数学教育におけるアナロジーの研究 (2)

— 概念メタファーによる数学学習の分析 —

國 岡 高 宏
兵庫教育大学

Study on Analogy in Mathematics Education (2):
Analysis of Mathematics Learning by Conceptual Metaphor

Takahiro KUNIOKA
Hyogo University of Teacher Education

全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第15巻　第2号　2009　別刷

全 国 数 学 教 育 学 会

Reprint from Journal of JASME: Research in Mathematics Education Vol. 15, No.2 2009

Japan Academic Society of Mathematics Education

全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第15巻　第2号　2009　pp.17～27

数学教育におけるアナロジーの研究 (2)

― 概念メタファーによる数学学習の分析 ―

兵庫教育大学　國　岡　高　宏

(2009.2.28受理)

1. はじめに

認知科学の研究において，アナロジーは知識獲得および問題解決にとって有効な推論メカニズムであることが指摘されている（ホリオーク，K. &サガード，P. 1998, Vosniadou, S. 1989)。同様に，数学教育の研究においても，アナロジーは数学学習および数学的問題解決に重要な役割を果たすことが指摘されている（ポリア，G. 1954, English, L. & Sharry, P. 1996, English, L. 2004)。数学教育に関するアナロジー研究の多くは，アナロジーを数学学習の改善に利用しようというものである。そのためにはまず，アナロジーの一般的特性，すなわち，アナロジーはいつ起こり，なぜそれが起こり，あるいはなぜ起こらないのかといったことが明らかにされる。そして，日常的知識と数学的知識の異同を考慮しつつ，アナロジーの特性を配慮した教材開発と指導法の工夫が図られるのである（崎谷ほか，2005)。

筆者は，拙稿（國岡，2007）において，アナロジーを以下のように捉え，数学学習におけるアナロジーの機能をいくつか指摘した。

《アナロジーは，本来は異なる二つのものごとの間に何らかの類似性を見いだし，その類似性に基づいて，一方での情報を他方へ適用させる認知過程である。このとき適用された情報が適用先でも妥当であるかどうかは不確実であり，この意味でアナロジーは蓋然的推論なのである。完成された数学は決定的な論理の連続として表現されるものであるが，その学習過程において学習者は，蓋然的推論であるアナロジーに頼らなければならないのである。》(p67-73)

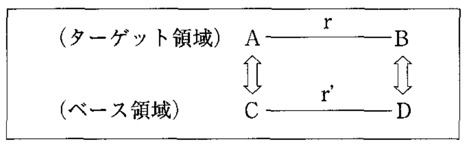
本稿では，認知意味論の中心的考えである概念メタファーに着目する。その理由は，概念メタファーがアナロジー的推論と類似した構造と機能をもち，人間の認識活動の基本的仕組みを構成していると考えるからである。この基本的認識装置としての概念メタファーが，数学的知識の獲得に何らかの関連をもつことは当然予想される。問題となるのは，その関連がどのようなものなのか，そして，数学学習における概念メタファーの機能は何かということである。なぜならば，数学学習との関連性や数学学習上の機能が解明されなければ，概念メタファーの視座から数学教育的な示唆を得ることは難しいからである。

そこで，本稿では，算数・数学の具体的教材を概念メタファーの観点から詳細に分析し，数学学習に概念メタファーがどうように関連するのかを調べていく。その際，二種類の概念メタファーを分析の観点として用いることになるが，それによって，数学学習に質的に異なる二つの学習場が存在することを明らかにする。

2. アナロジーとメタファー

(1) アナロジー写像

アナロジーでは，次の［図1］のように異なる二つの領域の間に対応付けが行われている。



［図1：アナロジー写像］

この対応づけはベース領域からターゲット領域への一種の写像（mapping）と考えられる（Gentner, D. 1983, Halford, G. & Boulton-Lewis, G. 1992, Halford, G. 1993)。このようにアナロジーやメタファーの仕組み（構造）を写像と捉える図式が，本研究の基本的枠組みである。

Pimm, D.（1980）は，《メタファーは縮約されたアナロジーと見なせる》(p.48）と述べ，以下の例を示している。

［事例1］**「人生の冬」**

（アナロジー）	晩年：人生＝冬：一日
（メタファー）	「晩年は冬である」
	「人生の冬」

アナロジーは，基本的に「A：B＝C：D」の形式をとるが，この関係に基づいて，我々は「AはCであ

る」あるいは「BのC」といったメタファー表現を用いることができる。ただし，メタファー表現の解釈では，そのメタファーの基になっている（隠された）アナロジーを見つける必要がある。

(2) 比喩とメタファー

メタファーを日本語の「隠喩」と言い換えてしまうと，専門的述語の意味合いが強くなってしまう。それは，「隠喩」と言うとき，「直喩（シミリー）」あるいは「換喩（メトニミー）」,「提喩（シネクドキ）」といった修辞学の他の用語との対比が意識されてしまうからであろう。これは，狭義のメタファーである。

