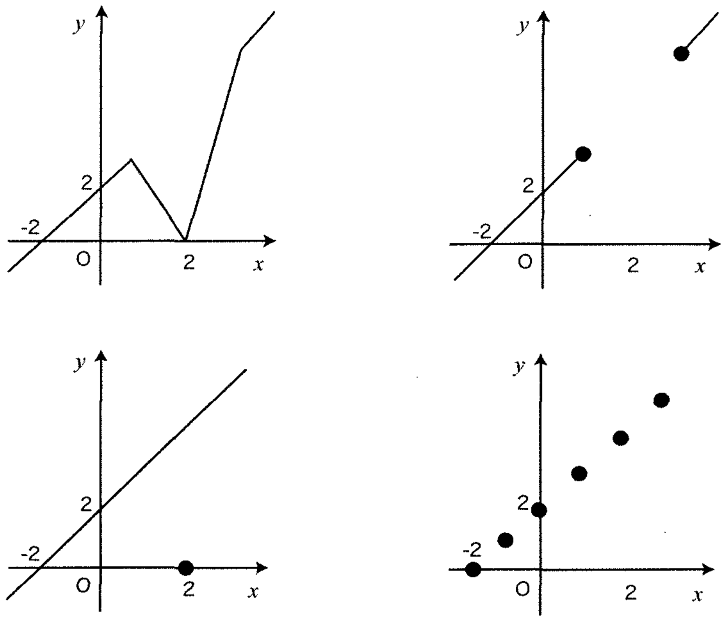


図 3-1-2.　分数関数の誤答例

３．授業の目的

分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に観察する数学的活動を通して，生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解することを授業の目的とする．

４．授業の方法

1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生 80 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2002 年９月
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．授業設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

分母と分子が一次である分数関数のグラフは１年次で学習済みである．

(2) 未学習の分数関数を題材として選んだ理由

授業で取り扱った数学的活動の題材は，$y=\dfrac{1}{x+1}$（既習）と $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（未学習）である．

前者は$x=-1$における漸近線，後者は$x=2$における取り除き得る不連続点（removable discontinuity：授業では簡単に「穴」と表現したので，以下「穴」と記す[2].）を探究する数学的活動であり，最初にグラフ電卓を使わないでこれらのグラフを生徒に描かせた．未学習の分数関数を選んだ理由は，図 3-1-2 に示したように，生徒が描いた $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ のグラフが，分母が０になる x の近辺でそれぞれ異なっている原因を生徒に考えさせる動機を与えるため，さらに，分母が０となる x の近辺のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に調べる必要性を生徒に持たせるためである．また，分数関数のグラフが予想に反して直線になることに対する驚きと知的好奇心を持たせるために，未学習の $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ を選んだ．

(3) グラフ電卓活用の留意点

グラフ電卓を使った数学的活動では，分母が０となる x の近辺をグラフ的アプローチと数値的アプローチの２つの方法で探究した．グラフ的アプローチは，分母が０となる x の近辺のグラフを拡大して漸近線や「穴」の振る舞いを視覚的に観察する方法で，例えば図 3-1-3 に示すように $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ のグラフは $x=2$ で「穴」が空いているように見える[3]．また，数値的アプローチは，グラフ電卓の TABLE 機能を使って，分母が０となる x の近辺における y の値を数値的に観察する方法である．例えば，図 3-1-4 に示すように，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ の $x=2$ 前後の数表を見ることができる．この他，数値的アプローチでは，グラフ電卓の TRACE 機能や ZOOM 機能を活用することも考えられるが，本教材では以下の３つの理由から TABLE 機能のみを扱った．

1) 生徒の能力を考慮して，多くの操作・探究による生徒の混乱を避けるため
2) TABLE 機能は，関数の極限値が両側（$x\to a-0$と $x\to a+0$）から近づくことを連続的に観察できるため（図 3-1-4）
3) TABLE 機能は，xの増分（図 3-1-4 は$\Delta Tbl=0.001$）が自由に設定できるので，関数が不連続になる前後の数値を生徒の考えで細かく調べることが可能なため

[2] Murdock, J. 他（1998）と Hornsby, J.他（1999）の教科書では，removable discontinuity のことを hole「穴」と記述している．

[3] グラフ電卓でグラフの「穴」を視覚的に表示するには，グラフの表示範囲設定に注意しなければならない．これは液晶画面のピクセル数に影響するもので，ピクセル数は各機種によって異なる．詳しくは２．２節（pp.74-77）と Vonder, C.他（1996）の論文を参照．

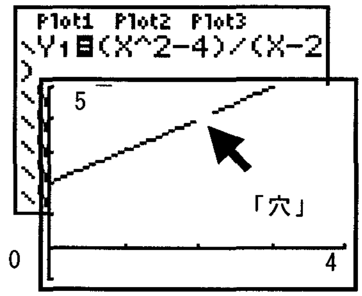


図 3-1-3. グラフ電卓に表示された「穴」

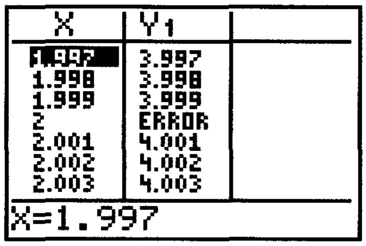


図 3-1-4. TABLE 機能による数表

６．授業の展開

(1) **第１時間目（20 分）**

◆事前調査：ウォームアップとして二次関数 $y=3-x^2$，さらに，本題として二つの分数関数 $y=\frac{1}{x+1}$（既習）と $y=\frac{x^2-4}{x-2}$（未学習）について，生徒が自分で数表を作成し，それを基にグラフを描かせた．この課題を早く終えた生徒に対しては，自分で描いたグラフをグラフ電卓で確認させた．このとき，自分で描いたグラフがグラフ電卓の結果と異なっている場合は，その原因を記述させた[4]．

(2) **第２時間目（45 分）**

◆導入：生徒が描いた分数関数のグラフの誤りパターン（図 3-1-2）を OHP シートで示し，分母が 0 になる x の近辺でグラフがそれぞれ異なっていることに気づかせた．さらにその原因を考えさせ，分母が 0 となる x の近辺のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に調べる必要性を生徒に持たせた．

◆グラフ電卓を活用した数学的活動[5]：分数関数の振る舞いを探究するために，グラフ的アプローチと数値的アプローチの二つの方法で数学的活動を行った．特に，数値的アプローチで使う TABLE 機能の操作方法は，ワークシートに記述した二次関数 $y=3-x^2$ の事例を参考に，教師が ViewScreen[6]を使ってクラス全体に指導した．

・観察１［グラフ的アプローチ］

図 3-1-5 は，$y=\frac{x^2-4}{x-2}$のグラフの振る舞いについて，$x=2$ におけるグラフの変化を描写するワークシートの一部である．図 3-1-5 (1)の Window 設定 $x\in[-5,5], y\in[-5,5]$ では１次関数 $y=x+2$ と同じグラフが描かれる．さらに，(2)の Window 設定 $x\in[0,4], y\in[-1,5]$ では図 3-1-3 で示したように $x=2$ に「穴」が表示される．この

4　巻末の教材ワークシート（p.255）を参照．
5　巻末の教材ワークシート（p.255）を参照．
6　グラフ電卓の画面を OHP スクリーンに投影する装置である．

ように，分数関数のグラフが直線になること，または，(2)では(1)と同じ直線でかつ「穴」が存在することに生徒は驚きを感じ，これらのグラフに対する知的好奇心を持つと考えた．これらのグラフを描写した後に，観察する数学的活動によって得られたグラフの様子を生徒自身の言葉で記述させた．

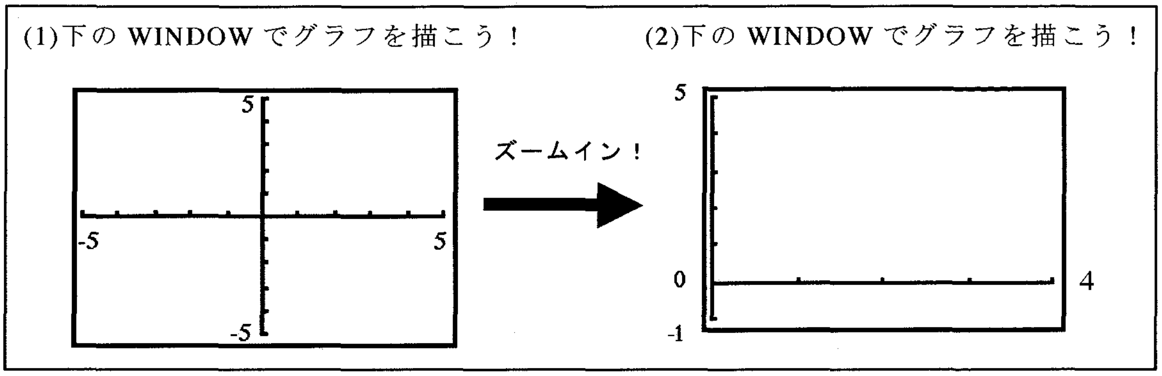


図 3-1-5．グラフ的アプローチ

・観察２［数値的アプローチ］

グラフ電卓の TABLE 機能（図 3-1-4）を使って，分母が０となる x の近辺における y の値を調べ，分かったことと気づいたことを記述させた．

・仮説の設定［考察］

上記のグラフ的アプローチと数値的アプローチの観察から，それぞれの分数関数が漸近線または「穴」を持つ理由を記述させた．

・仮説の検証［実験・検証］

上記で設定した仮説をグラフ電卓で検証するために以下の挑戦課題を設定した[7]．

挑戦１．不思議なグラフになる関数［(1) 漸近線が１本，(2)「穴」が１つ，(3)「穴」と漸近線が１つずつ，(4)「穴」が２つ，(5) 漸近線が２本，(6) その他］を作ってみよう．そして，それをグラフ的に数値的に調べ，その結果を考察してみよう．

挑戦２．「穴」を作る方法と漸近線を作る方法を記述してください．

７．実践結果

ここでは，生徒がインフォーマルに理解した極限の考え方の一部を生徒のレポートをもとに示す．実際の授業では，生徒達の考え方をクラス全体に提示し，それらを数学的な定義と記号で置き換えながら授業を展開した．

[7] 授業では漸近線は縦方向（vertical asymptote）のみを扱った．しかし，数学的活動中に横方向の漸近線（horizontal asymptote）に興味・関心を持った生徒がいたが，授業では取り扱わなかった．

(1) 極限に関する生徒の捉え方

ａ．生徒独自のインフォーマルな極限の理解

図 3-1-6 は $y=\dfrac{1}{x+1}$ の数値的アプローチにおける生徒の記述例である．この生徒は，２つの数表（xの増分が 0.01 と 0.001）を観察した結果，「$x=-1$ の時の yの値がない．$x=-1$ にかなり近づけば近づくほど yの値が限りなく大きく（小さく）なる．」と生徒なりの言葉で極限を表現している．

この生徒以外のレポートには，「どれだけ細かく数表を見ても -1以外では値がある」といった表現，さらに $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ に関しては「増分を限りなくこまかくしても $x=2$ のときには値はなかった．」や「$x=2$ だけの値はなくグラフは途ぎれていた．1.999999999 に値はあるが 2.0 にはない．」といった表現もあった．

このように，極限の表現をインフォーマルに記述した生徒は 16 名であり，生徒達は TABLE 機能で数値的に探究することにより，極限の定義の両側極限である「xがある値 aに a以外の値をとりながら限りなく近づくとき」といった考え方をインフォーマルに理解したと思われる．

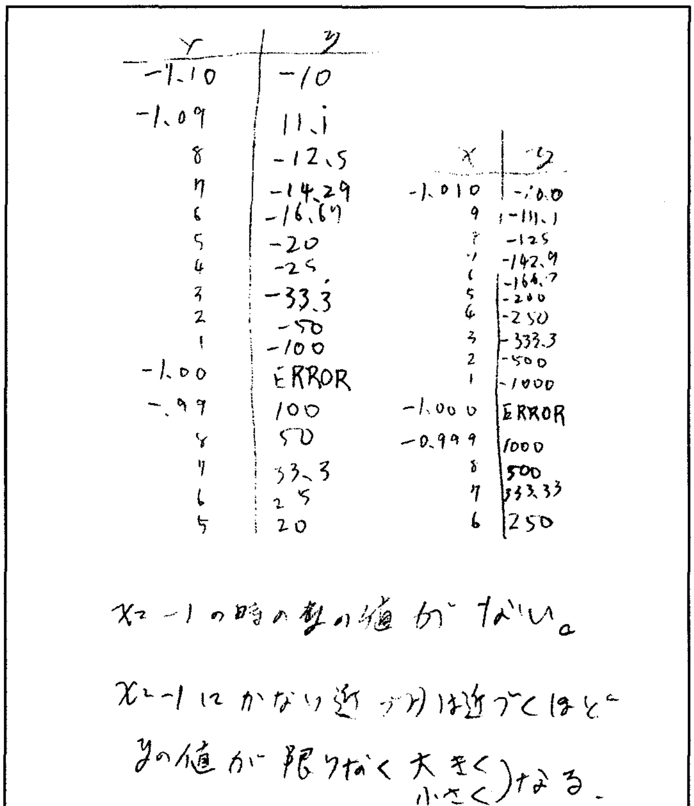


図 3-1-6．インフォーマルな極限の理解

ｂ．多表現による関連づけ

図 3-1-7 は，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ における生徒のレポート例である．この生徒は，最初のグラフ的アプローチでは「見た目には $y=x+2$ のグラフである．x が２のときはグラフがない.」，また，数値的アプローチでは「数表から見ても $y=x+2$ のグラフだが x が２のときは値がない.」と代数的表現を使って記述している．また，考察では「$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ となり，$y=x+2$のグラフと同じになるはずだが，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$の場合は，分母の$(x-2)$の値が０になると計算ができないためxの値が２になることはない．したがって，$x=2$の部分だけがグラフに表示されない.」と記述している．この考察では，前述の図 3-1-6 に見られるような極限の概念的表現が見られないが，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ が $x=2$ 以外で $y=x+2$ と一致することをグラフ的・数値的・代数的に関連づけながら $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ の計算をインフォーマルに理解していると考えられる．このように代数的表現を記述した生徒は 15 名であった．

【グラフ的アプローチ】

見た目には $y=x+2$ のグラフである
xが2のときはグラフがない

【数値的アプローチ】

数表から見ても $y=x+2$ のグラフだが
xが2のときは値がない

【考察】

$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ となり、$y=x+2$のグラフと同じになるはずだが、
$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$の場合、分母の$(x-2)$の値が0になると計算が出来ないためxの値が
2になることはない．したがって、$x=2$の部分だけがグラフに表示されない

図 3-1-7．多表現による関連づけ

(2) 不連続な分数関数の作成方法

ａ．生徒が作成した分数関数の例

表 3-1-1 は，生徒が作成した分数関数のグラフ例である．生徒達はこの課題に興味を持ったようで，自分の意図するグラフが作成できた時は歓声があがっていた．この課題で分数関数を作成した生徒は 29 名で，一人で５個以上のグラフを作成した生徒もいた．

表 3-1-1．生徒が作成した分数関数例

（１）穴が１つ ・$y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$　・$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$　・$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　・$y=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ ・$y=\dfrac{x^2-121}{x-11}$　・$y=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$　・$y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$　など
（２）漸近線が１本 ・$y=\dfrac{1}{x-1}$　・$y=\dfrac{1}{x-2}$　・$y=\dfrac{x^2-8}{x-4}$　・$y=\dfrac{x^3}{x-1}$ ・$y=\dfrac{x^2}{x-1}$　・$y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$　・$y=\dfrac{4x^x}{x-3}$　・$y=\dfrac{x-100}{100x+100}$　など
（３）穴が１つ，漸近線が１本 ・$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$　・$y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$　・$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ ・$y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$　・$y=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}$　・$y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^2-9}{x-3}$　など
（４）穴が２つ ・$y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$　・$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}+\dfrac{x^2-1}{x-1}$　$y=\dfrac{\frac{x^2-16}{x-4}}{x}$　など
（５）漸近線が２本 ・$y=\dfrac{1}{x^2+6x+8}$　・$y=\dfrac{x}{x^2-1}$　・$y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ ・$y=\dfrac{x+6}{x^2-8}$　・$y=\dfrac{3}{x^2-5}$　・$y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$　など

b．生徒が作成した分数関数の例

生徒が発見した漸近線や「穴」の作成方法を以下に示す．

[類推による一般化]

図 3-1-8 は，課題の $y=\frac{1}{x+1}$ から類推して「$x=a$ を漸近線にしたい時は $y=\frac{1}{x-a}$ 」，さらに，$y=\frac{x^2-4}{x-2}$ から類推して「$x=a$の所に穴をあけたい時は $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ で直線」と自分なりの公式を作成している．このように，$y=\frac{1}{x-a}$ を記述した生徒は４名で，$y=\frac{x^2-a^2}{x-a}$ を記述した生徒は８名であった．

穴・・・$x=a$の所に穴をあけたい時は $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ これで直線

漸近線・・・$x=a$を漸近線にしたい時は

$y=\frac{1}{x-a}$

図 3-1-8．類推による一般化

図 3-1-9 は，分子の次数をｎ次（x^n-a^n）に拡張した一般化である．分子が２次，３次，４次の場合のグラフが記述されていることから，この生徒は自分が一般化した仮説をグラフ電卓で検証していると考えられる．この一般化は１名のみであった．

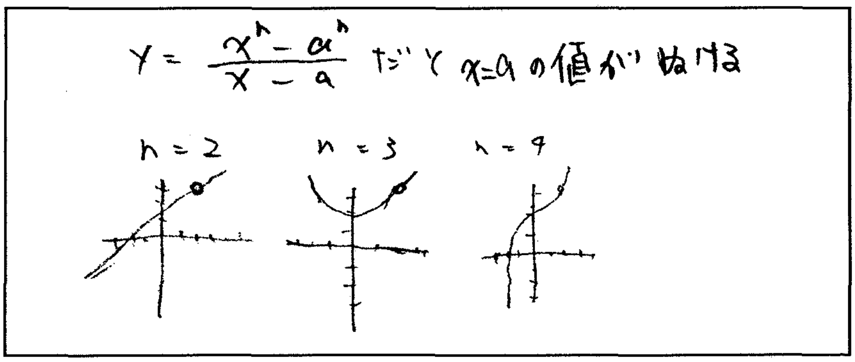


図 3-1-9．より高次な一般化

[言葉を使った一般化]

図 3-1-10 は「たぶん０／０で穴ができる．分母が０で分子が０以外の数の場合漸近線ができると思う」と言葉で記述している．上記（図 3-1-8，図 3-1-9）の一般化は類

推によって特殊な場合を数式化しているのに対して，この生徒はどんな場合でも対応できる高次の一般化を行っている．このような一般化を行った生徒は，漸近線の場合は５名，「穴」の場合は９名であった．

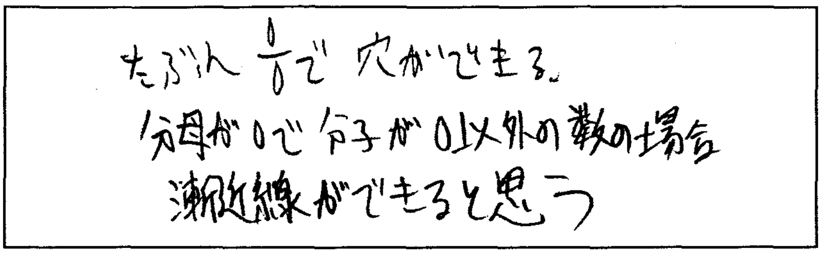


図 3-1-10. 言葉を使った一般化

[二つの関数の加法]

図 3-1-11 は，分数関数（$y=\frac{x^2-1}{x-1}$と$y=\frac{x}{x+5}$）を加法で結合することによって，漸近線１本と「穴」１個のグラフを作成した例である．紙面の関係上図 3-1-11 に示さなかったが，この生徒は，それぞれの分数関数において漸近線と「穴」の出来る理由をグラフ的・数値的に考察しており，その考察結果から二つの分数関数を加法で結合したと考えられる．このように，加法を行った生徒は２名であった．

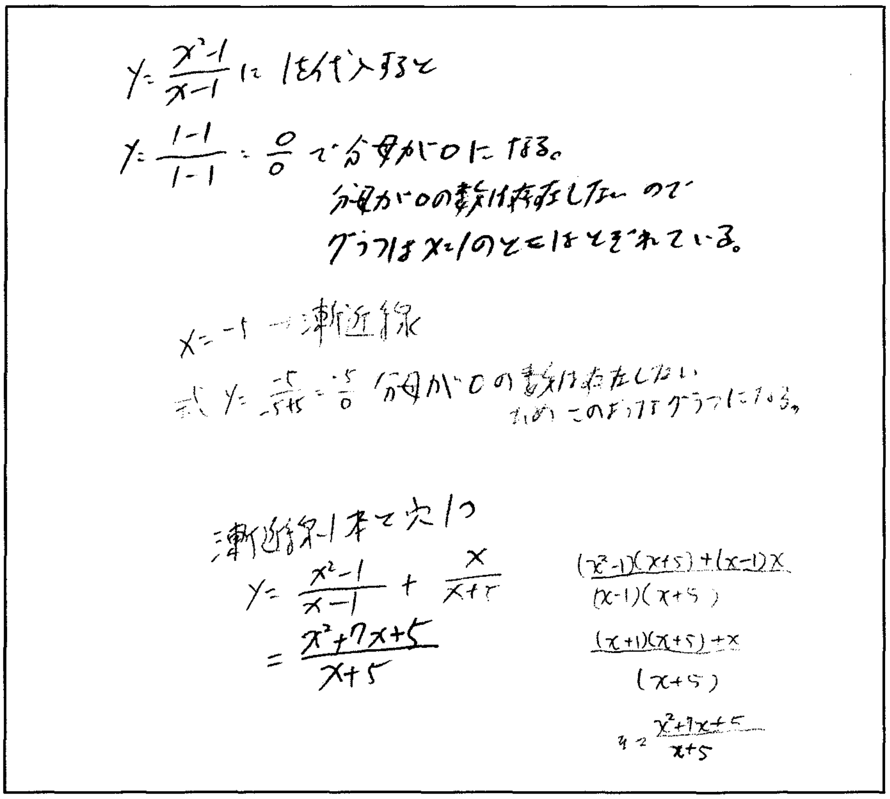


図 3-1-11. 二つの関数の加法

８．考察

(1)インフォーマルな極限概念の理解

前述の実践結果で示したように，グラフ電卓を活用した数学的活動において，極限の表現をインフォーマルに記述した生徒は16名であった．授業では，生徒が記述した極限の表現をOHPで紹介しながら，教科書に記載されている下記の定義と記号の解説を行った（田代・難波，2000）．

> 一般に関数 $y=f(x)$について，xがある値aにa以外の値をとりながら限りなく近づくとき，どんな近づき方をしても$f(x)$の値が一定の値Aに限りなく近づくならば，xがaに近づくとき関数$f(x)$はAに収束するといい，記号で$\lim_{x\to a} f(x)=A$または$f(x)\to A\ (x\to a)$と表す．Aを$x\to a$のときの$f(x)$の極限値という．

この解説の，特に定義の両側極限である「xがある値aにa以外の値をとりながら限りなく近づくとき，どんな近づき方をしても」は，生徒にとって分かりづらい表現である．しかし，本授業では，生徒達がTABLE機能で不連続になる前後の数値をかなり細かく調べた事をOHPやグラフ電卓の画面で示しながら説明した事により，両側極限の理解が通常の授業より良かったようである．

このように，生徒が数学的活動でインフォーマルに理解した考え方を活用して，それを数学的な概念や記号に置き換えていく事で，生徒とともに数学を創りあげていく授業が出来たと考える．

(2) 創造的かつ発展的な数学的活動

不連続な関数を作成する数学的活動では，生徒達は多くの関数を作成した．特に２つの課題（ $y=\frac{1}{x+1}$ と $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ ）を類推して作成したものが多かったが，その他にも分母・分子が２次以上，繁分数，二つの関数の加法，など，教科書等に掲載されている演習問題以外の関数が作成され，生徒の創造的な活動を窺うことができた．

また，生徒が発見した作成方法に関しては，類推による一般化（図3-1-8)，分子のn次への拡張(図3-1-9)，より高次な一般化(図3-1-10)，２つの関数の加法(図3-1-11)など発展的な考察を行ったことが分かった．

さらに，発展的な事例として，生徒が授業終了の２－３日後に自主的に提出したレポートを図3-1-12に示す．この生徒は，グラフ電卓は操作性が容易であることから筆者が考えもつかないような「穴」が二つできる繁分数関数を作成したが，その理由が理解できなかった．しかし，この生徒は自分が作成した繁分数関数の「穴」に興味・

関心を示したため，授業中に少しずつアドバイスをした結果，極限の計算とグラフ表現を使った自分なりの結論をレポートに記述した．レポート内容を分析すると，最初に $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2-16}{x-4}}{x}$ を計算してグラフが２次関数 $y=x^2+4x$ となることを代数的に確認している．次に，この計算過程に出てくる $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+4}{\dfrac{1}{x}}$ の分母 $\dfrac{1}{x}$ に着目して，分母 $\dfrac{1}{x}$ が $\lim_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ かつ $\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ であることから $x=0$ で「穴」があくとグラフ的に解釈している．さらに，$\lim_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{\dfrac{x-4}{x}}=x^2+4x=16+16=32$ を計算し，$x=4$ で「穴」があくと結論づけている．$x=4$ における「穴」の解釈は，授業中に学習した演習課題の適用であるのに対して，$x=0$ における「穴」の解釈は，$x=0$ 近辺を分数関数 $\dfrac{1}{x}$ のグラフの特徴を使ってグラフ的に解釈している．ことから，この生徒は授業で学習した内容以上のことを発展的に考察したと考えられる．

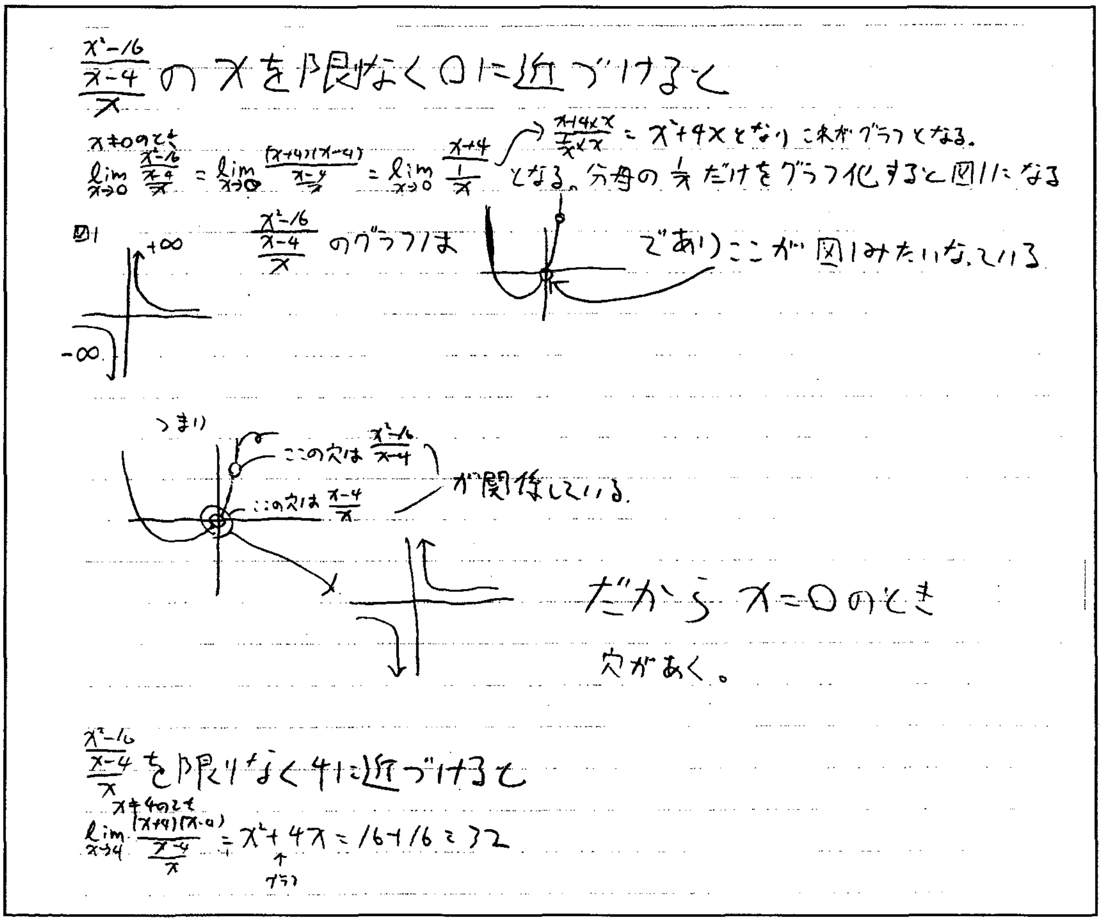


図 3-1-12．二つの「穴」があく繁分数関数の考察

(3) グラフ電卓の誤表示の克服

Dick T. P.（1992）は，Windowの設定によって分数関数の「穴」や漸近線が正しく表示されない障害を指摘している[8]．実際に，本稿の数学的活動では，生徒たちは連続に見える「穴」のグラフや双曲線が直線で結ばれる誤表示を沢山観察していた．しかし，生徒達はグラフ的な観察だけではなく，TABLE機能を使って数値的に「穴」や漸近線が生じることを確認したり，また，分数関数の方程式を変形して代数的に確認している生徒もいた．このように，グラフ電卓を使った数学的活動では，グラフ的表現の観察だけではなく，３つの表現を総合的に観察･検証する必要性が明らかになった．

(4) グラフ電卓の有効的な活用

グラフ電卓の簡易性・利便性により，生徒達は不連続な分数関数をグラフ的・数値的に実験・観察し，直感及び帰納的に類推した自らの考えを具体的に検証し，最終的には，代数的に一般化することができた．この結果，グラフ電卓は外的な活動と内的な活動を相互につなげる教具として有効であることが分かった．特に，分子のｎ次への拡張（図3-1-9）や２つの関数の加法（図3-1-11）は，類推等によって生徒が考えたとしても，グラフ電卓等のテクノロジーを活用しない数学的活動では検証することは困難であったと思われる．このように生徒が発展的に数学的活動を行ったのは，生徒とグラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を行いながら自らの課題を解決したものと考える．

９．まとめと課題

本研究の目的は，数学的活動を通して生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解する教材を開発し，その有効性を実証的に検証することである．そのために，授業では分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的・数値的に探究することを目的にグラフ電卓を活用した．

その結果，以下のことが明らかになった．

(1)分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的・数値的に探究する数学的活動を通して，生徒は極限の概念をインフォーマルに理解することができた．

(2)不連続な関数を作成する課題では，生徒は多くの関数を作成した．さらに，作成方法の考察では，創造的かつ発展的な考え方が見られるなど，生徒達は興味・関心を持って数学的活動を行っていた．

(3)グラフ電卓の誤表示に対して，生徒達はグラフ的な表現だけでなく，TABLE 機能を調べたり，分数関数の方程式を変形して代数的に確認するなど，３つの表現を総

[8] ２．２節（pp.75-77）参照．

合的に観察・検証することで，グラフ電卓の誤表示を克服したことが分かった．
(4)グラフ電卓は，観察・実験・検証が簡単にできるため，生徒の外的な活動と内的な活動をつなげる教具として有効であることが分かった．

具体的な操作を伴う数学的活動は,通常の授業より多くの時間を要する欠点がある．実際に，本研究で行った授業は，導入時において通常よりも２時間多い．しかし，数学的活動後の授業では，生徒達がインフォーマルに理解した極限の概念を数学的な定義と記号に置き換えながら授業を行ったため，通常の授業より理解が良かったようである．これにより知識注入型の授業ではなく，生徒達の考えを参考にしながら生徒とともに数学を創っていく授業が展開できたと考える．

引用文献・参考文献

1) Demana F., Waits B.K. and Clemens S.R.(1993). Precalculus Mathematics – A Graphing Approach - (Teacher's Edition / Third Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

2) Dick T. P. (1992). "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment", In Fey J.T. (Ed.), 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education, NCTM, pp. 145-157.

3) Finney R.L., Thomas G.B., Demana F. and Waits B.K. (1994). Calculus – Graphical, Numerical, Algebraic -. Addison-Wesley Publishing Company.

4) Hornsb J. and Lial M.L.(1999). A Graphical Approach to Precalculus – (Second Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

5) 文部省 (1999). 高等学校学習指導要領解説-数学編-. 実教出版.

6) Murdock J., Kamischke Ellen and Kamischke Eric(1998). Advanced Algebra Through Data Exploration – A Graphing Calculator Approach -. Key Curriculum Press.

7) NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. VA.

8) 佐伯昭彦，黒木伸明 (2004).「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 86 巻. 第９号. pp.13-20.

9) 田代嘉宏，難波完爾編 (2000). 新編 高専の数学２（第２版）. 森北出版. pp.29-30.

10) UCSMP (1998). Precalculus and Discrete Mathematics – (Second Edition). Scott Foresman Addison Wesley.

11) Vonder C. and Engebretsen A. (1996). "Friendly Windows for Graphing Calculators". *Mathematics Teacher*. Vol.89. No.6. pp.508-511.

巻末資料１：教材のワークシート（p.255）参照

３．２　単元の展開中における数学的活動
－ 極座標における正葉曲線の数学的活動 －

１．はじめに

２．２節において，テクノロジー活用の利点の一つとして，帰納的な数学的活動による規則・性質の発見について記述した[1]．この数学的活動には，①関数族の探究と②代数族の探究があり，我が国のグラフ電卓を活用した実践研究では，①関数族の探究の実践が多く，生徒が発見した規則・性質が多様で，かつ，オープンエンドアプローチ的な数学的活動が行われていることが分かった．しかし，生徒が発見した規則について，生徒自らの力で既習事項を使って規則が成り立つ理由を報告している実践研究が少ないことが明らかになった．

本研究では，単元の展開中における数学的活動の実践として，正葉曲線 $r = asinn\theta$ の規則を発見し，その規則が成り立つ理由を考察する数学的活動を実施した．授業では，グラフ電卓を活用した数学的活動を通して，極座標の概念を理解し極方程式のグラフが描けることと，極座標と直交座標との関連づけで極方程式の理解をより深めることを目的とした．ここでは，本授業の目的・方法，授業設計の視点，授業の展開，さらに，生徒が行った探究結果について報告する．

２．極座標学習の問題点

(1) 学習指導要領の問題点

まず最初に，学習指導要領の「数学Ｃ」の「いろいろな曲線」に記述された内容の取り扱いを参考に，学習指導要領が取り扱う極座標におけるテクノロジー活用についての問題点を考察する．高等学校で学習する極座標は，平成元年の指導要領の「数学Ｃ」の「いろいろな曲線」で初めて導入された．その指導要領における「媒介変数と極座標」の内容の取扱いでは，「コンピュータを活用するなどによっていろいろな曲線を観察，考察し，簡単な図形については実際に描けるようにする．」と記述されているように，コンピュータに表示されたグラフを観察する数学的活動を通して曲線を理解することが求められた（文部省，1989）．次に，平成 11 年度に改訂された指導要領においても従前と同様に「媒介変数と極座標」が取り扱われたが，その内容の取扱いでは「コンピュータ等の活用などによりいろいろな曲線をかき，観察する程度とする．」

[1] ２．２節（pp.58-60）を参照．

と記述され，従前の取扱いでの「考察する」と「簡単な図形が描ける」といった活動が削除された（文部省，1999）．このように，今回記述された「観察する程度とする」では，観察という外的な数学的活動は行われるが，直観，類推，帰納，演繹などの内的な数学的活動が軽視される危惧がある．

(2) 指導方法の問題点

極座標の定義は，生徒たちが中学校以来扱ってきた直交座標の考え方と異なるため，極座標は生徒にとって理解の困難な内容の1つである．例えば，極座標と直交座標との関連づけは重要であり，教科書では，極方程式 $r=2a\cos\theta\ \ (a>0)$ を直交座標の円の方程式 $(x-a)^2+y^2=a^2$ へと式変形するといった代数的表現による関連づけが行われているが，この関連づけは高度な数学的知識と技能が必要となる．これに対して，米国の教科書では，上記の代数的表現による関連づけに加えて，グラフ的表現による視覚的な関連づけが行われている（Germain-McCarthy Y., 1994; Anthony,1998; Sharon, 1998; Stewart, 2003）．つまり，直交座標 (x,y) の x 座標を極座標 (r,θ) の偏角 θ に対応させ，さらに，直交座標 (x,y) の y 座標の垂直ベクトルを極座標 (r,θ) の r の動径ベクトルとして幾何的に対応させることにより，極座標のグラフを直交座標のグラフに関連づける指導が行われている．例えば，極座標上に $r=a\cos\theta$ のグラフをかく場合，図 3-2-1 に示すように，直交座標 $y=a\cos x$ のグラフの特徴を視覚的に活用することによって円の概形を描くことができる．このように直交座標と極座標をグラフ的に関連づけることにより，生徒は直交座標で学習した関数グラフの既習事項を活用しながら極座標を視覚的に理解することが可能となる．

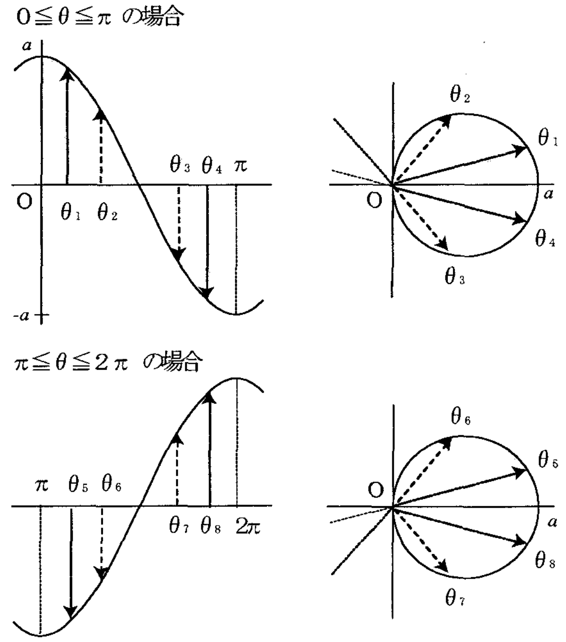


図 3-2-1．直交座標と極座標の視覚的な関連づけ

我が国においてもグラフ的表現による関連づけの実践研究が行われている．例えば，菊池（1987）による極方程式のグラフ説明器と，石崎（1995）による円柱アナモルフォーシス及びコンピュータグラフィックスで表示する円柱アナモルフォーシス変換教材ソフトが開発され実際に授業で活用された．これらの教具は，代数計算を使わずに極座標と直交座標を視覚的・直感的に関連づけることで極方程式の理解を深めるように考案されている．教具に必要な材料は，極方程式のグラフ説明器はラシャ紙と釣り糸，円柱アナモルフォーシスはジュースの缶とセロファンミラーであり，日常生活にある安価な材料で簡単に作成できる利点がある．さらに，円柱アナモルフォーシスは，歴史や美術との関連づけによる総合的学習への発展性がある．しかし，これらの先行研究では，極座標と直交座標との関連を視覚的に提示する手法について報告されているが，これらの教具を活用した数学的活動において，生徒が数学的内容（極座標と直交座標との関連）の理解をどのように深めていったかについては報告されていない．

３．授業の目的

極座標の概念を理解し極方程式のグラフが描けるようにする．さらに，グラフ電卓を活用した数学的活動を通して，極座標と直交座標との関連づけを気付かせることにより，極方程式の理解を深めることを目的とする．

４．授業の方法

1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，３年生 57 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2002 年 2 月
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．授業設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

三角関数は１年次で履修済みである．さらに，媒介変数は３年次で履修済みである．

(2) 正葉曲線を題材として選んだ理由

正葉曲線 $r = a\sin n\theta$ の規則は，n が偶数と奇数によって規則が異なるため，生徒に「驚き」と知的好奇心を引き起こし，生徒の数学的活動を促進すると考えた．さらに，正葉曲線は三角関数の既習事項との関連性が高く，特に三角関数の周期と正葉曲線の葉の数との関係を考察する課題が，生徒の実態からみて適切な難易度であると推測さ

れたので題材として選んだ．

(3) **教師の役割**

教師はファシリテータとして，生徒の主体的で活発な数学的活動を保証しつつ，数学的活動が放縦に流れないよう支援・介入した．さらに，生徒が発見した規則の中から，既習事項と関連が高いものを選択し授業を発展的に展開した．

６．授業の展開

(1) **第１時間目〜第２時間目（45 分×２：連続授業）**

・極座標の定義と用語について解説した．

・極座標をグラフ上にプロットする方法を練習し，さらに，直交座標を極座標で表わす計算方法と，その逆の計算方法について練習をした[2]．

・アルキメデスの螺線 $r=\dfrac{3}{\pi}\theta$，正葉曲線 $r=10\sin 2\theta$，カージオイド $r=5(1+\cos\theta)$ についての数表を生徒が作成し，求めた数表をもとにグラフを描いた．次に自分で描いたグラフをグラフ電卓で確認した．

・グラフの作成を早く終えた生徒に対する発展教材として，以下に示す正葉曲線の探究を行った．

> **探求**：正葉曲線 $r=10\sin n\theta$ の n にいろんな値をいれてグラフ電卓でグラフを描いてみよう．どんな規則があるだろうか．発見した規則とその理由をまとめなさい．

生徒が発見した規則で特に多かったのは「n が偶数の場合は葉が２n 枚で，奇数の場合は n 枚」であり，授業では規則の理由を生徒なりの考えで考察させた．しかし，生徒にとってこの規則の理由を見つけることが困難であることがわかったので「直交座標における $y=10\sin nx$ のグラフと，極座標における $r=10\sin n\theta$ とのグラフを関連づけて考えてみよう．」というヒントを与えて宿題とした．

(2) **第３時間目（約 25 分）**

生徒が発見した規則をクラス全体に紹介し，さらに，既習事項と関連づけながら規則が成り立つ理由を教師が解説した．

７．実践結果

(1) **多様な規則の発見**

[2] 極座標の動径 r が負の値の場合，原点に関して対称な方向に $|r|$ の動径をとるように指導した．

正葉曲線の宿題を提出したのは15名であったが，生徒が発見した規則は，あわせて12種類もあった．特に，一人で５種類の規則を発見した生徒がいるなど，１つの題材から多くの規則が発見されたことが分かった．また，15名の中に成績下位者も含まれており，普段の授業では見られない一面が見られた．

表3-2-1に，生徒が発見した規則を以下の４つのカテゴリーに従って示す．

・発見１：偶数と奇数の場合分けによる規則

・発見２：ｎが１以下の場合に着目して得られた規則

・発見３：グラフを描く順序の規則

・発見４：カージオイドとの関連に関する規則

表3-2-1．生徒が発見した規則の内容 [3]

分類	発見した規則の内容	人数
発見 1-1	ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である．	13
発見 1-2	ｎ＝０の場合はグラフが無くなり，ｎが負の整数の場合は発見1-1と同じ規則が成り立つ．	1
発見 1-3	ｎが奇数の場合は $0 \leq \theta \leq \pi$ と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のグラフが重なる．ｎが偶数の場合は重ならない．	8
発見 1-4	ｎが奇数の場合はｙ軸に関する線対称であり，偶数の場合はｘ軸とｙ軸の両方に関する線対称，及び，原点に関する点対称である．	4
発見 1-5	ｎが奇数の場合はグラフとｙ軸との交点があり，偶数の場合はｙ軸との交点がない．	4
	ｙ軸との交点は，負→正→負→正→…と繰り返す．	2
発見 1-6	ｎが奇数の場合は，ｘ軸でしきると，葉の枚数は上が $n/2+1$ を小数表記したときの小数部分を取り去ったを枚数で，下が $n/2$ 枚の小数点を切り捨てた枚数である．	1
発見 1-7	ｎが奇数の場合は，楕円（葉）ができる間隔は $2\pi/n$ である．	1
発見 1-8	最初に出てくる葉の頂点と始線の角度を θ とすると，次の頂点が出てくるのは，ｎが奇数の場合は 4θ で，偶数の場合は 2θ である．	1
発見 2-1	ｎが１よりも小さいとグラフはアルキメデスの螺線になる．	1
発見 2-2	$n=0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 0.6$ とすると，$n=0.3$ を境にしてｘ軸で終着するグラフの値が小さくなっていく．	1
発見 3-1	グラフを描く順序が直交座標における角の回転と逆である．	1
発見 4-1	$r=5(1+\cos n\theta)$ の場合は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ でｎ枚の円（葉）ができる．	1

発見1-1－発見1-8は，ｎが偶数と奇数の場合による規則であり，特に，発見1-1「ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である」を発見した学生は13名で最も多かった．発見1-2のようにｎ＝０と負の整数の場合を調べる生徒もいたが，探究課題では $r=10 sin\, n\theta$ のｎを正の整数と明記しなかったためである．発見1-3－発見

[3] 表１に記述してある規則の内容は，生徒が記述した規則をもとに筆者が要約したものである．

1-5 は，グラフの現象（葉の重なり方，対称性，軸との交点）に着目した規則である．これに対して，発見 1-1ー発見 1-2 と発見 1-6ー発見 1-8 は，グラフの現象から発見した規則（葉の枚数，葉の間隔の角度，葉の頂点の角度）を定式化して数学的に記述したものである．例えば，図 3-2-2 に示す発見 1-8 の規則は，「最初に出てくる葉の頂点と始線の角度を θ とすると，次の頂点が出てくる角度は，n が奇数の場合は 4θ で，偶数の場合は 2θ」といった発見である．この生徒のレポートには，n＝１ー６の６つの正葉曲線のグラフが描かれており，複数のグラフを観察することにより発見 1-8 の規則を帰納的に発見し定式化したと思われる．