しかし，欧米での日常的な感覚では「メタファー」は日本語の「比喩」とほぼ同義である（佐藤，2006)。これは，広義のメタファーであり，比喩全般を広く意味する。

本研究では，Pimm, D.（1980）と同様に，メタファーをアナロジーの一種として扱っている。従って，本論においては，「メタファー」を広義の意味に用いる。

3．概念メタファー

(1) 認知意味論のメタファー観

伝統的なメタファー観では，メタファーを単なる「修辞法」,「ことばの彩」といった言語表現の問題とする。これに対して，レイコフとジョンソンをその創始とする認知意味論では，メタファーが，言語表現に限らず我々の思考や行動を規定する概念体系の構成過程に深く関わっていると考える（谷口，2003；松本，2003；深田・仲本，2008)。

《以上述べてきたことで最も大切なことは，メタファーというのは，ただ単に言語の，つまり言葉遣いの問題ではないということである。それどころか，筆者らは人間の思考過程（thought processes）の大部分がメタファーによって成り立っていると言いたいのである。人間の概念体系がメタファーによって構造を与えられ，規定されているというのはこの意味である。人間の概念体系の中にメタファーが存在しているからこそ，言語表現としてのメタファーが可能なのである。》(Lakoff, G. & Johnson, M. 1980, p.7)

また，伝統的なメタファー観では，メタファー表現を字義的な表現から逸脱した表現と捉えている。そして，逸脱表現であるからには，逸脱していない正規の表現があるはずでり，メタファーで言い表された内容はすべて，メタファーを用いない表現（字義的な表現）に言い換えることが可能であると考える。認知意味論は，この考えに真っ向から反対する。

《心に関するこの伝統的な考え方は間違っている。なぜなら，人間の認知は根本的にさまざまな詩的ないし比喩的過程によって形成されているからである。メタファー，メトニミー，アイロニー，そしてその他の修辞的表現（tropes）は，字義的な心的思考をことばの上で歪曲したものではなく，人が経験と外的世界を概念化する際に用いる，基礎的な枠組みを構成しているものである。》(ギブズ, L. W. Jr. 2008, p.1)

従来の意味論（従来の言語学）では，主観性を排除するため，語と客観的な外界との関係のみを考える。これに対して，認知意味論（認知言語学）では，意味を人間の外界認識の産物として考える。認識主体の在り方，すなわち人間の認知過程を抜きにしては，意味の問題を扱うことは出来ないと考えるのである。このような意味観の登場には，認知心理学の発達に伴い，「イメージ」「スキーマ」等といった心的な（主観的な）概念の使用に抵抗がなくなってきたことが影響している（松本，2003)。

(2) 日常的概念における概念メタファー

認知意味論の基本的考え方では，メタファーを「ある概念を別の概念と関連づけることによって，一方を他方で理解する」という認知プロセスとして広く捉え直す。我々は，日常的で具体的な経験をもとに，抽象的な対象を理解している。我々の概念体系の中には，ある（具体的な）概念と別の（抽象的な）概念との対応関係が生まれる。この対応関係が，**概念メタファー (conceptual metaphor)**[1] である。

［事例2］**「時間はお金である」**
・多くの時間を費やした。
・時間がなくなってきた。
・時間稼ぎをする。

［事例3］**「多いは上，少ないは下」**
・事故件数が上昇している。
・収入が落ちた。

［事例2］と［事例3］に挙げた文章は，どれも日常的に使用される言い回しであり，ことさらにメタファーが使用されている感じがしない。しかし，これらの文章表現が成立する背景には，それぞれ「時間はお金である」,「多いは上，少ないは下」という捉え方を必要とする。

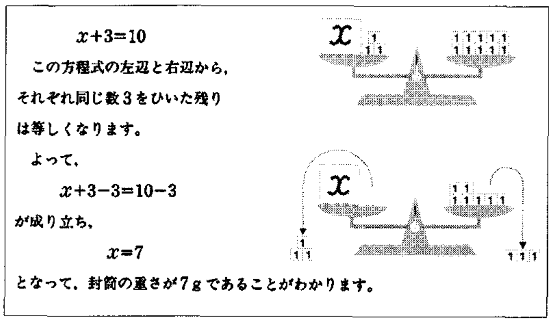
しかも，この捉え方が何らかの知覚的類似性や論理的必然性から，必ずしも導き出されているわけではないということに注意されたい。たとえば,「時間(time)」と「お金（money)」の間に何らかの知覚的類似性があるために，「時間はお金である」というメタファーが成り立つわけではない。そもそも「時間（time)」に対しては直接的な知覚がもてないのであるから，こ

のメタファーの成立に知覚的類似性を持ち出すことはナンセンスなのである。知覚的類似性ではなくて，次のような**経験構造**[2]の類似性が，これらのメタファーを成立させているのである。すなわち，［事例２］では「時間は（お金のように）貴重である」という社会的経験を基盤とする経験構造が，［事例３］では「物を積み重ねていくと嵩が高くなる」という物理的経験を基盤とする経験構造が，それぞれの捉え方を可能にしているのである（Lakoff, G. & Johnson, M, 1980）。