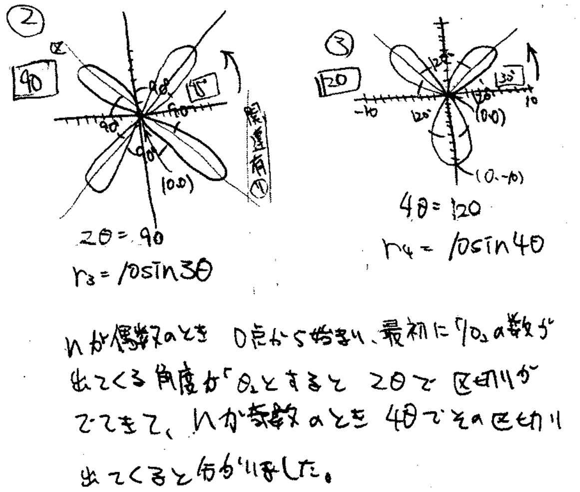


図 3-2-2．**角度の定式化におけるレポート例（一部）**[4]

発見 2-1 と発見 2-2 は，n に小数を代入した場合，グラフは正葉曲線ではなくアルキメデスの螺線に似たグラフが描かれたことを発見している（図 3-2-3）．

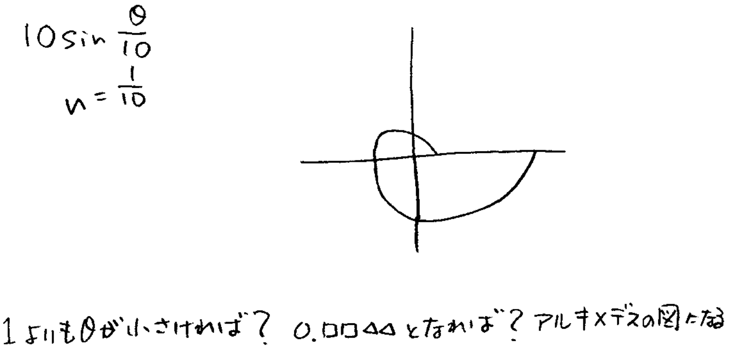


図 3-2-3．**正葉曲線がアルキメデスの螺旋になる発見**[5]

[4] 生徒のレポートのうち不必要な部分の削除や，記述の移動など，若干の変更を行った．
[5] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

発見 3-1 は，正葉曲線が描かれる順序を観察しており，この順序が直交座標における角の回転と逆であることを発見している．

発見 4-1 は，探究課題以外のカージオイドについての数学的活動であり，$r=5(1+\cos n\theta)$ が正葉曲線になることを発見している（図 3-2-4）．

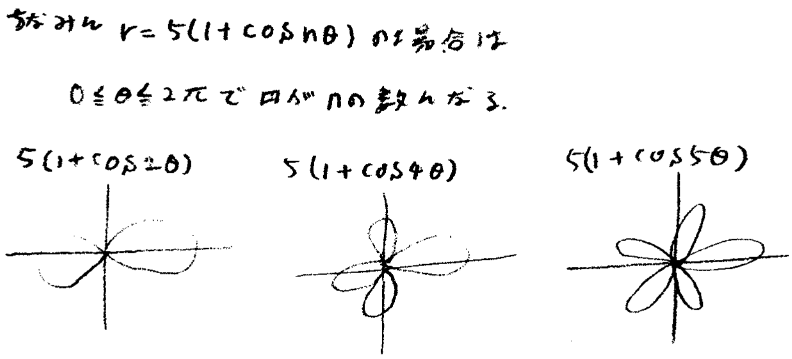


図 3-2-4. カージオイドが正葉曲線になる発見

(2) 数学的関連づけによる規則に関する理由の説明

生徒のレポートには，自ら発見した規則の理由について既習の数学を関連づけながら生徒なりの考え方で説明したものがあった．授業では，生徒が考えた説明方法をクラス全体で共有するために教師が OHP シートを使って解説した．さらに，生徒が説明できなかった規則の中から既習の数学的内容との関連性がある規則について，教師が解説を行った．ここでは，これらの数学的関連づけについて紹介する．

a．生徒自身による数学的関連づけ

［発見 1-1 を発見した生徒の説明方法］

図 3-2-5 は，発見 1-1「ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である」の理由を説明した生徒のレポート内容である．このレポート内容から，この生徒は以下のことを関係づけながら規則が成り立つ理由を説明していると考えられる．

・<u>直交座標と極座標の関連づけ</u>

図 3-2-5 の左上に直交座標 $y=10sin4x$ のグラフ，同様に，中央に $y=10sin3x$ のグラフが描かれていることから，この生徒は極座標のグラフと直交座標のグラフを関連づけて正葉曲線の規則の理由を説明していると考えられる．つまり，直交座標 (x,y) の x 座標を極座標 (r,θ) の偏角 θ，さらに，直交座標 (x,y) の y 座標の垂直ベクトルを極座標 (r,θ) の r の動径ベクトルとして幾何的に対応させて考察していると考えられる．

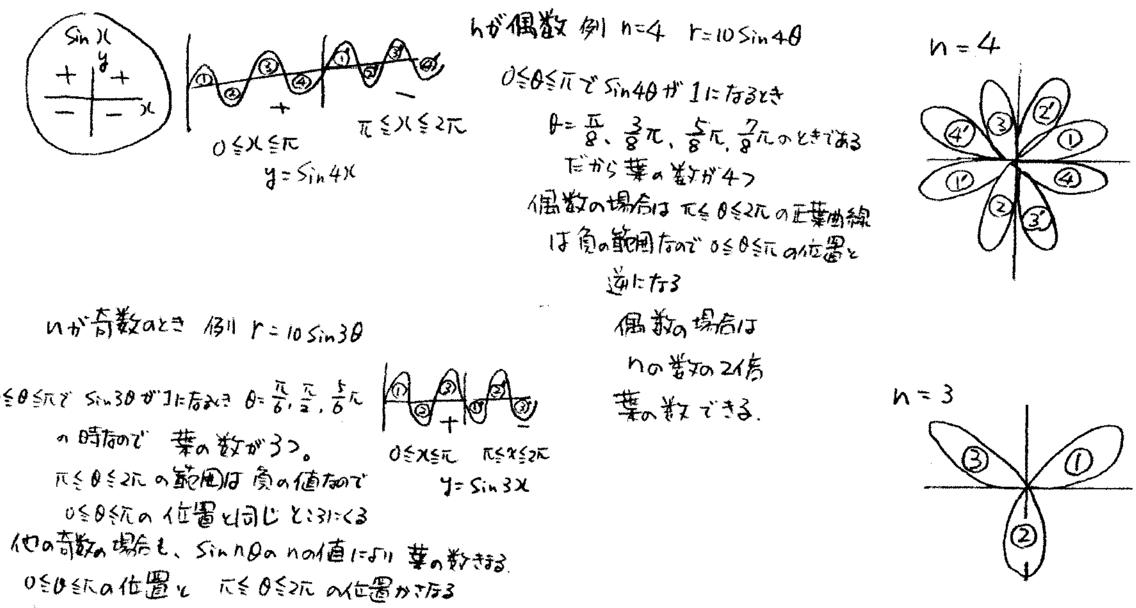


図 3-2-5．生徒の考えによる規則に関する理由の説明[6]

・直交座標のグラフ　$y=10\sin nx$ の特徴と分類

図 3-2-5 の中央上に記述されている「$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $\sin 4\theta$ が 1 になるとき $\theta=\frac{\pi}{8},\frac{3}{8}\pi,\frac{5}{8}\pi,\frac{7}{8}\pi$ のときである．だから葉の数が 4 つ」，さらに，図 3-2-5 の中央左に記述されている「$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $\sin 3\theta$ が 1 になるとき $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5}{6}\pi$ の時なので葉の数は 3 つ」は，直交座標 $y=10\sin nx$ のグラフの特徴から，$0\leqq\theta\leqq\pi$ での $\sin nx=\pm 1$ の解が n 個あることを求めている．これにより，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，正葉曲線の葉は，偶数・奇数ともに n 枚であることを結論づけていると考えられる．

・　$0\leqq\theta\leqq\pi$ と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ におけるグラフの関係

図 3-2-5 の左上の図から，この生徒は，直交座標の第 1 象限と第 2 象限を極座標の「正の範囲」，さらに，直交座標の第 3 象限と第 4 象限を極座標の「負の範囲」として定義して，極座標の $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ に関するグラフを $0\leqq\theta\leqq\pi$ のグラフと関係づけて考察したと考えられる．

例えば，図 3-2-5 の中央に記述された「偶数の場合は，$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の正葉曲線は負の範囲なので $0\leqq\theta\leqq\pi$ の位置と逆になる」では，直交座標 $y=10\sin 4x$ の $\pi\leqq x\leqq 2\pi$ における y 座標の値は $0\leqq x\leqq\pi$ と同じ値であることから，極座標 $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ のグラ

[6] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

フは負の範囲（ x 軸より下）に描かれるため，$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ における正葉曲線のグラフは，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のグラフと位置が逆（原点に関して点対称）になると結論づけている．

一方，nが奇数の場合は，図 3-2-5 の左下に記述された「$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲は負の値なので $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の位置と同じところにくる」では，直交座標 $y = 10\sin 3x$ の $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における y 座標の値は $0 \leqq x \leqq \pi$ と符号が異なることと，極座標 $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ における正葉曲線のグラフは正の範囲（ x 軸より上）に描かれることから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のグラフと重なると結論づけている．

・類推による一般化

図 3-2-5 の左下に記述された「他の奇数の場合も，$\sin n\theta$ のnの値により，葉の数きまる．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の位置と $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の位置かさなる．」では，n＝３以外の奇数の場合もn＝３と同様なことが成り立つと類推して一般化を行っている．また，nが偶数においても，奇数の場合と同様な一般化を行っている．

［発見 3-1 を発見した生徒の説明方法］

図 3-2-6 はグラフを描く順序についてのレポートであり，極座標 $r = 10\sin 2\theta$ と直交座標 $y = 10\sin 2x$ の両方のグラフが描かれており，生徒は正葉曲線が描かれる順序を直交座標のグラフと関連づけて考察していることが分かる．

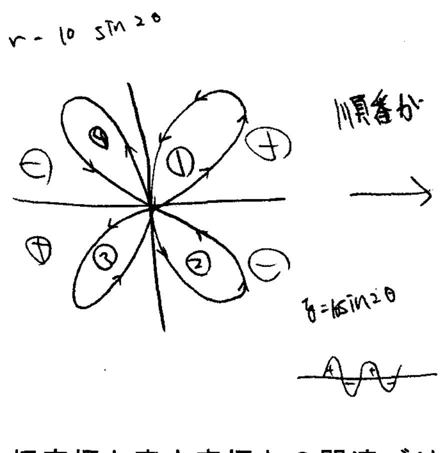


図 3-2-6. 極座標と直交座標との関連づけ（一部）

ｂ．教師の補助による数学的関連づけ

［発見 2-1 に対する教師の解説］

発見 2-1「nが１よりも小さいとグラフはアルキメデスの螺線になる．」の発見では，

$r = 10\sin 0.1\theta$ について三角関数の極限の公式 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を適用して，図 3-2-7 に示

すように式変形できることを教師が黒板で代数的に説明した．

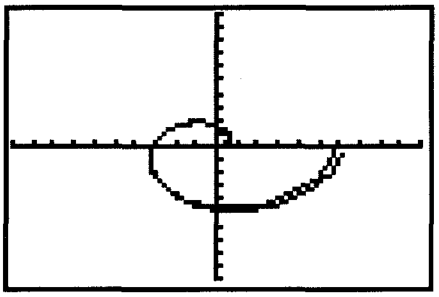
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 0.1\theta}{0.1\theta} = 1 \text{ であるから，}$$

$$\theta \to 0 \text{ において } \sin 0.1\theta \cong 0.1\theta$$

$$\therefore\ r = 10\sin 0.1\theta = 10 \times \sin 0.1\theta \cong 10 \times 0.1\theta = \theta$$

図 3-2-7. **極限の考えを活用した式変形**

また，グラフ電卓を使って，正葉曲線 $r_1 = 10sin0.1\theta$ とアルキメデスの螺線 $r_2 = \theta$ のグラフを同時に表示し，両方のグラフがほぼ一致することを視覚的に確認した（図 3-2-8 左）．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能を使って $r_1 = 10sin0.1\theta$ と $r_2 = \theta$ の値がほぼ一致することを数値的に確認した（図 3-2-8 右）．



θ	r1	r2
0	0	0
.1	.1	.1
.2	.19999	.2
.3	.29996	.3
.4	.39989	.4
.5	.49979	.5
.6	.59964	.6

θ=0

図 3-2-8. **グラフと数表による確認**

［発見 4-1 に対する教師の解説］

発見 4-1 「$r = 5(1+\cos n\theta)$ の場合は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ で n 枚の円（葉）ができる．」については，図 3-2-9 に示すように半角の公式で式変形して得られた $r = 10\cos^2\theta$ のグラフを直交座標 $y = 10\cos^2 x$ のグラフと関連づけて解説した．

☆ カージオイドが正葉曲線になる？

式変形：$r = 5(1+\cos 4\theta) = 5 \times 2\cos^2 2\theta = 10\cos^2 2\theta$

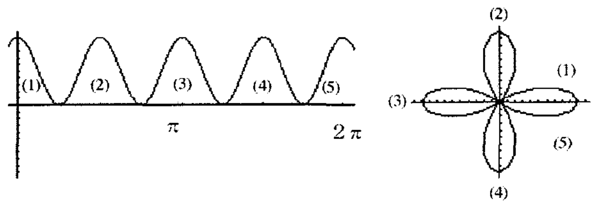


図 3-2-9. **カージオイドが正葉曲線になる理由**

８．考察

(1) 主体的な数学的活動による多様な規則の発見

グラフ電卓を活用した数学的活動によって多くの規則が発見されたことから，生徒達が主体的で創造的な活動を行ったことが確認できた．さらに，発見 1-5～発見 1-8，発見 2-1～発見 2-2，発見 4-1 は，授業前に教師が予想していなかった発見であり，生徒達の正葉曲線の数学的活動に対する興味・関心が高かったことが分かった．

特に，図 3-2-10 の発見 2-2「$n=0.1,0.2,0.3,\cdots,0.6$ とすると，$n=0.3$ を境にして x 軸で終着するグラフの値が小さくなっていった.」は，偏角 $\theta=2\pi$ における動径 r の値が $n=0.3$ の場合で最大となり，それ以降の場合は動径 r の値が小さくなることを，グラフ電卓の結果から視覚的に発見した規則である．この規則は，学力の低い生徒が発見した独創的な規則であり，普段の授業では見られない生徒の一面が見られた．さらに，この規則は６つのグラフを同時に表示して観察した結果によって発見されており，グラフ電卓の活用がなければ，発見されなかった規則であったと言える．しかし，動径 r の値が最大となる正しい解は $n=0.25$ であり，生徒が帰納的に発見した規則が正しいかどうかを数学的に検証する必要があるが，本授業では時間の関係上取り扱わなかった．

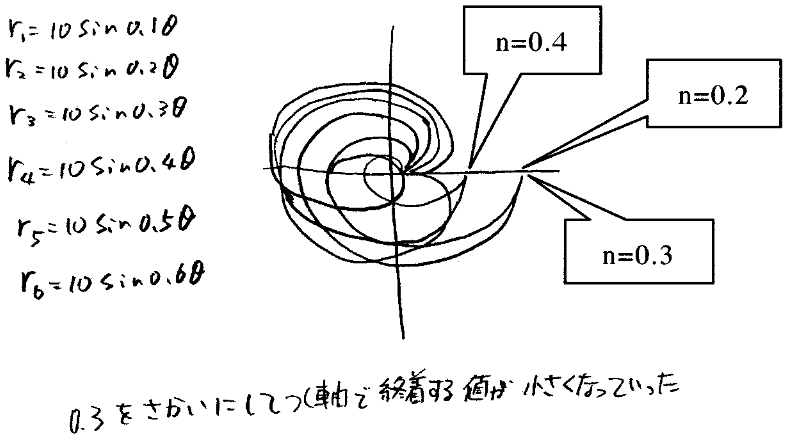


図 3-2-10. 学力の低い生徒の独創的な発見[7]

(2) 外的活動と内的活動の相互作用

生徒達は，グラフ電卓に表示された $r=10sin\,n\theta$ のグラフを観察する外的活動を通して，n が奇数と偶数によりグラフの概形が異なることを発見した．さらに，内的活動としての類推を行うことで，規則が奇数と偶数によって異なる仮説をたて，最終的にグラフ電卓を使って仮説を検証しながら帰納的に規則を一般化したと考える．グラ

[7] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

フ電卓が外的な活動の観察だけではなく仮説の検証等にも活用されたのは，グラフ電卓の即時性・簡易性によるものであり，グラフ電卓は生徒達の外的活動と内的活動の相互作用を促進させたと考える．

しかし，自ら発見した規則が真であることを考察した生徒が少なかったことから，生徒達に規則の真偽を考察し説明する必要性を感じさせる指導が今後の課題となった．この問題に関しては，オープンエンドアプローチの実践である島田（1995）の水槽問題でも同様な課題が報告されている．

(3) 既習事項との関連づけ

教師のアドバイスにより，僅か２名ではあるが，生徒は自らの力で極座標を直交座標の既習事項と関連づけることができた．これらの生徒の説明方法を教師が OHP シートでクラス全体に解説したところ，生徒達は興味・関心を持って解説を聞き，規則が成り立つ理由が極座標と直交座標との関連づけによって簡単に説明できることを納得していたようである．さらに補足説明として，図 3-2-1 のようにグラフ的に極座標と直交座標との関連づけを説明した．その結果，この数学的活動後に行った「極方程式による図形の面積や曲線の長さ」の授業では，直交座標のグラフをもとに極方程式のグラフをイメージしながら積分計算で得られた結果を視覚的に確認するなど，正葉曲線の数学的活動で得た知識を活用する態度が見られた．

さらに，正葉曲線の探究課題は，直交座標と極座標との関連づけ以外にも，三角関数の周期性，半角の公式，三角関数の極限などの既習事項との関連性が高く，授業が発展的に展開することが分かった．これらの結果より，本教材における数学的活動は，既習の知識・技能を総合的に活用する機会を生徒に与えたと考える．

(4) グラフ電卓の有効性と課題

本数学的活動で発見された規則が多様であったこと，及び，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づける役割を果たしたことにより，グラフ電卓は本課題の数学的活動に有効な教具であったことが分かった．これは，生徒の興味・関心を容易にかつ瞬時に実験・観察・検証できるグラフ電卓の即時性・簡易性に大きな要因があると考える．このように生徒が外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけた数学的活動を行ったのは，生徒とグラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を繰り返しながら自らの課題を解決した結果であると考える．

一方，生徒のレポートの中に「$r=10\,sin100\theta$ を入力すると $r=10\,sin4\theta$ と同じ図が出てきたので不思議だと思いました．」があったが，これはグラフ電卓の性能による誤っ

たグラフ表示で，数学的活動を行う際に注意すべき課題であることが分かった[8].

９．まとめと課題

本研究の目的は，グラフ電卓を活用した極座標の正葉曲線に関する数学的活動において，生徒が発見した多様な規則を積極的に活用し，かつ，既習の数学的知識に関連づける授業を行い，生徒の数学的活動の過程から得られた知見を明らかにすることであった．そのために，正葉曲線の数学的活動で生徒が実際に記述したレポート内容を分析することで教材の有効性を考察した．その結果，以下のことが観察された．

・主体的な数学的活動によって生徒は多様な規則を発見した．
・数学的活動において外的活動と内的活動を相互に関連づける活動が見られた．
・発見した規則が成り立つ理由を考察し説明することにより，既習の知識・技能を総合的に活用する機会を生徒に与える事ができた．
・グラフ電卓は本課題の数学的活動に有効なパートナーとなることが分かった．

今後の課題として，(1)生徒達が発見した規則が真であることを考察し説明する必要性を生徒に感じさせる指導方法の開発と，(2)グラフ電卓の性能によって誤ったグラフが表示された場合の対応，の二点が明らかになった．

8　Hansen（1994）の実践では，グラフ電卓に誤って表示されたグラフを逆利用して周期関数の性質とグラフ電卓の液晶画面の離散的性質を探究させている．また，佐伯・黒木（2004a）では，上記の誤表示の原因を生徒自身の力で解明した実践例を紹介している．詳しくは，２．２節（pp.81-83）参照．

引用文献・参考文献

1) Anthony L. P. *et al.* (1998). Precalculus and Discrete Mathematics – Second Edition. UCSMP. Scott Foresman Addison Wesley. pp.493-506.

2) Germain-McCarthy Y. (1994). "Demystifying Polar Graphing". *Mathematics Teacher*. Vol.87. No.9. pp.728-735.

3) Hansen W. (1994). "Using Graphing Misrepresentation to Stimulate Student Interest". *Mathematics Teacher*. Vol.87. No.3. pp.202-205.

4) 石崎学 (1995).「数学科における生徒の探究心を養う指導法の研究-感動をよび起こす教材ソフトの開発と実践-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 3 号. pp.2-10.

5) 菊池宏 (1987).「極方程式のグラフ説明器」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 69 巻. 第 9 号. pp.20-23.

6) 文部省 (1989). 高等学校学習指導要領解説-数学編・理数編-. ぎょうせい.

7) 文部省 (1999). 高等学校学習指導要領解説-数学編・理数編-. 実教出版.

8) 佐伯昭彦, 礒田正美, 清水克彦編著 (1997). テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー. 明治図書.

9) 佐伯昭彦, 黒木伸明 (2004a).「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第 28 回年会論文集, Vol.28. pp.377-378.

10) 佐伯昭彦, 黒木伸明 (2004b).「グラフ電卓を活用した極座標における正葉曲線に関する数学的活動とその有効性」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.28. No.5. pp.325-334.

11) Sharon L. S. *et al.* (1998). Functions, Statistics, and Trigonometry – Second Edition. UCSMP. Scott Foresman Addison Wesley. pp.820-832.

12) 島田茂 (1995). 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ -授業改善への新しい提案-. 東洋館出版社. pp.9-10.

13) Stewart J. (2003). Calculus -fifth edition-. Brooks/Cole. pp.705-715.

巻末資料２：教材のワークシート（pp.256-257）参照

３．３　単元のまとめにおける数学的活動
－３次関数のグラフの種類を探究する数学的活動－

１．はじめに

単元のまとめにおける数学的活動として，３次関数のグラフの種類を探究する数学的活動を行った．この数学的活動は，単元「関数の増減」で増減表を用いて整関数（主に３次関数)のグラフを描く学習を行った後に,学習した内容の定着を図るとともに,理解をさらに深めるための発展的な学習として取り扱った．課題は，３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$　$(a>0)$の各係数にいろんな数字を設定した関数をグラフ電卓に入力し,表示された複数のグラフを観察することでグラフの種類を分類する関数族[1]の数学的活動であり，冬休みの宿題として生徒に与えた．

ここでは，本課題における数学的活動の目的・方法，教材開発の視点と展開例，さらに生徒が行った探究結果について報告する．

２．３次関数のグラフの特徴を探究する数学的活動

３次関数のグラフの特徴を探究する数学的活動について，教科書で取り扱われている代表的な方法と,実践的な先行研究で報告されたオープンな方法についてまとめる．

(1) 教科書における数学的活動

金沢工業高等専門学校が使用している教科書[2]「新編　高専の数学２」の２章「微分法　§４．関数の増減」では，微分係数の符号と関数の増減の関係から増減表（関数の値の増減と極大・極小）を作成し，それを利用してグラフの概形を描く学習が中心となっている（田代・難波，2000)．教科書で取り扱われている関数は，２次関数，３次関数と４次関数であり，生徒は与えられた関数のグラフを上記の手続きに従って描くだけに終わっている．この単元を学習する前に学習する関数の授業[3]では，方程式の各係数とグラフの特徴（グラフの形状や平行移動など）との関係を学習する．しかし，この単元で初めて取り扱う３次関数や４次関数は，グラフを描く手続きを正確に実行するだけで，それぞれの関数の特徴を調べることはない[4]．

[1] ２．２節（pp.58-60）を参照．

[2] 高等専門学校用の教科書会社は少なく，金沢高専がこれまでに取り扱った教科書は，(1)森北出版株式会社と(2)大日本図書株式会社の２社である．

[3] １年次に，２次関数，分数関数，べき乗関数，指数関数，対数関数，三角関数を学習する．

[4] 大日本図書の教科書「新訂　微分積分Ｉ」においても，ほぼ同様な内容である(斎藤・高遠，2003)．

これに対して，高等学校の教科書では，３次関数のグラフの特徴を取り扱った解説及び問題は，増減表を使ってグラフの概形を描く学習後に取り扱われており，それらは以下の４つに分類することができる．

1) 極値をもつ条件の解説

図 3-3-1 は，桐原書店が出版する教科書「高等学校 数学Ⅱ」に記載された一部である．この教科書では，３次関数のグラフが極値をもつ条件について，導関数である２次関数の実数解の個数と増減表を関連づけて説明している（寺田，1998）．

●極値をもつ条件

$a > 0$ のとき，３次関数

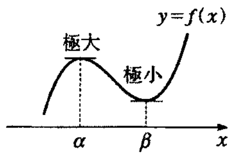
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

のグラフの形は次の３つに分類できる。

(1)　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

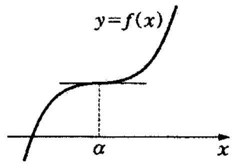
が２つの解 α，β（$\alpha < \beta$）をもつとき，$f'(x)$ の符号変化は次のようになり；極大値と極小値をもつ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



(2)　$f'(x) = 0$ が重解 α をもつとき，$f'(x)$ の符号は変化しないので，極値をもたない。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗



(3)　$f'(x) = 0$ が解をもたないとき，極値をもたない。

x	$\cdots$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

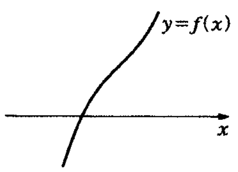


図 3-3-1．３次関数が極値をもつ条件についての教科書の解説例

2) 係数の値を求める問題

与えられた極値を満たすように３次関数の係数を求める問題として，「$f(x) = ax^3 + 3bx^2 - 9x + 4$ が $x = -1$ で極大値，$x = 3$ で極小値をもつとき，定数 a，b の値と極値を求めよ．」という問題がある．この問題を解くには，「関数 $f(x)$ が $x = a$

で極値をもつ⇒ $f'(a)=0$」といった知識と，それによって得られた連立方程式を解く技能が必要である．

3) 係数の範囲を求める問題

与えられた３次関数が極値をもつように係数の範囲を求める問題として，「$f(x)=x^3+3x^2+ax-1$が極値を持つように定数 a の値の範囲を求めよ．」という問題がある．この問題を解くには，導関数である２次関数の解が異なる２つの実数を持つという知識と，２次関数の判別式を計算する技能が必要である．

4) グラフの特徴を証明する問題

与えられた３次関数が特定の特徴をもつことを証明する問題として，「$f(x)=x^3-3x^2+4x$は常に増加することを示せ．」という問題がある．この問題を解くには，導関数である２次関数が実数解を持たないという知識と，２次関数の判別式を計算する技能が必要である．

上記にあげた４種類の解説および問題は，増減表を使ってグラフの概形を描く学習の応用として適切な問題である．しかし，これらの解説及び問題で行われる生徒の数学的活動を，島田（1995）が示す数学的活動の模式図を参考に考察すると，1)の解説は,「e. 数学の理論」で記述された内容を生徒が読んで理解する活動であり，さらに，2)ー4)の問題は,「e. 数学の理論」→「g. f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化)」→「j. 結論」の過程を通して問題解決するクローズドな学習であると言える．しかも，2)ー4)の問題は，それぞれの問題を総合的にまとめることはなく，個々の問題を解決することのみで終わってしまう場合が多い．

一方，加藤（1994）が，微分法「方程式・不等式の応用」[5]の単元を学習した生徒45名に行った調査「３次関数のグラフは，どのような形のものが思い浮かぶであろうか．以下に，何種類あるかあげて下さい．」では，図 3-3-2 に示すように，極値を持つグラフのパターン(a)の概形を描いた生徒が 98％であった結果が得られた[6]．さらに，２種類の概形を描いた生徒は，パターン(a)とパターン(b)が 12 名，パターン(a)とパターン(c)が１名で，３種類の概形を描いた生徒はいなかった．この調査結果から，教科書で取り扱っている問題では，個々の問題を解く技能を高めることは出来るが，それぞれの問題を総合的に考察することを行なわないため，生徒は３次関数の問題で良く出題される(a)の概形しか記憶に残らないのだと考えられる．

---

[5] 昭和 53 年改訂の指導要領に基づいた教科書「三訂版 高等学校 新編 基礎解析」(数研出版）を使用している．

[6] 本節では，３次関数の種類を図 3-3-2 に示すパターン(a)ー(c)として表わす．

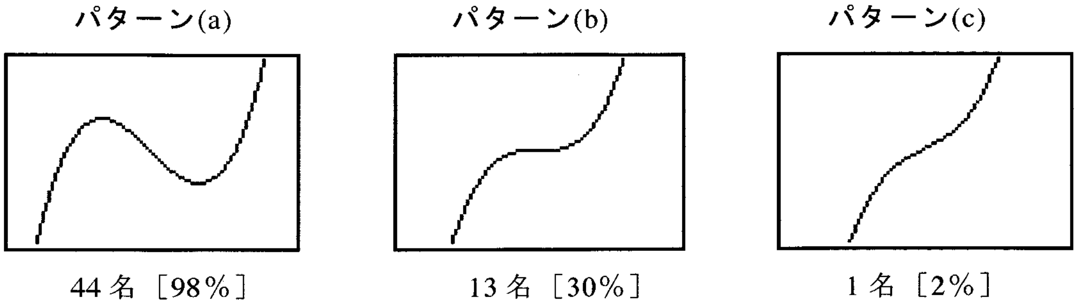


図 3-3-2. ３次関数のグラフの概形に関する予想結果

(2) 先行研究で実践された数学的活動

ａ．微分の単元以前に実践された数学的活動

①梅野（2004）の実践

- **課題**：$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，a,b,c がどのようなときに，どのようなグラフになるか．各自の考察結果をまとめて提出せよ．
- **学習形態**：生徒主体による数学的活動である．1ヶ月間の考察期間で，生徒は考察結果をレポートで提出した．
- **対象生徒**：高等専門学校1年生
- **使用教具**：グラフ電卓（TI-89）
- **実践結果**：教師の意図は，グラフ電卓に表示されたグラフを観察することで，a,b,c の値が x 軸との共有点であることに気づかせ，a,b,c の値とグラフのタイプを分類することであったが，この意図に対して，２名の生徒が未学習である極値を求める式を発見した．例えば，「$\alpha<0$ のとき $y=x^3+\alpha x$ の極小値は $x=\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$ である」を発見した生徒は，$\alpha=-1,-2,-3$ の事例について，グラフ電卓の機能から得られた極小値の数値的結果とグラフとを関連づけて観察する活動から，生徒は自分なりの仮説（極小値が $x=\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$ である）をたて，その仮説が正しいことを数値的に検証した．しかし，この結論を数学的に検証するには微分の知識が必要であるため，生徒は自分の仮説を数学的に検証できなかったが，この数学的活動で得られた発見は微分の学習につながる可能性を示している．

②公庄（1999）の実践

- **課題**：３次関数のグラフの形を分類せよ．
- **学習形態**：生徒主体による数学的活動である．生徒は考察結果をレポートで提出した．

・**対象生徒**：高等学校２年生

・**使用教具**：グラフ電卓（TI-92）

・**実践結果**：高次方程式の学習後に行われた数学的活動であり，高次不等式の導入として，グラフ電卓に表示されたグラフを観察することで，３次関数のグラフの概形を考察することを目的としている．この実践では，生徒が発見した規則は多様で，その規則が成り立つ理由を記述したレポートも数学的に優れているものが多い．以下にそれらの例を簡単に示す．

1) <u>実数解の個数とグラフの概形の関係</u>

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ として，

［1］ α,β,γ が実数のときはx軸と３回交わる．

［2］ α,β,γ のうち１つだけが実数のときはx軸と１回交わる．

［3］ α,β,γ が実数で重解のときはx軸と２回交わる．

［4］ α,β,γ が実数で３重解のときはx軸と１回交わる．

以上の４つの場合分けと，aの正負の符号の組み合わせから，この生徒は８種類と結論づけている．

一方，同様な考察をした生徒のレポートの中には，不適切な Window 設定による不完全に表示されたグラフ（$y = x^3 + 80x^2 - 90x + 50$が２次関数のグラフに似ている）を正しく再表示した事例があった．その生徒は，方程式$x^3 + 80x^2 - 90x + 50 = 0$の解を計算した結果，実数解が１つであることからグラフはx軸と必ず１回交わると考え，Window の範囲を拡大することでグラフ全体を表示し，上記［2］の仮説を検証した（図 3-3-3）．

不適切な Window 設定による不完全に表示されたグラフの誤解は，テクノロジーを活用する際に十分に配慮すべき課題であるが，上記の生徒のレポートから，関数のグラフの概形パターンの理解は，このような誤解を回避する１つの解決方法を示唆していると考えられる．

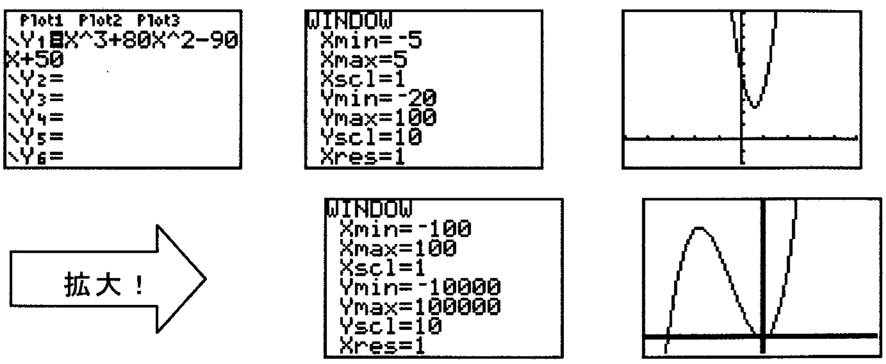


図 3-3-3．不適切な Window 設定による不完全なグラフの修正

2) 各因数の符号とグラフの概形の関係

$y=x^3$ を基準として「ゆがみのない形」(極値のないパターン(b)のグラフ：図 3-3-4 の左）と「ゆがんだ形」（極値のあるパターン(a)のグラフ：図 3-3-4 の右）の２種類に分類している．生徒の分類方法は，以下の通りである．

[1] $y=x^3+d$ は y 軸方向の平行移動で「ゆがみのない形」となる．

[2] $y=ax^3$ $(a>0)$ はグラフの幅に関係するので「ゆがみのない形」となる．

[3] $y=x^3+bx^2=x^2(x+b)$ は，各因数の符号を調べた結果，bの符号に関わらず「ゆがんだ形」となる．

[4] $y=x^3+cx=x(x^2+c)$ は，$c>0$の場合 x^2+cの符号は必ず正なのでグラフはxの符号に依存するため「ゆがみのない形」，$c<0$の場合 x^2+cと xの符号の組み合わせによって正にも負にもなるので「ゆがんだ形」となる．

この生徒が行った分類方法は正しいが，[3] と [4] での因数の符号による分類は，数学的な厳密性に欠ける．しかし，二次不等式で学習した因数の符号を調べる方法を活用したことは評価できる．

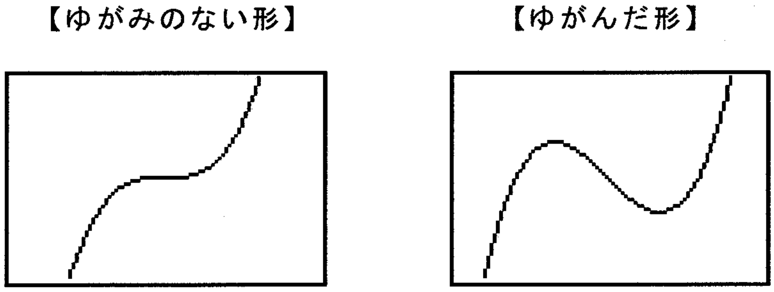


図 3-3-4．極値に関するグラフの分類

3) ２次関数の実数解とx軸との共有点の利用

$y=ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)$ として，$y=ax^2+bx+c$の実数解と x軸との共有点が図 3-3-5 の様に分類できることから，それぞれの因数であるxと $y=ax^2+bx+c$の符号の組み合わせを考察して，実数解が２つある場合は極値があるグラフ，その他は極値がないグラフに分類できると結論づけた．

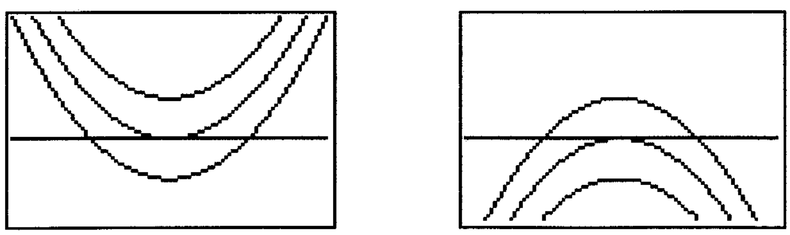


図 3-3-5．２次関数の実数解とx軸との共有点

4) ２次関数の標準形の応用

$y = a(x-p)^3 + q$ について，２次関数の移動の性質が成り立つことを，４つの事例をもとにグラフと TABLE 機能でグラフ的に数値的に検証した．

以上のように，公庄の実践では，生徒が発見した規則は多様で，その規則が成り立つ理由を記述したレポート内容も数学的に優れている．

b．増減表の導入として実践された数学的活動

①吉田（1997）の実践

- **目標**：３次関数のグラフのイメージの習得と，１次関数，２次関数と対比することを通して，奇関数的イメージの形成を図る．
- **学習形態**：生徒の活動や意見を主体とした教師と生徒の対話形式による数学的活動である．
- **対象生徒**：高等学校２年生
- **使用教具**：グラフ電卓（fx-9700GE）．生徒が使用するグラフ電卓はコンピュータに接続されており，ネットワークの双方向通信により一人の生徒のグラフ画面がクラス全体で共有することができる．
- **実践結果**：生徒に３次関数のグラフを自由に作成させグラフの概形を観察した．教師は，生徒の作成したグラフの中から不適切な Window 設定でグラフ全体が見えない事例を取り上げ，３次関数のグラフとして正しいかどうかを議論し，さらに，Window 設定を変更する活動を通して，３次関数のグラフのイメージを視覚的に把握した．また，微分係数を算出する機能を利用して，微分係数の値の変化とグラフの増減との関係を探究した．このように，グラフ電卓の機能を試行錯誤に操作しながら，生徒は３次関数のグラフのイメージを帰納的に掴んだ．この活動後に従来どおりの増減表を学習した結果，グラフ電卓で掴んだグラフのイメージが増減表の学習に効果的であったことが生徒のアンケートから明らかになった．

c．増減表の学習中に実践された数学的活動

①坂本（1997）の実践

- **課題**：$y = k(x-a)(x-b)(x-c)$のグラフ（$a<b<c$）を描画したとき，極値を与えるxは，グラフの中ではどのような値であろうか．
- **学習形態**：生徒の活動や意見を主体とした教師と生徒の対話形式による数学的活動である．
- **対象生徒**：高等学校２年生
- **使用教具**：コンピュータ（プログラムは生徒が作成）

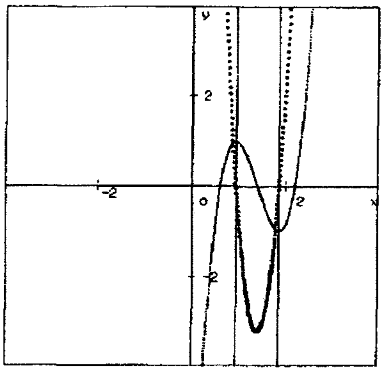


図 3-3-6．関数と導関数のグラフ

・**実践結果**：コンピュータに描画された３次関数のグラフを観察する活動中に，生徒から「極値はx軸との交点の中点である」との仮説が出てきた．生徒達はグラフ的に実験・検証し，この仮説が正しくないことを実証した．次に教師が微分係数を基に導関数のグラフを描画することを指示したところ，新たな仮説「導関数がx軸と交わる点のx座標の値が極値を与えるxである」が得られ，生徒達全員がコンピュータ上でこの仮説の正当性を実験・検証した（図 3-3-6[7]）．証明については，教師が教科書にあるような説明を行ったところ，コンピュータを用いないで指導した時と比較して，コンピュータを用いた生徒の定着度が良かった結果が得られた．

ｄ．増減表の学習後のトピックとして実践された数学的活動

①加藤（1994）の実践

・**課題１**：３次関数のグラフはどんな形のものがあるだろうか．グラフ電卓を用いて観察しよう．比較しやすくするために３次の係数は１にしよう．

・**課題２**：課題１では，いろいろな３次関数のグラフを見ましたが，これらを何種類かにグループ分けすることが出来ますか．また，そのグループ分けの基準は何ですか．

・**学習形態**：ワークシートに従って生徒主体による数学的活動が行われ，授業の後半に，教師が生徒の観察や考察結果を取り上げ，クラス全体で議論しながら結論をまとめる学習形態である．

・**対象生徒**：高等学校２年生 45 名

・**使用教具**：グラフ電卓（TI-81）

・**実践結果**：図 3-3-2[8]に示したように，この課題を行う前に３次関数のグラフの概形を描かせた結果，極値をもつグラフの概形のみを知っていた生徒が 31 名であり，２つ以上の概形を知っていた生徒は 13 名のみであった．しかし，グラフ電卓を使って３次関数のグラフを観察した結果，新しいグラフの概形を発見した生徒は 38 名であり，この結果から，グラフ電卓を活用した数学的活動では，生徒の「観察（Observation)」活動に効果があったことが明らかになった．次に，課題２におい

---
[7] 図 3-3-6 は，坂本（1997）より引用した．
[8] P.156 を参照．

て，分類の基準を「同定（Identification)」した生徒は１名のみで，分類した結果を数学的に検証することは授業時間の関係で出来なかった[9]．この実践における「観察（Observation)」の活動は，生徒にとってオープンな活動であったために，限られた授業時間内で教師の意図する数学的活動が行えなかったことが課題として明らかになった．

以上，４つの実践例を示したが，どの実践も生徒の考え方が主体となった数学的活動で，生徒たちが発見した性質や仮説は多様であることが分かった．しかし，生徒が発見した性質や仮説の検証を生徒自身が数学的に検証した実践は，梅野（2004）と公庄（1999）のみである．

このため，本研究では，増減表を学習した生徒を対象に３次関数のグラフの種類を調べる課題を与え，生徒が提出したレポートをもとに，生徒が数学的活動で発見した性質及び仮説の分類を行った．さらに，生徒自身が行った仮説に対する数学的な検証方法についても分析した．

３．数学的活動の目的

微分の単元のまとめとして，３次関数のグラフの種類を調べる数学的活動を通して，増減表と極値の理解の定着を図るとともに，３次関数のグラフの種類や性質を生徒が主体的に発見し，数学的に検証することを数学的活動の目的とする．

４．数学的活動の方法

1) 授業形態：冬休みの宿題としての数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生 80 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期間：2003 年 12 月～2004 年 1 月の冬休み
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．教材設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

整関数の導関数を求め，微分係数の符号をもとにグラフの増減と極値を表した増減表を作成し，グラフを概形を描くことができる．さらに，定義域が限定されている場合の最大値と最小値を求めることができる．

[9] ここで示されている「観察（Observation)」と「同定（Identification)」は，Leinbach L. C.（1991）が指摘する実験室アプローチの五つの活動の中の二つを意味している．

(2) 本教材のねらい

本教材のねらいは，３次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフに関して，生徒が係数を自由に定めてグラフ電卓に表示し，複数のグラフを観察・実験する数学的活動を通して３次関数のグラフの種類とその性質を考察することである．この関数族の探究[10]は，梅野（2004)，公庄（1999)，吉田（1997）の数学的活動と同じである．

Banchoff（1991）は，関数族の探究を「実例の族の探究（Investigating Families of Examples)」として，その有効性を次のように述べている．

> 「(テクノロジーを活用した）実験室的経験は，無関係な事例の集まりを取り扱うのではなく，むしろ実例の族を取り扱う方が特に効果的であることが分かった．[11]」（p.5）

また，Hector（1992）は，関数族の探究によって，生徒は代数的表現とグラフ的表現を関連づけながら初等関数の規則・性質を豊富に経験することができ，さらに，その規則を認識・理解することは，後に学習する微分積分の概念（極限，連続，微分，曲線の面積など)をグラフ的に導く基盤を生徒に形成することができると述べている．

(3) グラフ電卓活用の留意点

本教材では，グラフ電卓の活用について以下の２点に留意して教材開発を行った．

- 公庄（1999)，吉田（1997）の実践に見られるように，不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解[12]を回避する方法として，グラフ電卓に表示されたグラフの形が正しいかどうかを既習の増減表で確認することを生徒に求めた．
- 坂本（1997）の実践に見られるように，３次関数と導関数のグラフをグラフ電卓の同一座標平面上に同時に表示し観察することを生徒に求めた．これにより，関数の増減・極値と導関数の符号との関係を視覚的に発見する切掛けを生徒に与えることができる．なお，この手法は，Fey（1987）と一松（1995）の著書にも紹介されている．

---

[10] 関数族の探究の詳細に関しては，２．２節（pp.58-60）を参照．なお，「関数族の探究」の用語は，磯田（1997)，永井（1997）の文献から採用した．

[11] カッコ内の文章は筆者が加筆した．

[12] 不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解に関しては，２．２節（pp.72-83）を参照．

６．教材の内容（展開）

図 3-3-7 は，生徒に与えた本課題の縮小コピーである．課題１では，グラフ電卓に表示されたグラフが不完全でないことを確かめるために，増減表を書くように指示した．さらに，関数の増減・極値と導関数の符号との関係を視覚的に探究するために，３次関数と導関数をグラフ電卓の同一座標平面上に同時に表示したグラフを描くように指示した．また，課題２では，課題１で得られた結論とその理由，さらに，この課題から分かったこと気づいたことを記述するように求めた．この課題２は，課題１での結論以外に発見したことを記述するためのオープンな課題である．

【冬休みの課題】

クラス：　　　　名前：

課題１． 三次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$ は，何種類のグラフの形があるのだろうか？　グラフ電卓を使って沢山のグラフを描いて，三次関数のグラフは何種類あるかを調べてみよう．

課題２． 課題１での結論（何種類）を書きなさい．さらに，結論の理由や，分かったこと気づいたことを書きなさい．

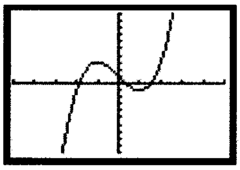
【レポート例】

課題１．

<１種類目>

（１）関数式：　$y=x^3-3x+1$

（２）グラフとウインドウ：



```
WINDOW
 Xmin=-5
 Xmax=5
 Xscl=1
 Ymin=-10
 Ymax=10
 Yscl=1
 Xres=1
```

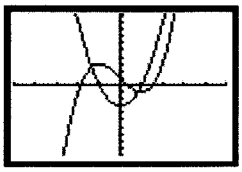
（３）導関数：　$y'=3x^2-3$

（４）増減表：　　　　（５）極値：

（省略）　　　　（省略）

（６）関数と導関数との関係をグラフで確認（増減表の確認）

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■X^3-3X+1
\Y2■3X^2-3
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```



課題２．結論は＊＊種類である．その理由は，・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・だからである．

図 3-3-7.　３次関数の課題

この課題では，Leinbach L.C.（1991）が示した実験室アプローチの五つの活動（観察，同定，探究，分析，説明）を参考に，以下に示す８つの数学的活動を期待した[13].