(3) 数学的概念における概念メタファー

次の［事例４］は，中学１年生「方程式」単元の教科書に見られる概念メタファーである。ここでは指導場面において，方程式とその解法が上皿天秤の操作になぞらえて説明されている。すなわち，「方程式は天秤である」という概念メタファーが，ここでの学習指導の説明に使用されている。

［事例４］**「方程式は天秤である」**



［図２］（啓林館，１年，p.68）

橋本（1992）は，「方程式は天秤である」メタファーを，［表１］のように分析している。

［表１］

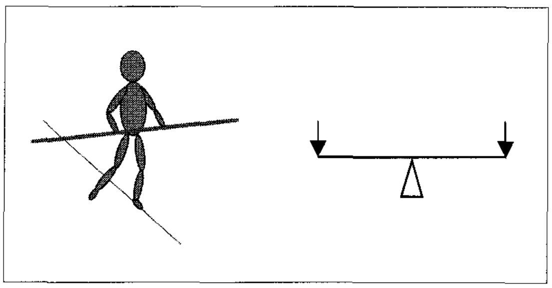
天　　秤	方 程 式
二つの皿と支点がある。	等号（＝）を挟んで左右に分かれている。
皿には重りを置く。	数や文字を左右両辺に置くことができる。
釣り合いをとるためには，両方の重さが同じでなければならない。	相等性を保つためには，両辺の数もしくは文字の値が等しくなければならない。
釣り合いを保つためには，一方にある重さの物を加えたら，他方に同じ重さの物を加えなければならない。取り去る場合も同様である。	相等性を保つには，一方に加えたものを他方にも加えなければならない。引く場合も同様である。

このようなメタファー（あるいは，譬え）は，学習指導における児童・生徒の理解や納得を得るための方便として使用されるだけではない。たとえば，中学校における「負の数の乗法」の指導場面を考えてみれば分かるように，特定の学習場面では，数学的・論理的な説明が児童・生徒に対して行えないため，不可避的にメタファー（譬え）に頼らなければならないのである（國岡，1996）。

(4) 概念メタファーの基盤としての身体性

［事例４］「方程式は天秤である」では，「等式の相等性」という数学的概念が，「天秤」という具体的な事物で理解されている。正確には，「天秤のバランス」という心的イメージによって理解されている。

このような概念メタファーの基盤となる心的イメージは，**イメージ図式**[3]と呼ばれている（ジョンソン，M., 1991）。イメージ図式は，概念メタファーのベース領域となる基本的枠組みであり，我々の理解の根幹，あるいは出発点となる。イメージ図式は心的構成物（心的表象）の一種であるが，それは日常的に繰り返し経験される知覚的，身体運動的なパターンから発生する。たとえば，「バランス」の意味は，「バランスをとる」という自らの身体経験を通して学ぶよりほかはなく，他の規則や概念の組み合わせに還元して把握することは出来ないのである。［図３］の左の図は「バランスをとる」の身体経験を，右の図は「バランス」のイメージ図式を表している。



［図３：身体経験とイメージ図式］

《それゆえ，第一の重要な論点は，バランスの意味は，われわれがバランスをとる行為を通じて，またわれわれの身体内部の体系的過程や状態の経験を通じて，初めて創発するということである。》（ジョンソン，M. 1991, p.178）

この意味において，イメージ図式はその起源を人間の身体にもつと考えられる。

《われわれが世界を結合され統合された場所として経験し，またその意味が理解できる以上，われわれの経験には反復可能な一定のパターンや構造がなければならない。イメージ図式とは，われわれの知覚における相互作用，身体経験，そして認知操作の繰り返し登場する構造，あるいはこうしたものの中にある繰り返し登場する構造

なのである。》(ジョンソン，M. 1991, p.184)

認知意味論では，我々の認識には我々の身体およびそれを通した経験を基盤とした主観的な解釈が必要であると主張する。すなわち，我々の認識には我々の「身体性（embodiment)」が反映されていると考える。この考え方は，デカルト的身心二元論の客観主義に対して，経験基盤主義（深田，2008）と呼ばれている。数学教育において，この「身体性」に着目した研究としては，有馬（2001)，丸野（2002)，秋山（2005）がある。

4．GroundingメタファーとLinkingメタファー

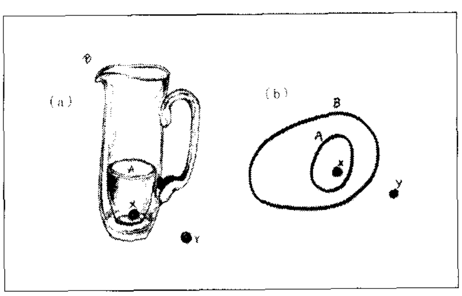
Lakoff, G. & Nunez, R.（2000）では，認知意味論研究の成果を援用しながら数学的概念の理解の様相が詳細に分析されている。彼らの主張を概括すれば，数学的概念の意味もまた他の日常的概念の意味と同様に概念メタファーによって他の領域の概念から比喩的に写像されているということである。さらに彼らは，数学的概念に対しては，その意味の発生源すなわちベース領域の違いから，**Groundingメタファー**と**Linkingメタファー**という二つの概念メタファーを区別できるとしている。