活動①：グラフ電卓の表示されたグラフを観察する（Observation）⇔外的活動

活動②：表示されたグラフを増減表で確認・検証する（Verification）⇔内的活動
（この活動では，グラフ電卓の誤表示や不適切な Window 設定による不完全なグラフ表示による誤解を回避することも意図している）

活動③：関数と導関数のグラフの関係を観察する（Observation）⇔外的活動

活動④：活動①ー活動③を繰り返し行う活動において，３次関数のグラフの特徴や形状の分類基準を同定する（Identification）ために探究・調査する（Exploration）⇔外的活動から内的活動

活動⑤：活動④で得られた仮説を数学的に公理化する（Formulation）⇔内的活動

活動⑥：仮説の真偽を数学的に分析（Analysis）・演繹する（Deduction）⇔内的活動

活動⑦：活動⑥で得られた結論を具体的事例で実験し検証・実証する（Verification）⇔外的活動

活動⑧：数学的活動で得られたことを記述・説明する（Explanation）⇔内的活動

高等学校の教科書での数学的活動は，与えられた問題を解決するために生徒は活動⑥から活動⑧の活動を行うのみである．これに対して，本課題では生徒が自分で発見した仮説について，外的活動と内的活動とが相互に作用しながら問題解決する数学的活動であると言える．

７．実践結果

ここでは，生徒が提出したレポート結果をもとに，生徒が行なった３次関数のグラフの分類の同定基準について分析した結果を紹介する．さらに，生徒自身が発見した仮説に対する数学的な検証方法についても紹介する．

(1) ３次関数のグラフの分類に関する同定基準について

表 3-3-1 は，３次関数のグラフの種類と，生徒が分類した同定基準を４つの観点にまとめたものである．本課題を提出した生徒 48 名の中で，３次関数のグラフが２種類と答えた生徒が 30 名（62.5%），３種類と答えた生徒が 14 名（29.1%）であった．また，表 3-3-2 は，３次関数の種類の観点ではなく，生徒が分類した同定基準の観点でまとめたものである．以下に，生徒が考えた４つの同定基準の詳細について，生徒の

[13] Leinbach L.C.（1991）が示す五つの活動に，確認・検証（Verification），公理化（Formulation），演繹（Deduction）を加えた．

レポートを参考に紹介する．

表 3-3-1．３次関数のグラフの種類と分類の同定基準[14]

種類	人数	分類No.	分類する同定基準	人数
2	30	2A	導関数である２次関数の性質との関係	2
		2B	関数の極値の観点による分類	4
		2C	関数の各係数とグラフとの関係	6
		2D	実験事例を視覚的に分類	13
		2Z	なし	6
3	14	3A	導関数である２次関数の性質との関係	5
		3B	関数の極値の観点による分類	2
		3C	関数の各係数とグラフとの関係	0
		3D	実験事例を視覚的に分類	3
		3Z	なし	4
4	1	4C	関数の各係数とグラフとの関係	1
11	1	11Z	なし	1
沢山	1	XC-1	関数の各係数とグラフとの関係	1
無限	1	XC-2	関数の各係数とグラフとの関係	1
合計	48		合計	49

表 3-3-2．３次関数のグラフの種類と分類の同定基準

分類No.	分類する同定基準	人数
A	導関数である２次関数の性質との関係	7
B	関数の極値の観点による分類	6
C	関数の各係数とグラフとの関係	9
D	実験事例を視覚的に分類	16
Z	なし	11
	合計	49

ａ．導関数である２次関数の性質との関係（７名）

表 3-3-2 に示すように，３次関数のグラフの分類を導関数である２次関数の性質と関係づけて考察した生徒は７名あった．この同定基準には，４つのパターンが見られたので，各パターンについて以下に簡単に紹介する．

1) 判別式による２次関数の解の種類（２名）

図 3-3-8 に示す記述には不備があるが，導関数である２次関数の解の判別式を使って３次関数のグラフの分類を同定した例である．

[14] 表 3-3-1 の左側の種類の合計人数（48 名）と右側の分類する同定基準の合計人数（49 名）が異なる理由は，分類する方法を２通りの同定基準（2A と 2C）で行った生徒が１名いたからである．

3種類あります。

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

すべてを正とする

そしてはんべつ式を使うと

$<$

$=$

$>$

の3つしかないので

3種類あります。

図 3-3-8．判別式による２次関数の解と３次関数のグラフの関係

2)　２次関数の最小値の符号（１名）

図 3-3-9 は，導関数である２次関数の最小値が正，０，または，負によって３次関数のグラフが異なることを同定した例である．

結論は3種類である。

その理由は

aが正の数なので全て右上りのグラフになり、

導関数のグラフを見ると最小値が0のグラフと

正の数のグラフと負の数のグラフの

3種類があるからである。

図 3-3-9．２次関数の最小値と３次関数のグラフの関係

3)　２次関数の実数解の個数（４名）

図 3-3-10 は，導関数である２次関数の実数解の個数を基準に，３次関数のグラフの種類を同定した例である．この生徒は９つの３次関数のグラフと増減表を記述しており，それらを観察した結果，導関数の値が０（$y'=0$）になる x は０－２個であることを「三次関数の導関数は二次関数なので $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の導関数では x の値が０－２こでてくる.」と記述したと考えられる．次に「０この時と１この時はこの関数では $a>0$ なので増減表の導関数の左右（端）は常に一定である.」では，定義域を広範囲で考えると３次関数のグラフは右上がりになるので増減表の導関数の欄の左右は常に＋で一定であることを記述していると考えられる[15]．つまり，$y'=0$ となる x が０個の場合の増減表の導関数の欄は常に＋，さらに，１個の場合は＋０＋となり，それぞれ１種類ずつのグラフをもつと結論づけたと考えられる．最後の「２つの時も同じように端が一定なので３パターンでてくるがこの関数の導関数は必ず極小値がでてくるグラフになるので１パターンしかでてこない.」では，$y'=0$ となる x が２個の場合の増減表の導関数の欄は，(1)＋０＋０＋，(2)＋０００＋，(3)＋０－０＋，の３パターン考えられるが，導関数である２次関数の極小値が必ず負になるので(3)＋０－０＋の１パターンのみであると結論づけたと考えられる[16]．これらの考察結果から３次関数のグラフは３種類であると結論づけた．

結論は3種類である。その理由は三次関数の導関数は二次関数なので y=ax³+bx²+cx+d の導関数ではxの値が0～2こでてくる。0この時と1この時はこの関数ではa>0なので増減表の左右(端)は常に一定である。そして、2つの時も同じように端が一定なので3パターンでてくるがこの関数の導関数は必ず極小値がでてくるグラフ( )になるので1パターンしかでてこない。よって3種類である。

図 3-3-10．導関数の値が０になる個数と３次関数のグラフの関係

[15] この生徒は，図 3-3-10 に示した結論以外に，分かったこと・気づいたことを多数記述している．その中に「$y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフで b, c の値がどんな値になっても広範囲を見ると右上がりのグラフになる」という発見を記述している．これを参考に，図 3-3-10 にある「増減表の左右（端）は常に一定である.」の記述は，「定義域を広範囲で考えると３次関数のグラフは右上がりになるので増減表の左右は常に＋で一定である.」と考えていると解釈した．

[16] 導関数である２次関数の極小値が必ず負になることの理由に関しては，生徒のレポートには記述されていない．この生徒は９つの３次関数を記述していることから，これらのグラフを観察した結果から結論づけたと考えられる．

ｂ．関数の極値の観点による分類（６人）

図 3-3-11 は，グラフ電卓に表示した幾つかの事例をもとに，３次関数の極値が「存在する」または「存在しない」の同定基準でグラフを分類した例である．ここでは表 3-3-2 に示した同定基準の分類 A に見られるような，導関数である２次関数の性質と３次関数の極値との関係については言及されていない．

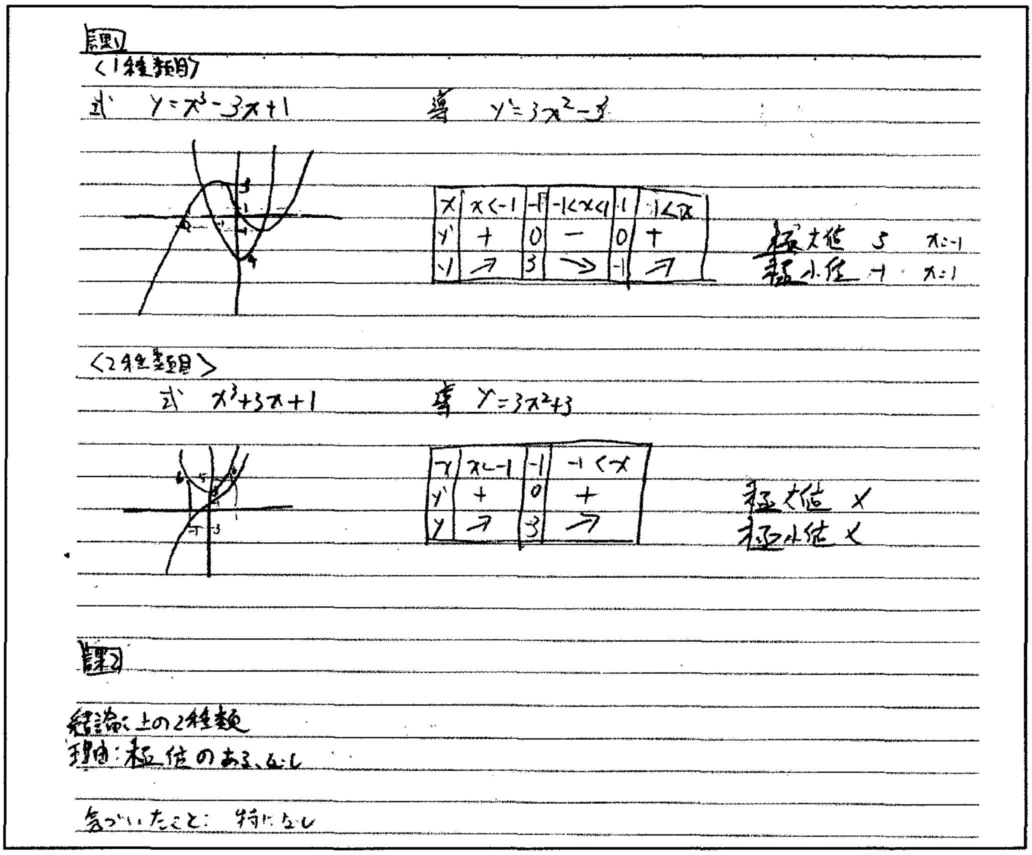


図 3-3-11．関数の極値の観点による分類

ｃ．関数の各係数とグラフとの関係（９人）

３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の４つの係数 a,b,c,d とグラフの関係を探究した生徒は９名であった．この関係の探究は，教材のねらいの一つであるが，生徒にとっても自然な考え方だったようだ．なぜならば，一次関数 $y=ax+b$ では各係数と傾き・y 切片との関係，さらに，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の一般形では a がグラフの形状，c は y 切片，標準形 $y=a(x-p)^2+q$ では p と q が頂点というように，既習の関数では方程式の係数とグラフの特徴との関係を学習しているからである．

６名の生徒達の探究方法を分析すると，1) 複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究［６名］，2)変更する係数を１つにして他の係数を固定する探究［２名］，3) 代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究［１名］，の３通りがあった．それぞれの探究方法について以下に紹介する．

1) 複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究（6名）

図 3-3-12 を記述した生徒は，$y=2x^3+6x^2+6x+1$の事例から①$0<b$，$0<c$の場合は極限が存在しないタイプ(c)のグラフ[17]になり，さらに，$y=2x^3-6x+6$の事例から②$b=0$，$c<0$の場合は極限が存在するタイプ(a)のグラフ[18]になると結論づけた．さらに,「①の条件を$b<0$，$c<0$にすると②の形となり,②の条件を$b<0$，$c=0$としてもそのままの形となった．[19]」では，どちらの方法も2つの係数を同時に変更しているため場当たり的な探究になっているようである．つまり，これらの変更によって得られた結論は，どちらの係数の影響によるものかは考察されていないと考えられる．

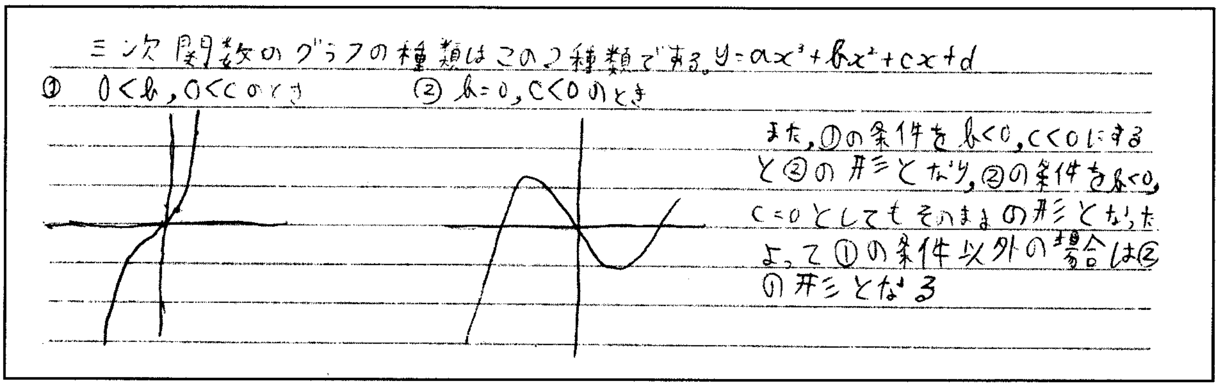


図 3-3-12．**複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究**

2)変更する係数を1つにして他の係数を固定する探究（2名）

図 3-3-13 に記述された文章「$y=x^3-3x^2+3x$の3次関数をもとに，$y=ax^3+bx^2+cx+d$のa,b,c,dの値をそれぞれ変えて導関数との関係について比較してみた.」，さらに，係数cを変更した三つのグラフから推測すると，活動①ー活動④の仮説を設定する段階において，この生徒は3次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$の4つの係数a,b,c,dのうち，一つの係数のみを変更しながら観察・実験を行なったと考えられる．つまり，島田（1995）が示す数学的活動の模式図を参考に考察すると，まず最初に「f．条件・仮説」の段階で変更する係数を一つに着目することで条件を簡単化し，その係数に関する実験・観察→「k．データ」→「l．照合」→「m．仮説の修正」のサイクルを何度か繰り返しながら

[17] $y=ax^3+bx^2+cx+d$の導関数は$y'=3ax^2+2bx+c$であるため，$0<b,0<c$の場合，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が正，0，負の何れにも成りうるので，この結論は正しくない．

[18] $b=0,c<0$の場合，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が常に正となるので，この結論は正しい．

[19] $b<0,c<0$と$b<0,c=0$の何れの場合も，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が常に正となるので，この結論は正しい．

「g．f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化）」へと至る数学的活動を行ったと思われる．この数学的活動の過程は，科学的な探究方法として重要であり，この生徒が自主的に活動したことは評価できる．しかし，「g．f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化）」において，数学的に記述された仮説を数学的に検証する「h．十分か」や，具体的な事例（データ）を基にした「I．照合」が行われていないため，この生徒は係数 a,b の仮説（グラフの形に大きな変化はない）に誤りがあることに気づかなかったようである（図 3-3-14）．

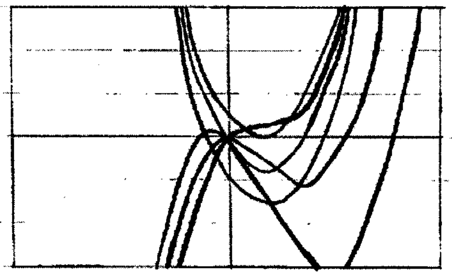
・$y=x^3-3x^2+3x$ の3次関数をもとに、$y=ax^3+bx^2+cx+d$ の a, b, c, d の値をそれぞれ変えて導関数との関係について比較してみた。

1) $a\ (a>0)$ の場合 → 2つのグラフともにy軸に近づいていき、傾きが変化したけども、グラフの形に大きな変化はない。

2) b の場合 → グラフが左右に移動するだけで、変化はない。

3) c の場合 → 導関数が上下に移動し、そのグラフと同時に3次関数のグラフが大きく変化して、2種類のグラフがあった。

4) d の場合 → 3次関数のグラフが上下するだけで、導関数は変わらない。よってグラフの形は変わらない。



<cの場合>

① $y=x^3-3x^2-3x$　　$y'=3x^2-6x-3$

② $y=x^3-3x^2$　　$y'=3x^2-6x$

③ $y=x^3-3x^2+3x$　　$y'=3x^2-6x+3$

・結論は…2種類である

・その理由は…

2次関数である導関数は接線の傾きであるから、この接線の傾きが上下移動すると、グラフも大きく変化する（!?）

図 3-3-13．１つの係数のみを変更する探究

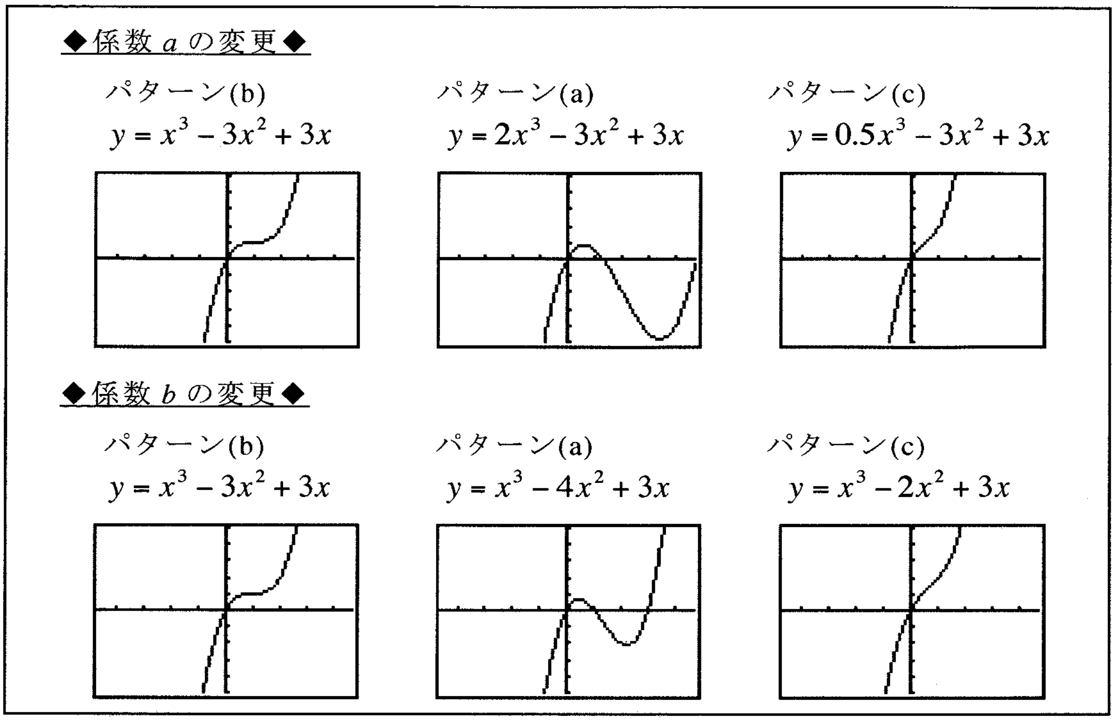


図 3-3-14. 係数 a，b における仮説に対する反例

3) 代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究（１名）

図 3-3-15 は，導関数である２次関数の実数解の個数を基準に，３次関数の極値が存在する場合と存在しない場合を考察し，その結果をもとに３次関数のグラフの種類を同定した．次に，導関数である２次関数を２次方程式 $3ax^2 + 2bx + c = 0$ として，それを標準形 $3a\left(x + \dfrac{b}{3a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{3a} = 0$ に式変形した．さらに，係数 b，c を［① $a > 0, b \neq 0$，② $a > 0, b = 0$，③ $a > 0, b = 0, c = 0$］[20]の三つのパターンに場合分けをして，$c - \dfrac{b^2}{3a}$ の符号を考察することで３次関数のグラフを分類し，最終的には虚数解の場合も含めてグラフは２種類であることを結論づけている．この生徒の記述には，① $a > 0, b \neq 0$ の部分に誤りがあるが[21]，活動⑥「仮説の真偽を数学的に演繹する（Deduction）」の過程で係数 b，c の場合分けによる演繹的な考察を通して，自分の

---

[20] ①は $a > 0, b \neq 0, c \neq 0$ であり，②は $a > 0, b = 0, c \neq 0$ であると考えられる．また，この生徒の分類では $a > 0, b \neq 0, c = 0$ が抜けている．

[21] ① $a > 0, b \neq 0, c \neq 0$ の場合において「$c \neq \dfrac{b^2}{3a}$ のとき極値はあり，グラフはパターン(a)」と記述されているが，正しくは「$c > \dfrac{b^2}{3a}$ のときは極値が存在しないのでグラフはパターン(c)，さらに，$c < \dfrac{b^2}{3a}$ のときは極値が存在するのでグラフはパターン(a)」となる．

仮説を代数的に検証したことは評価できる．

結論は2種類である。
その理由は
$y=ax^3+bx^2+cx+d$ を微分すると $y'=3ax^2+2bx+c$ になり、2次方程式の解は2つの場合と一つの場合がある。これから極値(極小値・極大値)が1つ存在する場合と極値がない場合がある。また虚数解の場合もある
$y'=3ax^2+2bx+c$
$3ax^2+2bx+c=0$
$3a(x+\frac{b}{3a})^2+c-\frac{b^2}{3a}=0$
[分かったこと 気づいたこと]
$a>0,\ b\neq 0$
$c=\frac{b^2}{3a}$ のとき　極値はなく グラフは　となる
$c\neq\frac{b^2}{3a}$ のとき　極値はあり、グラフは　となる
$a>0\ \ b=0$
$c<0$ のとき　極値はあり、グラフは　となる
$c>0$ のとき(虚数解)　極値はなく、グラフは　となる
$a>0\ \ b=0\ \ c=0$　極値はなく、グラフは　となる
虚数解の場合は　となる

図 3-3-15．代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究

d．視覚的な分類（16 人）

グラフ電卓を活用した数学的活動では，沢山のグラフが短時間で視覚的に観察できるため，テクノロジーを使わない数学的活動と比べると，多くのグラフを基にした仮説の設定及び検証が容易にできる利点がある．しかし，図 3-3-16 に示す生徒の記述「これ以外に変わったグラフが出てこなかったので２種類である．」に見られるように，沢山のグラフが観察・実験できることが逆に「これ以上見つからないから，全てのパターンを調べつくした．」という錯覚を生徒に生じさせ，「どうしてそうなるのだろうか？」といった疑問や数学的に検証する必要性を感じさせない欠点があるようである．この生徒以外に「これ以上式をかえてもでてこないから．」，「これ以上思いつかないから．」「これ以上はでなかった．」「この調べた三種類以外の形で表わせるグラフは無いと思ったからです．」「２種類しか見つからなかった．」「これ以上のグラフは（自分には）書けないから….」「おおよそやってみて形が似ているのばかりだから．」「今まで

見たことのあるグラフがおそらく２種類だけだからである.」などの記述があり，視覚的な分類のみによる探究を行った生徒は 16 名（約１／３）であったことが分かった.

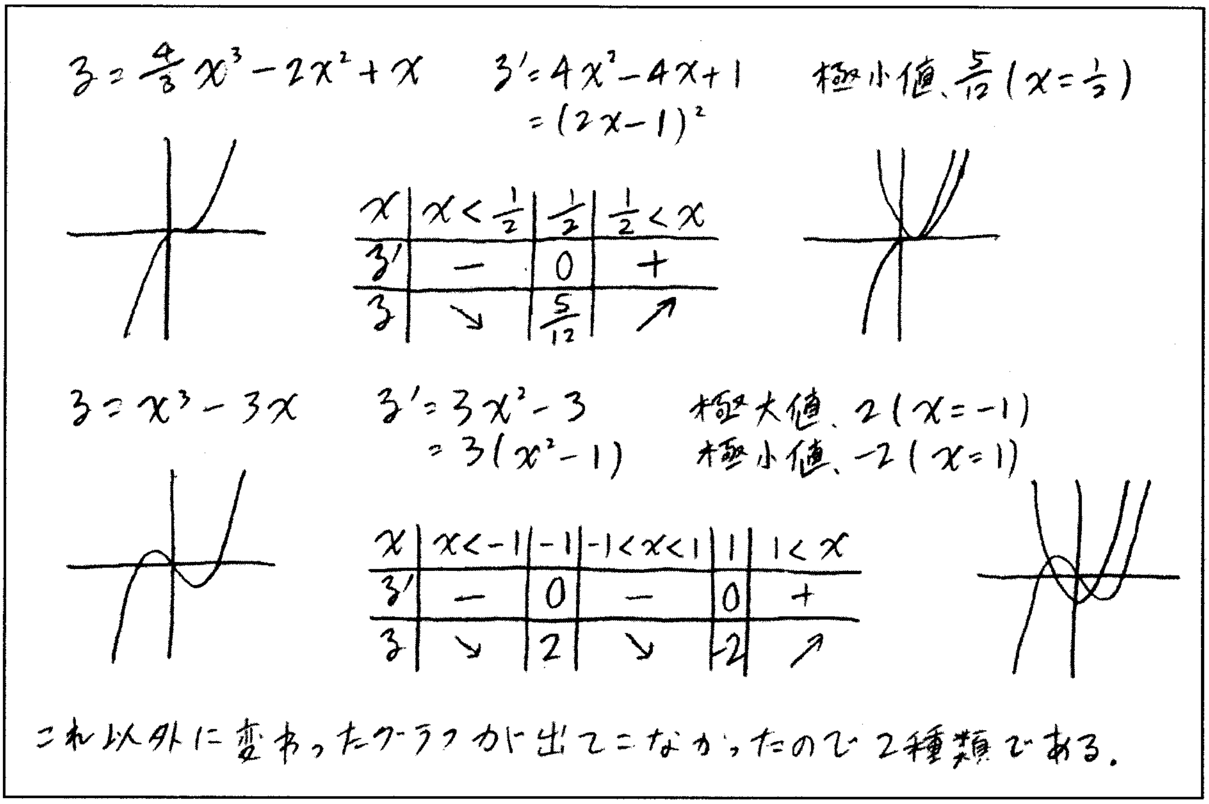


図 3-3-16. **視覚的な分類による探究**

(2) ３次関数のグラフの分類以外に発見した規則

表 3-3-3 は，３次関数のグラフの分類以外に発見した規則の反応類型と人数を以下の観点で分類したものである[22].

分類 A：係数 a に関する規則　　分類 B：係数 b に関する規則

分類 C：係数 c に関する規則　　分類 D：係数 d に関する規則

分類 E：導関数に関する規則

表 3-3-3 に示した生徒が自ら発見した規則の中で，規則が成り立つ理由を数学的に記述したレポートは，図 3-3-15 に前述した生徒１名のみで，この生徒は A-2 と C-2 の規則について代数的に検証した．このように自ら発見した規則が真であることを数学的に検証した生徒が少なかったが，規則の中には，B-1 と E-3 のように第二次導関数と変曲点の学習に繋がる発展的な規則もあった.

22　数学的に誤っている規則と意味不明な規則は除外した．また，規則を記述した生徒は 11 名であり，表の合計と異なるのは，一人で複数の規則を記述している生徒がいたためである.

表 3-3-3. グラフの種類以外に発見した規則の反応類型と人数

分類	反応類型	人数
A-1	$y=ax$^3 $(a>0)$ のグラフは $x>0$ で正，$x<0$ で負になる	1
A-2	$y=ax$^3 $(a>0)$ のグラフは極値はない	2
A-3	係数 a を大きくするとグラフはy軸方向に近づく（a の値が大きくなればなるほどグラフは急な傾きになる）	3
A-4	係数 a は正なので広範囲でみると右上がりのグラフになる	5
B-1	係数 b は x 軸の位置で＋（プラス）だと左で−（マイナス）だと右の方にグラフが移動する	2
C-1	係数 c の値を大きくするとグラフは直線に近づく	1
C-2	係数 c は＋（プラス）だと極値のないグラフで−（マイナス）だと極値のあるグラフ［ただし，$b=0$ の場合］	3
D-1	係数 d は y 軸の位置（y 切片）である	4
E-1	導関数と x 軸との交点が x の極値になる	2
E-2	導関数のグラフの y の値によって上下どちらに傾いているかが分かる	1
E-3	導関数の極値は，関数式のグラフの中心を通っている（２つの極値の中点が変曲点である）	1
	合計	25

８．考察

(1) 主体的な数学的活動による多様な分類基準と既習事項との関連づけ

３次関数のグラフの種類を分類する本課題では，生徒たちは４つ同定基準に基づいて分類を行った．特に，同定基準 D（実験事例を視覚的に分類）以外の３つの同定基準では，生徒自らが既習事項を関連づけながら同定基準を設定したことが分かった．例えば，同定基準 A（導関数である２次関数の性質との関係）では，導関数である２次関数の解の種類を３次関数のグラフとの関係を調べるために，①判別式，②実数解の個数，③最小値の符号，といった方法で，２次関数の性質との関連づけを生徒は自主的に行った．さらに，同定基準 C（関数の各係数とグラフとの関係）では，導関数である２次関数を２次方程式 $3ax^2+2bx+c=0$ として，それを標準形 $3a\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{3a}=0$ に式変形した生徒もいた．

教科書や問題集における数学的活動では，与えられた問題に対して教科書等に示された解法で問題解決することが多い．これに対して，生徒の主体的な数学的活動による本課題では，生徒が発見した自らの同定基準の正当性を数学的に分析（Analysis）・演繹（Deduction）するために，生徒自らが既習事項を活用したことが明らかになった．

また，３次関数の分類以外に発見された規則も多様であったが，その規則を数学的

に分析（Analysis）・演繹（Deduction）したのは一人だけであった．しかし，規則の中にはグラフの変曲点に関する発見もあり，本課題を発展的な学習に展開できる可能性があることが分かった．

(2) 外的活動と内的活動の相互作用による数学的活動

生徒たち全員のレポートには，３次関数に関する複数の事例（グラフ，導関数，増減表など）が記述されており，生徒達は複数の事例を基にグラフを分類する同定基準を考察したと考える[23]．つまり，本節の「６．教材内容」で示した８つの数学的活動では，全員の生徒が活動①「グラフの観察（外的活動）」⇒活動②「増減表によるグラフの検証（内的活動）」⇒活動③「関数と導関数のグラフ関係の観察（外的活動）」⇒活動④「活動①ー活動③の繰り返しによる分類基準の同定（外的活動から内的活動）」⇒活動⑤「同定基準の公理化（内的活動）」といった外的と内的の活動を相互に作用させた数学的活動を行ったと考える．さらに，一部の生徒は，同定基準の正当性について既習事項を活用して数学的に分析・演繹する内的活動（活動⑥）を行った．このように，生徒の外的活動と内的活動との相互作用が促進されたのは，グラフ電卓の即時性・簡易性によって，複数のグラフを観察・実験，さらには，自分の仮説や考察を視覚的・グラフ的に検証することが容易に行えたからであると考える．

しかし，グラフ電卓の即時性・簡易性が，逆に生徒の数学的活動を困難にさせた事実も明らかになった．それは，生徒は３次関数の係数を自らの考えで自由に設定できるため，導関数が整数の範囲で因数分解できない事例を実験した生徒が多かったようである．このため，導関数の解を求める計算が煩雑になり，14 名（約 29%）もの生徒が計算間違いをした．例えば，図 3-3-17 に示す生徒は，３次関数 $y=x^3-2x^2-2x+2$ のグラフに関して，導関数 $y'=3x^2-4x-2=0$ の解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ を求め，それを基に増減表と極小値・極大値を求めた．さらに，グラフ電卓に３次関数と導関数のグラフを表示し，それらのグラフをレポートに描いた． $y'=3x^2-4x-2=0$ の正しい解は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{3}$ であり，この生徒は，自分で求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ が計算間違いであることに気づかなかったようである．しかし，①増減表の結果[24]とグラフ電卓が表示した３次関数のグラフが一致しないこと，さらに，②求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ が

[23] 生徒が記述した事例は，一人当たり平均 3.2 個であり，最高で 11 個の事例を記述した生徒がいた．

[24] 図 3-3-17 の増減表の一部に間違いがある．

正であるのに対してグラフ電卓が表示した導関数のグラフの x 切片が負と正で一致しないこと，の２点を検証すれば自分で求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, $x=\sqrt{10}$ が正しくないことに気づいたはずである．つまり，この生徒は，内的活動によって求めた増減表や極値と，グラフ電卓に表示されたグラフを観察する外的活動とを相互に関連づけなかったために，計算間違いに気づかなかったと考えられる．

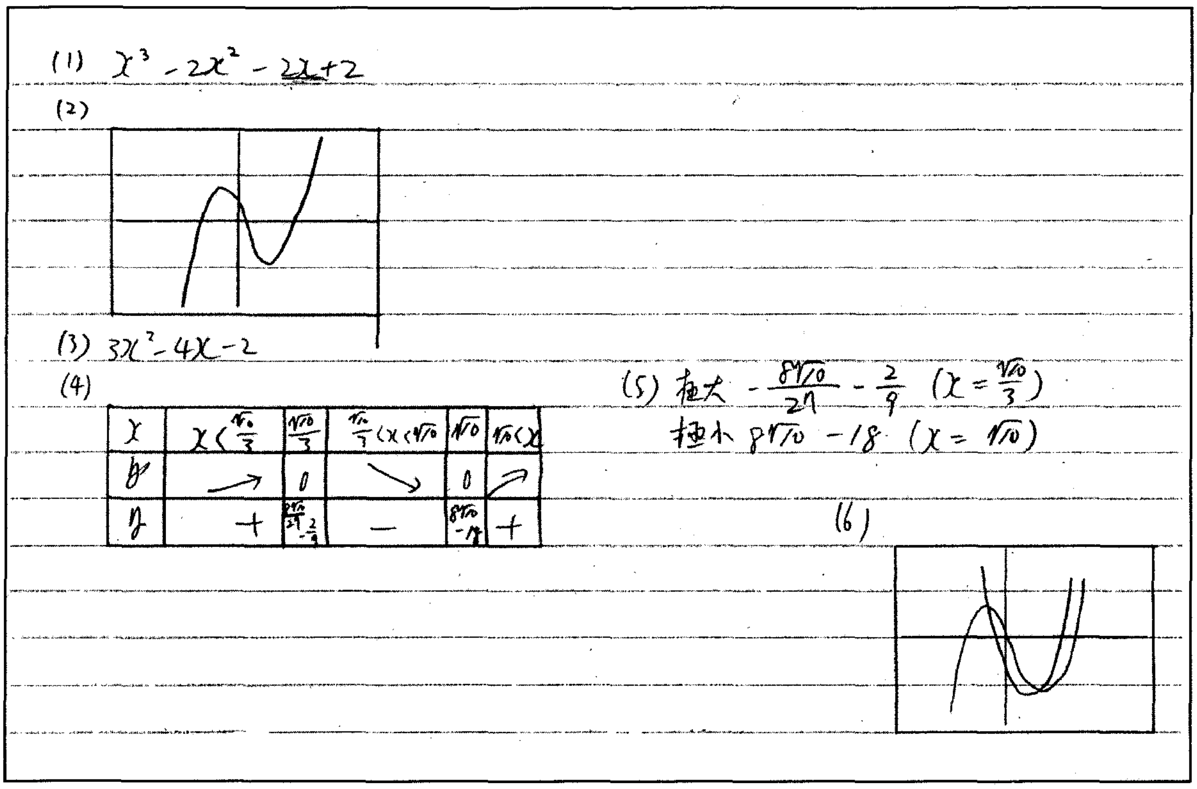


図 3-3-17．計算間違いによる増減表とグラフ電卓の結果との不一致

表 3-3-4 に，計算間違いを６つの観点で分類した結果を示す．これらの計算間違いも，上記の生徒と同様に，自分で求めた計算結果とグラフ電卓に表示されたグラフとを比較検証しなかったことが原因であった．この結果，片岡（1996）の実践研究に見られるような，手計算の結果（内的活動）とグラフ電卓の結果（外的活動）とを往復しながら，自分で求めた計算結果を検証・修正する重要性を生徒に認識させることが今後の課題として明らかになった．

表 3-3-4. 計算間違いの分類と人数[25]

計算間違い	人数
解の公式	3
因数分解	5
虚数　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}$	2
増減表の符号ミス	5
単純な計算ミス（極値，途中計算）	2
不明	1
合計	18

(3) ４つの係数を変更する数学的活動における生徒の工夫

Polya（1959）が「帰納は物事の観察から始まることが多い．(p.2)」と述べるように，３次関数のグラフの分類を行う本課題では，生徒たちは，$y=ax^3+bx^2+cx+d$の４つの係数a,b,c,dを自分の意図で設定しながら複数のグラフを観察することから数学的活動を始めた．この方法は有用であるが，４つの係数を持つ３次関数の全てのグラフを観察することは不可能であり，ただ闇雲に各係数を変更する観察の結果による仮説は，それが真であると主張するには信頼性に欠けることがある．しかし，本課題を行った生徒達は，①原問題の変形，②４つの係数の効果的な変更，の２つの工夫を行って数学的活動を行っていた．

一つ目の工夫「①原問題の変形」に関しては，３次関数のグラフ分類の同定基準 A（導関数である２次関数の性質との関係）と同定基準 B（関数の極値による分類）の活動において，原問題の変形の工夫が行われていた．つまり，同定基準 A では，本課題を導関数である２次関数の性質（判別式による解の種類，実数解の個数，最小値の符号）を調べる課題に問題を変形し，そこで得られた性質を３次関数の課題に関連づけることでグラフの分類を行っていた．一方，同定基準 B は，複数のグラフと増減表を観察する活動において，極値が「存在する」「存在しない」といった課題に問題を変形し，その観点で分類した結果から３次関数のグラフの分類を行っていた．以上の結果から，生徒達は原問題を変形することにより，既習の２次関数や増減表の極値を活用しながら原問題を解決したことが分かった．Polya（1954）は，問題を変形させることの必要性について，次のように述べている．

「問題を変形させることは大切である．これはいろいろな仕方で実証することができる．ある観点からすれば問題を解くことは，すでに得た知識を動員し組織化

[25] 表の合計人数が 18 名となっているのは，一人で２つの計算間違いをした生徒が２名，さらに一人で３つの計算間違いをした生徒が１名いたためである．

することである．記憶の中からある要素を引出し，問題の中に織込むことが必要である．その目的には問題を変形させることが役に立つ．」(pp.148-149)

次に，二つ目の工夫「②4つの係数の効果的な変更」に関しては，同定基準C（関数の各係数とグラフとの関係）の活動において，係数の変更の工夫が行われていた．この同定基準では，1)複数の係数を同時に変更する方法，2) 1つの係数のみを変更する方法, 3)代数計算を基にした各係数の場合分け, の三つのパターンの方法があった．何れも，変更する係数以外は固定する方法で3次関数のグラフの分類の一般化を行っており，これはPolya（1959）が述べる制限の導入による特殊化[26]の手法であると考えられる．

一方，視覚的な分類（16名），同定基準なし（11名）は，上記の工夫が行われておらず，観察・実験で得られた分類の仮説を信頼して良いのかどうかについて，もう1歩踏み込んで考察する態度を育成することが今度の課題として明らかになった．

(4) **グラフ電卓の有効性と課題**

生徒達はグラフ電卓に表示された3次関数のグラフを観察・実験することで，グラフを分類する同定基準を直感的・帰納的に類推することができた．さらに，一部の生徒には，その同定基準を具体的に実験・検証し，最終的には，数学的に検証した生徒もいた．例えば，図 3-3-18 に示す生徒は，自分の同定基準を特殊な事例 $y = 0.001x^3 + 1000x^2$ で実験・検証しており，グラフ電卓の即時性・簡易性がなければ行えなかった活動であると考える．このように，グラフ電卓は，生徒達の外的活動と内的活動を相互につなげる教具として有効であることが今回の調査で明らかになった．

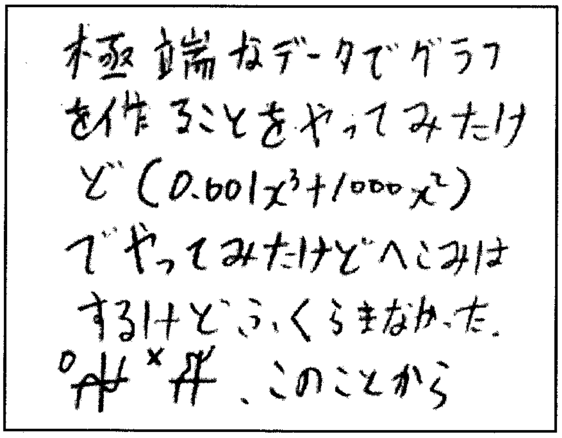


図 3-3-18．特殊な事例による同定基準の実験・検証

[26] Polya（1959）は，特殊化を「与えられた一組の対象の考察からそれに含まれるより小さな一組の対象の考察に移ることである．」と述べている．さらに，特殊化の移行には，制限の導入と変数の限定化の二つの例を示している（P.13）．

これに対して，本課題では，不適切な Window 設定によるグラフの誤解を記述した生徒が８名も存在した．多くの研究者（Demana and Waits, 1988 ; Goldenberg, 1989 ; Dion, 1990 ; Dick, 1992 ; Hector, 1992 ; Donley and Elizabeth, 1993 ; Williams, 1993 ; Hansen, 1994 ; Ward, 1998 ; Krumpe and keiser, 2003 ; 佐伯・黒木，2004）がグラフ電卓の誤表示による生徒の誤認識とその影響の重要性[27]を強調しているが，この８名の内の２名が Window を適切に設定して自らの誤解を解消していたことが，生徒のレポートから明らかになった[28]．以下に，Dick（1992）が示した３つの分類（①表示画面外に存在するグラフ，②曖昧なズームインやズームアウトによる誤表示，③座標計算のまるめ誤差による誤表示）に従って，生徒の誤解を紹介する．

①表示画面外に存在するグラフ（１名）

図 3-3-19 は，３次関数 $y = x^3 - 6x^2 + 10$ の表示範囲を $-5 \leqq x \leqq 5, -10 \leqq y \leqq 10$ としたために，３次関数の極小値が表示範囲外となり，グラフが放物線のような形になったレポートである．この生徒は，導関数 $y' = 3x^2 - 12x = 0$ の因数分解を計算ミスしたために増減表の極小値を間違って求めた．このため，この生徒はグラフ電卓の表示画面外に存在する極小値に気づかなかったと考えられる．

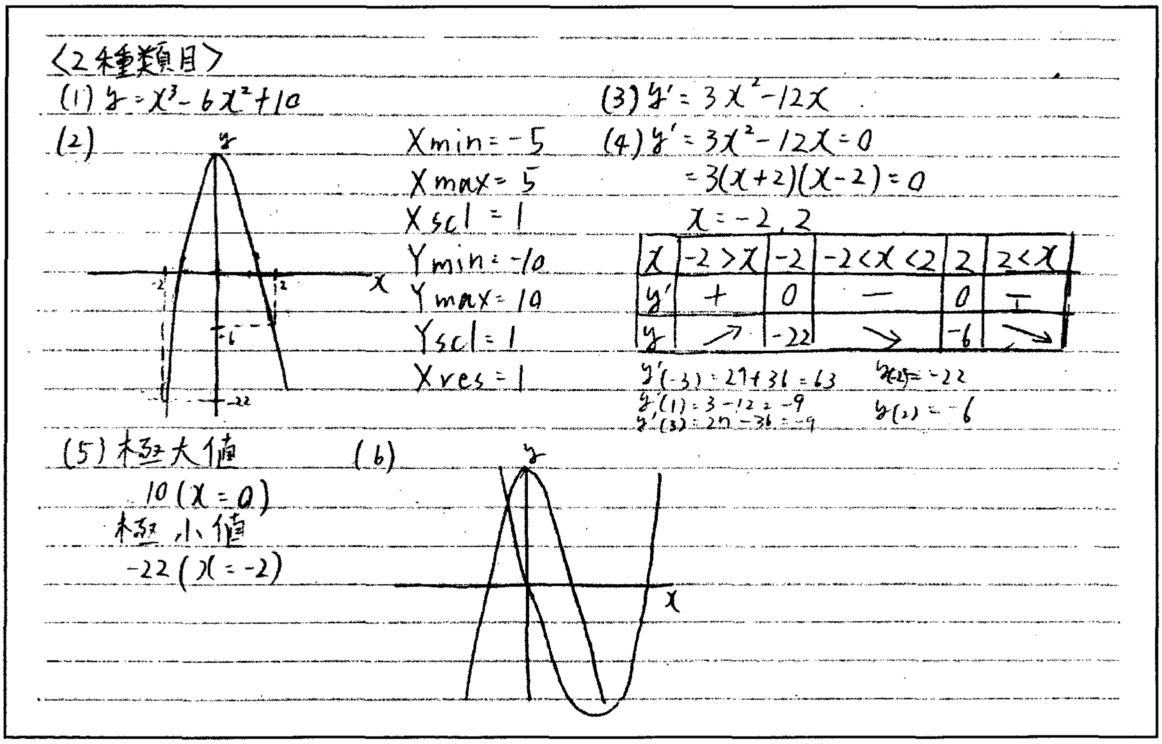


図 3-3-19．表示画面外に存在する極小値に気づかなかった事例

[27] 不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解に関しては，２．２節（pp.72-83）を参照．

[28] ここに示した人数は，生徒がレポートに記述した内容を分析した結果の人数であり，実際にはレポートに記述しなかった生徒もいると考えられるため，不適切な Window によるグラフの誤解をした人数，および，誤解を解消した人数は，これらの人数以上になると予想される．

②曖昧なズームインやズームアウトによる誤表示（１名）

図 3-3-20 の３種類目のグラフは，３次関数 $y=\frac{1}{3}x^3+x$ の Window 表示範囲を $-1\leqq x\leqq 1, -5\leqq y\leqq 5$ とズームイン（狭く）したために，３次関数のグラフが直線のようになった事例である．この生徒が最初に観察した１種類目のグラフは極値が存在する曲線であり，２種類目は極値が存在しない曲線であった．このため，生徒は分類の同定基準を「極値が存在する．または，存在しない曲線」と設定したと考えられる．しかし，3 種類目のグラフが直線となり同定基準と矛盾するために，Window の表示範囲を $-10\leqq x\leqq 10, -10\leqq y\leqq 10$ にズームアウトした結果，同定基準が正しいことを視覚的に検証したと考えられる．この生徒の記述「直線に見えていたので Window を変えると曲線になった．注意しなければ.」に生徒の工夫が見られる．ここでは，内的活動で設定した同定基準を，グラフ電卓による外的活動で実験・検証し，そこで生じた矛盾を再実験によって検証する外的活動と内的活動の相互作用による数学的活動が行われたと考えられる．

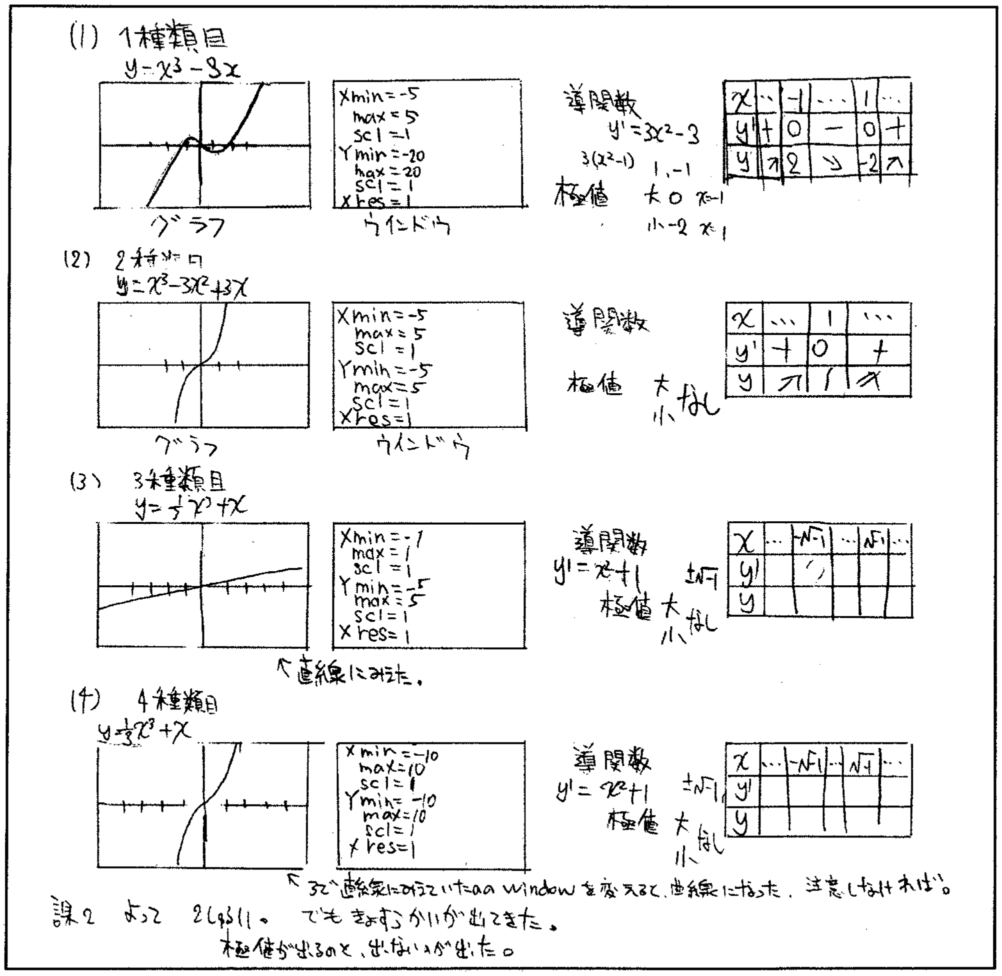


図 3-3-20．Window の再設定による同定基準の再検証

③座標計算のまるめ誤差による誤表示

グラフ電卓（TI-83）の液晶画面は，横が 95 個のピクセル数，縦が 63 個のピクセル数で構成されている．この液晶画面の制約と，座標を計算するときのまるめ誤差によって，グラフ電卓は誤ったグラフを表示する場合がある．以下に，この原因によって生徒が誤った認識を行った事例を４つ紹介する．

1) 増減表による確認・検証を行わなかったグラフの誤認識（１名）

図 3-3-21 は，３次関数 $y=x^3$ と $y=x^3+x^2$ のグラフがほぼ同じグラフであると認識した生徒のレポートである．この生徒は，増減表を記述しておらず，グラフ電卓に表示されたグラフを視覚的に比較して，双方のグラフとも極値の存在しない同じような形であると判断したと考えられる． $y=x^3+x^2$ は極値が存在するグラフであり，増減表で極値が存在することを確認・検証すれば，この生徒が行った誤認識は回避できたと思われる．

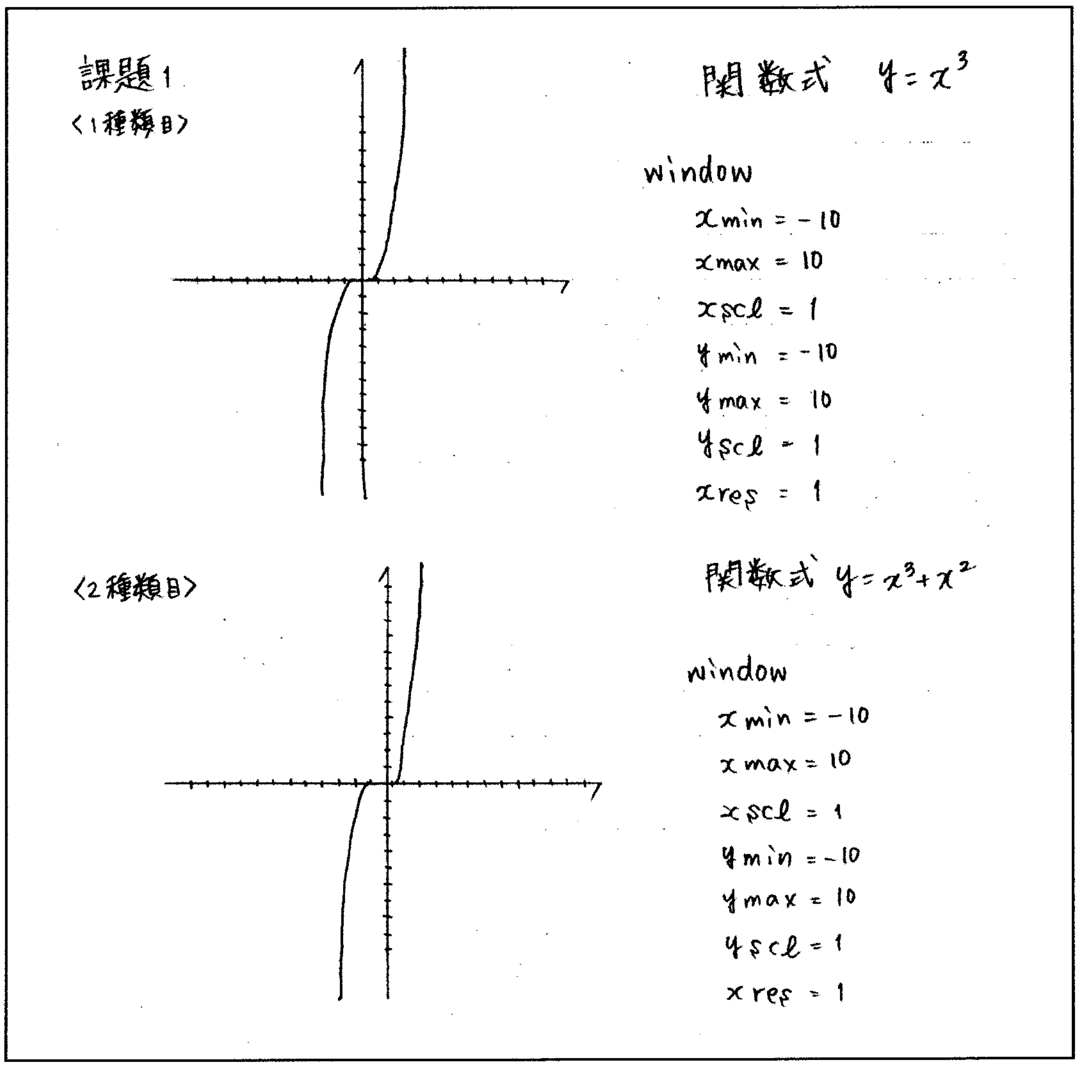


図 3-3-21．増減表による確認・検証を行わなかった事例

2) 増減表の符号の間違いによるグラフの誤認識（３名）

図3-3-22の生徒は，３次関数 $y=x^3+2x^2+x+3$ のグラフを $-5\leqq x\leqq 5,\ -5\leqq y\leqq 5$ の範囲で描いたところ，グラフには極値が存在しないと誤って認識したようである．このことを増減表で確認・検証したが，$-1\leqq x\leqq -\dfrac{1}{3}$ における導関数の符号が間違ってプラス（$y'>0$）としたためにグラフは単調増加となり，グラフ電卓で観察した通りに極値が存在しないと判断した．しかし，増減表に記述された関数の値を比較すると，$y(-1)=3>y\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{77}{27}$ であることから，グラフは $-1\leqq x\leqq -\dfrac{1}{3}$ の範囲で減少することが判断できるが，この生徒はこのチェックを行なわなかったために自分の間違いに気づかなかったようである．この誤りは，複雑な分数計算による計算間違いが原因と考えられるが，グラフ電卓に表示された誤表示を無批判に受け入れてしまったために計算間違いに気づかなかったとも考えられる．

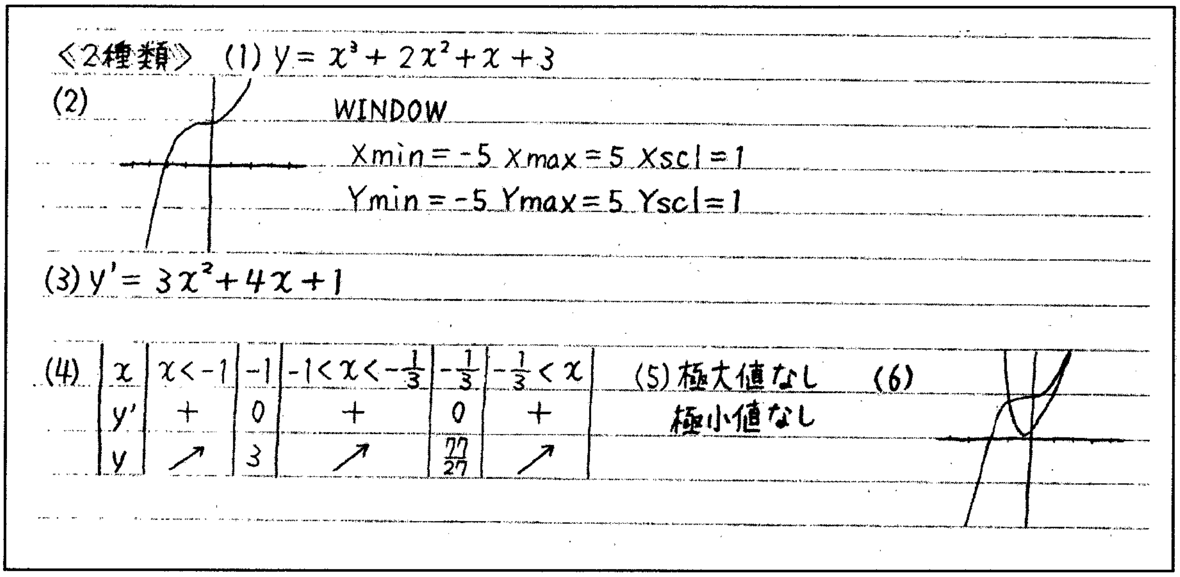
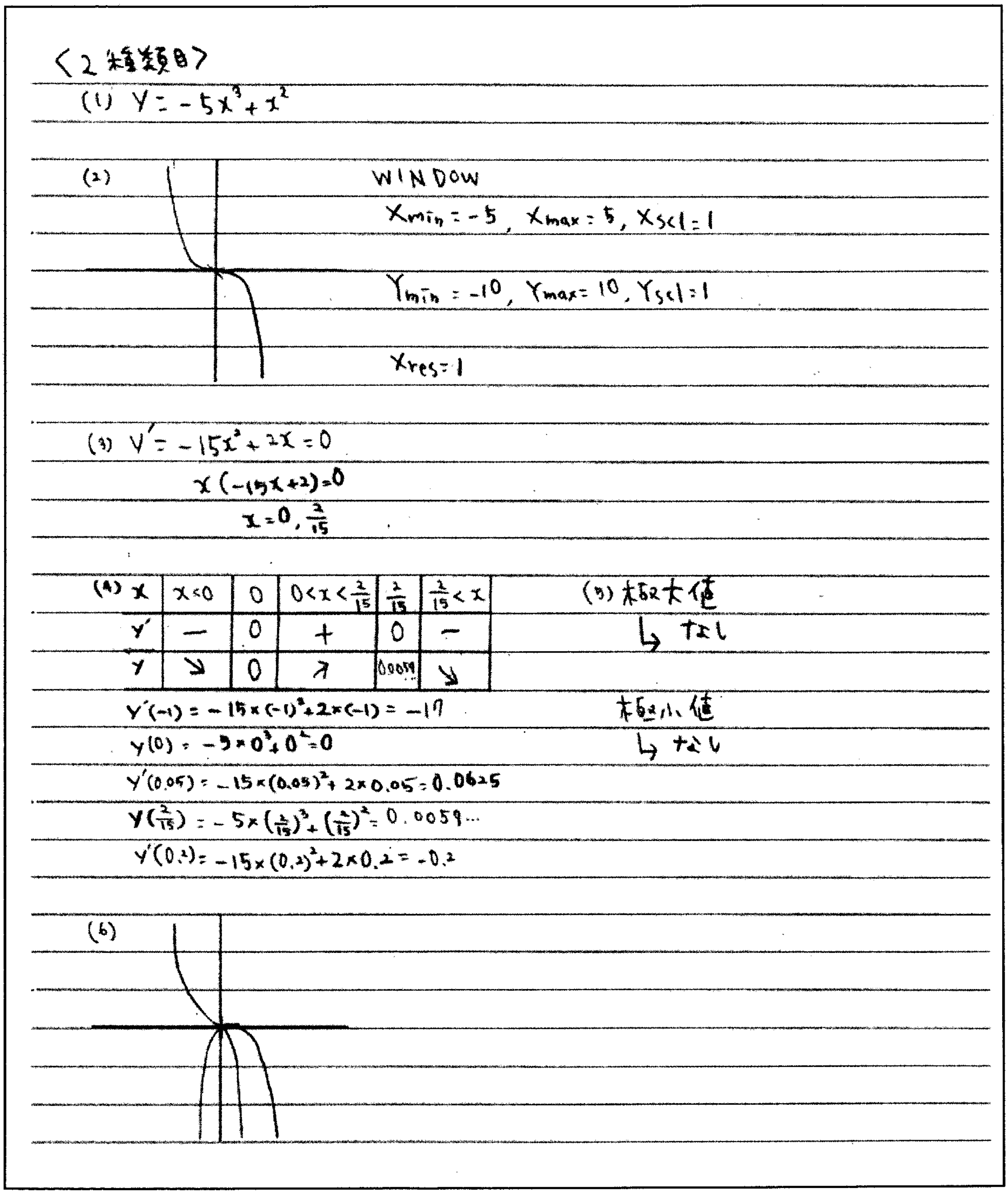


図 3-3-22. 増減表の符号の間違いによるグラフの誤認識

3) 正しい増減表に反するグラフの誤認識（１名）

図3-3-23の生徒は，３次関数 $y=-5x^3+x^2$ のグラフを $-5\leqq x\leqq 5,\ -10\leqq y\leqq 10$ の範囲で描いたところ，グラフには極値が存在しないと誤って認識したようである．さらに，このことを確認・検証するために増減表を作成したが，正しい増減表を作成し，かつ，関数の増減が増加→減少→増加と記述したにも関わらず，極値が存在しないと判断している．増減表の下に記述してある計算結果を見ると，増減表を作成する手続きと計算に間違いがないことから，この生徒は，増減表の結果よりも，グラフ電卓に表示された視覚的な判断を優先して極値が存在しないと判断したと

考えられる．このように不適切な Window 設定によるグラフの誤表示に気づかなかったのは，グラフ電卓を使ってグラフを観察する外的活動と，それを増減表で確認・検証する内的活動との相互作用を行なわなかったことに原因があると思われる．



〈2種類目〉

(1) $Y = -5x^3 + x^2$

(2) WINDOW

$Xmin = -5$, $Xmax = 5$, $Xscl = 1$

$Ymin = -10$, $Ymax = 10$, $Yscl = 1$

$Xres = 1$

(3) $y' = -15x^2 + 2x = 0$

$x(-15x+2) = 0$

$x = 0, \frac{2}{15}$

(4) x	$x<0$	0	$0<x<\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}<x$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	0	↗	0.0059	↘

(5) 極大値

↳ なし

極小値

↳ なし

$y'(-1) = -15\times(-1)^2+2\times(-1) = -17$

$y(0) = -5\times0^3+0^2=0$

$y'(0.05) = -15\times(0.05)^2+2\times0.05=0.0625$

$y(\frac{2}{15}) = -5\times(\frac{2}{15})^3+(\frac{2}{15})^2=0.0059\ldots$

$y'(0.2) = -15\times(0.2)^2+2\times0.2 = -0.2$

(6)

図 3-3-23．正しい増減表に反するグラフの誤認識

4) ズームによるグラフの誤認識の回避（１名）

図 3-3-24 の生徒は，不適切な Window 設定によって，３次関数のグラフの一部が x 軸と平行になるグラフを観察した．この生徒のグラフを分類する同定基準は「2D：実験事例を視覚的に分類」であり，x 軸と平行になるグラフは，それまでに観察した 2 種類のタイプと異なることから，ズーム機能を使って確認・検証をした．その結果，グラフは極値を持つことが観察でき，不適切な Window 設定によるグラフの誤認識を回避したと思われる．

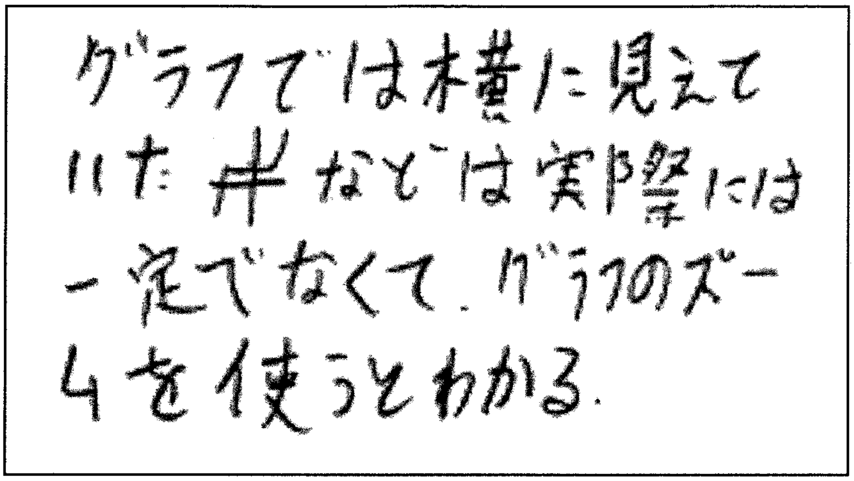


図 3-3-24．ズーム機能によるグラフの誤認識の回避

９．まとめと課題

本研究では，微分の単元のまとめとして，３次関数のグラフの種類を調べる課題を通して，増減表と極値の理解の定着を図るとともに，３次関数のグラフの種類や性質を生徒が主体的に発見し，数学的に検証することを数学的活動の目的とした．数学的活動では，３次関数の関数族をグラフ的・数値的に，かつ，代数的に探究することを目的にグラフ電卓を活用した．

その結果，以下のことが明らかになった．

(1) ３次関数のグラフの種類を分類する本課題では，グラフ電卓に表示された複数のグラフを観察・実験することにより，生徒たちは分類の同定基準を直観的・帰納的に類推することができた．さらに，その同定基準をグラフ電卓で具体的に実験・検証し，最終的には生徒自らが既習事項を関連づけながら数学的に検証したことが分かった．

(2)生徒達は，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけながら，自分で設定した同定基準を確認・検証したことが分かった．このように生徒が外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけた数学的活動を行ったのは，生徒とグ

ラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を繰り返しながら自らの課題を解決した結果であると考える．しかし，グラフ電卓の即時性・簡易性が逆に自由度を増したことにより，代数計算が複雑になり計算間違いをした生徒が多かった事実も明らかになった．

(3)生徒達は，本課題を解決するために，既習事項を活用することで原問題を変形したり，４つの係数を効果的に変更する工夫をしながら数学的活動を行っていた．その反面，視覚的な分類のみの生徒や，同定基準がない生徒も多く，グラフ電卓に表示されたグラフの観察から得られた仮説を数学的に検証する態度を育成する必要性があることが分かった．

(4)不適切な Window 設定によるグラフの誤表示によって，誤った同定基準を設定した事例が生徒のレポートから明らかになった．これらの生徒は，グラフ電卓に表示されたグラフを観察する外的な数学的活動と，その結果を増減表で確認・検証する内的な数学的活動とを相互に関連づける活動を行わなかったことが原因であると考えられる．

以上のことから，３次関数のグラフの種類を調べる数学的活動では，生徒がグラフ電卓をパートナーとして積極的に活用することにより，生徒は多様な分類基準を設定し，かつ，既習事項を活用しながら数学的に検証したことが分かった．このことから，本教材は生徒が主体的に行う創造的な数学的活動であることが明らかになった．その反面，代数計算が複雑になったことによる計算ミス，グラフ電卓の誤表示による生徒の誤解，視覚的な観察で終わってしまう生徒の活動，など今後解決すべき課題も明らかになった．

引用文献・参考文献

1) Banchoff T. F. (1991). "Computer Laboratory Magnification of Idiosyncracies". In Leinbach L. C. (Ed.). The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.1-7.

2) Demana F. and Waits B. K. (1988). "Pitfalls in Graphical Computation, or Why a Single Graph Isn't Enough". The College Mathematics Journal. 19(2). pp.177-183.

3) Dion G. (1990). "The Graphics Calculator: A Tool for Critical Thinking". Mathematics Teacher. pp.564-571.

4) Dick T. P. (1992). "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment". In Fey J.T. (Ed.). 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 145-157.

5) Donley H. E. and Elizabeth A. G. (1993). "Hidden Behaviors in Graphs". Mathematics teacher. Vol.86. No.6. pp.466-468.

6) Fey J.T. (1987). 数学教育とコンピュータ. 成嶋弘監訳. 東海大学出版会.

7) Goldenberg E. P. (1989). "Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions". Journal of Mathematical Behavior. 7. pp.135-173.

8) Hansen W. (1994). "Using Graphical Misrepresentation to Stimulate Student Interest". Mathematics teacher. Vol.87. No.3. pp.202-205.

9) Hector J. H. (1992). "Graphical Insight into Elementary Functions". In Fey J.T. (Ed.). 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 131-137.

10) 一松信 監修 (1995). グラフ電卓を数学に －活用の以後と教材集－. 教育社. pp.151-153.

11) 磯田正美 (1997).「数学内の関連づけを促す実験・観察アプローチ －表現変更型推論による仮説検証型探究を通して－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.35-48.

12) 片岡啓 (1996).「高校「微分法の応用」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第78巻. 第7号. pp.14-19.

13) 加藤達也 (1994). グラフ電卓を用いたラボラトリーアプローチについての一考察 －高校数学の解析分野を中心にした教材開発－. 筑波大学大学院修士論文. pp.106-138.

14) 公庄庸三(1999).「 M．T．Tの実践報告」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.3. pp.174-179.

15) Krumpe N. and Keiser J.W. (2003). "Getting to Know a Calculator's Numerical Limitations" . Mathematics Teacher. Vol.96. No.2. pp.138-140.

16) Leinbach L. C. (1991). "INTRODUCTION: The Laboratory Approach to Teaching Calculus" . In Leinbach L. C. (Ed.) . The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.ⅶ-ⅷ.

17) 永井政義 (1997).「２次関数をたばねて観察してみると －グラフ電卓による関数族の探究－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.130-138.

18) Polya G. (1954). いかにして問題をとくか. 柿内賢信訳. 丸善.

19) Polya G. (1959). 帰納と類比. 柴垣和三雄訳. 丸善.

20) 佐伯昭彦, 黒木伸明 (2004).「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第28回年会論文集, Vol.28. pp.377-378.

21) 斎藤斉, 高遠節夫 他 (2003). 新訂 微分積分Ｉ. 大日本図書. pp.38-56.

22) 坂本正彦 (1997).「実導関数の定義の必然性を探ると －プログラミングで微分の理解を深める－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書, pp.156-164.

23) 島田茂 (1995). 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ －授業改善への新しい提案－. 東洋館出版社. p.15.

24) 田代嘉宏, 難波完爾 編 (2000). 新編 高専の数学２（第２版）. 森北出版. pp.40-49.

25) 寺田文行 編 (1998). 高等学校 数学Ⅱ. 桐原書店. p.136.

26) 梅野善雄 (2004).「３次・４次関数に関する高専１年生の発見」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.8. pp.160-165.

27) Ward (1998). "Graphing Calculator-Associates Strategies Used by and Misconceptions of High School Students" . Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference.
http://mathforum/technology/papers/papers/ward.html.

28) Williams C.G. (1993). "Looking Over Their Shoulders: Some Difficulties Students Have with Graphing Calculators" . Mathematics and Computer education. 27(3) . pp.198-202.

29) 吉田建二 (1997).「微分の前に多次関数を！ －グラフのイメージが微分の理解を助ける－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察

アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」．明治図書．pp.148-155

第４章

数学と他教科とを関連づけた数学的活動とその実践

４．１　数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要

１．はじめに

２．３節では，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究が，我が国では 1996 年から行われたことを先行研究から明らかにした[1]．さらに，これらの先行研究では，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが分かった．このことから，我が国における実践研究では，数学的モデリングに関する生徒の課題とテクノロジー活用の課題[2]をある程度克服していると結論づけた．しかし，これらの実践研究は，長期的な実践が少なく，しかも，通常の学校教育で実践されるまでに至っていないことから，数学的モデリングに関するカリキュラムの課題と教師の課題は，今後克服すべき課題であることを指摘した．

ここでは，筆者が平成８年から金沢工業高等専門学校で実施している数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要について述べる．「数物ハンズオン」では，各種センサー，データ収集機［CBL : Calculator-Based Laboratory］およびグラフ電卓で身近な物理現象データを収集し，それを数学的に解析し，最終的には，解析した数学的モデルの物理的意味の解釈，さらに数学的モデルの検証・評価を行うことを実践の目的とした．この総合学習は，２年間で６つの物理現象のテーマを扱っており，２年間のカリキュラムでは現象の定式化（数学的モデルの作成），解釈・評価，より良いモデル化に関する能力を段階的に育成するようにテーマ及び教材が構成されている．これにより，身近に生じる実現象が授業で学習する数学や物理学に深く関係していることの実感と興味を増大させ，勉学への動機づけと基礎学力の定着を図っている（佐伯他，1998；佐伯他，1999）．

---

[1] ２．３節（pp.108-113）を参照．

[2] Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，テクノロジー活用の課題とリスクとして，単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性と，現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性を指摘している．詳しくは２．３節（pp.101-102）参照．

2．数学的モデリングを扱った総合学習の必要性

国際教育到達度評価学会（IEA : The International Association for the Evaluation of Educational Achievement）が 1999 年に報告した TIMSS-R（The Third International Mathematics and Science Study – Repeat）調査によると，我が国の中学生における数学問題の平均正答率は，前回（1995 年）の調査結果と同様に上位であった．これに対し，「数学は生活の中で大切」「将来，数学または科学を使う仕事がしたい」といった数学に対する意識は，前回と同様に低い結果であった（国立教育政策研究所，2001）．また，若者の「科学技術離れ」の現象は，将来の科学技術系の人材不足が予測され，科学技術立国としての大きな社会的問題として取り上げられている（黒杭，2002）．

現実の現象を理解するために，観察・実験で得られた情報をもとに現象を数学的モデルで解析・評価，さらには，未来を予測する科学的な手法は，プトレマイオスの天動説に始まったと言われている（丹羽，1999）．電気工学科と機械工学科の技術者を養成する金沢工業高等専門学校では，専門教科の授業や卒業研究において，実験などによる実現象データを数学で解析し問題解決することは必須である．このため，数学的モデルを扱った科学的手法を授業で経験することは，数学の有用性・実用性を理解し，数学を専門教科の中で積極的に活用する能力を身に付けるために必要であると考えた．

数学と物理はモノ造りと工学実験の基礎となることから，筆者を含む研究グループが平成５年度より，数学と物理とを関連させた総合学習の調査研究を行った．その結果，平成７年度に数学と物理とを関連させた実験・観察型授業「数物ハンズオン」の基本方針が決定した．

1) 数学と物理で学習する内容を相互に横断的・総合的に関連させた新たな授業を行う（図 4-1-1）．
2) 実験・観察による生徒の主体的な数学的活動を重視する．
3) 実験・観察には簡易なテクノロジーを活用する．
4) テストによる評価はしない．

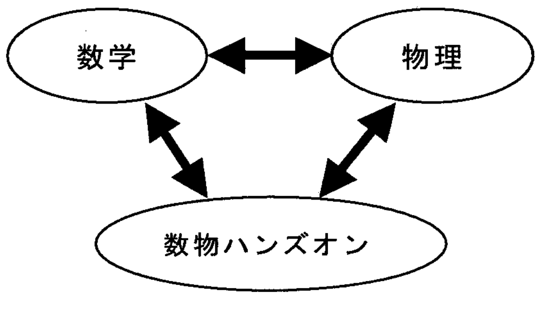


図 4-1-1．数物ハンズオンと授業の関連

この基本方針は，平成８年に中央教育審議会（1996）の「第１次答申」で提案された［生きる力］を育てるための横断的・総合的な学習と基本的に同じ考えであり，その答申を引き受けた教育課程審議会（1998）は，「審議のまとめ」でその名称を「総合

的な学習の時間」として具体的な提案を行った．この事実に対して，我々の「数物ハンズオン」は平成８年に既に総合学習を実践していたことになる．

３．「数物ハンズオン」の目的と達成目標

(1) 目的

「数物ハンズオン」では，生徒が主体となって身近な物理現象データをハンドヘルド・テクノロジーで収集・解析し，そのプロセスと結果から数学・物理の関連について興味と理解を得ることを目的とする．

(2) 達成目標

本総合学習を通して，生徒は以下の能力・技能を習得することを達成目標とする．

1) 実験を通して身近な自然現象を体験する．
2) テクノロジーを積極的に活用する．
3) 自分たちで実験を設計し実行する．
4) 実験結果を既習の数学と物理を使って解析する．
5) 自分たちの問題をグループ活動で解決し，まとめ，クラス全体に報告する．

４．「数物ハンズオン」の実施方法

1) 授業形態：約 50 人クラスで３－４人によるグループ活動
2) 対象学年：金沢工業高等専門学校，１年生と２年生
3) 授業者：佐伯昭彦，氏家亮子，槻橋正見[3]（ティーム・ティーチング［主：１人／副：２人］）
4) 実施時間：年間３－４テーマ，１テーマ３週間（45 分×６時間）
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)，データ収集機(CBL)，各種センサー

図 4-1-2 に「数物ハンズオン」で使用している実験装置の一例を示す．データ収集機，グラフ電卓と各種センサー（距離，音，温度，電流・電圧など）は，手のひらサイズで持ち運びが容易であり，しかも，操作が簡単である．さらに，安価であるため，少人数のグループで１台ずつの実験環境を整えることができ，生徒主体による実験が可能である．図 4-1-2 に示すように，データ収集機とセンサーで得られた実験データは，グラフ電卓のリストに格納され時系列のグラフとして表示されるため，生徒は得られた実験データを加工して数学的に解析し，最終的には，解析した数学的モデルの物理的意味の解釈を行うことができる．このように，これらのハンドヘルド・テクノロジーを活用することにより，実験データの収集

[3] 槻橋は，平成 14 年より金沢工業大学・工学基礎教育センター・教授に就任．現在に至る．

から解析・考察までの一連の探究活動が容易に行うことが可能となった．(佐伯他，1997；梅野，2002)．

筆者らは，これらのハンドヘルド・テクノロジーが，①「数物ハンズオン」の目的を補助する道具として適している，②実験操作が容易であることから実験の経験が少ない生徒にとって適している，といった理由で「数物ハンズオン」の実験装置として採用した．

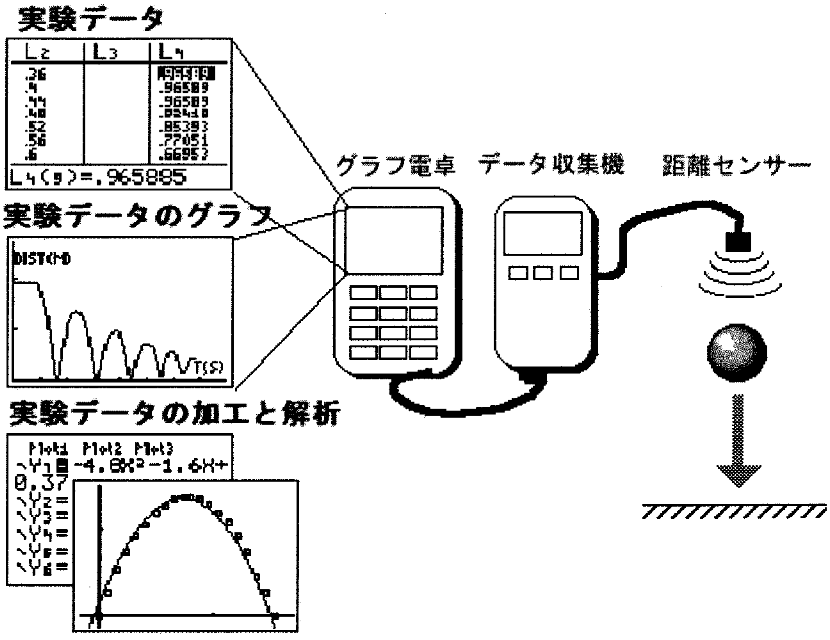


図 4-1-2. 実験装置例（ボールの実験）

5．「数物ハンズオン」授業の設計視点

(1) カリキュラムに位置づけられたテーマ構成

「数物ハンズオン」は，数学と物理の授業で学習する内容を相互に横断的・総合的に関連させた実験・観察型の授業であり，金沢工業高等専門学校のカリキュラムに位置づけられた教科「創造設計 I・II」[4]の一部として開設された．表 4-1-1 は，２年間で実施される７つのテーマ内容と通常の数学・物理授業で学習する項目の関連を示している．

「数物ハンズオン」を従来の数学と物理の教科と分離した理由を以下に列記する．

1) 生徒の主体性による実験・観察を行うには，ゆとりのある時間が必要である．

[4] 「創造設計 I・II」は，工学への動機づけと基礎理論の定着を目的に，モノ造りと工学的実験を取り入れた教科で平成８年より実施された．この科目には，「数学・物理系」「電気工学系」「機械工学系」のテーマが３週間のローテーションで実施され，１年生と２年生を対象とした必修教科である．筆者は，「数学・物理系」である「数物ハンズオン」の授業設計，教材開発，および，授業の実施と評価を担当した．

2) 松宮他(1995)の実践と同様に，それぞれの授業が相互に関連できるようにカリキュラムを構成する．つまり，現実世界を取り扱った「数物ハンズオン」の数学的活動において，数学や物理で学習した既習事項を活用しながら問題解決を行うことができる．これに対して，論理的抽象的な数学・物理を学習する普通授業に「数物ハンズオン」で実施した実験事例を取り扱うことができるため，「数物ハンズオン」と数学・物理授業における相互の関連づけが可能である．

3) 上記 2)により，通常の数学授業で実験・観察の時間を取り扱う必要がないため，従来教えてきた数学と物理の内容及び時間数を削減するといったマイナスの影響がない．

表 4-1-1.「数物ハンズオン」と数学・物理授業との関連

１年生のテーマ

学期	数物ハンズオン	数学	物理
１学期	面白い曲線を作ってみよう	関数の概念	速度と速さ
２学期	バウンドするボールの高さの変化を調べよう	２次関数・指数関数	鉛直落下・はねかえりの係数
３学期	君は音を見たことがあるか	三角関数・指数関数	音・波・音階

２年生のテーマ

学期	数物ハンズオン	数学	物理
１学期	振り子の振れる様子を調べてみよう	三角関数・無理関数	単振り子・単振動
２学期	充電・放電の様子を調べてみよう	指数関数	コンデンサー
３学期	未来を予測しよう	回帰分析	なし
	みそ汁の冷める変化を調べてみよう	指数関数	なし

(2) **数学的モデリング過程の能力育成を考慮したテーマ構成**

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的問題点の一つとして，定式化，解釈・評価，より良いモデル化は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることを指摘した．それ以来，数学的モデリングに関する実践および研究が行われているが，この問題点を解決するには至っていないのが現状である．池田（1999）は，数学的モデリング過程を経験していない大学生を対象とした調査において，数学的モデリング過程を促進する考え方は，中・高等学校での純粋数学の指導によって自動的に育成されない結果を明らかにしている．

このため，「数物ハンズオン」では，定式化（数学的モデルの作成），解釈・評価，より良いモデル化の能力について段階を追って徐々に育成するようにテーマ及び教材を構成した（表 4-1-2）．表 4-1-2 の右側の欄は，数学的モデリング過程の能力を①数学的モデルの作成，②数学的モデルの解釈，③数学的モデルの評価，④より良いモデル化，の４つに分類されており，各学期・各学年と進むにつれて数学的モデリング過

程の能力が徐々に習得できるように教材内容を構成した．なお，欄内の●印はワークブックに従って行われる生徒主体の探究活動を示し，○印は教師による指導，または，教師の補助によってクラス全体が議論をしながら結論を導いていく活動を意味する．一方，最後のテーマである「お湯の冷め方」の欄の※印は，実験結果の解析方法が自由な活動を意味し，①数学的モデルの作成以降の活動は，生徒自身の判断によって行われるものである．

表 4-1-2　数学的モデリング過程の能力を考慮したテーマ構成

	学期	数物ハンズオン	実験データの収集	数学的モデルの作成	数学的モデルの解釈	数学的モデルの評価	より良いモデル化
1年次	1学期	面白い曲線を作ってみよう		●			
	2学期	バウンドするボールの高さの変化を調べよう	●	●	○		
	3学期	君は音を見たことがあるか	●	●	○		
2年次	1学期	振り子の振れる様子を調べてみよう	●	●	●	●	
	2学期	充電・放電の様子を調べてみよう	●	●	●	●	
	3学期	未来を予測しよう		●	●	●	●
		みそ汁の冷める変化を調べてみよう	●	※	※	※	※

(3) 「数物ハンズオン」の特徴

a．現実性を持ったテーマ

各テーマは，松宮他（1995)が提唱する「現実性をもつ課題の総合学習」の条件を参考に設計されている．

1) 身近な物理現象を取り扱う［現実性］
2) 実験の解析の過程において，数学や物理の既習事項を横断的・総合的に活用する［総合性］
3) 実験のデータ収集から解析の過程では，生徒がグラフ電卓・データ収集機・センサー等のテクノロジーを用いて主体的に実験・探求する［実践性］
4) 1テーマを6時間で学習する［一連性］

b．科学リテラシーの育成

中学校で実験を経験してきた生徒が少ないことから，探究の仕方，問題解決の仕方，

発表の仕方などの科学リテラシーを習得している生徒は多くはない．この為，「数物ハンズオン」では以下の３点を重視している．

1) 実験データ収集前の予想の重要性

実験の目的や内容を明確にする意味で実験データ収集前の予想は重要である．さらに，我々人間は，学校で自然科学を学習する前から，物理現象に対して自分なりの誤った知識を経験的に構成していることがあり，こういった素朴概念（Osborne R. & Freyberg P.，1988；鈴木他，1989）を逆利用することも大切である．例えば，実験データ収集前の予想が実験結果と異なった場合，予想が違ったことに対する疑問を生徒が持てば，実験・観察への動機づけと興味を持つ可能性が高くなる．

2) 多角的な観察による数学的モデリング

図 4-1-3 に示すように，テーマ「ボールの落下実験」では，バウンドの一つの山を２次関数でモデル化し，さらに，バウンドの各頂点の変化を指数関数でモデル化するように，各テーマにおける物理現象を多角的に観察しモデル化を行う．

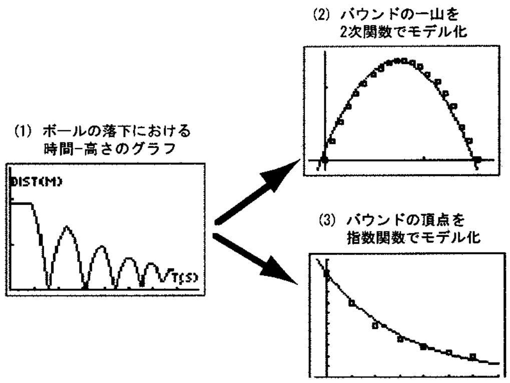


図 4-1-3．多角的な観察

3) 実験・観察技術とプレゼンテーション能力の育成

１年生のテーマでは，実験用のワークブックに従って授業が進められ，そこでは，各テーマの実験・観察の仕方，データ収集方法，データの読み方，解析方法等の問題解決のプロセスを習得する．次に，２年生のテーマになると，実験・観察の主導権及び主体性を徐々に生徒に移し，最後のテーマでは，実験の企画から報告書作成及びプレゼンテーションに至る全ての活動が，生徒の主体によって行われる．この時の教師の役割は，生徒の主体的な活動を促進するファシリテーターとなる．この様に２年間で６テーマを通じて，実験・観察技術とプレゼンテーション能力を徐々に習得していく様に各テーマが構成されている．