《一つ目のものは，われわれが *grounding metaphors* と呼ぶものである。それは，(物を集めて山にするのような）日常的経験から，（加法のような）抽象的な概念への写像をわれわれが行うことを可能にするメタファーである。二つ目のものは，われわれが *linking metaphors* と呼ぶもので，それは，算術を数学の他の分野に結びつける。たとえば，算術を空間的コトバで概念化し，つまり，幾何と算術を結びつけることを可能にするメタファーであり，そのとき，数を直線上の点と考えているのである。》(Lakoff, G. & Nunez, R. E. 2000, pp.52-53)

(1) Groundingメタファー

Groundingメタファーとは，身体感覚あるいは日常経験がベース領域となる概念メタファーのことである。

［事例5］**「集合は容器である」**



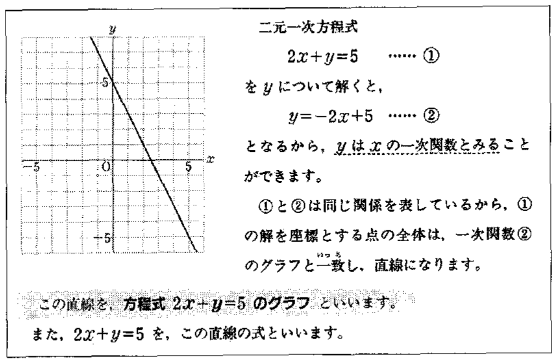
［図4］（Lakoff, G. & Nunez, R. 2000, p.32より抜粋）

［図4］において，(a）の容器Aは容器Bの中にあり，物体Xが容器Aの中にある。このとき物体Xは容器Bの中にあると言ってよい。(b）のベン図で表された集合の関係において，「A⊂B∧x∈Aならばx∈B」である。ここで，「容器A→集合A」，「容器B→集合B」，「物体X→要素x」，「容器の空間的配置→集合の包摂関係」などといった写像が行われている。すなわち，ベン図で表現されるような集合の概念は，「集合は容器である」というGroundingメタファーを，その基盤としているのである。

(2) Linkingメタファー

Linkingメタファーとは，メタファーのベース領域として何らかの数学的概念が用いられる概念メタファーのことである。

［事例6］**「方程式は直線である」**



［図5］（啓林館，２年，p.60）

［図5］は，中学校２年生「一次方程式」単元の教科書の一部である。ここでの学習の流れを概略すれば，以下のようになろう。

まず，二元一次方程式$2x+y=5$が式変形によって$y=2x+5$と表せることから，それを一次関数と見なす。一次関数は座標平面上にグラフ（直線）として表すことができる。よって，座標平面上の直線を二元一次方程式の表現と考えることができる。

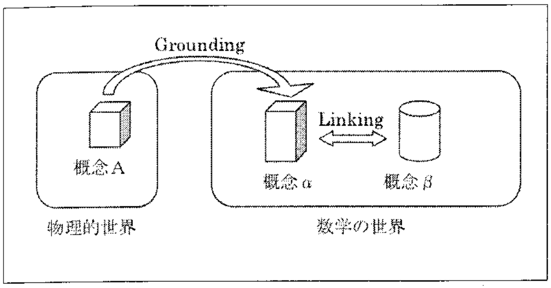
方程式を座標平面上の直線と「見なす」ことによって，方程式の問題が座標平面上の幾何的な問題に置き換え可能となる。たとえば，「連立方程式を解く」という代数的操作が，「２直線を描いて，交点の座標を読み取る」という幾何的操作に置き換えて遂行できるのである。

勿論，「$2x+y=5$」(文字記号）という表記の視覚的形状と「＼」(線描）という空間的図形の視覚的形状との間に何らかの類似性があるわけでない。さらに，方程式に対して行われる代数的操作の経験と平面上に直線や曲線を描いたり，それを眺めたりする経験との

間にも類似性はない。そうした類似性が無いからこそ，方程式と幾何図形を結び付けるアイディアを人類が手に入れるには，デカルトとフェルマーという天才を必要としたのであろう（クライン，M. 1962）。

(3) Groundingメタファーと Linkingメタファーに関する学習上の相違点

上述したように Grounding メタファーと Linking メタファーは，そのベース領域が異なる。それを図示すれば，次の［図6］ようになる。



［図6：Groundingメタファーと Linkingメタファー］

Lakoff らは，Grounding メタファーの理解には学習指導をほとんど必要としないが，Linking メタファーの理解には意図的な学習指導がかなり必要になると述べている（Lakoff, G. & Nunez, R. 2000, p.53）。これは，Grounding メタファーのベース領域が身体感覚や日常経験であり，そこからのイメージ図式は，ことさらの学習指導を経ずとも自然に獲得されると考えたからであろう。一方，Linking メタファーでは，ある数学的概念とそれとは別の数学的概念を関連づけることが必要である。そのため，その関連づけ自体が新しい見方や考え方を要求する。それは自然と出来るようになる類のものではなく，計画された学習指導の結果として生じる認識である，というのが彼らの主張である。