C．ワークブックの構成

我が国には，テクノロジーを活用した数学と物理の総合学習用の教科書等がないため，参考文献に挙げたようなアメリカの教科書や実践例を参考に，独自のワークブックを作成した（Brueningsen C., Bower B., Antinone L. and Brueningsen E.，1994；Johnny W. L., Maurice B. and et al.，1996）．本ワークブックの特徴は，実験の目的，手順，解析法等のほか「数学 Note」「物理 Note」「数物 Note」という項目を設け，実験結果の考察・探究の際，色々な視点から考察が行えるように配慮した．

・「数学 Note」：テーマで使用する関数の定義，特徴をまとめる．
・「物理 Note」：テーマで使用する物理の授業で学習した内容をまとめる．
・「数物 Note」：実験で得られた結果と考察を，数学と物理の両分野の観点から関連させてまとめる．

また，生徒が授業中に行う活動は以下のように分類されている．

・「練習」：実験装置の操作方法，実験データの解析方法が未学習または困難な場合，教師の指導のもとに生徒が一斉に操作方法や解析方法を練習する活動．
・「課題」：授業時間内に終了すべき基本課題．
・「挑戦」：上記の「課題」を終えたグループが行う応用課題．この応用課題を行うことにより，より発展的な理解が得られる．また，「課題」の実験で得られた数学的モデルや考察を再検証することにもなる．

d．評価方法

試験による評価は行わず，以下の項目において総合的に評価を行う．

1) 生徒の授業参加態度．
2) 実験課題数（授業時間内に終了すべき基本課題以外に応用課題が準備されている）
3) 報告書の内容．

6．テーマの概要（例）

ここでは，「数物ハンズオン」で実施した7つのテーマの中から，1年生の3学期に実施する音の実験「君は音を見たことがあるか！」の授業展開について，以下に紹介する[5]．

(1) テーマの目的

音の現象をグラフと数式で調べ，ペットボトル楽器を作る．さらに，求めた数学的モデルの物理的意味を考察する．

(2) テーマのねらい

1) 音の現象における振動数・周期・振幅の特徴を実験結果から探究し，それぞれの値の求め方を習得する．
2) 音階と振動数の関係から楽器の仕組みを調べる．さらに，ペットボトルで鳴らした音を三角関数でモデル化し，振動数・周期・振幅と数学的モデルの関係を理解する．
3) ペットボトルでド，レ，ミ，ソの音を作り「メリーさんの羊」の演奏会を行う．

---

[5] 音の実験に関しては，巻末の教材ワークシート（pp.258-260）を参照．また，この他のテーマに関する授業の概要については，氏家他（1997）と佐伯（2000）を参照．

(3) 各週における授業の概要

ａ．第１週目：「音の強弱や高低を数値で表してみよう！！」(45 分×２)

・**準備**：振動数の定義について学び，人間と犬について，出せる音と聞こえる音の振動数について比較する．

・**課題１**：CBL と音センサーを使って自分の声を収集してみる（図 4-1-4）．大きな声，小さな声，高い声，低い声を収集し，振動数（周期）と振幅の関係を視覚的に調べる（図 4-1-5）．

・**課題２**：プログラムに組み込んである３つのサンプルデータを使って，振幅，周期，振動数の値を計算で求める．それぞれの値を比較し，どのデータが一番大きな音であるか，また，どのデータが一番高い音であるかを調べる．

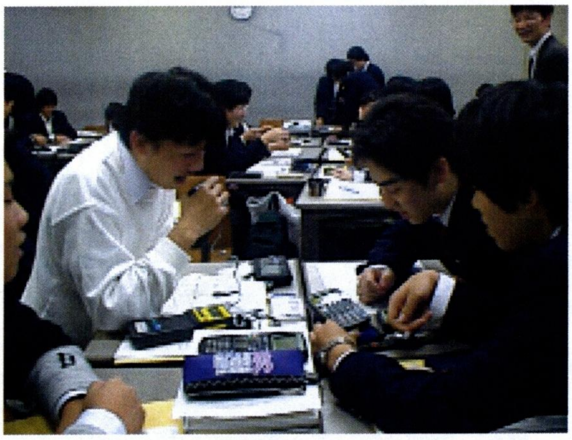


図 4-1-4．自分の声を見る

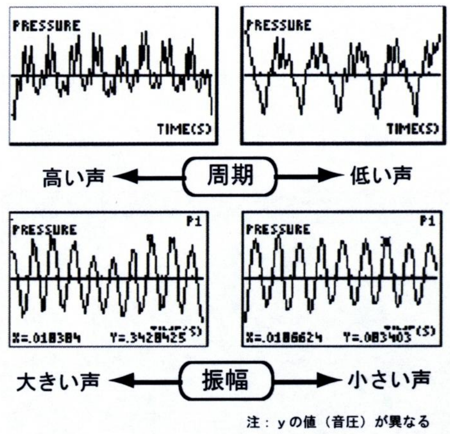


図 4-1-5．声と周期・振幅の関係

ｂ．第２週目：「楽器や音に潜む数学」(45 分×２)

・**課題１**：音階と振動数の関係を調べる．音階が一つ上がるごとに振動数が何倍になっているか，また，オクターブと振動数について，これらが指数関数に関係することを理解する（室岡，1997）．さらに，ギターやピアノの弦の長さも同様の関係があることを理解する（Savage，1979）．

・**課題２**：プログラムに組み込んであるサンプルデータを使って，振幅，周期，振動数の値を計算で求め，三角関数 $y = A\,sin\{2\pi F(x-D)\}$ でモデル化する方法を習得する(図 4-1-6)．次に，ペットボトルを吹いた音のデータ（空と水を入れた２種類のデータ）を CBL と音センサーを用いて収集し，収集したデータを三角関数でモデル化する．

・**挑戦**：収集データが指定された振動数（330Hz と 392Hz）になるようにペットボトルに水を入れ，そのデータを三角関数でモデル化する．

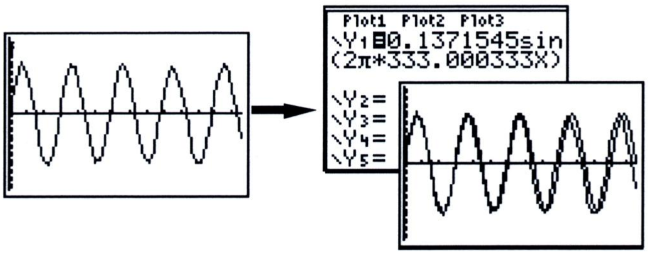


図 4-1-6．ボールのバウンドの解析方法

c．第３週目：「手作り楽器の演奏会！！」（45 分×２）

・**課題**：各班４人のグループにおいて，ペットボトルに水を入れてド，レ，ミ，ソのペットボトル楽器を作成する．CBL と音センサーで収集した音データをもとに４つの振動数を算出する．楽器作りが終了したら，「メリーさんの羊」の練習をする（図 4-1-7）．

・**演奏会**：全ての班が全員の前で演奏を行う．生徒全員で各班の演奏の評価を行い，上位３チームを選出する（図 4-1-8）．評価項目は，①良い演奏でしたか？　②音階の調律は良いですか？　③演奏態度は良いですか？　である．

図 4-1-7．楽器作りの様子

図 4-1-8．演奏会の様子

7．まとめ

ここでは，筆者が平成８年から金沢工業高等専門学校で実施している数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要について述べた．教材の開発・改良，授業の実施を行った教師の効果は以下の通りである．

1) これまで紙の上での知識として理解していた実現象と数学の関連性を，教材開発の段階における具体的な実験を通して改めて体で実感・理解できた．
2) 普段の授業においても実現象の話題を取り上げるなど指導に幅ができた．
3)「数物ハンズオン」授業では，普段の授業では見られない生徒の発言，行動，考え

方に接する機会があり，生徒の意外な考え方に教えられるなど，生徒とのコミュニケーションが増えた．

なお，「数物ハンズオン」における生徒の効果については，次節以降に記述する．

引用文献・参考文献

1) Brueningsen C., Bower B., Antinone L. and Brueningsen E.（1994）． Real-World Math with the CBL System ― 25 Activities Using the CBL and TI-82 ―． Texas Instruments.

2) Blum W. and Niss M.（1989）" Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.)． Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.

3) Blum W.（1991）． " Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.)． Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29

4) 中央教育審議会（1996）．２１世紀を展望した我が国の教育の在り方について（第1次答申）． http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/chuuou/toushin/960701.htm.

5) 池田敏和（1999）．「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」．日本数学教育学会誌．第85巻．第3号．数学教育論究．Vol.71・72．pp.3-18.

6) Johnny W. L., Maurice B. et al. (1996)． THE SIMMS PROJECT(Teacher's Edition)LEVEL 3 VOLUME 2. Simon & Schuster Custom Publishing.

7) 国立教育政策研究所編（2001）．数学教育・理科教育の国際比較 –第3回国際数学・理科教育調査の第2段階調査報告書–．ぎょうせい．

8) 黒杭清治（2002）．「理科離れについて考える」．工学教育．50．4．pp.27-34.

9) 教育課程審議会（1998）.幼稚園，小学校，中学校，高等学校，盲学校，聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について（審議のまとめ）． http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/kyouiku/toushin/980601.htm.

10) 三輪辰郎（1983）．「数学教育におけるモデル化についての一考察」．筑波数学教育研究．第2巻．pp.117-125.

11) 松宮哲夫，柳本哲（1995）．総合学習の実践と展開―現実性をもつ課題から―．明治図書.

12) 丹羽敏雄（1999）．数学は世界を解明できるか –カオスと予定調和–．中公新書．

13) 室岡和彦（1997）.音階による指数の探究 –LOGOとグラフ電卓を用いて指数のしくみを探る–．佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育―実験・

観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－」. 明治図書. pp.80-88.
14) Osborne R. and Freyberg P.著，森本信也，堀哲夫訳（1988）. 子ども達はいかに科学理論を構成するか−理科の学習論−. 東洋館出版社.
15) 佐伯昭彦，礒田正美，清水克彦編著（1997）. テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－. 明治図書.
16) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998）.「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム −身近な物理現象を数学的にモデル化する授業−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.
17) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999).「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」. 日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」. 産業図書. pp.295-313.
18) 佐伯昭彦（2000）. 数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究－身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業－. 平成 10－11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.
19) Savage S. S.（1979）. ”Vibes – the Long and Short of It” . In Sharron S. and Reys R. E.(eds.) . Applications in School Mathematics. 1979 Yearbook. NCTM. pp.125-136.
20) 鈴木宏昭他（1989）. 教科理解の認知心理学. 新曜社.
21) 氏家亮子，佐伯昭彦（1997）.「君は音を見たことがあるか？ −周期現象をデータ収集機で実験・観察する−」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－」. 明治図書. pp.89-99.
22) 梅野善雄（2002）.「数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果」. 工学教育. 50. 1. pp.22-27.

巻末資料３：教材のワークシート（pp.258-260）参照

４．２　数学的モデルの有用性に関する生徒の意識変容

１．はじめに

数学的モデリングを実践する意義の一つとして，生徒が数学を活用して実世界の現象の問題解決することにより，学校数学で学習する数学の有用性を感得することが挙げられる．実際に，池田・浜（1992），西村（2001）の実践研究では，授業後の生徒の感想内容から有用性を感得したと結論づけている．さらに，大澤（1996）の実践研究では，バトンパスの課題を数学的に解決し，実際にリレーのタイムが縮まったことの達成感から数学の有用性を体感したと結論づけている．これらの研究は，１つの実践後に調査した生徒の意識・態度から結論づけているのに対して，長期間の実践における生徒の数学に対する有用性の意識を調査した研究はこれまでに行われていない．

ここでは，数学的モデル（数式）を活用して実現象の問題を解決することの有用性に関して，２年間の「数物ハンズオン」を学習した生徒個々の意識変容について報告する[1]．調査した結果，実験結果を数式で表すことの有用性に関する生徒の意識は，３テーマ終了時に対して７テーマ終了時の方が向上していたことが分かった．特に，「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内容を記述した生徒が増えていたことが分かった．この結果，数学的モデリングの能力を育成する長期間のカリキュラムによって，数学の有用性に関する生徒の意識を向上させることが可能であることが明らかになった．

２．数式の有用性を感得させる教材開発の視点

実現象を数式で表現する利点を生徒に理解させるには，授業の最終目的が数学的モデルである数式を作成することだけではなく，その数学的モデルを使って如何に問題解決をするかを生徒に経験させることが大切である．このため，「数物ハンズオン」では，次の５つの視点で教材を開発している．

1) 数式を使って実験データ以外（未来）を予測する．

2) 実験条件と数式とを比較する．

---

[1] 実際の数学的活動では代数的表現である数式でモデル化を行っており，授業では数学的モデルのことを簡単に「数式」または「モデル式」として表現した．従って，本節では数学的モデルのことを「数式」または「モデル式」として記述した．

3) 数式の物理的意味を考察する．
4) 数式から実験条件を推測する．
5) 実験結果を他人に伝える．

以下に，これらの観点で開発した教材を２年１学期に実施する「単振り子の実験」を参考に紹介する(図 4-2-1)．

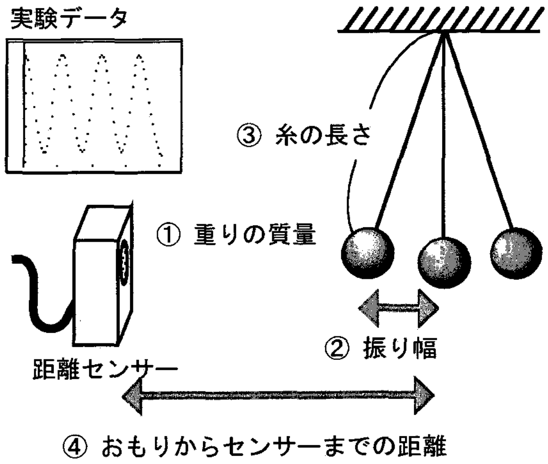


図 4-2-1．**単振り子の実験**

(1) 数式を使って実験データ以外（未来）を予測する

「単振り子の実験」の第３週目では，糸の長さと周期の関係に着目して，解析結果から得られた数式を活用して実験データ以外の値を予測することを行った．図 4-2-2 は，この実験における探究過程を示している．生徒は実験で得られたデータをグラフ電卓に入力・プロットし，プロットされたデータに一致する数式を定式化，さらに，得られた数式をグラフ的・視覚的に検証する．その後，次のような２つの課題を生徒に与え，生徒自身が算出した数式を利用して課題を解決した．

課題(a)：糸の長さを４ｍにしたときの振り子の周期を求めよ．
課題(b)：周期が 1.5 秒の振り子を作るには糸の長さはどれくらいにすれば良いか？

こういった問題場面を解決するために，身近な実験道具で実験を行い，得られた実験データから算出した数式を活用してデータ以外の値を予測することで，生徒が現象を数式で表現する利点と有用性を理解するきっかけとなることを狙いとしている．

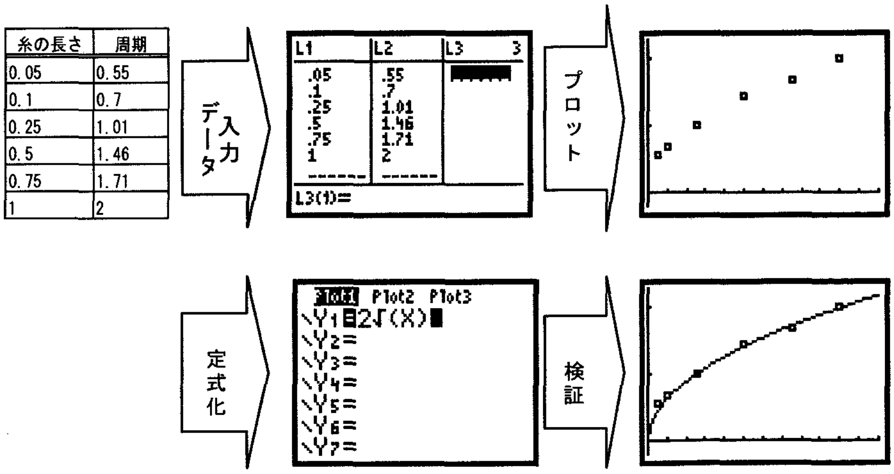


図 4-2-2．**振り子の糸の長さと周期との関係における解析の流れ**

(2) 実験条件と数式とを比較する

ハンドヘルド・テクノロジーを活用すると実験データが瞬時に収集できるのが特徴である．この特徴を利用して，グループ４人の生徒がそれぞれの実験条件を変更して実験を行い，個々の生徒が算出した数式と実験条件の比較を行わせた．図 4-2-3 の上の部分は，振り子の振り幅を４cm から８cm に変更し，さらに，おもりからセンサーまでの距離を 55cm から 65cm に変更した場合の実験結果である．これらの実験結果をもとに，実験条件の変更に伴って変化する数式の係数との対応関係，さらに，変化しない数式の係数との不変的関係を考察することは，実現象を関数的に捉える数学的な考え方の育成を狙いとしている．

〔班の結果〕
班のメンバーがそれぞれ行なった実験について、実験条件とモデル式を記録しなさい。
ただし、糸の長さは１m、おもりは鉄球とする。

担当者名	振り子の振り幅	センサーまでの距離	モデル式（実験データと一致した式）
	4cm	55cm	$y=5.02\cos(3.19)+55.8$
	8cm	55cm	$y=10.99\cos(7.1x)+54.31$
自分	4cm	65cm	$y=6.6\times\cos(3.11x)+67.09$
	8cm	65cm	$y=9.75\times\cos(4.21x)+68.09$

〔考察〕
班の実験結果から、各々の係数（
A，B，C）の物理的な意味を考えてみなさい。

係数	物理的な意味
(例) Tの値は？	振り子が一往復するのにかかった時間
Aの値は？	振り子の振り幅
Bの値は？	分からない ♡
Cの値は？	センサーまでの距離

その他、気づいたこと・発見したこと・疑問に思ったことがあったら、書きなさい。

式にちゃんとした意味を表していると分かった。
Bはおもりではないかと考えられる。

図 4-2-3．実験条件と数式との比較と物理的意味の考察

(3) 数式の物理的意味を考察する

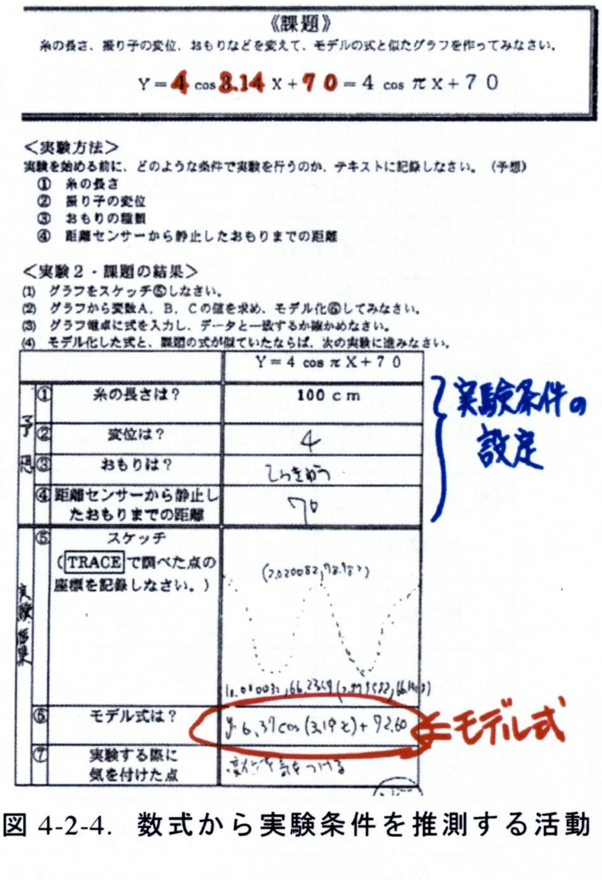
４つ実験で得られた数式と実験条件の関係を比較することで，数式の係数における物理的意味を考察させた．図 4-2-3 の下の部分では，生徒は振り子の振り幅が三角関数 $y = A\cos B(x - p) + C$ の振幅Ａと関係していることと，おもりからセンサーまでの距離がＹ軸方向の平行移動量Ｃに関係していることを考察している．この生徒は，Ｂ

の物理的意味は「分からない」と述べているが，「式にはちゃんとした意味を表していることが分かった．Bはおもりではないかと考えられる.」と実験中に考察したことを記述している.

科学的に法則を発見する場合に，いくつかの具体的な事例から一般に通じる法則を帰納的に推測することは重要である．ここでは，実験で得られた数式と実験条件とを関係づけて物理的意味を考察することにより，生徒はその現象に対する自分たちなりの公式（法則）を作るといった帰納的な推論を行わせている．さらに，生徒が帰納的に算出した公式について，物理の授業で学習した理論と関連づけることで，より確かな知識へと発展させることも授業で行っている.

(4) 数式から実験条件を推測する

上記の実験とは逆に，実験条件ではなく数式を与え，その式で表されるような実験をするにはどのような実験条件を設定すればよいのかという課題を行う．例えば，「モデル式が $y = 4\cos 3.14x + 70$ となるように糸の長さ，振り子の振り幅などの実験条件を設定して実験し，モデル式と同じような結果が得られるかどうかを確かめなさい」の課題では，生徒は糸の長さ等の実験条件を設定し，この設定で行なった実験結果を数式で表現し，与えられた数式と同様な結果が得られるかを検証する（図4-2-4）.



《課題》

糸の長さ、振り子の変位、おもりなどを変えて、モデルの式と似たグラフを作ってみなさい。

Y＝4 cos 3.14 X＋7 0＝4 cos π X＋7 0

<実験方法>

実験を始める前に、どのような条件で実験を行うのか、テキストに記録しなさい。（予想）

① 糸の長さ
② 振り子の変位
③ おもりの種類
④ 距離センサーから静止したおもりまでの距離

<実験２・課題の結果>

(1) グラフをスケッチ⑤しなさい。
(2) グラフから変数A，B，Cの値を求め、モデル化⑥してみなさい。
(3) グラフ電卓に式を入力し、データと一致するか確かめなさい。
(4) モデル化した式と、課題の式が似ていたならば，次の実験に進みなさい。

			Y＝4 cos π X＋7 0
予想	①	糸の長さは？	100 cm
	②	変位は？	4
	③	おもりは？	[illegible]
	④	距離センサーから静止したおもりまでの距離	70
実験結果	⑤	スケッチ（TRACE で調べた点の座標を記録しなさい。）	[illegible]
	⑥	モデル式は？	y＝6.37cos(3.19x)＋72.60
	⑦	実験する際に気を付けた点	[illegible]

図 4-2-4. 数式から実験条件を推測する活動

この課題は，上記(3)で帰納的な推論で算出した法則を実験で具体的に検証することが目的であり，与えられた数式から逆に実験を振り返るといった活動は，数学・物理の学習内容と実験（現象）との関連を深めるだけでなく，現象を数学的モデルである数式で表現することの有用性を実感させると考える.

(5) 実験結果を他人に伝える

２年間の最後のテーマである「お湯の冷め方」実験では，実験の企画，企画書作成，解析，報告書作成を全て生徒自身の力で実行し，最終的には実験結果のプレゼンテーションをクラス全員が行う．

この実験の解析方法は，各グループの判断によるもので，教師側から特に解析方法を提示しなかったため,生徒達はそれぞれの考えで実験データを解析する.このため，全てのグループのプレゼンテーションが終わった後に，それぞれの解析方法の利点を議論することにより，実験結果を他人に伝える方法として，数式で表した方が簡潔で明確であることを認識させる事が狙いである（図 4-2-5）.

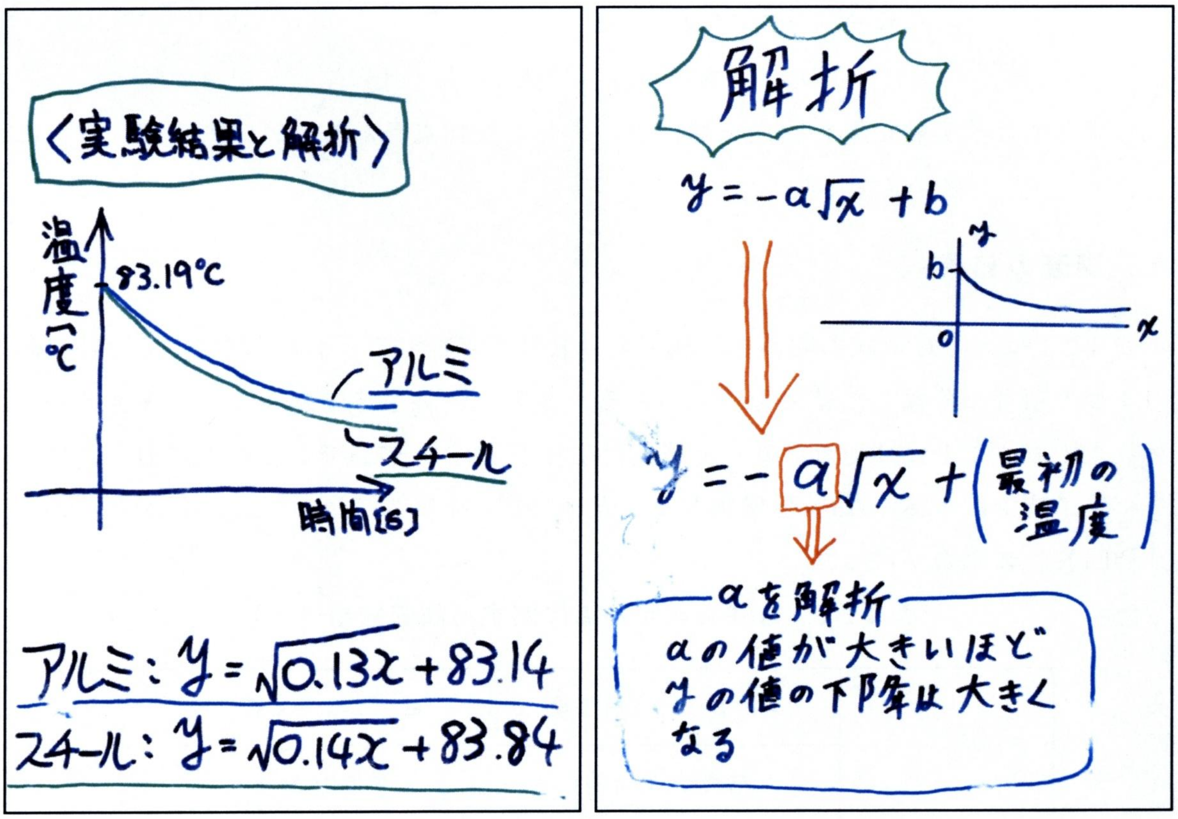


図 4-2-5.「お湯の冷め方」のプレゼンテーション用 OHP

３．調査の目的

数学的モデリングの過程を２年間かけて繰り返し体験することにより，実験データを代数的表現である数式で表すことの利点に関する生徒個々の意識変容を調べる．

４．調査の方法

1) 調査方式：質問紙による記述方式
2) 対象学年と人数：平成 11 年度入学生（電気工学科：約 100 名）
3) 調査時期：**Ａ．３テーマ終了後**
　２年次の授業開始時（平成 12 年４月）
　Ｂ．６テーマ終了後
　３年次の授業開始時（平成 13 年４月）
4) 調査項目：実験結果を数式で解析するとどんな利点があると思いますか．自由に書いて下さい．

５．調査の結果

表 4-2-1 は，記述形式の回答を「利点あり」，「利点なし」，「わからない」，「無回答」の４つの項目で分類した結果を示している．３テーマ終了時の調査では，実験データを数式で表すことに「利点あり」と答えた生徒が全体の 57％であったのに対し，７テーマ終了時では全体の 73％と増加していた．これに対して「利点なし」,「わからない」,「無回答」の割合が減った．

表 4-2-1．数式で表す利点に関する調査結果（１）

	Ａ．３テーマ終了後	Ｂ．７テーマ終了後
	平成 12 年４月	平成 13 年４月
有効回答数	104 人	96 人
無回答	3 人（ 3%）	1 人（ 1%）
わからない	25 人（24%）	16 人（17%）
利点なし	17 人（16%）	9 人（ 9%）
利点あり	59 人（57%）	70 人（73%）

表 4-2-2 は,「利点あり」と応えた生徒の記述内容をさらに詳しく分析した結果である．生徒の記述内容において，数式で表す利点の根拠が具体的に記述されていた割合が，３テーマ終了時では全体の 51%であったのに対し，７テーマ終了時では全体の 80%と増加していた．さらに，利点の根拠が記述されていた記述内容を前項で示した教材開発における５つの観点に分類し，分類別の人数を表 4-2-2 の下部に示した．この結果,「実験データ以外を予測」と「物理的意味の考察」に関する内容を記述した生徒が顕著に増えたことが分かった．

表 4-2-2．数式で表す利点に関する調査結果（２）

		調査幾期間	
		調査Ａ	調査Ｂ
特定の根拠なし・不明		２９人 (49%)	１４人 (20%)
具体的な根拠あり		３０人 (51%)	５６人 (80%)
利点の根拠	(1) 実験データ以外を予測	１５人	３８人
	(2) 実験条件と数式との比較	３人	３人
	(3) 物理的意味の考察	５人	１２人
	(4) 数式から実験条件を推測	２人	６人
	(5) 実験結果を他人に伝える	６人	５人
	注：一人で利点の根拠を複数回答している場合あり		

６．考察

ここでは，現象を数式で表す利点について生徒が記述した根拠を，教材開発の５つの観点で考察する．

(1) 数式を使って実験データ以外（未来）を予測する

生徒が記述した内容には,「実験結果を数式で解析すると，実験しない値もある程度予想できる.」,「 実験して測定した値以外の値を推測できる.」,「 例えば１億年後,・・・，○ｋｍの高さ・・・なんて，実験では結果を求められないものを求めることができる.」など,『実験していない値(未来)を予測できる』といった意見が多かった．このように「実験データ以外を予測できる」と記述した生徒は，３テーマ終了時に 15 人であったのに対し，７テーマ終了時には 38 人に増えた（表 4-2-2 参照).

これは，授業内で次の２点を強調しながら指導を行なったためだと考える．

1) 実験は，限られた測定時間の中で行われており，決してその現象すべてのデータを収集している訳ではない．
2) もしその傾向が今後も続くとしたら，その後の変化の様子は式から判断することができ，かつ，値（予測値）を求めることもできる．

ちなみに，数式から予測するのは「未来」であると答えた生徒が多かったのは，２年間で取り扱った６つの物理現象の実験が，時間に伴って変化するものを対象にしたためと思われる．

得られたデータをもとに数学的モデルである数式を作成しデータの範囲外の値を予測することは，科学的な手法のねらいの一つであり，「数物ハンズオン」の授業において，数学的モデルである数式が重要な役割を果たしていることを生徒に認識させることができたと言える．

(2) 実験条件と数式とを比較する

生徒が記述した内容には,「数式で変化のしかたや比較ができるのでいいと思う」という意見があった．

「数物ハンズオン」の授業では，実験条件を変更して実験を行い，実験条件の変更に伴って変化する数式の係数と，変化しない数式の係数を比較することにより，実験条件と数式との対応関係を考察している．しかし,「比較しやすい」と記述した生徒は，３テーマ終了時には３人で，7テーマ終了時には同数の３人であった（表 4-2-2 参照）．

(3) 数式の物理的意味を考察する

生徒が記述した内容には,「法則や公式が発見できる」,「違う条件のもとでも数式の変数を置きかえればだいたいの結果を求めることができる」という意見があった．記述中の「法則・公式」や「数式の変数」は，数学的モデルである数式の物理的意味を意識していると考えられ，このように記述した生徒は，３テーマ終了時には５人であったのに対し，７テーマ終了時には 12 人に増加した（表 4-2-2 参照）．

複数の実験結果を数式で解析すると，結果を比較しやすくなる（上記(2)）とともに，数式の物理的意味を帰納的に推論する「数物ハンズオン」の活動を通して，数式に示されている物理的意味の関係性を生徒に認識させることができたと言える．

(4) 数式から実験条件を推測する

生徒が記述した内容には,「数式がわかればどんな実験をしたかや，どういうグラフになるかがわかる」,「数式を使って解析するとどの数をどの式にあてはめるかで，何かが理解できるようになったかな？」,「結果の裏付けがしやすくなる」といった意見

があった．このように「数式から実験条件を推測する」と記述した生徒は，３テーマ終了時には２人であったのに対し，７テーマ終了時には６人に増加した（表 4-2-2 参照）．

実験で得られた数式の物理的な意味づけを行い，自分なりに法則･公式を作ることができることにより，次の段階ではそれとは逆に，式が与えられたとき，その式からどのような実験を行なったのか予測することができるようになるといったことを生徒が認識したと言える．

(5) 実験結果を他人に伝える

生徒が記述した内容には，「グラフを口で伝えることができる」，「数式を教えるだけなので伝わりやすい」，「数式を用いることで実験結果が分かりやすくなったり，他の実験の時に応用できる．そして相手に説明する時等，より説得させることができる」，「その値を基にデータを再現できるようになるため，どんな人にでも分かるようになる．解析方法を書くとなお良い」といった意見があった．

実際のプレゼンテーションでは，「言葉」「数値（平均や差）」「グラフ」「代数的表現（数式）」等の表現方法による実験結果の報告が行われた．このため，プレゼンテーション後にクラス全体で，それぞれの解析方法の利点を議論した．その結果，実験結果を他人に伝える方法として，数式で表した方が簡潔で明確であることを認識した生徒が増加した結果が得られた．しかし，「実験結果を他人に伝えやすい」と記述した生徒は，３テーマ終了時には６人であったのに対し，７テーマ終了時には５人に減少した（表 4-2-2 参照）．

７．まとめ

本稿では，「数物ハンズオン」の概要と数式（数学的モデル）の有用性に関する生徒の意識変容について報告した．調査の結果から，実験結果を数式で表すことの有用性に関する生徒の意識は，３テーマ終了時に対して７テーマ終了時の方が向上していたことが分かった．特に，「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内容を記述した生徒が顕著に増えていたことが分かった．

ハンドヘルド・テクノロジーの活用は，実験データが容易に収集でき，解析した数学的モデルの検証がグラフ的・視覚的に即座に行える利点がある．このため，予想→実験→解析→検証といった一連の探究過程を繰り返し行うことが可能になった．さらに，グループ内での実験結果を共有することにより，生徒同士の会話や討論を行う活動が増えた事が生徒の意識向上に繋がったと考える．

普段の授業では，「すでにできあがった法則・公式」として教科の内容を学習するこ

とが多いが，生徒が「自らの力で実験・探究した結果から法則・公式を作り検証する」といった学習経験が未来の科学者・技術者を育成するために必要であると考える．

引用文献・参考文献

1) 池田敏和，浜泰一（1992）．「高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 74 巻．第 7 号．pp.42-50.

2) 西村圭一（2001）．「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 83 巻．第 11 号．pp.2-12.

3) 大澤弘典（1996）．「現実場面に基づく問題解決 −グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 9 号．pp.16-20.

4) 佐伯昭彦（2002）．生徒個々の数学的モデリング能力に応じた総合学習の教材開発に関する研究ー簡易テクノロジーを活用した数学と理科との総合学習ー．平成 12ー13 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 12680291，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書．

5) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「数学と物理とを統合したクロスカリキュラム型授業の教育効果」．工学教育．51 巻 1 号．pp.109-114.

４．３　数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法
－回帰モデル機能を用いたより良いモデル化－

１．はじめに

２．３節では，数学的モデリングにおけるテクノロジーの活用として，①データ収集の補助，②データ解析の補助，③シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つの方法があることを紹介した．さらに，ハンドヘルド・テクノロジーの活用の利点の一つとして，回帰モデル機能の活用により，未学習内容の関数が数学的モデルとして取り扱うことができることと，数学が不得手な生徒でも数学的モデリングの活動に参加することができることを示した．しかし，それらの利点に対して，生徒の数学的活動がボタンプレッシングに陥る危険性があることが，今後の研究課題として取り上げられていることも示した[1].

この課題に対して，数学的モデリング過程の「解釈・評価」および「より良いモデル化」の段階において，回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性を検討し，適切な数学的モデルを選択する数学的活動の実践を行った．ここでは，生徒が記述したレポートをもとに，生徒自身が行った数学的モデルの妥当性の検討方法と最適な数学的モデルの選出方法について分析した．

２．これまでの研究の問題点

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的意義と問題点の中で，「定式化」，あるいは「解釈・評価」は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能を要求することを問題点の１つとして挙げていることは既に述べた．実際にテクノロジーを活用しない実践研究では，「解釈・評価」さらに「より良いモデル化」に焦点をあてた研究は少ないようである．この原因について，佐伯他（1998）は，生徒の焦点が数学的モデルを作成することに集中しすぎるため「解釈・評価」さらに「より良いモデル化」の過程まで至らないことを指摘している．

これに対して，テクノロジーの回帰モデル機能を活用することにより，数学的モデリングの過程における「定式化」と「数学的作業」の過程が軽減でき，数学的モデルの「解釈・評価」と「より良いモデル化」の過程に焦点を当てることが可能になった．実際に我が国の実践研究をレビューしてみると，中学校の実践においても，回帰モデ

[1] ２．３節（pp.99-112）を参照．

ル機能が数学的モデリングの道具として有効に活用されている（大澤，1996；柳本，1996；大澤，1998a；大澤，1998b；柳本，1998；大澤，1999）．しかし，テクノロジーの回帰モデル機能はブラックボックスであるため，回帰分析の理論を学習していない生徒が道具の使い方を誤ると，数学的モデリング過程における数学的作業は，グラフ電卓のボタンを押す操作だけに終わり「より良いモデル化」が行われない危険性があることも先行研究で指摘されている（Blum and Niss，1989；Blum，1991）．

大澤（1996，1998a）と Brown（1998）の実践研究では，式中心による代数的解決は行われなかったが，グラフ電卓の回帰モデル機能から得られたグラフ的・数値的情報を活用してより良いモデル化へと検討・修正が行われ，生徒が数学を活用して実世界の問題を解決することの意義を理解した事例が報告されている．これらの実践の特徴は，取り扱われた題材が生徒にとって身近で興味があったことと，複数の生徒達（大澤の実践では４人の小グループ，Brown の実践ではクラス全体）による議論を行う過程で「より良いモデル化」が行われたことである．

一方，Zbiek（1998）は，数学教員の養成講座を受講した 13 名の生徒を対象に，テクノロジー（コンピュータのグラフィングツールやグラフ電卓）で数学的モデルを作成・検証する生徒の方略を分類した結果を報告している．彼女は，数学的モデリング過程における活動中の発話プロトコル，活動観察報告，生徒のレポート内容等をもとに分析を詳細に行った結果，次の４つに方略を分類した．

方略(1)：テクノロジーで算出した複数の回帰モデルの中から，当てはまりの尺度（goodness-of-fit values）のみで最適な数学的モデルを選択した方略

方略(2)：テクノロジーで算出した複数の回帰モデルの中から，データの散布図の傾向と関数の特徴を比較検討して最適な数学的モデルを選択した方略

方略(3)：テクノロジーで算出した全ての回帰モデルが妥当でないと判断した後に，データの散布図の特徴を考慮しながら数学的モデルを自らの力で作成・評価，さらには，より良いモデル化を行った方略

方略(4)：テクノロジーを活用しないで，個人の経験と洞察により，持っている知識（例えば割合）を適用した方略

このように，テクノロジーの回帰モデル機能を活用した実践研究と調査研究が徐々に行われてきているが，生徒の「解釈・評価」および「より良いモデル化」における能力向上に焦点をあてた教材開発と教育的効果について言及した研究はあまり見られないのが現状である．

３．調査の目的と方法

本調査の目的は，生徒が「解釈・評価」および「より良いモデル化」が可能になる段階のステップとして，「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」活動を行う指導の意義と効果について明らかにすることである．

そのために，Zbiek の調査研究の方略(2)を参考に教材を開発し，生徒が行ったモデル化活動をもとに以下の２点を調査する．

1) 個々の生徒がどのような方法で数学的モデルの妥当性を検討するかについて調査する．
2) 個々の生徒が複数の数学的モデルの中からどのような方法で最適な数学的モデルを選択するかについて調査する．

調査で使用した教材は，Demana(1996)の実践による「アメリカの公立学校におけるコンピュータ数の変化の予測」の課題を参考に開発した．この教材では，まずコンピュータ１台あたりの生徒数に関する過去のデータをもとに，グラフ電卓の回帰モデル機能を使って７つの数学的モデルを作成し，さらに，それぞれの数学的モデルの妥当性を検討した上で最適な数学的モデルを選択し，その理由を記述する形式で行った．この社会現象データを取り扱った理由は，データの減少傾向が一定（直線的）でないため，複数の数学的モデルの中から最適なモデルを選択するための議論が出やすいためである．

４．調査の概要

(1) 調査方法

1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生約 50 名（２クラス）
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2000 年 11 月 28 日，2001 年 1 月 30 日
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)
6) 前提知識：２次・無理・分数・指数・対数・三角関数は１年次で履修済み

(2) 調査に使用した教材の概要

a．教材の目標

実際の社会現象データを題材に，グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した数学的モデルの妥当性を考察することにより，数学的モデルの「解釈・修正」，さらに，「より良いモデル化」が可能になる段階のステップとして，「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」活動の意義を理解する．

b．教材の題材と展開

Year	生徒数
1983	125
1984	75
1985	50
1986	37
1987	32
1988	25
1989	22
1990	20
1991	18
1992	16
1993	14
1994	12

[題材] 学校でのコンピュータ利用（Demana, 1996）

右の表は，1983 年から 1994 年のアメリカの公立学校でのコンピュータ 1 台における生徒数を表している．この傾向が続くとしたら，2000 年ではコンピュータ 1 台における生徒数は何人になるだろうか．(Source: Quality Education Data)

[予想]

データを観察して 2000 年の値を予想する．

[数学的モデルの妥当性の検討]

グラフ電卓の回帰モデル機能を活用して 7 つの数学的モデル（表 4-3-1）を算出し，さらに，それぞれの妥当性を以下の手順で検討しプリントに記述する（図 4-3-1）．

・それぞれの数学的モデルを求め，その結果のグラフを描写する．(グラフの描写は，データの散布図の傾向と数学的モデルとを視覚的に比較することを意図している)

・求めた数学的モデルから 2000 年の値を求める．(算出した値の解釈・評価により，数学的モデルを数値的に検討することを意図している)

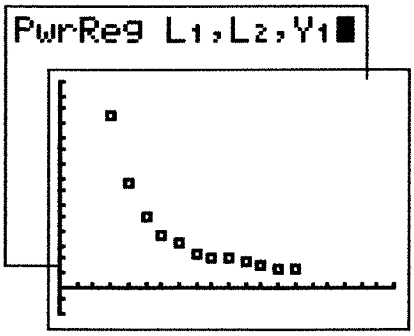
・数学的モデルの妥当性を考え，その理由を記述する．(理由を記述することで，最適な数学的モデルを選択する時の検討基準を考察し表現することを意図している)

[最適な数学的モデルの選択]

7 つの数学的モデルを比較し，最適だと思われる数学的モデルを選択し，その理由を記述する．

表 4-3-1．教材で使用した回帰モデル機能

回帰モデル	コマンド
一次回帰モデル	LinReg(ax+b)
二次回帰モデル	QuadReg
三次回帰モデル	CubicReg
四次回帰モデル	QuartReg
対数回帰モデル（底はｅ）	LnReg
指数回帰モデル	ExpReg
ベキ乗回帰モデル	PwrReg



＜モデル式は小数点第３位四捨五入＞

モデル式	
2000年	
妥当性	良い　　　悪い
理由	

図 4-3-1. 数学的モデルの妥当性を記述する欄

c．グラフ電卓の活用目的

大澤（1998）と Brown（1998）の実践研究と同様に，本教材では数学的モデルと 2000 年の値を算出するための道具としてグラフ電卓の回帰モデル機能を活用した．グラフ電卓で数学的モデルと 2000 年の値を算出することにより，図 4-3-2 に示す定式化と数学的作業の過程を軽減することが可能になる．このため，生徒は数学的モデルの妥当性とより良いモデル化の検討に十分な時間をかけることができ，個々の生徒が自由な発想のもとで数学的モデルの妥当性の検討と最適な数学的モデルの選択が行えると考えた（図 4-3-2）．さらにグラフ電卓は，算出した回帰モデルのグラフとデータの散布図とを同時に表示することができるため，数学的モデルの妥当性を視覚的に比較検討することが容易に行える利点もある（図 4-3-3）．

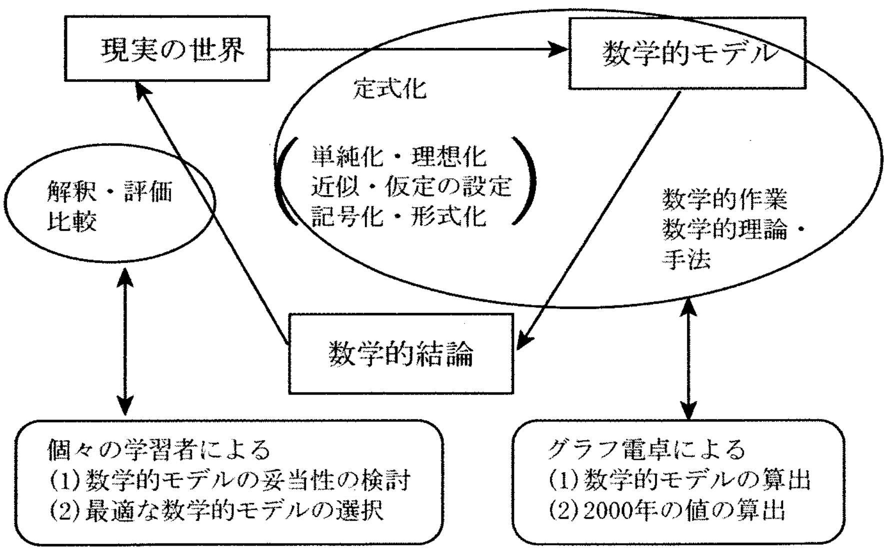


図 4-3-2. 数学的モデリング過程における教材の焦点

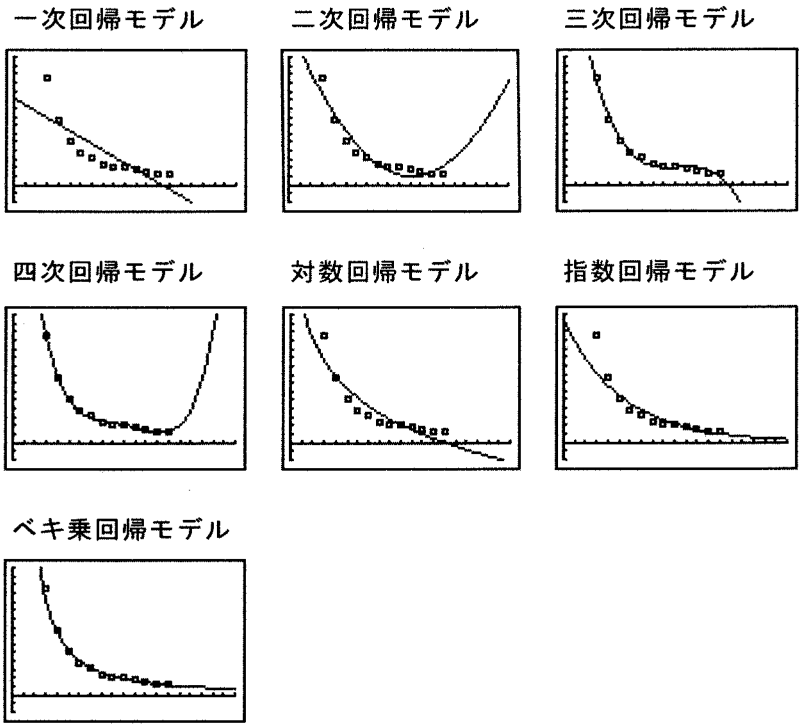


図 4-3-3.　回帰モデル機能によるグラフの表示結果

5．調査の結果

図 4-3-3 に示したように，グラフ電卓の回帰モデル機能による数学的モデルのグラフと 2000 年の値の算出結果から，生徒達はそれぞれの考えで数学的モデルの妥当性を検討し，さらに，より良いモデルの選出を行った．ここでは，生徒のレポート結果をもとに，(1)数学的モデルの妥当性の検討方法と，(2)より良いモデル化への検討方法について分析した結果を述べる．

(1) 数学的モデルの妥当性の検討方法

生徒のレポート内容を分析した結果，数学的モデルの妥当性に関する検討方法は，以下の３つの方法で行われていた．

1) 数値的表現による検討
2) グラフ的表現による検討
3) 数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討

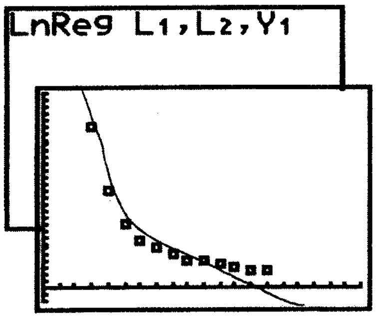
以下，それぞれの検討方法について詳しく説明する．

a．数値的表現による検討

図 4-3-4 に示す生徒は，対数回帰モデルで求めた数学的モデル（$Y_1 = 164 - 62 \times \ln(x)$：図 4-3-4 は生徒の記入ミス）の妥当性が悪い理由について，「世界が崩壊してもマイナ

スにはいかない」と記述している．これは，生徒が算出した2000年の値が−22人／台であるため，マイナスの値が現実性に欠けることを生徒自身の表現方法で記述したものである．つまり，この生徒は，数値的表現である2000年の値を用いて，対数回帰モデルで求めた数学的モデルの妥当性を検討していると考えられる．

(5) 9: LnReg ：対数回帰モデル



＜モデル式は小数点第3位四捨五入＞

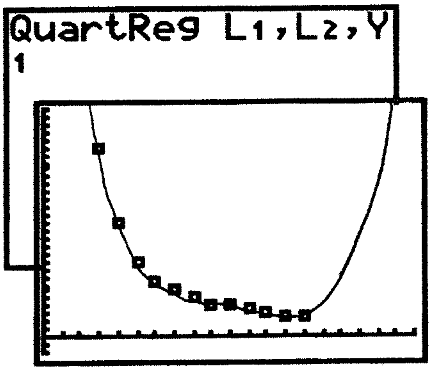
モデル式	y=164−62x
2000年	−22台
妥当性	良い　　悪い
理由	世界が崩壊してもマイナスにいかない

図 4-3-4．生徒の数値的表現による検討方法

b．グラフ的表現による検討

図4-3-5に示す生徒は，四次回帰モデルで求めた数学的モデル（$Y_1 = 0.04x^4 - 1.72x^3 + 25.52x^2 - 167.94x + 440.41$）の妥当性が悪い理由について，「データとグラフがほぼ一致しているけど，94年以降，急に上昇しているので良いグラフではないと思う.」と記述している．これは，データの散布図と数学的モデルのグラフが1994年まで一致しているが，求めた数学的モデルは1994年以降の未来の予測に相応しくないことを述べている．つまり，散布図と数学的モデルのグラフが視覚的に一致しているかどうかが妥当性の検討判断の基準であり，この生徒は数学的モデルをグラフ的表現によって検討していると考えられる．

(4) 7: QuartReg ：4次回帰モデル



＜モデル式は小数点第3位四捨五入＞

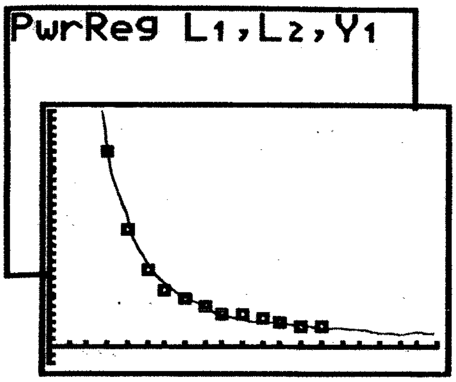
モデル式	$y=0.04x^4-1.72x^3+25.52x^2-167.94x+440.41$
2000年	352.70人／1台
妥当性	良い　　悪い
理由	データとグラフがほぼ一致しているけど、94年以降急に上昇しているので良いグラフではないと思う。

図 4-3-5．生徒のグラフ的表現による検討方法

c．数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討

図 4-3-6 に示す生徒は，べき乗回帰モデルで求めた数学的モデル（$Y_1 = 545.93 \times x^{-1.45}$）の妥当性が良い理由について，「こんなピッタリのグラフがあっていいのか！！？（笑）ちゃんとそれぞれの値もきっちり取ったし，2000 年の値もなかなかであります．すごい！！おみそれしました（笑）」と記述している．この記述の前半は，データの散布図と数学的モデルのグラフが視覚的に一致しているかどうかについてのグラフ的表現による検討である．さらに，後半の記述は，数的表現である 2000 年の値が妥当であるかどうかについての検討である．つまり，数学的モデルの妥当性の判断基準として，グラフ的表現と数値的表現の２つの表現で考察されている．

(7) A: PwrReg ：べき乗回帰モデル



＜モデル式は小数点第 3 位四捨五入＞

モデル式	$Y_1 = 545.93 \times x^{-1.45}$
2000 年	7.19人／台
妥当性	良い　　悪い
理由	こんなピッタリのグラフがあっていいのか!!?(笑) ちゃんとそれぞれの値もきっちり取ったし 2000年の値もなかなかであります。すごい!! おみそれしました(笑)

図 4-3-6．生徒の複数の表現による検討方法

(2) より良いモデル化への検討方法

課題「学校でのコンピュータ利用」における最後の探究は，７つの数学的モデルを比較し，最適だと思われる数学的モデルを選択し，さらに，その理由を記述することである．ここでは，生徒のレポートから特徴的なものを３つ紹介する．

a．数学的モデルの妥当性の検討基準のまとめ

図 4-3-7 に示す生徒は，１番良い数学的モデルとして，べき乗回帰モデルを選択している．その選択理由として，３つの検討基準が記述されている．

最初の検討基準「①データのプロット点とモデル式によるグラフがほとんどあっているから.」は，データの散布図と数学的モデルのグラフとの一致を視覚的に行っていることから，グラフ的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる．

２つめの検討基準「② x の値が多くなっていくにつれ，y の値が小さくなる.」は，与えられたデータの傾向から判断して，数学的モデルは単調減少であることを述べて

いる．この検討基準に「値」という言葉が記述されていることから，数値的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる．

最後の検討基準「③ yの値が負の値にならない⇒漸近線」も２つめの検討基準と同様に「値」という言葉が記述されていることから，数値的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる．さらに，記述中の「漸近線… $y=0$」は，べき乗関数のグラフの特徴を捉えることにより，かなり先の年の値も予想している様子が見られる．

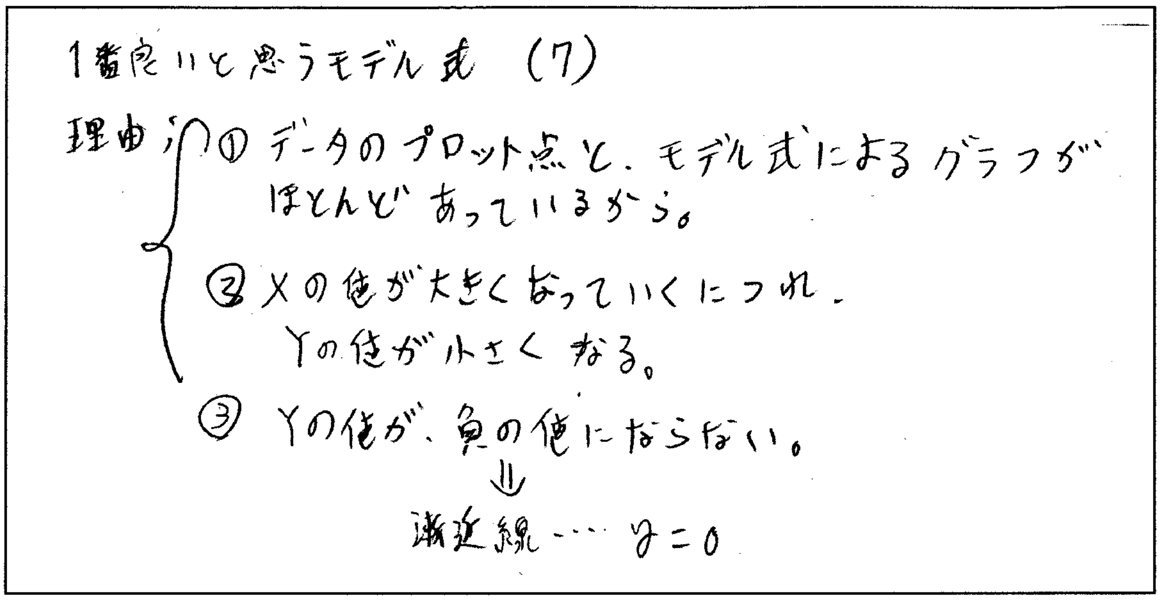


図 4-3-7. 数学的モデルの妥当性の検討基準のまとめ

b．現実場面と数学的結論の対比による検討

図 4-3-8 に示す生徒は，べき乗回帰モデルと指数回帰モデルを比較した結果，１番良い数学的モデルとして指数回帰モデルを選択している．

記述中の「べき乗も一見近いような気もするが，最終的には後の方のデータの差を重視したようなあまり差のないグラフを示しているが，」では，両方のグラフを視覚的に比較した結果，べき乗回帰を選択しようと考えたが，データの後半部分ではべき乗回帰モデルと指数回帰モデルにおいて差がないことから，次の記述に見られる数値的表現による検討へと展開したと考えられる．つまり，「実際，この問題の場合，一人一台以上のＰＣを持ってもおかしくない問題なので，指数モデルがこの中では一番近いんじゃないかと思う．個人的に考えておそらく一人に３台くらいが実際と考えて（グラフ上の傾向としては）もおかしくないんじゃないだろうーか.」では，指数回帰モデルとべき乗回帰モデルの 2000 年の値を比較して，指数回帰モデルが 3.26 台（実際には 3.26 人／台であり，生徒の誤解である）が，べき乗回帰モデルの 7.19 台よりも現実的であることを理由に指数回帰モデルを選択したと考えられる．

この生徒は2000年の値の単位を間違えているが，グラフ的表現の検討で選択したべき乗回帰モデルよりも，数値的表現の検討で選択した指数回帰モデルがより現実的であることの判断で指数回帰モデルを選択したと考えられる．つまり，数値的表現とグラフ的表現だけでなく，実際の現実場面と数学的結論とを関連させて考察することにより，最適な数学的モデルを選択したと考えられる．

(6) のモデルが一番妥当であると思う。
べき乗も一見近いような気もするが、最終的には後の方のデータ
の差を重視したような あまり 差のない グラフを示しているが、
実際、この問題の場合、一人 一台以上 PCを持っても
おかしくない問題なので、指数モデルがこの中では一番
近いんじゃないかと思う。個人的に考えておそらく 一人に3台
くらいが実際と考えて(グラフ上の傾向としては)も おかしくないん
じゃないだろーか。

まあ、スペックを考えなければ、日々進化し安価になっていくパーツ
を見れば、対数モデルの結果が一番妥当であるとも言える。
(実際必要じゃないだけで。)

図 4-3-8．現実場面と数学的結論の対比による検討

c．２つの数学的モデルの併用

図 4-3-9 に示す生徒は，１番良い数学的モデルとしてべき乗回帰モデルを選択している．

記述中の「グラフ上の点をきっちり通っているし，2000年の値予想もなかなかのものです.」から，グラフ的表現と数値的表現の検討によって数学的モデルを選択したと考えられる．次に，「でも４次回帰モデルのやつも捨てがたいです．この全部のグラフの中でいちばんグラフ上の点がとれたのはコイツです.」から，1994年までのデータにおいては，４次回帰モデルのグラフがデータの散布図と視覚的に一番一致していることを述べており，その結果，1994年を境に，過去を４次回帰モデル，さらに，

未来をべき乗回帰モデルと２つの回帰モデルを併用することを考えた．生徒は，「…そんなことできるでしょうか？」と，少々控えめな意見を述べているが，この柔軟で大胆な発想には驚かされた．

この生徒は，最適な数学的モデルを選択する探究において，７つの数学的モデルのグラフとデータの散布図の差を視覚的に検討した結果，1994 年以降の傾向が変化したと捉え，２つの数学的モデルを併用することで「より良いモデル化」を行ったと考えられる．こういった数学的モデルの併用を行った生徒は一人のみであったが，これは偶然行われたものではなく，テクノロジーを活用することにより，複数の数学的モデルの中から最適な数学的モデルを選択する探究に十分な時間がかけられ，しかも，数学的モデルと散布図とをグラフ的に比較検討できたことが大きな要因になっていると考える．

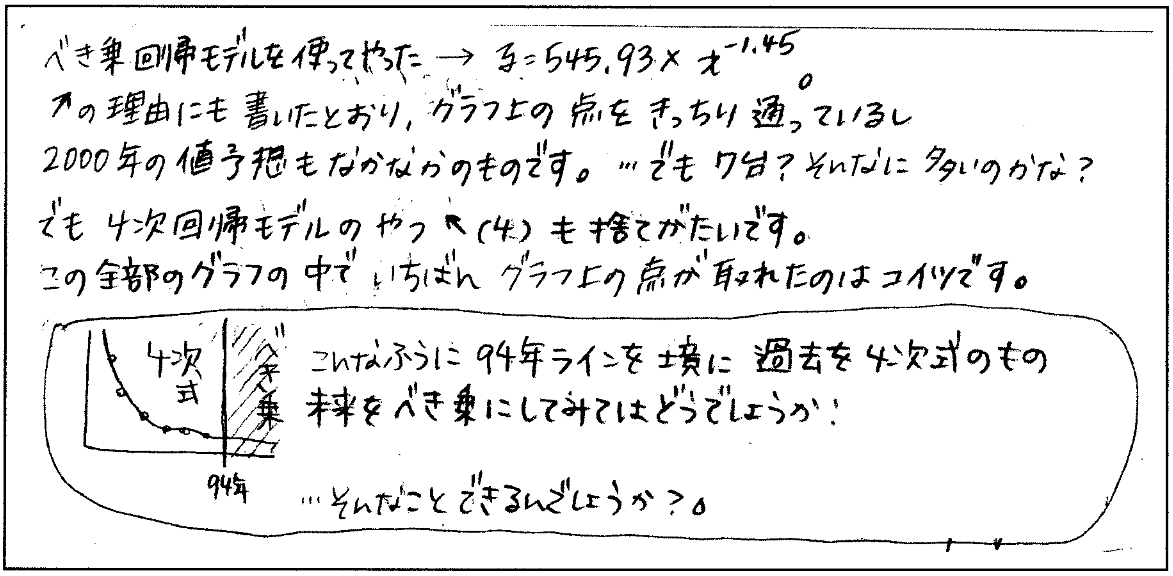


図 4-3-9.　２つの数学的モデルの併用

６．考察

本調査の目的は，三輪（1983）の数学的モデリング過程の「解釈・評価」と「より良いモデル化」過程の能力の一部として「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」能力に焦点を絞った教材を開発し，実際に生徒のモデリング活動をもとに以下の調査を行うことであった．

1)個々の生徒がどのような方法で数学的モデルの妥当性を検討するかについて調査する．

2) 個々の生徒が複数の数学的モデルの中からどのような方法で最適な数学的モデルを選択するかについて調査する．

4．3　数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法

生徒がグラフ電卓の回帰モデル機能を活用して数学的モデルの算出し，生徒なりの自由な発想で数学的モデルの検討を行った結果，以下のことが明らかになった．

(1) 数学的モデルの妥当性の検討方法

本教材における数学的モデルの妥当性の検討は，三輪（1983）の数学的モデリング過程の「解釈・評価」の過程にあたる．生徒達は，この過程において①数値的表現である 2000 年の値による検討，②データの散布図と数学的モデルのグラフとを比較したグラフ的表現による検討，③数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討，の３つの方法で検討を行った．本調査は，個々の生徒が個人で数学的モデルの検討を行った訳であるが，大澤（1998）の実践（４人の小グループによる検討）や Brown（1998）の実践（クラス全体による検討）と同様な結果が得られた．これに対して，先行研究と同様，代数的表現による検討は行われなかったが，生徒のレポートには，「三次関数のグラフってこんな感じだったのですね」や「漸近線… $y=0$」といった数学の学習内容と関連づけて数学的モデルを検討した例も見られた．

(2) 最適な数学的モデルの選択における検討方法

本教材における最適な数学的モデルの選択は，三輪（1983）の数学的モデリング過程の「より良いモデル化」の過程にあたる．生徒達は，この過程において①数学的モデルの妥当性の検討基準をまとめた生徒，②現実の場面に戻って数学的モデルを検討した生徒，③過去と未来に適した２つの数学的モデルを併用した生徒，その他，自由な発想による生徒独自の検討方法も見られた．上記の②は，大澤(1998)の実践と Brown（1998）の実践と同様な結果であり，さらに，③は大澤の実践と同様な結果が得られた．これに対して，①の数学的モデルの妥当性の検討基準をまとめた事例（図 4-3-7 参照）は，先行研究では報告されていないと思われる．

(3) テクノロジー活用による危険性の解消

調査では，数学的モデリング過程の「数学的作業」を軽減し，「解釈・評価」，さらに，「より良いモデル化」の過程に十分な思考時間を与えるために，回帰分析の学習をしていない生徒に，回帰分析の理論的な説明をしないでグラフ電卓の回帰モデル機能を活用させた．こういった活用に対して，グラフ電卓の単純なボタン操作で瞬時に数学的モデルを算出することは，生徒の思考活動が阻害されるとの批判があるようである．

しかし，本調査では，グラフ電卓をブラックボックスとして扱うのではなく，グラフ電卓に表示された数学的モデルを生徒自身の自由な発想で検討する道具として取り扱った．そのため，上記に示したように生徒達は自由な発想でグラフ電卓と対話を通

しながら，数学的モデルの妥当性の検討とより良いモデル化の検討を行っていたことが分かった．この結果，本教材での手法は，グラフ電卓等のテクノロジー活用によるボタンプレッシングの危険性を解消する一つの教育的方法を示唆すると考える．

7．まとめ

本節では，最初に本研究の調査方法と教材の概要について述べ，次に，生徒が記述したレポートをもとに，数学的モデルの妥当性の検討方法と最適な数学的モデルの選出方法について分析した．その結果，以下のことが明らかになった．

・数学的モデルの妥当性の過程では，1)グラフ的表現，2)数値的表現，3)グラフ的表現と数値的表現の複数の表現による検討が行われていた．

・より良いモデル化の過程では，1)妥当性の検討基準の設定，2)現実場面との対比による検討，3)二つの数学的モデルの併用，その他，多様な検討が行われていた．

・グラフ電卓の回帰モデル機能の活用により，数学的作業を軽減し，複数の数学的モデルの中から最適なモデルを選択する過程に十分な思考時間を与えた手法は，テクノロジー活用による危険性を解消する一つの教育的方法を示唆するという知見が得られた．

近年の情報化社会では，インターネット等の情報網から必要な情報を収集する能力，収集したデータを表計算ソフトや統計ソフトで解析する能力，さらに，解析した結果を検討・解釈して効果的に報告する能力が重要である．本教材は，３つ目の検討・解釈・報告する能力を向上させる一例であり，今後，こういった教材の実践が数学の授業や総合学習で実施されることが望まれる．

引用文献・参考文献

1) Blum W. and Niss M.（1989）" Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.) . Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.

2) Blum W.（1991）. " Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.) . Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29

3) Brown R.（1998）. "Mathematical modeling and current events using hand held graphing technology" . In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich

World. England. Horwood Publishing Limited. pp.85-93.
4) Demana F. (1996). 数学教育におけるテクノロジーの役割とその意義（講演資料）. 於清風高校.
5) 三輪辰郎（1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 筑波数学教育研究. 第２巻. pp.117-125.
6) 大澤弘典（1996).「現実場面に基づく問題解決 -グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第９号. pp.16-20.
7) 大澤弘典（1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究：生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学大学院修士論文.
8) 大澤弘典（1998b).「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 -テープレコーダのカウンター問題-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第９号. pp.30-33.
9) 大澤弘典（1999).「肥満とやせの判定基準づくり -数学を核とした総合的な学習の時間の展開例-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 11 号. pp.5-9.
10) 佐伯昭彦, 氏家亮子（1998).「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム -身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第９号. pp.10-18.
11) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003).「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法 -回帰モデル機能を用いたより良いモデル化-」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.5. pp.354-361.
12) 柳本哲 (1996).「グラフ電卓を活用した数理の総合学習-CBL システムを用いた実験から-」. 大阪教育大学数学教育研究. 第 26 号. pp.41-54.
13) 柳本哲 (1998).「グラフ電卓を用いた問題解決学習-中学３年の実践内容と生徒の反応-」. 大阪教育大学数学教育研究. 第 28 号. pp.45-57.
14) Zbiek R. M. (1998). " Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models" . Journal for Research in Mathematics Education. Vol.29. No.2. pp.184-201.

巻末資料４：教材のワークシート（pp.261-262）参照

４．４　数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化
－「お湯の冷め方」実験における生徒の実データ解析方法－

１．はじめに

前節では，複数の数学的モデルの候補から，それぞれの数学的モデルの妥当性を検討し，一番適切な数学的モデルを選択する生徒の方法について述べた．ここでは，得られた数学的モデルを解釈・評価し，さらに，より良い数学的モデルへと変形していく生徒の数学的活動について焦点を絞ることにする．実際には，「数物ハンズオン」の最後のテーマ「お湯の冷め方」実験での授業結果をもとに，数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化に関する生徒の検討方法について分析する．

２．これまでの研究の問題点

数学的モデリング過程における定式化，解釈・評価，より良いモデル化は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることが三輪（1983）によって述べられている．実際に池田(1999)の研究調査では，数学的モデリング過程を促進する考え方は，中・高等学校での通常の数学授業では育成されない結果を明らかにした．この問題に対して，北澤他（2000）と Stephens 他（2001）は，「総合的な学習の時間」や「選択学習」の中で現実の問題を取り扱うことで数学的モデリング過程のプロセスを育成する実践を行っている．一方，西村（2001）は，通常の数学授業の単元「数列」で数学的モデルの作成や数学的作業の過程を取り入れながら，生徒の未習（等差数列と等比数列）の数学的な概念や手法を学習する方法を取り入れている．

本節で取り扱う数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化の過程に焦点を絞ると，これまでの先行研究（例えば，大澤，1996；柳本，1996；大澤，1998； Brown，1998；北澤他，2000；Stephens 他，2001；西村，2001）では，小グループまたはクラス全体の議論によって数学的モデルを解釈・評価，さらに，より良いモデル化が行われており，テクノロジーが数学的モデリング過程を補助する道具として活用されているのが特徴的である．また，大澤（1996，1998）の研究では，リレーのバトンパスの現実問題において，生徒自身が数学的モデルを検討・修正し，より良いモデル化を行った過程が詳細に記録・分析されている．しかし，大澤の実践の様に詳細に分析した研究報告は少なく，生徒がいかにして数学的モデルを解釈・評価し，さらに，より良いモデル化を行うかについて明らかにされていないのが現状である．

3．調査の目的と方法

本調査の目的は，「お湯の冷め方」実験において，生徒が数学的モデリング過程にどのように活動し，数学的モデルを解釈・評価，さらに，より良いモデル化をどのように行うかについて明らかにすることである．

「お湯の冷め方」実験は，「数物ハンズオン」の６テーマを終えた生徒を対象に，実験の企画，解析方法，報告書作成，プレゼンテーションの全ての数学的活動が生徒自身によって行われた．本調査を明らかにするため，生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用したOHPをもとに分析した．

4．調査の概要

(1) 調査方法

1) 授業形態：３－４人によるグループ活動で，実験の企画，解析方法，報告書作成，プレゼンテーションの全ての数学的活動が生徒自身によって行われた．
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生約50名（２クラス）
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2000年12月－2001年２月
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)，データ収集機（CBL），温度センサー

(2) 調査に使用した教材の概要[1]

a．教材の目標

「お湯の温度の冷め方」実験について，実験の企画，解析，報告を全て生徒自身の力で実行する．

b．生徒に与えた実験の課題設定

「24時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」をテーマに，お湯（液体）の冷め方の要因（冷却される物質と容器の材質）について調べてみる．特に，熱湯は短時間で冷めないため，30分程度の実験データから，いかに未来を予測して冷め方を比較するかを実験課題として設定した[2]．

c．教材の概要と展開

［第１週目］基本実験と企画書作成

---

[1] 平成12年度に実施した「お湯の冷め方」実験の教材概要は，佐伯他（1998）で報告した内容とほぼ同じである．

[2] 佐伯他（1999）は，実験終了時（約30分）の測定温度が室温にまで達していないデータを使ってモデル化したために，現実とかけ離れた数学的モデルを作成した実践例を報告している．実験終了後も温度が下がり続け，最終的には室温に達することを生徒に意識させることは，数学的モデルを解釈・検討し，さらに，より良いモデル化を実行させる動機にもなるため，少々オーバーであるが「24時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」というテーマを設定した．

・**予想**：お湯の冷め方の予想をグラフ上に描き，その理由を記入する[3].

・**基本実験**：基本実験（ビーカーに入れた熱湯の冷め方）を行い，実験結果を観察し解析する．この実験における解析方法は，生徒自身が決定する．

・**企画**：基本実験の結果を基に，グループ毎に調べてみたい実験の企画書［実験の目的，予想，実験方法，実験に必要な試料及び材料］を作成する[4].

［第２週目］企画実験の実行と報告書の作成

・**企画実験の実施**：生徒自らが企画した実験を行う（図 4-4-1）.

・**実験の解析**：実験結果から自分たちが発見した法則と，その法則の理由をまとめる．ここでの発見及び解析の表現方法は自由とする[5].

・**報告書の作成**：実験の報告書を作成する．さらに，発表用の OHP を作成する．

［第３週目］プレゼンテーション

・**プレゼンテーション**：自分たちで企画，実験，解析，考察した結果を第三者に分かるように報告する．

・**授業のまとめ**：教師が生徒の実験結果をまとめ，お湯の温度の冷め方の理論式と物理的意味の解釈を説明する[6]．さらに，現象を数学的にモデル化することの有用性について理解させる．

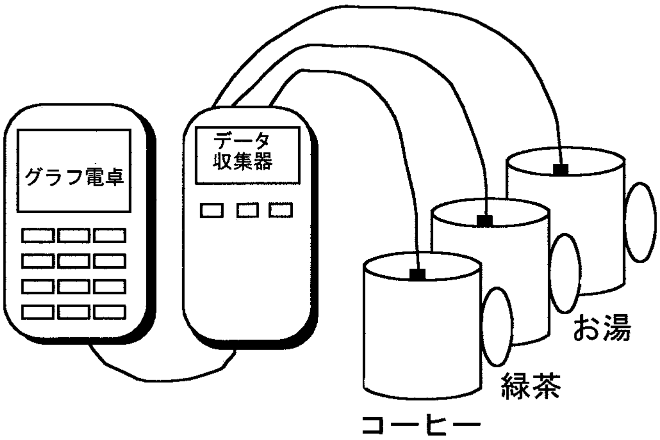


図 4-4-1. 生徒が企画した実験例

[3] 鹿野（1997）佐伯（1998）中村・黒木（2004）は，お湯の冷める実験の事前調査において，正しく予想した生徒が少なかったことを報告している．

[4] 生徒が主体的に数学的モデリング過程を取り組むことを目的に，実験の企画を立てさせた．

[5] 実験結果の解析を自由に行わせた理由は，(a) 生徒による主体的探究の重視，(b) 各班における多様な解析方法の比較，にある．特に(b) では，多様な解析方法の比較により実世界の現象を関数でモデル化することの有用性を理解させるためである．

[6] 実際の授業では，全ての班の実験結果（グラフ）を OHP で示し，お湯の中に入れる物質や容器の素材によって温度の冷める速さが異なる結果に対し，全て同じ形状のグラフ（減衰曲線）であることを理解した．さらに，お湯の冷める減衰曲線の理論式 $y = A \times e^{-Bx} + C$ と係数 A，B，C の物理的意味を説明した．

5．調査の結果

ここでは，生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用した OHP をもとに，数学的モデルの検討・修正方法，さらに，より良いモデル化の方法について分析した結果を報告する．

(1) 数学的モデルの分類

表 4-4-1 は，生徒が使用した数学的モデルの分類とグループ数を示している．約 4 割の 11 グループがグラフ表現，数値的表現，代数的表現の数学的モデルを使って多角的に解析していた．また，約 7 割の 18 グループが代数的表現を使って解析していた（表 4-4-2）．この内，17 のグループがグラフ電卓の回帰モデル機能を使って代数的表現を算出していたが，複数の回帰モデルを試してみて，その中から最適だと思われる数学的モデルを選択しているグループが多かった．

表 4-4-1．数学的モデルの分類

数学的モデル	グループ数
グラフ表現	1
グラフ表現＋数値的表現	7
代数的表現	1
グラフ表現＋代数的表現	4
数値的表現＋代数的表現	2
グラフ表現＋数値的表現＋代数的表現	11
計	26

表 4-4-2．代数的表現の種類

代数的表現	式	グループ数
指数回帰モデル	$y = a \times b^x$	12
べき乗回帰モデル	$y = a \times x^b$	1
対数回帰モデル	$y = a + b \times \ln(x)$	1
四次回帰モデル	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	2
指数回帰モデルの改良	$y = a \times b^x + c$	1
回帰モデル未使用（三次・一次）		1
計		18

(2) 解釈・評価とより良いモデル化

表 4-4-3 は，生徒が行った数学的モデルの解釈・評価，より良いモデル化の分類とグループ数を示している．全体の約４分の１のグループが，数学的モデリング過程において，数学的モデルの解釈・評価，より良いモデル化を行ったことが分かった．

ここでは，生徒の実データ解析方法について，以下の３つの事例をもとに示す．

ａ．数学的モデルの解釈を行った例（グループ A），

ｂ．数学的モデルの解釈と評価を行った例（グループ B），

ｃ．数学的モデルの解釈・評価とより良いモデル化を行った例（グループ C）

表 4-4-3　解釈・評価とより良いモデル化

数学的モデル化過程	グループ数
解釈	1
評価	3
解釈＋評価	1
解釈＋評価＋より良いモデル化	1
計	6

ａ．数学的モデルの解釈を行った例（グループ A）

図 4-4-2 と図 4-4-3 は，お湯，塩を溶かしたお湯，片栗粉を溶かしたお湯の冷め方を実験したグループの OHP（５枚中の２枚）である．

【OHP-1】　（４枚目／５枚）

図 4-4-2 の OHP では，実験開始時（15 秒後）の温度と実験終了時（30 分後）の測定結果が数値的表現で記述されている．

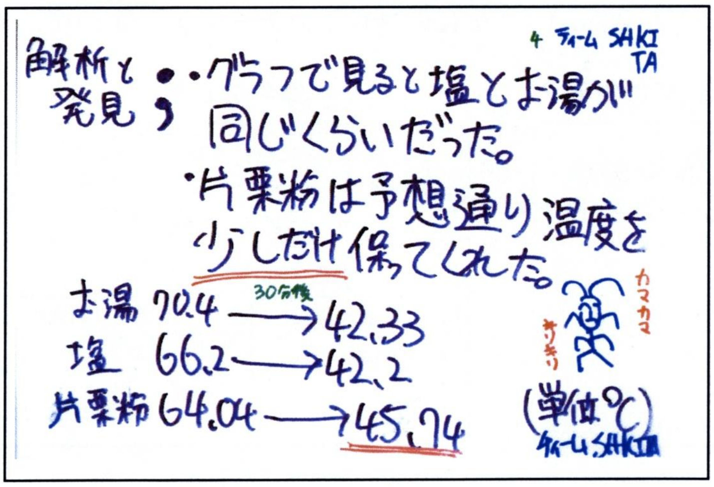


図 4-4-2．生徒のプレゼンテーション用 OHP

【OHP-2】　モデルの評価（５枚目／５枚）

図 4-4-3 の OHP に記述されている「色々あてはめた結果→LnReg：対数回帰モデル！！」から，このグループは，グラフ電卓の回帰モデル機能を活用して複数の回帰モデルを算出し，対数回帰モデルを最適な数学的モデルとして選択していることが分かる．

次に，対数回帰モデル（$y = 85.32 - 5.24\ln(x)$）の x に 86400 秒（24 時間）を代入した結果（$Y_1(86400) = 25.771C°$）が記述されている．このグループは，24 時間後にお湯の温度は室温である現実の世界と，数学の世界で算出した 24 時間後の値とを比較することによって数学的モデルの妥当性を評価したと考えられる（図 4-4-4）．

しかし，このグループが求めた対数関数（$y = 85.32 - 5.24\ln(x)$）は，単調減少で x の値を 24 時間以上に大きくすると y の値が室温以下，かつ，マイナスの値にもなることが考察されていない．これを考察するには，対数関数に関するグラフの特徴などの数学的知識が必要であり，このグループの生徒たちにとっては，かなり高い知識・技能であったと思われる．

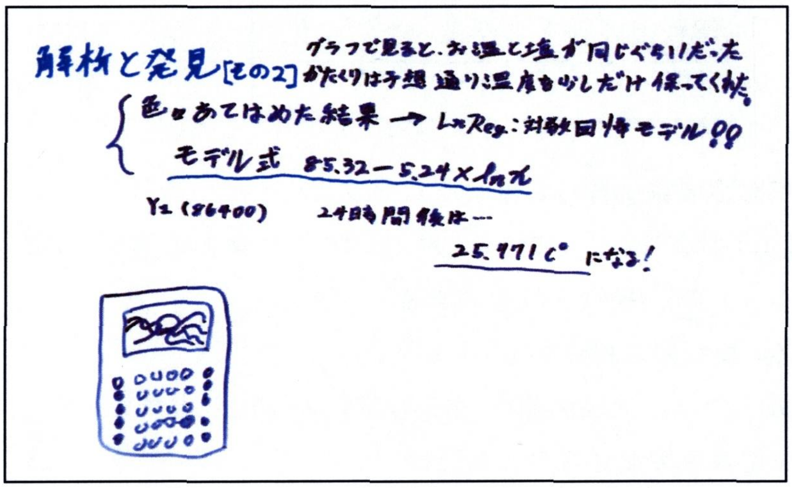


図 4-4-3．生徒のプレゼンテーション用 OHP

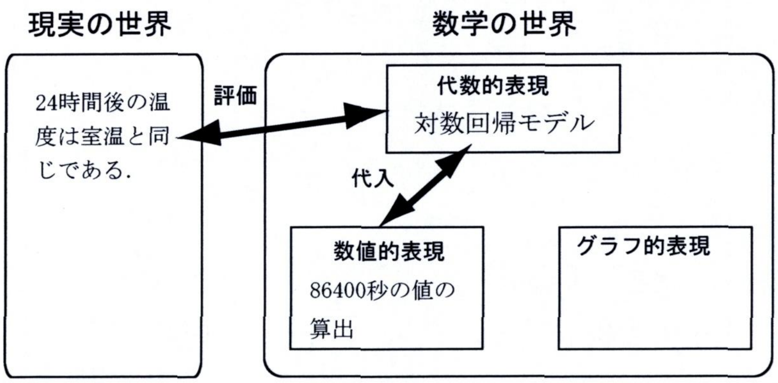


図 4-4-4．数学的モデルの評価方法

b．数学的モデルの解釈と評価を行った例（グループ B）

図 4-4-5 と図 4-4-7 は，お湯の中に３種類の粉（チョコレートの粉，イチゴチョコレートの粉，カレー粉）を溶かして，それぞれの温度の冷め方を実験したグループの OHP（５枚中の２枚）である．

【OHP-1】<u>モデルの評価</u>（４枚目／５枚）

図 4-4-5 の OHP では，それぞれの粉についての解析結果を記述している．このグループは，代数的表現としてべき乗回帰モデルを使用している．また，グラフ表現として，実験データのプロットとべき乗回帰モデルのグラフを重ね合わせて描いている．さらに，グラフ上に実験終了時（1380 秒後）の温度について，実験による測定値と，べき乗回帰モデルから算出した値の両方を記述している．

このグループは，実験で得られた実験終了時の実データと，数学的モデルから算出した数値とを比較することにより，グラフ電卓の回帰モデル機能で求めた数学的モデルの妥当性を評価したと考えられる（図 4-4-6）．

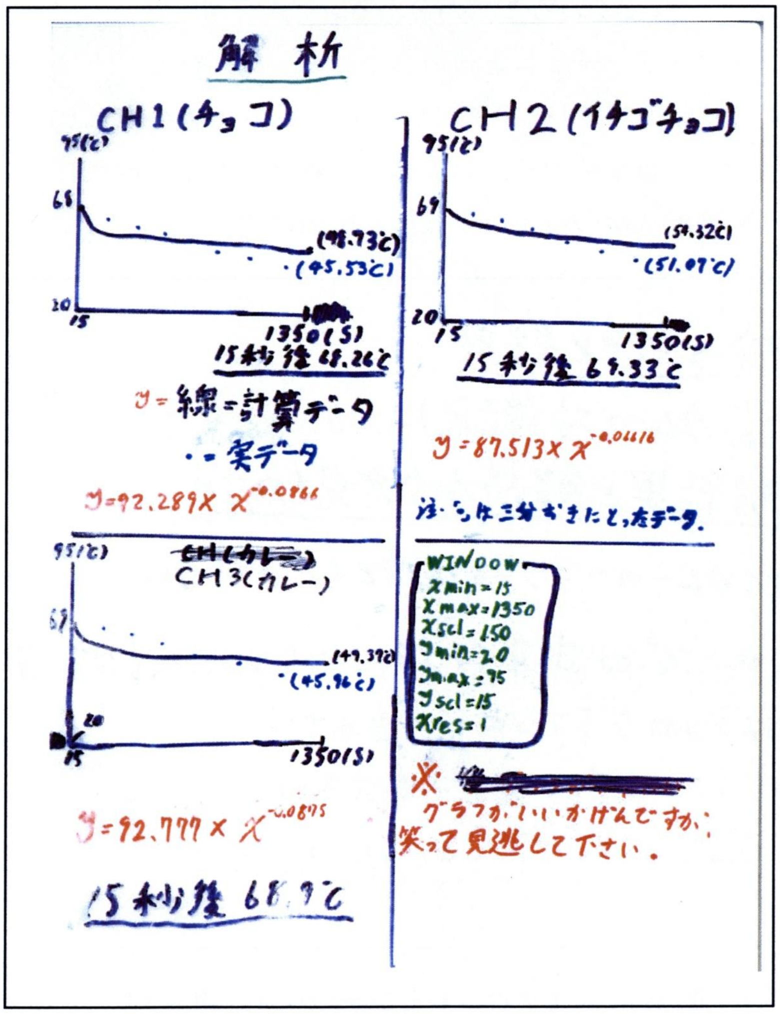


図 4-4-5．生徒のプレゼンテーション用 OHP

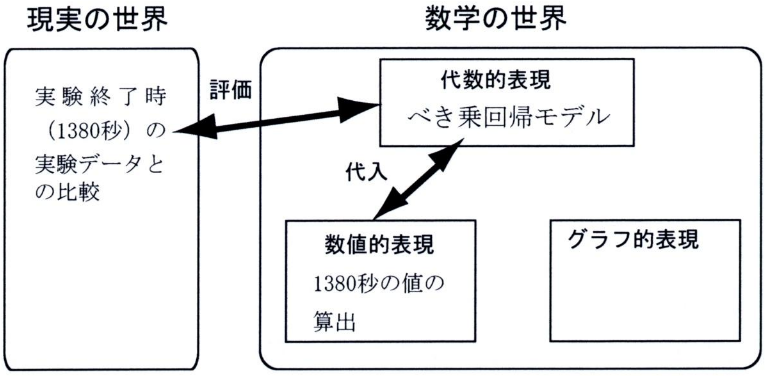


図 4-4-6. 数学的モデルの評価方法

【OHP-2】モデルの解釈（５枚目／５枚）

図 4-4-7 の最初にストロベリーチョコが一番冷めにくいことが記述されている．次に記述されている「チョコとカレーのグラフ，式はほとんど差がない」は，グラフの形状（プレゼンテーションでは「グラフの傾き」と述べている）とべき乗回帰モデル［$y=a\times x^b$］の係数を比較していることが分かる．

最終的には，ストロベリーチョコと他の２つの物質におけるグラフの形状とべき乗回帰モデルの係数を比較して，「べき乗関数［$y=a\times x^b$］の b の値が０に近ければ冷めにくい」と結論づけて，数学的モデルの b の値の物理的意味を解釈した（図 4-4-8）．しかし，a の値の物理的意味の解釈（実験開始時の温度）には至っていない．

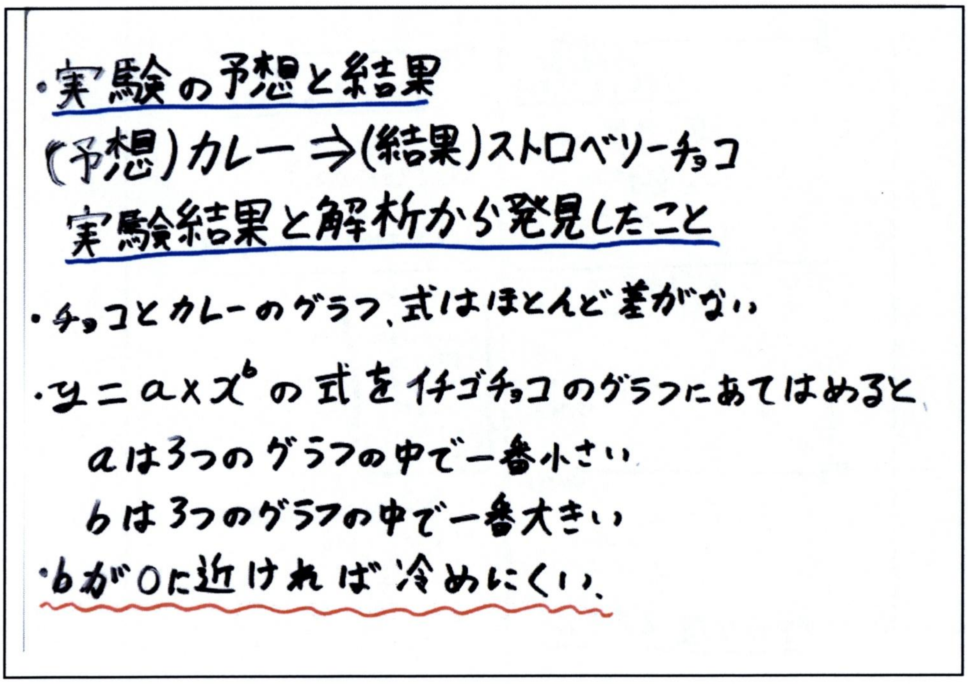


図 4-4-7. 生徒のプレゼンテーション用 OHP

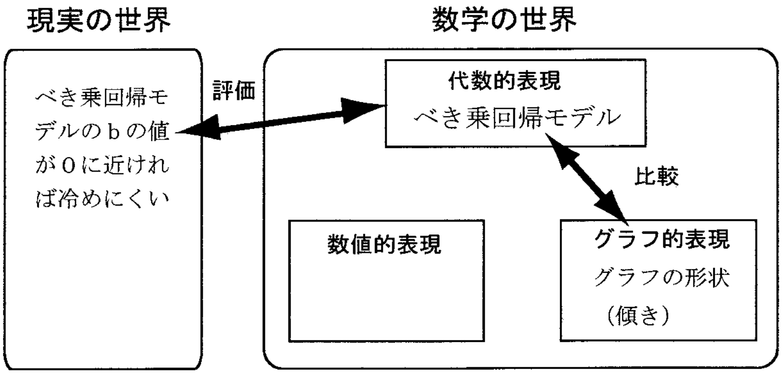


図 4-4-8．数学的モデルの解釈方法

ｃ．数学的モデルの解釈・評価とより良いモデル化を行った例（グループ C）

図 4-4-9 は，ビーカーに蓋をした場合と蓋をしない場合の冷め方を実験したグループの OHP（５枚中の４枚）である．

【OHP-1】（２枚目／５枚）

この OHP では，実験方法と実験に使用した材料が記述されている．このグループでは，ビーカーに蓋をした場合と蓋をしない場合の温度変化について実験している．

【OHP-2】（３枚目／５枚）

この OHP では，実験条件である室温 17℃，代数的表現として指数関数の式，数値的表現として 15 秒後（実験開始時）と 1125 秒後（実験終了時）の温度，さらに，グラフ表現を活用して視覚的に温度変化を表している．