自然と獲得されるのか，意識的な努力が要求されるのかについては異論がある。と言うのも，彼らは，Grounding メタファーによって学習される数学的概念として，「整数の加法・減法」「数直線」などを挙げているが，小学校低学年での教育実践を反省すれば，すべての児童がこれらの概念を計画された学習指導なくとも自然に獲得しているとは考え難いからである。

このように学習指導の必要性の有無については検討の余地がある。けれども，数学的概念の理解における二種類のメタファーを指摘した点は，大いに評価されてよかろう。なぜなら，認識メカニズムとしての概念メタファーに Grounding メタファーと Linking メタファーを区別することによって，数学的概念の学習において，質的に異なる二つの学習場面を区別できるからである。

［表2］

	Grounding メタファーによる学習	Linking メタファーによる学習
ベース領域	身体・日常経験A	数学的概念 α
ターゲット領域	数学的概念 α	数学的概念 β
類　似　性	知覚的類似性	構造的類似性
イメージ図式形成の条件	身体・感覚的なパターンを生じさせる知覚経験の繰り返し（体験の意識化）	数学的概念・操作のパターンを生じさせる思考経験の繰り返し（反省的思考）
学習成立の条件	身体・感覚的な経験のパターンがイメージ図式となっていること	少なくともベース領域の数学的概念 α がイメージ図式となっていること

［表2］は，これまでの議論を基に，Grounding メタファーによる数学学習と Linking メタファーによる数学学習の相違点を整理したものである。

5．概念メタファーによる数学学習の分析

以下では，Grounding メタファーによる学習と Linking メタファーによる学習の特徴を，具体的な事例の分析を通して明らかにしていきたい。

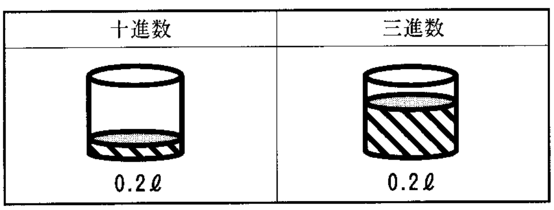
(1) Groundingメタファーによる学習

［G-1］数学的概念の意味づけ

ここでの学習では，物的対象に対する知覚や身体活動などの具体的経験から抽象的な数学概念の意味を構成していくこと，すなわち数学的概念の**意味づけ**[4)] が行われる。

数学が扱う概念の多くは物的実体を持たない抽象的なものである。従って，それらを考察したり伝達したりするためには，それらを表すモデルが必要である。

［事例7］**「小数は容積である」**

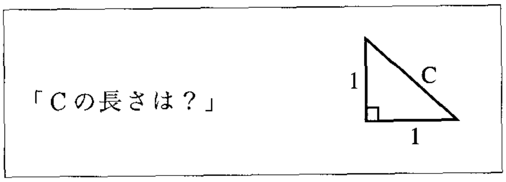


［図7：量による小数の意味づけ］

上の［図7］は，抽象的な数「0.2」が具体的対象の容積「0.2ℓ」で意味づけられている様子を表している。十進数の欄に描かれた液量のイラストには何の抵抗感もないと思われるが，三進数のそれには違和感

が感じられるのではなかろうか。たとえ，それが3進数での「0.2」を表現した図であると頭でわかっていても，どこか釈然としない，腑に落ちない感覚が残る。数感覚（number sense）のある部分は数の大きさに関する感覚であろうが，この感覚が日常的な事物の具体的イメージと強力に結びついていることを，［事例7］は我々に気づかせてくれる。

［事例8］**「長さは数である」**

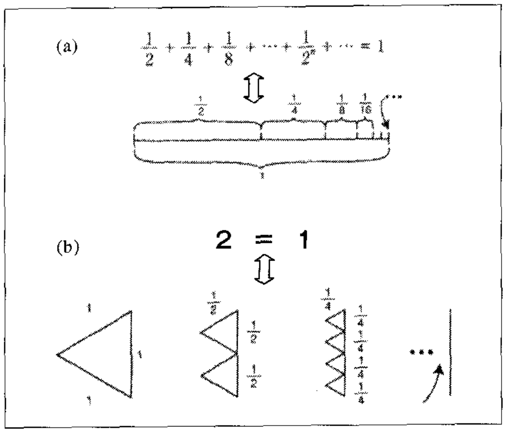


［図8：長さと数］

昔，数は自然数とそれらの比で表されるもの，すなわち有理数に限られていた。従って，［図8］に示す「Cの長さ（$\sqrt{2}$）」は数とは認められなかった。しかし，「すべての物的線分の長さに対応する数が存在しなければ成らない」すなわち「長さは数である」という概念メタファー（Lakoff ら，2000では，measuring stick metaphor と呼ばれている）によると，Cの部分に相当する数，すなわち $\sqrt{2}$ が，数として存在することになる。しかも，このメタファーによってのみ数としての $\sqrt{2}$ の存在が成立すると，Lakoff ら（2000）は主張するのである。