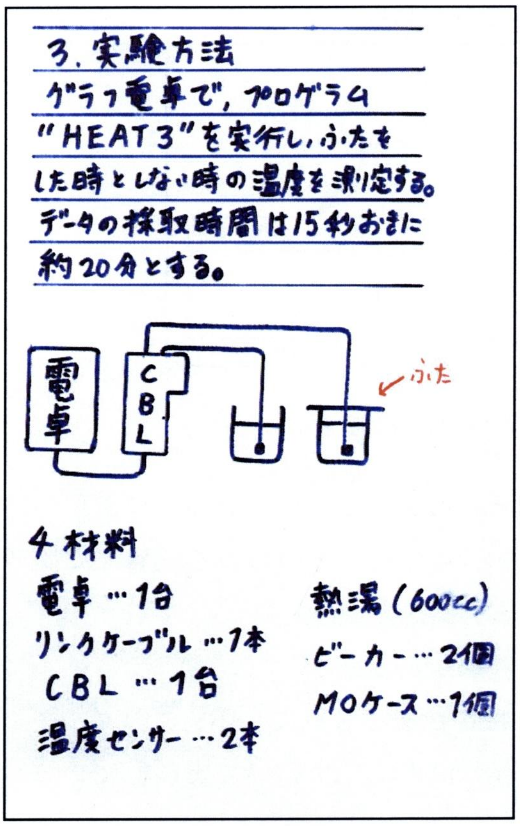
【OHP-3】（４枚目／５枚）

この OHP では，代数的表現による数学的モデルを作成した過程が記述されている．以下に，その過程について詳しく説明する．

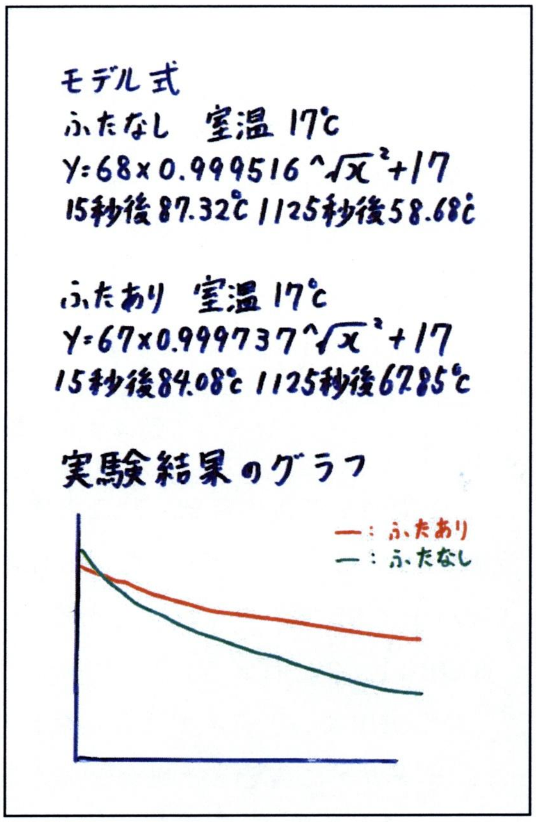
(a) 指数回帰モデルの選択

OHP の「他のモデルの場合，数値が矛盾した値となって表示された．」では，生徒たちは，多くの回帰モデルを算出し，かつ，それらの妥当性を検討していることが分かる．特に，OHP の「数値が矛盾した値」では，算出した回帰モデルの x に大きな値（時間）を代入して回帰モデルの妥当性を評価していると思われる．これらの検討結果から，指数回帰モデル［ $y=a\times b^x$ ］を数学的モデルとして選択したと思われる．

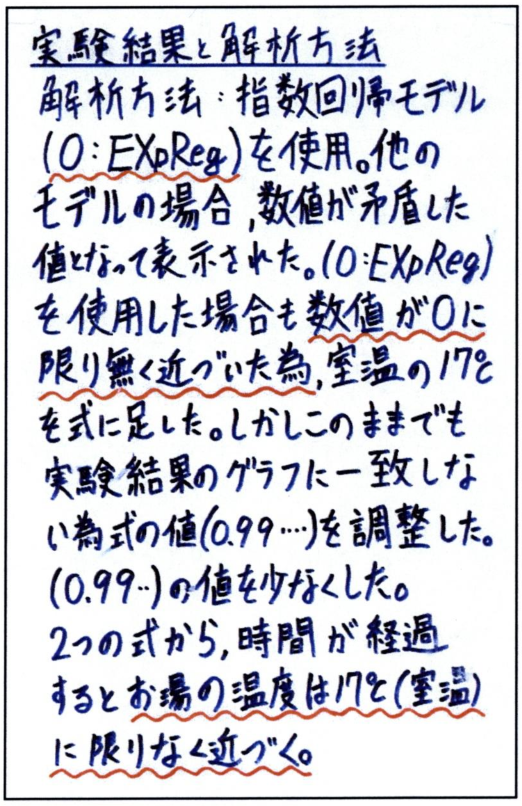
【OHP-1】（２枚目／５枚）



【OHP-2】（３枚目／５枚）



【OHP-3】（４枚目／５枚）



【OHP-4】（５枚目／５枚）

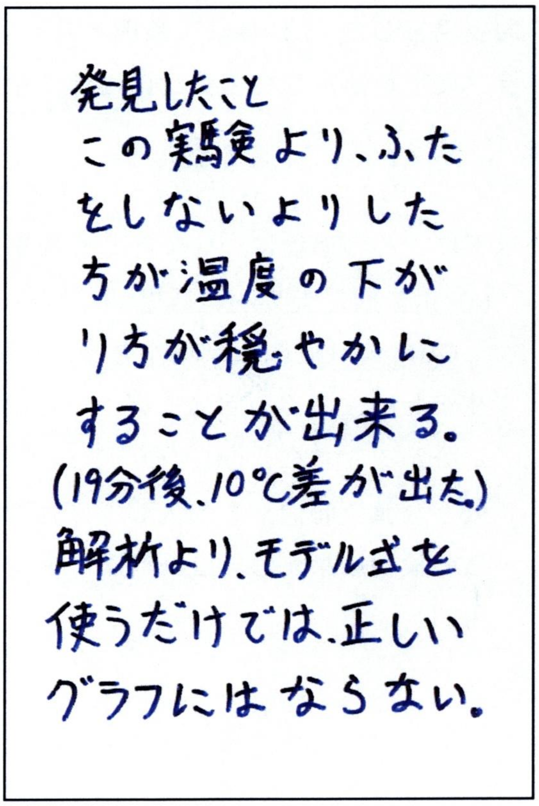


図 4-4-9．生徒のプレゼンテーション用 OHP 例

(b) 数学的モデルの評価・修正・解釈

OHP の「(0:ExpReg)を使用した場合も数値が 0 に限り無く近づいた為，室温 17℃を式に足した.」では，生徒らは最初に，指数回帰モデルの x に大きな値[7]（時間）を代入した値が 0 に限りなく近づくことを数値的に評価した．さらに，お湯が長時間経つと室温以下の 0 度にならない事実を考察した結果，(a)で求めた数学的モデル［ $y=a\times b^x$ ］の修正を考え，室温（c）と y 軸方向の平行移動を考慮することで新たな数学的モデル［ $y=(a-c)\times b^x+c$］を作成したと思われる（図 4-4-10)．ここでの評価と修正の過程では，得られた数学的モデルにおける室温（c）の物理的意味が解釈されている．これに対して，数学的モデルにおける係数$(a-c)$の物理的意味の解釈（温度差）は行われなかった．

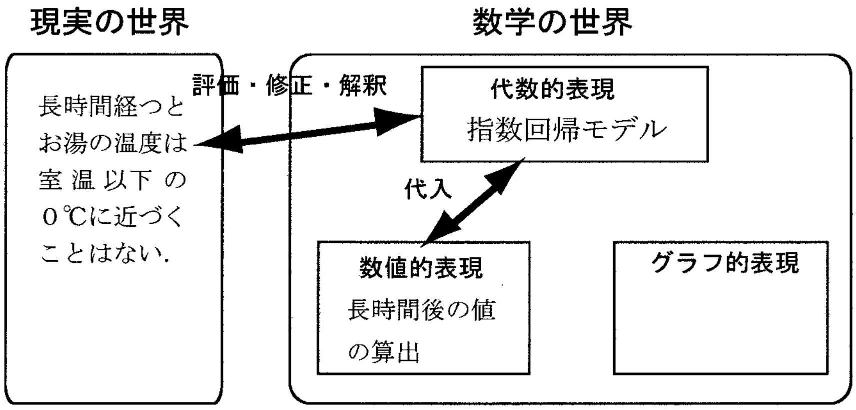


図 4-4-10．数学的モデルの評価・修正・解釈の方法

(c) 数学的モデルの再評価・再修正

OHP の「しかしこのままでも実験結果のグラフに一致しない為，式の値（0.99…）を調整した.」では，(b)で求めた数学的モデルのグラフと実験データとの近似が視覚的に一致しないと評価したため，b の値を試行錯誤に修正して，新たな数学的モデル［ $y=(a-c)\times b'^x+c$］を作成したと思われる．ここで行われたより良いモデル化の過程は，代数的表現とグラフ表現との関連だけで行われている（図 4-4-11)．

---

[7] 実際にどんな値を代入したかについては，プレゼンテーション内容や OHP から判断できなかった．しかし，OHP に記述された「数値が 0 に限り無く近づいた」の表現から極限の概念が読み取れるため，指数回帰モデルの x に大きな値（時間）を代入して数学的モデルを評価していると判断した．

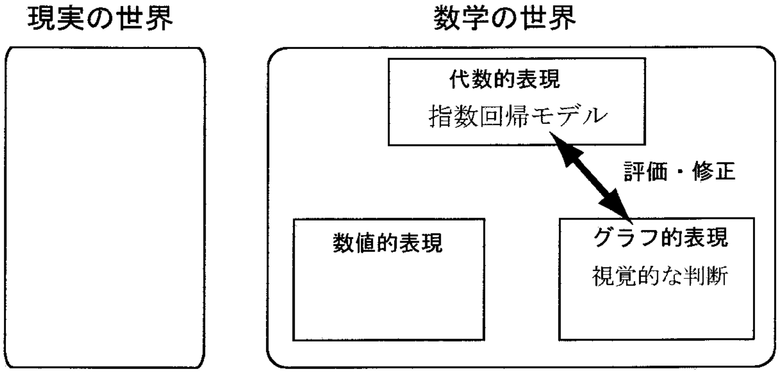


図 4-4-11．数学的モデルの再修正方法

【OHP-4】（５枚目／５枚）

この OHP では，発見した事が書かれている．OHP の「モデル式[8]を使うだけでは，正しいグラフにはならない.」では，グラフ電卓の回帰モデル機能で得られた数学的モデルの妥当性を検討し修正する必要性が記述されている．

６．考察

本調査では，生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用した OHP を分析した結果，以下のことが明らかになった．

(1) 数学的モデルの評価方法について

グラフ電卓で算出した回帰モデルの評価を行ったグループは５つであり，その評価方法は以下の３つに分類された．

1) 回帰モデルの x に 86400 秒（24 時間）を代入し，その結果と室温を比較することによって数学的モデルを評価した．［３グループ：グループ A 参照］
2) 回帰モデルの x に 1380 秒（実験終了時）を代入し，その結果と実験による測定値を比較することによって数学的モデルを評価した．［１グループ：グループ B 参照］
3) 回帰モデルの x に大きな値（時間）を代入し，その結果と室温を比較することによって数学的モデルを評価した．［１グループ：グループ C 参照］

以上の結果から，数学的モデルの評価方法は，回帰モデルに数値を代入した結果を現実の現象（室温や実験による測定値）と比較することによって行っていることが分かる．つまり，数学的モデルを評価するために，数学の世界における代数的表現と数値的表現，さらに，現実場面を相互に関連させながら数学的モデルを評価したと考えることができる．特に，x に 86400 秒（24 時間）や大きな値（時間）を代入したのは，実験の課題が「24 時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」であったことにも要

[8] 生徒が記述した「モデル式」とは，グラフ電卓の回帰モデル機能のことであると思われる．

因があったと考えられる．

(2) 数学的モデルの解釈方法について

グラフ電卓で算出した回帰モデルの解釈を行ったグループは３つであった．

1) グラフの形状と回帰モデル［$y=a\times x^b$］の係数を比較することで，係数 b の物理的意味を解釈した．しかし，a の値の物理的意味の解釈には至っていない．［１グループ：グループ B 参照］

2) 回帰モデル［ $y=a\times b^x$ ］に数値を代入して数学的モデルを評価する過程で，生徒は室温（c）の必要性に気づいたことで数学的モデル［ $y=(a-c)\times b^x+c$］の修正を行った．ここでの評価と修正の過程では，得られた数学的モデルにおける室温（c）の物理的意味が解釈されているが，係数 $(a-c)$ の物理的意味の解釈（温度差）は行われなかった．［１グループ：グループ C 参照］

3) 回帰モデル［ $y=a\times b^x$ ］において，係数 a を「実験開始時の温度」，さらに，係数 b を「冷め方」と解釈したグループがあったが，その解釈方法については分析できなかった．［１グループ］

以上の結果から，数学的モデルの解釈方法は，数学の世界における代数表現と数値表現，または，グラフ表現との関連づけ，さらに，数学の世界と現実の世界との関連づけによって行われていることが分かる．しかし，1)のグループ B と 2)のグループ C の例では，数学的モデルにおける「実験開始時の温度」の物理的意味が解釈されていなかった．これを解釈するためには，回帰モデルの x に 15 秒（実験開始時）を代入した数値と実験による測定値とを比較することで解釈できるが，どのグループも実験開始時の解釈を行わなかった．この原因を考察した結果，以下の２点が考えられた．

- 実験の課題「24 時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」に見られるように，今回の実験では「24 時間」を強調しすぎた．
- ２年間の「数物ハンズオン」のカリキュラム内容を再検討した結果，数学的モデリング過程で求めた代数的表現に実験データ以外の数値を代入して得られた結果と実現象を関連づけて検討する方法が教材ごとに段階を追って組み込まれているのに対し，実験開始時の実験データと代数的表現とを比較・検討することによって代数的表現を解釈・評価する教材が欠けていたことが明らかになった．

(3) より良いモデル化について

より良いモデル化を行ったグループは１つのみであった．図 4-4-12 に示すように，このグループは少なくとも２回以上のサイクルで数学的モデルの修正を行っている．

最初のサイクルの修正では，室温という現実の場面を考慮し，グラフ電卓で求めた

数学的モデル［ $y=a\times b^x$ ］と現実場面とを関連づけて評価・解釈した結果，新たな数学的モデル［ $y=(a-c)\times b^x+c$］へと修正が行われた．このように，数学的モデルの修正の過程が単独で行われたのではなく，数学的モデルの評価・解釈を行う一連の過程において,現実場面と関連づけながら数学的モデルの修正が行われたことが分かった．

さらに，２サイクル目の修正では，実験データと数学的モデルとをさらに近似するために，視覚的に数学的モデルを評価し，新たな数学的モデル［ $y=(a-c)\times b'^x+c$］へと修正が行われた．Pollak（1980）と三輪（1983）は，数学の世界と数学以外の世界との間を行き来することによってより良いモデル化が行われると述べているが，この２サイクル目の修正は，数学の世界（代数的表現とグラフ表現）のみで行われたのが特徴的である．

◆指数回帰モデルの選択

$$y=a\times b^x$$

⇩

◆数学的モデルの評価・解釈と修正（室温の追加）

$$y=(a-c)\times b^x+c$$

⇩

◆数学的モデルの再評価と再修正（視覚的な修正）

$$y=(a-c)\times b'^x+c$$

図 4-4-12．より良いモデル化の過程

7．まとめ

本調査の目的は,「お湯の冷め方」実験において，生徒が数学的モデリング過程にどのような活動を行い，数学的モデルを解釈・評価，さらに，より良いモデル化を行うかについて明らかにすることである．その結果，以下のことが明らかになった．

1) 数学的モデルの解釈・評価は，3 つの表現（代数的表現，数値的表現，グラフ表現）と現実場面とを相互に関連づけて行われていた．
2) より良いモデル化は，数学的モデルの評価・解釈を行う一連の過程において，現実場面と関連づけながら数学的モデルの修正が行われた．
3) 数学的モデルにおける「実験開始時の温度」が解釈されなかったのは，「数物ハン

ズオン」のカリキュラム内容に問題があったことが分かった．

本調査の数学的活動では，数学的モデルの検討・修正についての報告を生徒に要求していなかった．しかし，図 4-4-9 に示したように，生徒達がプレゼンテーションで数学的モデルの検討・修正の過程をまとめて報告したのは，問題解決の結果以上に，検討・修正の大切さをこの数学的活動で生徒達が感得したためだと考える．特にグラフ電卓が算出した結果を鵜呑みにしてはいけないと結論づけたことは，これからの情報化社会に対応するための一つのクリティカルを自ら習得したと言える．

今回の調査では，生徒が発表したプレゼンテーション内容と OHP をもとに分析を行ったため，数学的モデルの評価・解釈，さらに，より良いモデル化を行う際の生徒の認知的行動や意思決定等の詳細が分析できなかった．今後の研究では，生徒の探究活動をビデオで収録し，生徒の活動を詳しく分析することが課題である．

引用文献・参考文献

1) Brown　R. (1998). "Mathematical modelling and current events using hand held graphing technology" . In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . *MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. England. Horwood Publishing Limited. pp.85-93.

2) 池田敏和（1999).「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」. 日本数学教育学会誌，数学教育論究. Vol.71・72. pp.3-18.

3) 北澤嘉孝，濱野久（2000).「数学的モデリング能力を高めるカリキュラムの開発とその効果」. 第 33 回数学教育論文発表会論文集. pp.229-234.

4) 三輪辰郎（1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 筑波数学教育研究. 第２巻. pp.117-125.

5) 中村好則，黒木伸明（2004).「聾学校における数学的モデリングを取り入れた指導の可能性」. 日本科学教育学会第 28 回年会論文集. pp.281-284.

6) 西村圭一（2001).「数学的モデリングの授業の枠組みに関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第 11 号. pp.2-12.

7) 大澤弘典（1996).「現実場面に基づく問題解決 −グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第９号. pp.16-20.

8) 大澤弘典（1998). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究−生徒によるグラフ電卓の利用を視点として−. 上越教育大学大学院修士論文.

9) Pollak H. O. (1980).「数学と他の学科との相互作用」. 数学教育国際委員会（ICMI）編. 数学教育新動向研究会訳「世界の数学教育その新しい動向−」. 共立出版.

pp.299-320.

10) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (1998).「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム-身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.

11) 佐伯昭彦, 氏家亮子, 槻橋正見 (1999).「実現象データを解釈する数学的モデリング能力の段階について」. 第 32 回数学教育論文発表会論文集. pp.495-500.

12) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003).「数学的モデリング過程における学習者の実データ解析方法-「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 3 号. pp.12-21.

13) Saeki A., Ujiie A. and Kuroki N. (2004). "Students' Analysis of the Cooling Rate of Hot Water in a Mathematical Modelling Process" . ICMI (the International Commission on Mathematical Instruction) Study 14. Pre-Conference Volume. pp.235-240.

14) 鹿野敏一 (1997) .「コーヒーはどんなふうに冷めていく? -温度の下がり方を関数で探究/データ収集機と数学的モデリング-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.100-107.

15) Stephens M., 柳本哲 (2001). 総合学習に生きる数学教育. 明治図書. P.28.

16) 柳本哲 (1996).「中学校における数学的モデリングについて-給水タンクを事例として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 5 号. pp.2-9.

巻末資料5：教材のワークシート（pp.263-265）参照

第５章

研究のまとめと今後の課題

５．１　研究のまとめ

筆者は，高等専門学校の数学授業で，生徒の主体的な数学的活動を支援するパートナーとしてグラフ電卓とデータ収集機等のハンドヘルド・テクノロジーを積極的に活用してきた．このパートナーは，決して自分から生徒に働きかけはしないが，生徒がハンドヘルド・テクノロジーに主体的かつ積極的に働きかけることにより，生徒とハンドヘルド・テクノロジーとの間により良いパートナーシップが生じる．この関係により，規則や性質を発見しようとする数学的活動の萌芽が生徒に起こり，規則や性質の数学化，仮説の検証・修正，数学的考察・処理，数学的結果の検証など，全ての数学的活動がハンドヘルド・テクノロジーとの「対話」によって行われるものと考えた．このように，生徒とハンドヘルド・テクノロジーとの間により良いパートナーシップを築くことにより，生徒自らの力で既習事項を関連づけながら数学を発展的に創りだす創造的な授業が展開できると考えた．

上記の考えを実際の授業で明らかにするため，本研究では以下の２点を研究の目的とした．

(1) ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的活動において，生徒が発見した多様な規則や考え方を授業に積極的に活用し，既習の数学的知識・技能・考え方と関連づけることによって，授業がより発展的に展開できることを実証的に明らかにする．
(2) 個々の生徒がどのようにハンドヘルド・テクノロジーと対話をしながら数学的活動を行っているのかについて，生徒が記述したレポートを基に明らかにする．

これらの研究目的を達成するために，本研究では２つのタイプにおける数学的活動［①通常の数学授業での数学的活動，②総合学習での数学的活動］の教材を開発し，実際の授業での生徒の活動・反応や生徒が記述したレポート内容を分析することで，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的活動の有効性を明らかにした．以下，各章ごとに研究のまとめを総括的に述べる．

第１章では，我が国の高等学校の数学教育における現状と課題について，①高校生の数学学力，②数学学習における高校生の意識，③教師の数学指導状況，の三つの観点について分析・考察した．

その結果，現在の高校生の数学に関する学力は低下の傾向にあり，学校外での学習時間が少なく，数学に対する好感度が低くい傾向にあることが明らかになった．しか

し，その反面，高校生は自分のために「勉強をしたい」という学ぶ意欲を持ち，数学の問題を解くときは以前に解いた解法を参考にし，解けない場合はあきらめずに解けない原因をふり返って問題解決していることが分かった．次に，教師の数学指導状況は，理解が不十分な生徒に対する指導は熱心であるが，教師が作業的・体験的な活動を取り入れた授業，コンピュータを活用した授業，さらに実現象と関連づけた授業が行われていないことが分かった．

一方，現行の学習指導要領は，「数学的活動」や「総合的な学習の時間」を取り入れることにより，生徒が自ら学び自ら考える力や創造性の基礎となる力を育成する教育の質的な変換を図っている．つまり，この質的な変換により，生徒の数学学習に対する興味・関心をもたせ，さらには学習への意欲を高める指導を我々数学教師に期待している訳である．しかし，教師の数学指導状況の現状を考えると，「数学的活動」や「総合的な学習の時間」を実施するためには，作業的・体験的な活動を取り入れた授業，コンピュータ等のテクノロジーを活用した授業，さらには実現象と関連づけた授業に関する教材開発と評価を目的とした実践的研究を行なうことが今後の大きな課題であると筆者は考えた．

以上の考察に基づいて，上記に示した本研究の目的を設定した．

第２章では，テクノロジーを活用した数学的活動の特徴と課題について，先行研究をもとに分析・考察した．

はじめに，本研究で取り扱う①数学的活動の捉え方と，②数学的活動を支援するテクノロジー活用方法について考察した．その結果，本研究で取り扱う数学的活動とは，生徒の主体的な数学的活動を中心に授業を展開し，さらに，生徒が発見した規則や性質を教師主導の数学的活動で積極的に活用しながら，両方の数学的活動が相互に補完する形で授業を発展的に展開する活動として捉えることにした．特に，生徒が主体的に行う外的な数学的活動では，生徒の内面に「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を引き起こすための教具として，グラフ電卓とデータ収集機等のハンドヘルド・テクノロジーを活用することにした．これらのハンドヘルド・テクノロジーは，知的好奇心を引き起こすだけではなく，生徒がハンドヘルド・テクノロジーとより良いパートナーシップを築き上げることにより，生徒はハンドヘルド・テクノロジーと対話を繰り返しながら，外的な活動と内的な活動を相互に作用した数学的活動を行うことができると考えた．このような生徒主体による数学的活動を通して，生徒は身近な事象から規則や性質を発見し，さらに，既習事項と関連づけながら自らの力で数学を創りだす創造的な授業が展開できると考えた．

次に，タイプ１の数学授業で活用するグラフ電卓の研究成果と課題を，①生徒の数

学的活動，②教室における生徒・教師・グラフ電卓の相互作用，③グラフ電卓の誤表示による誤認識の弊害，の三つの観点について明らかにした．第１の観点では，先行研究の調査結果から，1986年に世界で初めて開発されたグラフ電卓が米国の数学教育で積極的に活用されていることが先行研究から明らかになった．一方，我が国では，1993年に初めて紹介され，最初の３年間は研究授業やトピック的な授業が行われ，さらに，1996年を境に，実際のカリキュラムに位置づけられた数学授業での活用，文部省の学習指導要領での推奨，教科書の出版など，数学授業におけるグラフ電卓活用の基礎が整いつつあることが分かった．しかし，グラフ電卓を活用した教材の不足，教師教育，財政面の問題等によって，実際の学校現場ではあまり活用されていないことも明らかになった．第２の観点のグラフ電卓活用の利点に関しては，①グラフ電卓の効果的な活用方法と②教室内での数学的活動への影響について先行研究をもとに考察した．グラフ電卓の活用方法は，1)帰納的な数学的活動による規則・性質の発見，2)多表現の関連づけによる理解の深化，3)生徒の主体的な数学的活動による数学間のつながり，の三つの方法が効果的であることが分かった．また，教室内での数学的活動への影響については，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題解決，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化された授業活動が展開できることが明らかになった．第３の観点では，グラフ電卓の液晶の制約や性能上の問題による誤表示の原因と教育的利用について先行研究をもとに考察した．その結果，佐伯（2004c）の研究から，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導が可能であることが明らかになった．

最後に，本研究におけるタイプ２の数学的活動，つまり，日常的な事象，自然現象，社会現象等の実現象と数学とをつなげる数学的活動に焦点を絞り，①数学的モデリングの捉え方と課題，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究，について考察した．第１の観点の数学的モデリングの捉え方と課題では，数学的モデリングの研究動向，「数学的モデル」と「数学的モデリング」の定義，数学的モデリングの重要性と課題について考察した．その結果，数学的モデリングの課題は，カリキュラム，教師，生徒の三つの何れの面も十分に解決されていないことが明らかになった．第２の観点では，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題を考察した．テクノロジー活用の意義は，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーシ

ョンによる実験・探究の補助，の三つに集約されることが分かった．一方，テクノロジー活用の課題として，1)基本的な計算やグラフの技能・能力の低下，2)実際の実験や実物の代用として提供された場合の現実性の喪失，3)単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性，4)現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性，が指摘されているが，現状ではこれらの課題が十分に克服されたとは言えないことが明らかになった．第３の観点の数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法では，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーションによる実験・探究の補助，として有効に活用できることを明らかにした．第４の観点の我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究では，我が国で公表された先行研究をレビューした．その結果，何れの実践研究においても，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが明らかになった．このことから，我が国における実践研究は，数学的モデリングにおける生徒の課題とテクノロジー活用の課題がある程度克服されていることが分かった．しかし，数学的モデリングにおけるカリキュラムに関する課題と教師に関する課題は，これから克服すべき課題として依然として残っていることも明らかになった．

第３章では，タイプ１の数学的活動における授業内容とその成果について記述した．実際に実践した数学的活動は，①単元の導入時に行った数学的活動［極限の実践］，②単元の授業中に学習している内容をより深く理解するための数学的活動［極座標の実践］，③単元のまとめや発展的な学習としての数学的活動［３次関数の実践］，の３つの種類である．これらの実践について，グラフ電卓を活用した教材を開発し，実際に授業を行い，生徒のレポートを基に生徒の数学的活動を分析した結果，以下のことが明らかになった．

(1) 授業の導入時での極限に関する数学的活動では，生徒が掴んだインフォーマルな概念・考え方を授業に活用し，数学的な定義と記号に置き換えながら授業を行うことができた．グラフ電卓活用による生徒のインフォーマルな理解とフォーマルな数学の理解との数学的なつながり（connections）は，NCTM（1989）のスタンダードで強調されているが，我が国で実証的に明らかにした実践は本研究が初めてである．

(2) グラフ電卓を活用した主体的な数学的活動では，生徒は多様な規則を発見し，既習の知識・技能を総合的に活用しながら問題解決を行うことができた．さらに，発見した規則が成り立つ理由を生徒自らが数学的に考察するオープンエンドア

プローチ的な授業を展開することができた．グラフ電卓を活用したオープンエンドアプローチ的な数学的活動の研究報告は，我が国では西村（1996）の実践研究が特徴的である．西村の実践では，オープンエンドな課題から得られた多様な関数関係を解決する道具としてグラフ電卓が活用されたのに対して，本研究では，多様な規則を発見する段階から問題を解決する段階までの全ての段階において，グラフ電卓を活用したオープンエンドアプローチ的な数学的活動が展開できたと言える．

(3) 発見した規則が成り立つ理由を生徒自らが考察し記述することにより，既習の知識・技能を総合的・発展的に活用する機会を生徒に与えることができた．

(4) グラフ電卓の誤表示の原因を生徒自らが追究することで，生徒は誤表示によるグラフの誤認識を自らの力で回避することができた．これに関する実証的な研究は，我が国におけるテクノロジー活用の研究では例がない．

(5) 生徒の主体的な数学的活動では，生徒は数学的活動のパートナーであるグラフ電卓との対話を行うことで，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に作用させながら，生徒が発見した数学的内容を創り上げる創造的な活動を行うことができた．生徒とグラフ電卓との対話の重要性を実証的に示した研究報告は，我が国では片岡（1996）以外には見られない．片岡の実践研究では，生徒が作成したグラフとグラフ電卓が表示したグラフが異なった場合，生徒に認知的葛藤が生じ，その結果，手計算とグラフ電卓との往復を繰り返すことで，生徒が問題解決の新しい視点を発見したことを報告している．これに対して，本研究では，多様な規則を発見する段階から問題を解決する段階までの全ての数学的活動において，生徒はグラフ電卓を数学的活動のパートナーとして，対話を繰り返しながら，自らの力で数学を高めていく創造的な数学的活動を行ったことが明らかになった．

第４章では，数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要と実践の成果について述べた．「数物ハンズオン」は，平成８年度に全国に先駆けて実施した総合学習である．さらに，「数物ハンズオン」で取り扱っているテーマ群は，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリング過程の能力の育成を考慮して構成されており，カリキュラムに位置づけられた数学的モデリングの授業は，我が国で初めての実践である．その結果，以下のことが明らかになった．

(1) ２年間の「数物ハンズオン」を受講した生徒を対象に調査したアンケート結果から，実験結果を数式（数学的モデル）で表すことの有用性に関する生徒の意識は，３テーマ終了時に対して７テーマ終了時の方が向上していたことが分かった．特に，「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内

容を記述した生徒が増えていたことが分かった．これまでの実践研究は，１つの実践を行ったあとに調査した生徒の意識・態度から結論づけているのに対して，長期間の実践における生徒の数学に対する有用性の意識を調査した研究は，我が国では初めてである．

(2) グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性と，最適な数学的モデルを選択する数学的活動では，生徒たちは自らの考えで①妥当性の検討基準の設定，②現実場面との対比による検討，③二つの数学的モデルの併用，など多様な検討を行っていた．この数学的活動では，グラフ電卓をブラックボックスとして扱うのではなく，グラフ電卓に表示された数学的モデルを生徒自身の自由な発想で検討する道具として取り扱った．そのため，生徒達は自由な発想でグラフ電卓と対話をしながら，数学的モデルの妥当性の検討とより良いモデル化の検討を行っていたことが分かった．この結果，本教材での手法は，ハンドヘルド・テクノロジーの活用によるボタンプレッシングの危険性を解消する一つの教育的方法を示唆するものと考える．

(3) 「お湯の冷め方」実験では，グラフ電卓の回帰モデル機能で得られた数学的モデルを現実場面と関連づけながら評価・解釈し，最終的には生徒自らの考えで数学的モデルを修正することができた．グラフ電卓の回帰モデル機能には制限があるため，現実現象に適した数学的モデルが得られるとは限らない．しかし，生徒たちはグラフ電卓が算出した数学的モデルを鵜呑みにしないで，現実にお湯が冷める現象とグラフ電卓の結果を関連づけながら数学的モデルを修正した．グラフ電卓の回帰モデル機能が算出した数学的モデルを修正した事例は，Zbiek（1998）が教員志望の大学生を対象にした実践研究以外には報告されていないが，本研究の成果により，高校生でもグラフ電卓が算出した数学的モデルと現実場面と関係づけながら数学的モデルの修正ができることが明らかになった．

第３章と第４章で示した実践的な研究結果から，テクノロジーを活用した数学的活動は，生徒とテクノロジーとの間により良いパートナーシップを築くことにより，生徒自らの力で既習事項を関連づけながら数学を創りだす創造的かつ発展的な授業が展開できることが実証的に明らかになった．

５．２　今後の課題

本研究の実践的な調査結果から，テクノロジーを活用した数学的活動は，生徒とテクノロジーとの間により良いパートナーシップを築くことにより，生徒自らの力で既習事項を関連づけながら数学を創りだす創造的かつ発展的な授業が展開できることが明らかになった．

しかし，実践を通じて幾つかの課題が明らかになった．特に３次関数の分類の数学的活動では多くの課題を残したが，これらはテクノロジー活用の実践研究を行う上で避けては通れない課題であると筆者は考える．

(1) 多表現を関連づけた数学的活動の効果的な指導

３次関数のグラフの種類を調べる数学的活動では，グラフ電卓の即時性・簡易性によって生徒は沢山の３次関数を実験・観察していた．しかし，グラフ電卓の利点が逆に，生徒の数学的活動を困難にさせた事実も明らかになった．例えば，代数計算が複雑になったことによる計算ミス，グラフ電卓の誤表示による生徒の誤解，さらに，視覚的な観察で終わってしまう生徒の活動である．

計算ミスに関しては，生徒は３次関数の係数を自らの考えで自由に設定できるため，導関数が整数の範囲で因数分解できない事例など，代数計算が複雑になったために計算ミスをした生徒が多かった．この課題に対して，生徒が代数計算で算出した結果を，グラフ電卓の数値的機能やグラフ的機能を関連づけながら代数的に検証する態度を育成する必要がある．また，数式処理システムを活用することによって，計算結果を検証する方法も考えられる．

次に，グラフ電卓の誤表示による生徒の誤解と，視覚的な観察で終わってしまう生徒の活動に関しても，グラフ電卓に表示された結果を鵜呑みにしないで数学的に検証する態度を育成する必要がある．そのためには，グラフ電卓の数値的機能やグラフ的機能を関連づけながら代数的に検証する活動を指導することが解決の一つだと考える．このため，生徒たちが自分で発見した規則が真であることを数値的表現，グラフ的表現，代数的表現による多表現を関連づけながら考察し，その結論を数学的に記述することの有用性を生徒に感じさせる指導方法の開発が今後の課題である．

(2) 関数族の探究における効果的な探究方法に関する指導

グラフ電卓の有効的な活用方法の一つとして，関数族の探究があげられる．３次関数の探究では，４つの係数を効果的に変更することが必要とされるが，本研究における数学的活動では，複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究をした生徒が多かった．このため，関数族の探究の数学的活動において，各係数を闇雲に変更することの不効率と信頼性に欠けることを生徒に認識させ，変更する係数を１つに決定して他の係数を固定する探究の有効性を理解させる指導方法の開発が今後の課題である．

(3) 生徒の数学的活動を的確かつ迅速に評価する手法の改善

本研究では，生徒の数学的活動の反応を次回の授業に反映することを目的に，授業における数学的活動の評価方法は，生徒のレポート内容を分析する手法を採用した．そのために，授業が終了してから次回の授業までの間に，生徒のレポート内容を詳細に分析し，その分析結果をまとめ，OHP や生徒への配布資料を作成するなどの多くの作業を必要とした．その結果，生徒の発見した規則・法則，さらには，生徒独自のインフォーマルな解決方法を授業で取り扱いながら授業を発展的に展開することができた．

しかし，レポート分析の作業量は膨大で，かなりの時間を要した．また，時間の関係上，生徒の素晴らし反応を見落としてしまったことも幾度かあった．これは，数学的活動における生徒の反応と，生徒が発見する規則・性質が事前に想定したもの以上であったことが原因である．このため，生徒のレポートを正確に敏速に分析する手法を確立することが今後の課題である．その一つの方法として，本研究におけるレポート分析から得られた知見，生徒の反応，規則・性質を参考にした教材開発と実践・評価を継続的に行うことで，生徒の数学的活動を的確かつ迅速に評価するために有効なデータを蓄積していくことが重要であると考える．

(4) 生徒の数学的活動における認知的行動の評価

本研究では，生徒が記述したレポート内容やプレゼンテーション内容をもとに生徒の数学的活動を分析した．その結果，前節で述べたように，生徒の発展的で創造的な活動が分析できたが，生徒の数学的活動中における認知的行動や意思決定等の詳細が，この手法では分析できなかった．このため，生徒の数学的活動をビデオで収録し，生徒の活動を詳しく分析することが今後の課題である．

謝辞

本論文をまとめるにあたり，丁寧で適切なご指導とご援助をいただきました上越教育大学の黒木伸明教授に深く感謝致します.黒木教授には「自分の匂いを出しなさい.」と終始ご教授していただき，この３年間はまさに「自分の匂い」探しの研究活動であったと思います．この間の研究活動は，本論文で主張している「いきいきと行動する研究活動」であったかどうかは定かではありません．しかし，多くの先生方のご指導とご支援，さらに，多くの先行研究の調査を通して，自分でも気づいていなかった「自分の匂い」が徐々に明らかになり，その結果，「自分の匂い」の一端を本論文に書き留めることができたことは,筆者にとりましてこの上にもない喜びであります.この間，随分と回り道をしましたが，最後まで温かく見守っていただきました黒木教授にあらためて感謝の意を表します.

大学院博士課程在学中，今日までの研究活動に際して，有益なご指導と励ましをいただきました鳴門教育大学の斎藤昇教授，上越教育大学の西山保子教授，上越教育大学の溝上武實教授に深く感謝いたします.

筆者が勤務する金沢工業高等専門学校校長・堀岡雅清教授には，兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科への内地留学を快く許可していただきました．さらに，堀岡校長には，本校における勤務面でいろいろご配慮をしていただきましたことを深く感謝いたします．前教務主事・佐藤守教授，現教務主事・杉森勝教授には，日常の授業面でのご配慮をしていただきましたことを深く感謝いたします．研究主事・山田弘文教授には，内地留学を決める際に多くの助言をいただきました．さらに，在学中には終始励ましのお言葉をかけていただきましたことを深く感謝します．数学教室主任・青木敏彦教授には，数学教室での日常の業務面でいろいろとご迷惑をお掛けしたにもかかわらず，数学教室の和やかな雰囲気を終始作っていただきましたことを深く感謝したします．欧文論文執筆及び国際会議発表の準備には，英語教室のドリーン・ゲイロード助教授，ブルース・ゲイロード講師，松下臣仁講師に多大なご協力を得ましたことを深く感謝いたします.更に，事務局長・宮西瑞子氏をはじめ事務局の方々には，いろんな面でお世話していただきましたことを深く感謝いたします.

本論文における実践の一部であります「数物ハンズオン」を実施するにあたり，堀岡雅清校長と当時の教務主事・槻橋正見教授（現金沢工業大学工学設計教育センター・教授）には，米国での現地調査とカリキュラム設計等で多大なご指導とご支援をして

いただきましたことを深く感謝いたします．米国での現地調査では，我々の質問等に懇切丁寧にご回答していただきましたオハイオ州立大学の Demana F.教授，Waits B.K.教授，Laughbaum E. 教授に深く感謝いたします．また，米国での現地調査に同行していただきました当時の教務主事・槻橋正見教授，理科教室・作宮和泉教授，英語教室・向井守教授に深く感謝いたします．「数物ハンズオン」の教材開発，授業実施，評価，研究活動にあたり，氏家亮子講師には多大なご協力を得ました．我が国では前例のない教材を開発するにあたり，氏家亮子講師との共同作業及び議論は，筆者の教師観・指導観に大きな影響を及ぼしましたことは疑いもありません．ここに感謝の意を表します．

内地留学を許可していただきました金沢工業大学学園理事長・泉屋利郎氏，同大学学園常務理事・泉屋吉郎氏をはじめ役員の方々に深く感謝いたします．そして，日頃から研究に関してご支援していただきました同大学学園・研究支援機構・事務局長・岩下信正氏及び研究企画課長・柿本昭博氏に深く感謝いたします．また，ご氏名を揚げることができませんでしたが，金沢工業高等専門学校の教職員一同，及び，金沢工業大学学園の教職員の方々に様々なご協力をいただきましたことを感謝いたします．

これまで筆者を育ててくれました両親・典彦，喜美子，祖母・くに に感謝します．そして家族である妻・祐子，息子・啓介，愛犬・ハッピーに感謝いたします．妻・祐子は，筆者の健康面と精神面を終始気遣ってくれました．息子・啓介は，筆者の趣味であるサッカーの話題を常に提供してくれました．さらに，彼の部活動や勉学に対する努力に筆者は励まされました．そして，愛犬・ハッピーは，筆者の健康を考えて毎朝散歩に誘ってくれました．家族あっての自分がここに存在することをあらためて認識いたしました．心から感謝します．

最後に，本研究の主役である生徒達に感謝します．筆者の拙い授業にも関わらず，彼らは真剣に応えてくれました．そして，彼らの素晴らしい数学的活動は筆者に勇気を与えてくれました．また，彼らが教えてくれたことは大きな宝となりました．あらためて生徒達に感謝いたします．

筆者の匂い探しの旅は漸く第１章の幕を閉じようとしています．しかし，新たな章から始まる新たな旅は，筆者の匂いの真価が問われる旅であることは疑いもありません．これまでにご指導ご支援をしていただきました方々への感謝のしるしとして，これまで以上に精進することを誓い，ここで一旦筆を擱くことにします．

平成 17 年 1 月 1 日

金沢の自宅にて新雪を眺めながら

研　究　業　績

1．在籍中の研究業績（2002 年 4 月〜2004 年 12 月）

★ 学術論文 ★

1) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「数学と物理とを統合したクロスカリキュラム型授業の教育効果」．工学教育．Vol.51．No.1．pp.109-114.
2) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「数学的モデル化過程における学習者の実データ解析方法ー「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化ー」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 3 号．pp.12-21.
3) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法 ー回帰モデル機能を用いたより良いモデル化ー」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.5．pp.354-361.
4) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）．「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 86 巻．第 9 号．pp.13-20.
5) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）．「グラフ電卓を活用した極座標における正葉曲線に関する数学的活動とその有効性」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.28. No.5. pp.325-334.

★ 口頭発表 ★

1) 佐伯昭彦，他 9 名（2002）．「中高生のための実験数学入門　ー自然の中に潜む数理の不思議を探ろう！ー」. Teachers Teaching with Technology Japan 第 6 回年会論文集. Vol.6. pp.124-125.
2) 佐伯昭彦（2002）．「極座標のグラフの探究における数学的なつながり」．日本科学教育学会第 26 回年会論文集，Vol.26．pp.363-364.
3) 氏家亮子，佐伯昭彦（2002）．「数学と物理とを関連づけた実験・観察型授業（7）－コンデンサーの充電・放電とグラフの移動－」．日本科学教育学会第 26 回年会論文集，Vol.26．pp.411-412.
4) 佐伯昭彦（2002）．「多表現を関連づけた極座標のグラフの問題解決 －代数的表現，数値的表現，グラフ表現と直観の関連づけ－」．第 51 回北陸四県数学教育研究大会．Vol.51．p.62.

5) 青木敏彦，佐藤守，佐伯昭彦，氏家亮子（2002）．「ここ数年の高専生の数学学力に関する動向と対応」．第51回北陸四県数学教育研究大会．Vol.51．p.58．

6) 佐伯昭彦，黒木伸明（2003）．「グラフ電卓を活用した極座標のグラフ学習における数学的活動」．日本科学教育学会第27回年会論文集，Vol.27．pp. 267-268．

7) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「観察・実験を重視した数物総合学習の教育効果」．日本数学教育学会誌・第85回総会·特集号．Vol.85．p.421．

8) 佐伯昭彦，黒木伸明（2003）．「極限の概念形成を促す数学的活動に関する一考察」．第36回数学教育論文発表会論文集．Vol.36．pp.439-444．

9) Saeki A., Ujiie A., and Kuroki N. (2004). "Students' Analysis of the Cooling Rate of Hot Water in a Mathematical Modelling Process". ICMI (the International Commission on Mathematical Instruction) Study 14. Pre-Conference Volume. pp.235-240.

10) 佐伯昭彦，氏家亮子，槻橋正見（2004）．「テクノロジーの長所・短所を補完する実験観察型の総合学習(1) –数学と物理を統合した「ボールのバウンド」実験–」．工学・工業教育研究講演会講演論文集．pp.625-626．

11) 氏家亮子，佐伯昭彦，槻橋正見（2004）．「テクノロジーの長所・短所を補完する実験観察型の総合学習(2) –数学と物理を統合した「コンデンサーの充電・放電」実験–」．工学・工業教育研究講演会講演論文集．pp.627-628．

12) 佐伯昭彦，他８名（2004）．「振り子の実験における生徒の数学的モデルの作成と検証方法」．日本科学教育学会第28回年会論文集，Vol.28．pp.293-296．

13) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）．「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」．日本科学教育学会第28回年会論文集，Vol.28．pp.377-378．

14) 氏家亮子，土田理，佐藤一，佐伯昭彦（2004）．「ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学と物理の総合学習」．日本科学教育学会第28回年会論文集，Vol.28．pp.635-636．

15) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）．「テクノロジーの性能による誤り現象を授業に活かす方法について」．Teachers Teaching with Technology Japan 第８回年会論文集．Vol.8．pp.32-35．

2. 在籍以前で学位論文に関連する学術論文・著書・雑誌

★ 学術論文 ★

1) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998）．「数学的モデリングを重視した総合カリキュラムー身近な物理現象を数学的にモデル化する授業ー」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第 9 号．pp.10-18.
2) Saeki A. and Ujiie A. (2001). "A Cross-Curricular Integrated Learning Experience in Mathematics And Physics". Community College Journal of Research and Practice. Vol.25. pp.417-424.

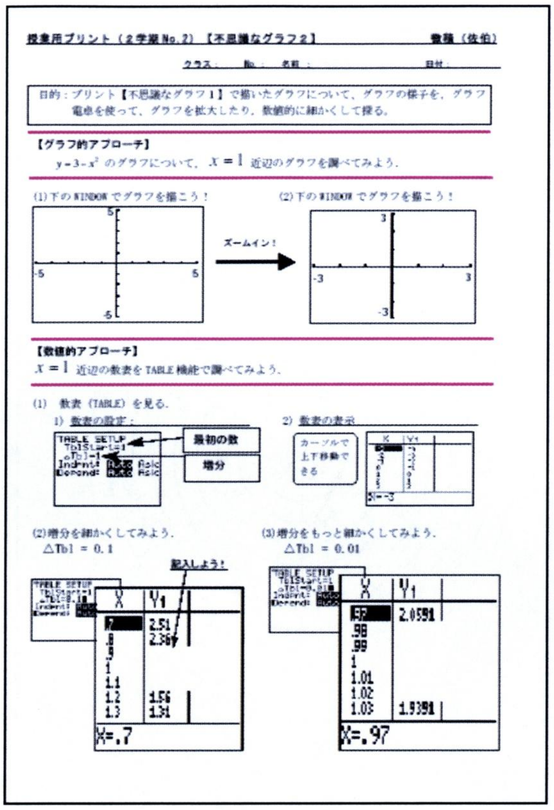
★ 著書 ★

1) 佐伯昭彦（1995）．「二次関数におけるコンピュータ活用」．中学校数学科教育実践講座刊行会編．CRECER 中学校数学科教育実践講座　第 8 巻「関係性をとらえる関数」．ニチブン．pp.175-181.
2) 佐伯昭彦（1995）．「経験的確率を探究するためのコンピュータ活用」．中学校数学科教育実践講座刊行会編．CRECER 中学校数学科教育実践講座　第 9 巻「関係性をとらえる関数」．ニチブン．pp.159-165.
3) 佐伯昭彦（1995）．「工業高等専門学校における三角関数の指導　ー三角関数のグラフ学習用教材を使ってー」．一松信監修．グラフ電卓を数学に　–活用の意義と教材集–．教育社．pp.59-64.
4) 佐伯昭彦（1995）．「三角関数ー媒介変数を使って正弦曲線の単位円モデルを拡張しようー」．一松信監修．グラフ電卓を数学に　–活用の意義と教材集–．教育社．pp.136-140.
5) 佐伯昭彦，礒田正美，清水克彦編（1997）．テクノロジーを活用した新しい数学教育　–実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善–．明治図書．
6) 佐伯昭彦，氏家亮子（1999）．「数学と他教科を関連づけたクロスカリキュラムの試み」．日本数学教育学会編．日数教 YEARBOOK「算数・数学のカリキュラムの改革へ」．産業図書．pp.293-308.

★ 雑誌 ★

1) 佐伯昭彦（1996）．「テクノロジーを用いた実験・観察アプローチ（２）　媒介変数を使った三角関数のグラフの指導／その実践」．教育科学・数学教育．明治図書．No.459．pp.95-103．
2) 佐伯昭彦（1996）．「テクノロジーを用いた実験・観察アプローチ（３）　グラフ電卓の性能の制約を逆利用した三角関数の指導／その実践」．教育科学・数学教育．明治図書．No.460．pp.100-107．
3) 佐伯昭彦（1996）．「米国の教育におけるテクノロジー活用　T^3 国際会議と授業参観の感想」．教育科学・数学教育．明治図書．No.465．pp.77-84．
4) 氏家亮子，佐伯昭彦（1996）．「テクノロジーを用いた実験・観察アプローチ（１０）　一定の速さで歩いた様子を一次関数でモデル化する／その実践」．教育科学・数学教育．明治図書．No.467．pp.88-95．
5) 佐伯昭彦（1997）．「従来の学習系列に従わない問題解決を中心としたカリキュラム IMP」．教育科学・数学教育．明治図書．No.476．pp.92-95．
6) 佐伯昭彦（1998）．「数学と物理とを関連づけた総合学習　ー既習の数学と物理で物理現象を見るー」．教育科学・数学教育．明治図書．No.493．pp.13-20．

巻末資料１：分数関数の極限の数学的活動



授業用プリント（２学期No.２）【不思議なグラフ２】　教諭（佐伯）

クラス：　No.：　名前：　日付：

目的：プリント【不思議なグラフ１】で描いたグラフについて、グラフの様子を、グラフ電卓を使って、グラフを拡大したり、数値的に細かくして探る。

【グラフ的アプローチ】

$y=3-x^2$ のグラフについて、$x=1$ 近辺のグラフを調べてみよう．

(1)下の WINDOW でグラフを描こう！　(2)下の WINDOW でグラフを描こう！

【数値的アプローチ】

$x=1$ 近辺の数表を TABLE 機能で調べてみよう．

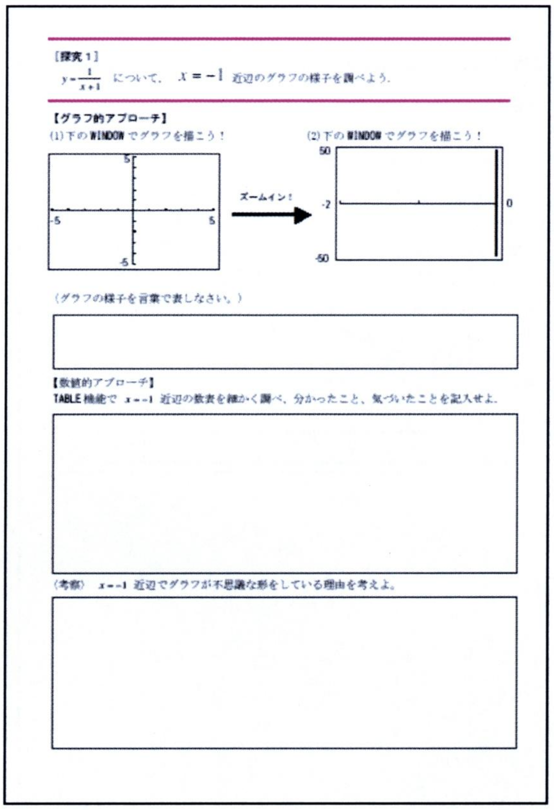
(1)　数表（TABLE）を見る．

1) 数表の設定：

2) 数表の表示

(2)増分を細かくしてみよう．
$\triangle$Tbl ＝ 0.1

(3)増分をもっと細かくしてみよう．
$\triangle$Tbl ＝ 0.01



[探究１]

$y=\frac{1}{x+1}$ について、$x=-1$ 近辺のグラフの様子を調べよう．

【グラフ的アプローチ】

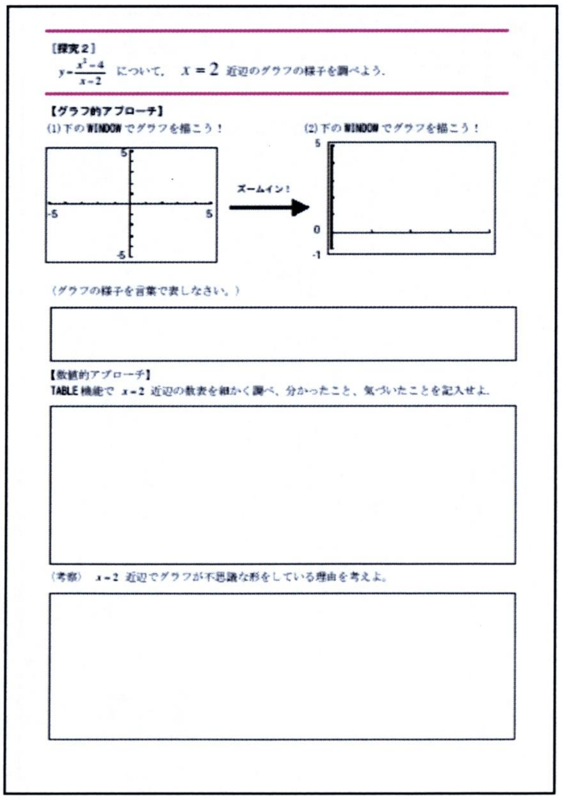
(1)下の WINDOW でグラフを描こう！　(2)下の WINDOW でグラフを描こう！

（グラフの様子を言葉で表しなさい。）

【数値的アプローチ】

TABLE 機能で $x=-1$ 近辺の数表を細かく調べ、分かったこと、気づいたことを記入せよ．

（考察）　$x=-1$ 近辺でグラフが不思議な形をしている理由を考えよ。



[探究２]

$y=\frac{x^2-4}{x-2}$ について、$x=2$ 近辺のグラフの様子を調べよう．

【グラフ的アプローチ】

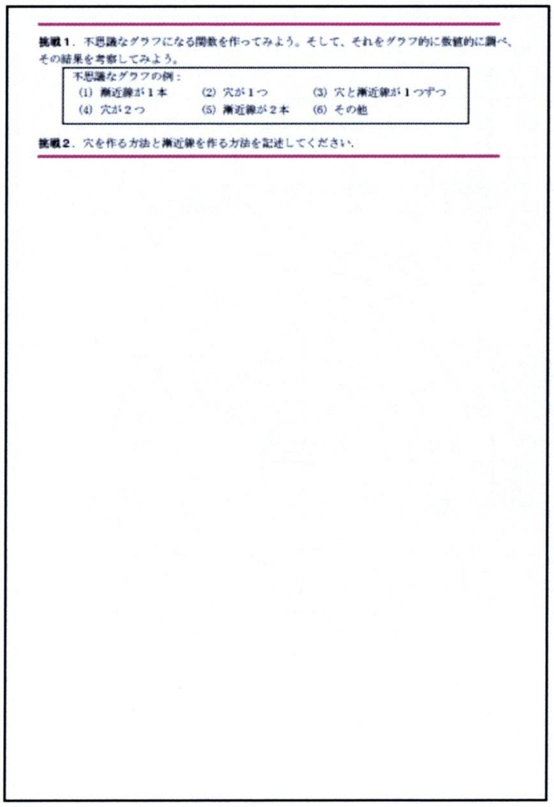
(1)下の WINDOW でグラフを描こう！　(2)下の WINDOW でグラフを描こう！

（グラフの様子を言葉で表しなさい。）

【数値的アプローチ】

TABLE 機能で $x=2$ 近辺の数表を細かく調べ、分かったこと、気づいたことを記入せよ．

（考察）　$x=2$ 近辺でグラフが不思議な形をしている理由を考えよ。



挑戦１．不思議なグラフになる関数を作ってみよう。そして、それをグラフ的に数値的に調べ、その結果を考察してみよう。

不思議なグラフの例：
(1) 漸近線が１本　(2) 穴が１つ　(3) 穴と漸近線が１つずつ
(4) 穴が２つ　(5) 漸近線が２本　(6) その他

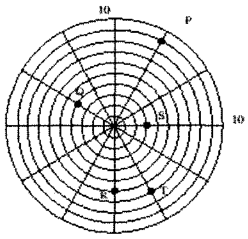
挑戦２．穴を作る方法と漸近線を作る方法を記述してください．

巻末資料２：正葉曲線の数学的活動

授業用プリント（3学期 No.8）【極座標による図形】 応数I（佐伯）

クラス：　番号：　名前：

練習1． 右の図の点，P，Q，R，S，Tの極座標を書きなさい．また，次の点 $A\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)$，$B(2,\pi)$，$C\left(5,\frac{7\pi}{6}\right)$，$D\left(-3,\frac{\pi}{4}\right)$，$E\left(-5,\frac{3\pi}{4}\right)$ を，平面上に図示しなさい．



練習2． 問題1.17（教科書 p.20）

追加：(4) $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　(5) $\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$

練習3． 問題1.18（教科書 p.20）

追加：(4) $\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$　(5) $\left(4\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)$

練習4． $r=\frac{2}{\pi}\theta$ について，次の表を作り，各点を図示しなさい（裏面に！）．

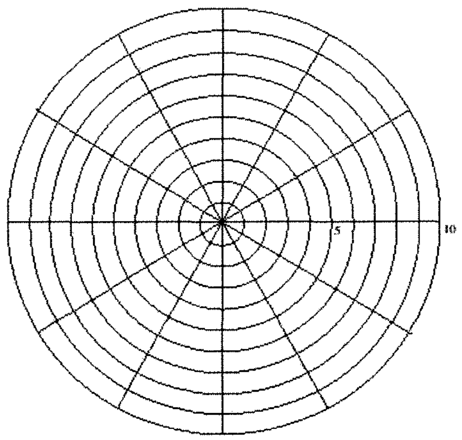
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$	2π
r			$\frac{4}{3}$	2	$\frac{8}{3}$		

授業用プリント（3学期 No.9）【極座標による図形2】 応数I（佐伯）

クラス：　番号：　名前：

練習1． アルキメデスの螺線 $r=\frac{3}{\pi}\theta$ を描いてみよう．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{12\pi}{6}$
r													

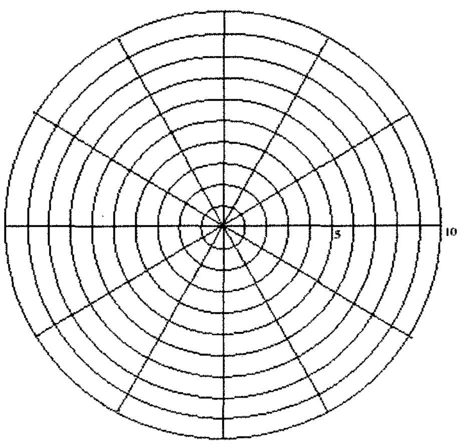


練習2． 正葉曲線 $r=10\sin 2\theta$ を描いてみよう．

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
2θ													
r													

注1．電卓で計算を求め，小数点第3位を四捨五入する．

注2．$\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ は，どのようなグラフになるでしょうか．想像して描いてみよう．

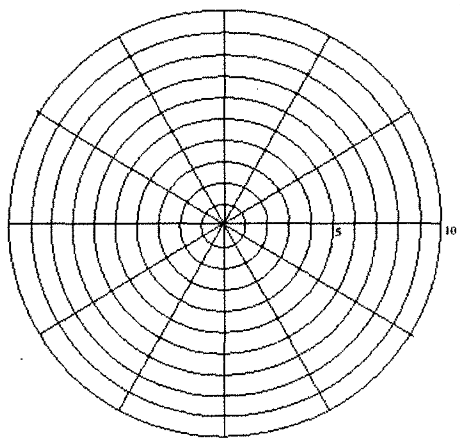


練習3． カージオイド $r=5(1+\cos\theta)$ を描いてみよう．

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
r													

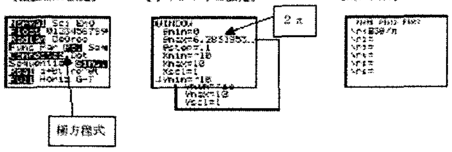
注1．電卓で計算を求め，小数点第3位を四捨五入する．

注2．$\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ は，どのようなグラフになるでしょうか．想像して描いてみよう．

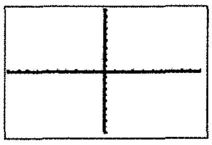


練習４．練習１～練習３のグラフをグラフ電卓で確かめてみよう．

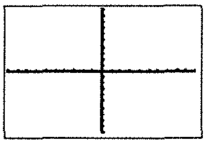
【極座標の設定】　【ウインドウの設定】　【式の入力】



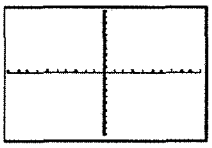
【アルキメデスの螺線　$r=\frac{3}{\pi}\theta$　】



【正葉曲線　$r=10\sin 2\theta$】



【カージオイド　$r=5(1+\cos\theta)$　】



授業用プリント（３学期 No. 9-1）【極座標による図形２（探究）】　　数学Ｉ（佐伯）

クラス：　番号：　名前：

【探究１】 正葉曲線　$r=10\sin n\theta$　の n にいろんな値を入れてグラフを描いてみよう．

どんな規則があるだろうか．発見したことをまとめなさい．さらに，出来れば規則の理由も書いてください．

【探究２（選択）】次の探究の何れか一つに答えなさい（両方やっても良いです）．

(1) 正葉曲線　$r=10\sin n\theta$　について，n が偶数の場合に葉が２n 枚，n が奇数の場合に葉が n 枚描かれる理由を書いてください．

(2) カージオイド　$r=5(1+\cos n\theta)$　の n にいろんな値を入れてグラフを描いてみよう．どんな規則があるだろうか．発見したことをまとめなさい．さらに，出来れば規則の理由も書いてください．

巻末資料３：「音」実験

［第１週目］

音の正体を探り、楽器を作ってみよう!!

クラス：＿＿＿＿　番号：＿＿＿＿　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿

【目的】テレビの音、友達の話し声、街角で流れているメロディー。
いろんな音があるけれど、"音"っていったいなにものなんだろう？
その正体を探ってみよう。
身近にいろいろな楽器があるけれど、その仕組を調べてみよう。その仕組は、意外と単純かもしれない…。

【物理ノート：音の伝わり方】
空気中で激しく物体が振動する。
（真空では音は伝わらない。水中、土の中はOK。）
↓
空気が周期的に圧縮・膨張する。
↓
空気中に密度の高いところ（密）と、低いところ（疎）ができる。
↓
空気の振動（音波）
↓
人間の鼓膜をゆする。

振動数とは …

	人間	犬
出せる音		
聞こえる音		

音をグラフや数式でみてみよう!!

音って聞くものだけど、今日はいろいろな音のデータをグラフで表わしてみよう。
音をグラフで表わすことによって、実はいろんなことを知ることができるんだヨ。

【実験装置】
- グラフ電卓 ＆ 接続ケーブル
- データ収集器（CBL）
- 音センサー

【プログラム】
★ SOUND4

【操作手順】
1. グラフ電卓とCBLを接続ケーブルでしっかりと接続する。
2. CBLの<u>CH1チャンネル</u>に音センサーを接続する。

38

3. グラフ電卓とCBLの電源を入れる。
4. グラフ電卓のプログラム［SOUND4］をスタートさせる。
   ① PRGM ［SOUND4］ ENTER
   ② 画面に prgmSOUND4 と表示されたら ENTER
   ③ グラフ電卓の画面の指示にしたがって ENTER を押す。
5. 画面に "PRESS ENTER TO START COLLECTING DATA." と表示されたら、
   ① 音源をできるだけ音センサーに近づける。（ただし、直接触れることがないように。）
   ② 「いい音だ！」と思ったら、ENTER を押す。

課題１：いろいろな"声"のグラフ

1. 次のような声のデータをとって、表示されたグラフをスケッチしなさい。
（グラフ電卓１台につき１つの声を調べなさい。あとでグラフを比較するときに便利。）

課題① 大きな声　　課題③ 高い声　　挑戦⑤ ＿＿＿＿

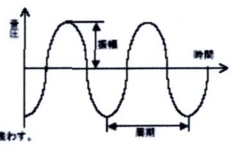
課題② 小さな声　　課題④ 低い声　　挑戦⑥ ＿＿＿＿

※ 挑戦⑤～⑥では、（自由に実験してみましょう）

2. グラフを比較して、気付いたことを書きなさい。（TRACE 機能を使ってもいいよ。）

39

【数学・物理ノート】
（音の三要素）
○ 音　色 ⇔ ＿＿＿＿
○ 音の強弱 ⇔ ＿＿＿＿
○ 音の高低 ⇔ ＿＿＿＿



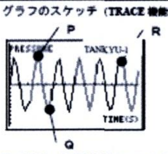
振動数とは、１秒間に波の数がいくつあるかを表わす。
したがって、１÷周期　で計算できる。

課題２：音の強弱や高低を数値で表わしてみよう!!

プログラム（SOUND4）をスタートさせ、MENU で USED SAMPLE を選択する。

探究１：TANKYU - 1 を選択したとき

(1) グラフのスケッチ（TRACE 機能で必要な値を調べる）



点 P（Px＿＿＿，Py＿＿＿）
点 Q（Qx＿＿＿，Qy＿＿＿）
点 R（Rx＿＿＿，Ry＿＿＿）

(2) 音の強弱：振幅［グラフの山の高さ］
振幅＝（Py － Qy）÷２

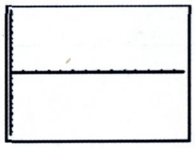
(3) 音の高低①：周期［１回振動するのにかかる時間］
周期 ＝（Rx － Px）÷波の数

(4) 音の高低②：振動数［１秒間に振動する回数。ヘルツ（記号：Hz）］
振動数 ＝１ ÷ 周期

40

探究２：TANKYU - 2 を選択したとき

(1) グラフのスケッチ（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフ上に記録しなさい。）
(2) 音の強弱：振幅
<計算>

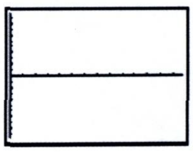


(3) 音の高低①：周期
<計算>

(4) 音の高低②：振動数
<計算>

探究３：TANKYU- 3 を選択したとき

(1) グラフのスケッチ（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフ上に記録しなさい。）
(2) 音の強弱：振幅
<計算>



(3) 音の高低①：周期
<計算>

(4) 音の高低②：振動数
<計算>

? TANKYU-1 ～ TANKYU-3 の３つの音データの中で、<u>一番大きな音</u>はどれですか？

? TANKYU -1 ～ TANKYU -3 の３つの音データの中で、<u>一番高い音</u>はどれですか？

41

［第２週目］

楽器や音の中に潜む数学を調べてみよう!!

【目的】音楽や身の回りにあるいろいろな楽器の中にも、実は数学が隠れている。
どんな数学が隠れているのか、音階や楽器のしくみに着目して調べてみよう。

課題１：音階と振動数の関係

探究１．音階が一つ上がるごとに、振動数は何倍になっているか、計算しなさい。
探究２．ド(C)から１オクターブ高いド(C)まで音階が上がると、振動数は何倍になりますか？

音階		振動数 F (Hz)	
ド	C	262	
	C#(D♭)	277	倍
レ	D	294	倍
	D#(E♭)	311	倍
ミ	E	330	倍
ファ	F	349	倍
	F#(G♭)	370	倍
ソ	G	392	倍
	G#(A♭)	415	倍
ラ	A	440	倍
	A#(B♭)	466	倍
シ	B	494	倍
ド	C	524	倍

倍

探究３．音階と振動数の間にはどのような関係(規則性)があると思いますか？
気づいたことを書きなさい。

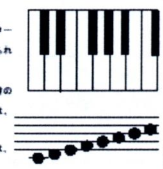
探究４．次の音階の振動数は、何 Hz でしょう？

x	音　階	振動数（y）
1	１オクターブ低いド	
2	ド	262
3	１オクターブ高いド	524
4	２オクターブ高いド	
5	３オクターブ高いド	

探究５．４の音階（x）と振動数（y）の関係をグラフにしなさい。

【音楽ノート】

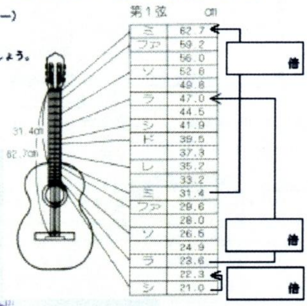
ピアノやオルガンのように、ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ドの１オクターブの音階は、平均律と呼ばれ、図のように（半音を含めると）１２に分けられている。
平均律の場合、各音を出す振動体の長さを調べてみると、高い音から低い音の順に、長さが一定倍になっています。（隣り合う２音の振動体の長さの比は、それぞれ１.０６倍（$2^{\frac{1}{12}}$倍）の比率で一定倍になっているのです。）これは、１オクターブ上のドに対して２倍になるように決められているからです。

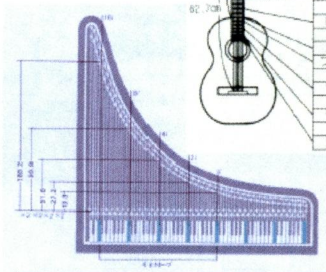


挑戦：楽器の中に潜む数学

楽器のなかにひそむ「倍倍の法則（1.06 倍＝$2^{\frac{1}{12}}$倍の関係）」を見つけよう。

(1) 弦楽器（フォーク・ギター）
１オクターブ違う音の、
弦の長さの比を計算してみましょう。



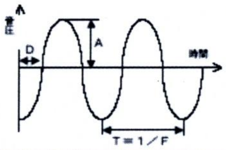


(2) 鍵盤楽器
（チェンバロ）

他の楽器でも、このような関係があるんだよ。興味がある人は、ＬＣで調べてみましょう。

課題２：音の中に潜む数学

【数学ノート】
下のような曲線を正弦曲線（サインカーブ）と呼ぶ。
また、正弦曲線はつぎのような式で求められる。



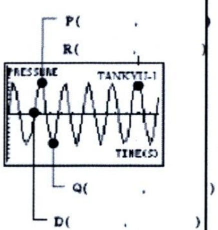
$$y = A\sin\{2\pi F(x-D)\}$$

A：振幅（最大値）　⇔　音の強弱
F：振動数　⇔　音の高低
D：x軸方向のずれ
x：時刻
y：時刻 x のときの音圧

練習：TANKYU-1 の音を式で表わしてみよう!!

TANKYU-1 の音の正弦曲線は、右のグラフのようになります。

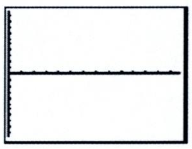
① 振幅（A）を求めましょう。
A＝（Py－Qy）÷２
＝
② 周期（T）を求めましょう。
T＝（Rx－Px）÷ 波の数
＝
③ 振動数（F）を求めましょう。
F＝１／T
＝
④ x軸方向のずれ（D）を求めましょう。
D＝Dx
＝
⑤ グラフの式を求めてみましょう。
y＝Asin｛2×F×（x－D)｝
$= \boxed{}\sin\{2\pi\boxed{}\times(x-\boxed{})\}$
⑥ ⑤の式をグラフ電卓に入力して、確かめましょう。



課題３：ペットボトルの奏でる音を式であらわしてみよう!!

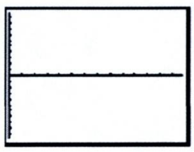
探究１：　空のペットボトル　　ペアを組んだ人：

① グラフをスケッチしましょう。（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフに記録しなさい。）
② 振幅（A）を求めましょう。
③ 周期（T）を求めましょう。
④ 振動数（F）を求めましょう。
⑤ x軸方向のずれ（D）を求めましょう。
⑥ グラフの式を求めてみましょう。（グラフ電卓に式を入力して、確かめましょう。）

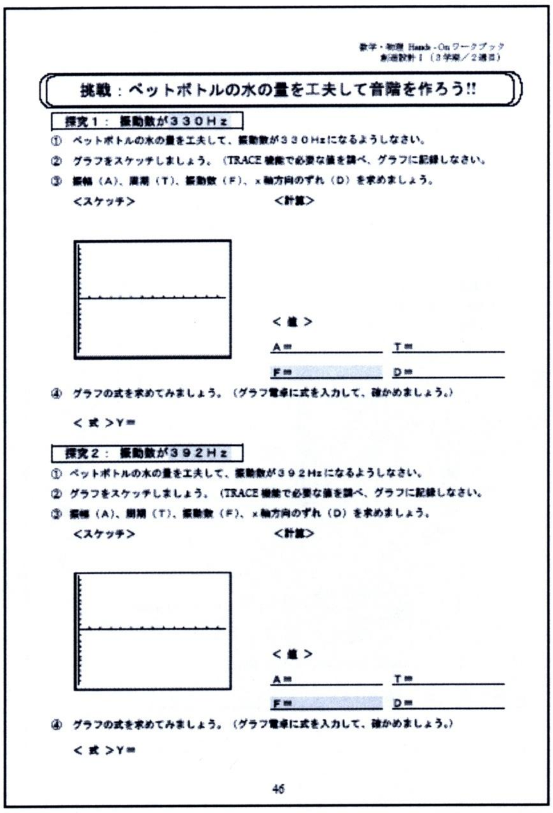


探究２：　水を入れたペットボトル　（マークの色：　　　　　）

① グラフをスケッチしましょう。（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフに記録しなさい。）
② 振幅（A）を求めましょう。
③ 周期（T）を求めましょう。
④ 振動数（F）を求めましょう。
⑤ x軸方向のずれ（D）を求めましょう。
⑥ グラフの式を求めてみましょう。（グラフ電卓に式を入力して、確かめましょう。）



［第３週目］



数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 I（３学期／２週目）

挑戦：ペットボトルの水の量を工夫して音階を作ろう!!

探究１： 振動数が３３０Ｈｚ

① ペットボトルの水の量を工夫して、振動数が３３０Hzになるようしなさい。
② グラフをスケッチしましょう。（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフに記録しなさい。
③ 振幅（A）、周期（T）、振動数（F）、x 軸方向のずれ（D）を求めましょう。

＜スケッチ＞　　＜計算＞

＜値＞

A=　　T=

F=　　D=

④ グラフの式を求めてみましょう。（グラフ電卓に式を入力して、確かめましょう。）

＜式＞Y=

探究２： 振動数が３９２Ｈｚ

① ペットボトルの水の量を工夫して、振動数が３９２Hzになるようしなさい。
② グラフをスケッチしましょう。（TRACE 機能で必要な値を調べ、グラフに記録しなさい。
③ 振幅（A）、周期（T）、振動数（F）、x 軸方向のずれ（D）を求めましょう。

＜スケッチ＞　　＜計算＞

＜値＞

A=　　T=

F=　　D=

④ グラフの式を求めてみましょう。（グラフ電卓に式を入力して、確かめましょう。）

＜式＞Y=

46

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 I（３学期／３週目）

手作り楽器の演奏会!!

（１） テーマ曲《メリーさんのひつじ》

① 下の楽譜を見て、必要な音階とその振動数を書きなさい。
② ペットボトルに水を入れて、音作りをしなさい。
③ 音作りが終了したら、練習しましょう。（余裕があれば自由曲もやろう！）

Allegretto

メーリ さんの　ひ つ じ　ひ つ じ　ひ つ じ

メーリ さんの　ひ つ じ　まっ し ろ ね

（２） 音作りのコツ

① 作業分担をしよう！
・PET ボトルに水を入れて吹く人（演奏担当者が行う）。
・グラフ電卓、CBL を操作する人。
・周期、振動数を計算する人。

② 基準になる音を以下の手順で決めよう！
・グラフ電卓で各音階の振動数を計算し調律する。
・各音階が取れたら、最終的には耳で音階の微調整を行う。

③ ENTER を押すタイミングは「いい音だな！」と思った瞬間！

（３）各班の演奏を評価しよう！

チェック項目	1班	2班	3班	4班	5班	6班	7班	8班	9班	10班	11班	12班	13班
良い演奏でしたか？													
音階の調節は良いですか？													
演奏態度は良いですか？													
総合得点													

【評価方法】はい：３、どちらともいえない：２、いいえ：１

47

巻末資料４：回帰モデル機能の数学的活動

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

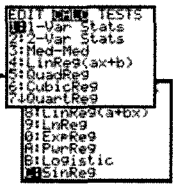
回帰分析を使って未来を予測しよう

目的：先週の授業では、グラフ電卓の二次回帰モデル機能を使って、CBLで収集したボールの落下データのモデル式を求めた．
　グラフ電卓には、二次回帰モデル機能以外に多くの回帰モデル機能がある．実際の統計データを基にいろんな回帰モデル機能を使ってモデル式を求めてみよう．さらに、求めたモデル式から未来を予測してみよう．

★★　回帰モデル機能の種類　★★

STAT CALC	モデル式	名称
4: LinReg(ax+b)		線形（１次）回帰モデル
5: QuadReg		２次回帰モデル
6: CubicReg		３次回帰モデル
7: QuartReg		４次回帰モデル
8: LinReg(a+bx)		線形（１次）回帰モデル
9: LnReg		対数回帰モデル（底は e）
0: ExpReg		指数回帰モデル
A: PwrReg		べき乗回帰モデル
B: Logistic		成長曲線回帰モデル
C: SinReg		正弦曲線回帰モデル

【解説】
２次回帰を英語で
Quadratic Regression という．
（２次）　（回帰分析）



-41-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

課題：学校でのコンピュータ利用2000年の予想

右の表は，1983年から1994年のアメリカの公立学校でのコンピュータ１台における生徒数を表している．この傾向が続くとしたら，2000年ではコンピュータ１台における生徒数は何人になるだろうか．

君の予想は？＿＿＿＿＿＿人／１台

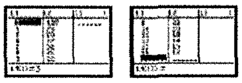
(Source: Quality Education Data.)

Year	生徒数／１台
1983	125
1984	75
1985	50
1986	37
1987	32
1988	25
1989	22
1990	20
1991	18
1992	16
1993	14
1994	12

データ入力方法

● STAT で 1:Edit.....を選択する．
L_1 に年代
L_2 に生徒数／１台

注．年代
1983 → 3 とする



Window の設定

データの表示

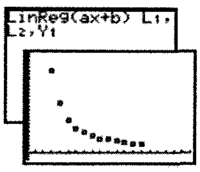
● 2nd Y= で 1:Plot1...On を選択する．

-42-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

【探究】いろいろな回帰モデル機能でモデル式を求めてみて，2000年を予想しよう．
　　さらに，モデル式の妥当性を考えてみよう．

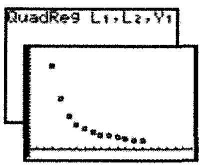
(1) 4: LinReg(ax+b) ：線形（１次）回帰モデル



<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

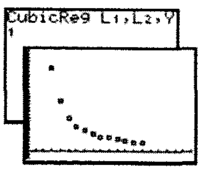
(2) 5: QuadReg ：２次回帰モデル



<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

(3) 6: CubicReg ：３次回帰モデル



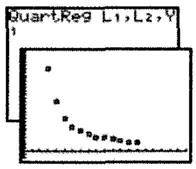
<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

-43-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

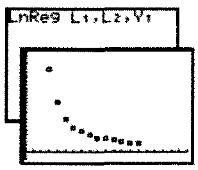
(4) 7: QuartReg ：４次回帰モデル



<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

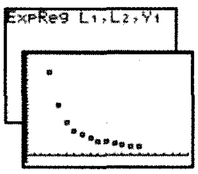
(5) 9: LnReg ：対数回帰モデル



<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

(6) 0: ExpReg ：指数回帰モデル

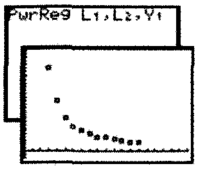


<モデル式は小数点第３位四捨五入>

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

-44-

(7) A: PwrReg ：べき乗回帰モデル



＜モデル式は小数点第３位四捨五入＞

モデル式	
2000 年	
妥当性	良い　　悪い
理由	

【考察】上の (1)~(7) のモデル式の中で１番良いと思われるモデル式を選び，
その理由を下に書きなさい。

挑戦：AIDSの累積死亡者数（2000年の予想）

12月1日は，世界エイズデーです．1981年に米国で発見されたエイズは，20年近く経った今，地球規模の大問題となっている．右の表は，1981年から1994年のアメリカでのエイズによる累積死亡者を示している．この傾向が続くとしたら，2000年での累積死亡者数は何人になるだろうか．

君の予想は？＿＿＿＿＿＿人

(Source: http://www.avert.org/usastaty.htm)

Year	死亡者数（累積）
1981	150
1982	603
1983	2,085
1984	5,561
1985	12,429
1986	24,416
1987	40,578
1988	61,446
1989	89,037
1990	120,372
1991	156,932
1992	197,987
1993	242,717
1994	291,812

【レポート】

巻末資料５：「お湯の冷め方」実験

［第１週目］

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

お湯の温度の冷め方を探究してみよう！！

◆◆ 導入 ◆◆

お湯はどのように冷めるのだろうか？
味噌汁・コーヒーを飲んだとき，カップ麺・うどん・そばを食べたときの状況を思い浮かべてみよう．

◆◆ スケジュール ◆◆

第３週目 ・基本実験をおこなう．
・グループごとに，調査したい実験の企画書を作成する．
第４週目 ・企画書にしたがって実験をおこない，結果を考察する．
・実験報告書と，発表資料，OHPを作成する．
第５週目 ・各グループごとに発表をおこなう．
・各グループの発表を，全員で評価する．

■■ 必要な装置 ■■

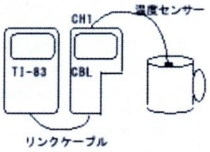
- グラフ電卓とリンクケーブル
- CBL本体
- 温度センサー
- 熱湯
- カップ

■■ プログラム ■■

- HEAT3

■■ 実験手順 ■■

次の手順で装置を接続する．



1．CBL本体とグラフ電卓それぞれの底部にある入出力口を，リンクケーブルでつなぐ．（リンクケーブルはしっかりと押し込むこと．）
2．温度センサーを，CBL本体の上側のチャンネル１（CH1）に接続する．
3．CBLとグラフ電卓の電源をいれる．
4．カップに熱湯を注ぎ込み，その中に温度センサーをいれる．
5．グラフ電卓で，プログラム《HEAT3》を実行する．
6．"HOW MUCH TIME …" と表示されたら，データを採取する時間間隔（今回は "１５（秒）"）を入力する．
7．"HOW MANY SENSORS" と表示されたら，使用する**温度センサーの本数を選択**する．
8．ENTERキーを押すように指示が表示されるまで待って，ENTERキーを押すと，データを採取しはじめる．

実験は９９個のデータを採取するので，15秒×99回＝1485秒（約25分）の時間がかかる．

-48-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

◆◆ 第４週目の授業の流れ ◆◆

(1) 基本実験（お湯の冷め方）を行う．
(2) 基本実験の実験結果と解析結果を書く．（p. 49-50記入）
(3) 次週行う実験の内容をグループで話し合う．
(4) 実験の企画書を各自で作成する．（p. 51参照，p. 52記入）
(5) グループの中で一番良い企画書を選ぶ．

□□ 基本実験の実験結果と解析 □□

<u>**基本実験の目的**</u>：お湯が冷めるとき，どのように温度が下がっていくのだろうか？　温度センサーとCBLを使って調べてみる．

【実験結果】

1．グラフ電卓に表示されたグラフをスケッチせよ．

注：グラフは正確に，TRACE機能で調べた座標も書き込もう！

L_1に温度データ，L_5に時間データが格納されている

2．測定開始時の温度は何度？ ＿＿＿＿＿℃
測定値の中で，最低温度は何度？
＿＿＿＿＿秒後 ＿＿＿＿＿℃

-49-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

【解析】（<u>解析方法は自由とする．これまでの実験を参考にせよ．また，発見したこと，分かったことも記入しよう．</u>）

-50-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（３学期／４週目）

□□ 基本企画書の例 □□

基本実験を基に，各グループ独自の実験を行うための企画書を作成する．以下の例を参考に企画書を次ページ（p．45）に書き込もう．

作成日：平成15年2月4日

例

<u>実験企画書</u>

メンバー　：＿＿＿＿＿＿＿＿

1．調べたいことは何か（実験の目的）

自分たちで調べたい事を具体的に書いてください．
（注：３つの温度センサーが同時に使えます．）

2．グループの予想（実験の仮説）

最低，以下のことを書いてください．
・予想のグラフ（調べること全てについて予想のグラフを書きましょう．温度も書くと具体的になりますね．）
・理由

3．実験方法，および，設計

最低，以下のことを書いてください．［p．41参照］
・実験機器（どのチャンネル［CH1，CH2，CH3］の温度センサーをどの材料に使うのかを明確にしましょう．）
・実験方法（使用するプログラム，データ収集の時間間隔，など．）

4．実験に必要な機材・材料【絶対に持ってこれる物に限る】

実験機材リスト	実験材料リスト	持ってくる人
・グラフ電卓（１台）	・熱湯	・先生
・リンクケーブル（１本）	・コーヒーカップ（１個）	・Ａさん
・CBL本体（１台）	・<u>ゾウキン</u>	・Ｂさん
・温度センサー（１本）	・<u>水筒（保温型）</u>	・Ｃさん

<u>**注：ゾウキンと水筒（保温型）は必ず持ってきてください．**</u>

5．その他【実験にあたり，なにか疑問点・質問があったら記入する】

なんでも書いて下さい．

-51-

［第２週目］

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（3学期／4週目）

作成日：

実験企画書

-52-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（3学期／5週目）

◆◆　第5週目の授業の流れ　◆◆

(1) 企画書に従って実験を行う．
(2) 実験結果報告書を書く．（p. 53参照，p. 54-55記入）
(3) 次週発表する内容をグループで話し合う．（p. 53参照）
(4) 発表で使用するOHPを作成する．（p. 53参照）
(5) グループで発表の練習をする．（発表の態度はp. 56参照）

□□　実験結果報告書の作成　□□

各グループ独自の実験の実験結果報告書を作成する．書き方は自由とするが，以下の項目は必ず記入しよう．これらの項目は実験企画書の項目と関連している．

- **調べたいことは何か（実験の目的）**
- **グループの予想は？（実験の仮説）**
- **実験方法，および，設計**
- **実験に必要な機材・材料**
- **実験結果と解析（解析方法は自由）**
- **実験前の予想は正しかったか**
- **実験結果と解析から発見したこと（できるだけ多く書くこと）**
- **この実験を基に，次回調べてみたいこと**

□□　発表内容の決め方　□□

グループの発表時間は**5分**．自分たちが行った自分たちだけの実験を短い時間で他人に伝えるためには，次の**起承転結**を参考にすること．発表は，自分たちをアピールするために，方法や内容はグループで相談・協力して決めよう．

起：実験の目的や実験結果の予想
承：実験方法，実験に必要な機材や材料
転：実験結果と解析結果
結：発見したこと，分かったこと，次回調べてみたいこと

□□　OHPの書き方の注意　□□

- 目安として，行数は**10行以内**，字数は1行に**15文字以内**
- 文字が沢山使えない分，**図を使用**する
- **赤ペンは文字に使用しない**で，アンダーライン等の強調に使う

-53-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（3学期／5週目）

作成日：

実験結果報告書

-54-

数学・物理 Hands-On ワークブック
創造設計 II（3学期／5週目）

-55-

［第３週目］

◆◆　第６週目の授業　◆◆

(1) 各グループごとに発表する．
(2) 各グループの発表を全員で評価する．

□□　発表の態度　□□

発表は，自分たち実験をアピールするために与えられたチャンスである．自分たちが行った実験は自分たちが一番良く知っているはず．恥ずかしがらず堂々と発表しよう．

・落ち着いて，声は大きく，ハッキリ，ゆっくり話す（重要！）．
・目線は前（重要！），できれば全員を見渡すように．
・重要なことは指示棒でスクリーンを指しながら話す．
・ポケットに手を入れて話さない．
・直立不動ではなく，時にはジェスチャーも入れて，聞いている人を引きつける．

□□　聞く人の態度　□□

聞く人の態度も重要である．特に，良い質問をする人は，他人の発表を参考に自分の実験を高めようとする意志が見られ，とても高く評価される．

・分からないこと，疑問に思ったことは必ず質問しよう．
・発表者にアドバイスがあれば，必ず助言しよう．

□□　発表の評価　□□

各班の発表を評価しよう．

【評価方法】良い：3、どちらともいえない：2、良くない：1

項目	実験内容	解析方法	発表態度	総合得点	コメント
1班					
2班					
3班					
4班					
5班					
6班					
7班					
8班					
9班					
10班					
11班					
12班					
13班					
14班					
15班					
16班					
17班					