さて，「長さは数である」からすれば当然，数を長さとして表し，数の問題を長さの問題として解決できることになる。次の［事例9］の（a）では，数の問題を図形の問題として鮮やかに解決している。すなわち，等比数列の部分和を考え，その極限を求めるといった数学的な操作を行うことなく，長さ1の線分の無限分割を表す図形を見ることによって，与えられた級数が1に収束することを理解できるのである。

［事例9］**「数は線分（図形）である」**



［図9：数と図形］（メイザー，J. 2006, pp.97-98）

上の（a）のような図的な説明は直観（感）的な理解には役に立つし，それなりの説得力を持っている。しかしながら，こうした図的な説明は数学的証明としては不十分であり，時には間違った結論に導くことがある。たとえば，（b）に示すように，図形が数に関する判断を誤らせる場合がある。

［G-2］記号表現の具象化

ここでの学習では，数学的概念を表している記号表現が具象化（reification）し，記号表現自体をあたかも物的対象のように実体のあるものとして感じられるようになる。

たとえば，ふだん我々は，数（number）と数字・数詞（numeral）の違いを意識していない。そして，通常我々は，十進システムと，その記数法によって数を理解している。「ある数（整数）が奇数か偶数か」という問題は，数（number）の問題である。この「ある数（整数）が奇数か偶数か」の問題に対して，その数字列の最後の数字が「1，3，5，7，9ならば奇数，そうでなければ偶数である」という簡単な解決方法がある。この解決方法では，数（概念）の問題を数字（記号）によって処理しているのである。

ところが，当然のことではあるが，十進システム以外で数が表示された場合，上の解答方法はうまく働かない。

［図10］の上段では奇数・偶数の判断が容易なのに，下段ではそれが極端に難しくなる。この事例から，数についての判断を数字についての判断から切り離すことがいかに難しいかがわかる。

「偶数は，どれですか？」

10進数	10，11，12，13，14，15，16，17，…
5進数	10，11，12，13，14，20，21，22，…

［図10：数と数字］

我々は，たとえば「3は奇数らしい数だが，447はそれほどでもない」（ギブズ，L. 2008, p.59）というように，特定の数字に対して特別の感覚をもつ。当然，この種の感覚は十進システムに習熟した者のみが十進数記号（数字）に対して持つものである。数字を使用する経験の繰り返しによって数記号が実体をもつものとして感じられるようになった状態から，この感覚はもたらされる。

こうした記号表現の具象化によって，その記号表現をベース領域とする概念メタファー（Linking メタファー）の生成が可能となる。

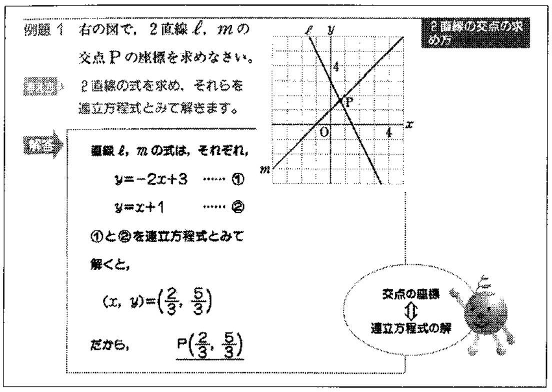
(2) Linkingメタファーによる学習

Groundingメタファーが二つの事柄の経験構造の共通性から，それらの間に類似性が「見える」あるいは「見えてくる」メタファーであるのに対して，Linkingメタファーは，もともと何らの類似性もなかったところに，類似性を「見よう」あるいは「見たい」とするメタファーである。言い換えれば，Groundingメタファーは二つのものが自然と同じに見えるという受動的なメタファーであるのに対して，Linkingメタファーは異なって見えるものを強引に同じと見なすという能動的なメタファーであると言えよう。

[L-1] 数学的概念の意味づけ

[事例6] の「方程式は直線である」というLinkingメタファーが成立すると，そこから必然的に，座標平面上の2本の直線の交点を2つの方程式の共通解と見なす考え方が生じる。

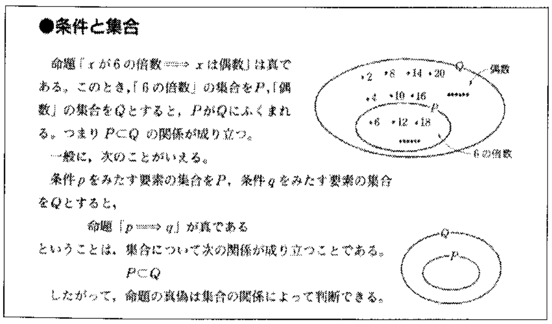
[事例10] **「交点は解である」**



[図11：方程式↔図形]（啓林館，2006，p.63）

[図11] に示す教科書のページには，キャラクターの吹き出しの中に「交点の座標⇔連立方程式の解」と，ここでの考え方のポイントが端的に示されている。これがまさしく幾何的概念と代数的概念を結びつけて考えること，すなわちLinkingメタファーを用いた指導が試みられているところである。

[事例11] **「命題は集合である」**



[図12：命題↔集合]（第一学習社，1999，p.37）

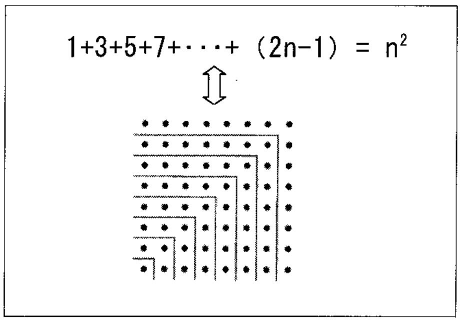
[図12] では，命題を構成する条件文（「xが6の倍数」）を満たす要素の集合（{6，12，18，…}）を考えることにより，「pならばq」という命題（論理）の問題が，「P⊂Q」という集合の問題に置き換えられている。

命題の関係を，集合の関係に置き換えて考察することで，逆，裏，対偶などの真偽の判断が簡単にできるようになる。それは，集合関係の考察にはベン図などの視覚的表現を用いることができるためで，目に見えない論理の問題を目に見える図の問題として処理していると考えることができる[5)]。

[L-2] 問題解決

問題Aを別の問題Bに置き換え，問題Bを解決することによって，元の問題Aの解決が行われる。これは，アナロジーやメタファーが問題解決の方略として使用される場合であり，科学や数学の研究において頻繁に使用される思考方法である（ヘッセ，M.，1986）。

[事例12] **「数は図（点）である」**



[図13：数↔図]（メイザー，J.，2006，p.96-99）

[図12] では，数列の問題が図（図形数）の問題として解決されている。そこでは，数列 {1，3，5，…} を点列 {・，･･･，･････，など} に置き換え，正方形を形作るよう点列を配列することで，数列の和n^2が簡単に求められている。

このような問題解決に利用されるLinkingメタファーは，数学学習の随所に見られる。たとえば，所謂「別解」や「エレガントな解法」の中には，元問題を別問題に置き換えるところに，その解法の要があるものが多い。そうした解法の学習では，元問題の別問題への置き換え，すなわちLinkingメタファーの生成が，学習者に求められることになる。

[L-3] 新しい概念の創発

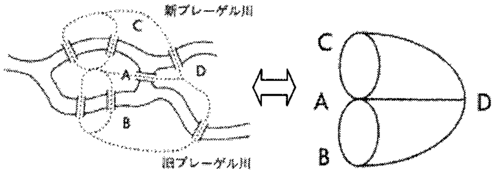
異なる領域の概念が結びつくことによって，新しい概念が創発する場合がある。

18世紀，レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）は，[図14] に示す「ケーニヒスベルクの問題」に対して「それはできない」という解答を与えた。オイラー

は，元問題をグラフの問題に置き換え，グラフが一筆書き不可能であることを示すことによって，「ケーニヒスベルクの橋を全て1度ずつ通って戻ってくるルートが存在しないこと」を証明したのである。

［事例13］**「経路は一筆書き（グラフ）である」**

「プレーゲル川に架かっている7つの橋を2度通らずに，全て渡って，元の所に帰ってくることができるか。ただし，どこから出発してもよい。」



［図14：ケーニヒスベルクの問題］

現在，グラフ理論は数学の一つの研究領域である。経路問題の本質を「要所のつながり方」と見抜き，それを「点とそれを結ぶ線」（グラフ）の問題と見なしたところに，オイラーの天才がある。「ケーニヒスベルクの問題」を経路の問題として解決すれば，それはそれだけの問題で終わっていよう。そこを「点とそれを結ぶ線」の問題と捉え直したことによって，グラフ理論が誕生してきたのである。

こうした事例は数学の歴史において，新しいアイディアが誕生する場合によく見られることではなかろうか。たとえば，［事例6］［事例10］は，現在では中学生が学習する程度の内容であるけれども，その考え方が生まれた当初は，幾何と代数を結びつける斬新なアイディアだったはずであり，そこから解析幾何学が誕生したことは周知の事実である。

(3) 二つの概念メタファーによる数学学習の特徴

ここまで具体的事例を挙げながら，Grounding メタファーと Linking メタファーによる学習の様相を分析してきた。事例が少ないためにそれぞれの学習の様相をすべて捉えたとは言えないが，いくつかの特徴を指摘することができたと思う。それをまとめれば，次のようになる。

・Grounding メタファーによる学習場

［G-1］具体的経験によって，数学的概念の意味づけが行われる。

［G-2］数学的概念の習熟によって，数学的記号表現の具象化が生じる。

・Linking メタファーによる学習場

［L-1］二つの数学的概念を「同じと見なす」ことによって，一方の他方による意味づけが行われる。

［L-2］問題の置き換えによって，解決が図られる。

［L-3］異なる領域の概念が結びつくことによって，新しい概念が創発する。

5．おわりに

Lakoff, G. & Nunez, R.（2000）は，数学的概念の理解における二種類の概念メタファー，すなわち Grounding メタファーと Linking メタファーの存在を指摘した。しかし，そこでの彼らの研究目的は，数学的知識の本性を認知意味論的に説明することであり，数学学習における概念メタファーの機能やその教育的意義を明らかにすることではない。従って，Grounding メタファーと Linking メタファーの違いによって学習場面でどのような差異が生じるのか，それぞれのメタファーによる学習の特徴は何か，といった詳細な分析を行うまでには至っていない。この点に関して，本稿では，Grounding メタファーによる学習場と Linking メタファーによる学習場の特徴をいくつかの事例分析によって明らかにしている。この点が，本論のオリジナリティーであり，彼らの研究を数学教育的な視座から深化させているものと考える。

数学的概念の形成は，数学教育実践にとって重要な学習指導の課題である。同時に，それは，数学教育学にとって中核的な研究対象である。本稿では，数学的概念の理解を概念メタファーによって捉えることによって，数学学習における二つの学習場を区別することができた。これら二つの学習場のいずれにおいても数学的概念の形成が行われることになるが，その様相は上述したように質的に異なっている。

この違いを踏まえた上で，算数・数学学習の各指導内容・教材の特性を分析することが，指導実践への示唆となろう。実際の授業場面における概念メタファーの事例の収集と学習実態の調査が今後の課題である。

註

1）概念メタファー（conceptual metaphor）は，Lakoff, G. と Johnson, M が著書 *Metaphor We Live By*（1980）において提唱した，認知意味論の用語である。

2）概念メタファーのベース領域となりうる最も基本的な人の経験領域として，谷口（2003）は，以下の3つを挙げている。

《a，身体（知覚・運動装置，心的能力，感情的気質など）
b，身体的・物理的架橋との相互作用（移動，物体の操作，食物摂取など）
c，文化内における他者との相互作用（政治的・経済的・宗教的制度に関して）》（p.43）

3）image schema の訳語で，「イメージ・スキーマ」

と訳されることもある。

4）《理解するとは，つねに当面の具体的な事例を何ものかとして意味づけることである。》（尼ヶ崎，1990）

5）集合の包摂関係をベン図を使って概念化することの利点と欠点については，國岡（2006，2007）を参照されたい。

引用・参考文献

秋山裕紀（2005），「認知モデルの分析を用いた数学概念の教授と学習に関する研究 ー「比喩」に注目してー」，日本数学教育学会『第38回数学教育学論文発表会論文集』，pp.797-798.

尼ヶ崎彬（1990），『ことばと身体』，勁草書房.

有馬純平（2001），「身体的認知理論に基づく数学的概念の教授・学習過程に関する研究（Ⅰ）ー記号的表現と身体性の関わりに関する一考察ー」，日本数学教育学会『第34回数学教育学論文発表会論文集』，pp.355-360.

岡本和夫ほか（2005），『未来へひろがる　数学１』『未来へひろがる　数学２』，啓林館（中学校用教科書）.

國岡高宏（1995，a），「数学的問題解決における「理解」の認知的研究（Ⅲ）ーアナロジーの構造分析ー」全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第１号，pp.29-35.

國岡高宏（1995，b），「数学学習における「表象」の研究（Ⅴ）ーアナロジーの構造，概念の具象化，ソースとターゲットー」日本数学教育学会『第28回数学教育論文発表会論文集』，pp.31-36.

國岡高宏（1996），「数学学習における「表象」の研究Ⅵ ー数学の学習指導におけるアナロジーの不可避性ー」，日本数学教育学会『第29回数学教育学論文発表会論文集』，pp.247-252.

國岡高宏（2005），「数学学習における「表象」の研究（Ⅷ）ーアナロジーのレベル同定に関する一考察ー」日本数学教育学会『第38回数学教育論文発表会論文集』，pp.175-180.

國岡高宏（2006），「数学学習における「表象」の研究Ⅸ ー数学理解におけるアナロジーの機能ー」，日本数学教育学会『第39回数学教育論文発表会論文集』，pp.451-456.

國岡高宏（2007），「数学教育におけるアナロジーの研究（1）ー数学の理解に果たすアナロジーの機能ー」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第13号，pp.67-73.

崎谷眞也・川下孝幸・田中大介（2005），「類似探求授業に関する考察（Ⅰ）ー概念構成を目的とした類似探求授業における類似性の認知メカニズムー」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第11巻，pp.89-97.

佐藤信夫・佐々木健一・松尾大（2006），『レトリック事典』，大修館書店.

鈴木宏明（1996），『認知科学モノグラフ①　類似と思考』，共立出版.

谷口一美（2003），『英語学モノグラフシリーズ20／認知意味論の新展開　メタファーとメトニミー』，研究社.

橋本正継（1992），「数学の教授・学習過程における比喩について（Ⅰ）ー教授活動におけるメタファーの役割ー」，日本数学教育学会　第25回数学教育学論文発表会論文集，pp.155-160.

深田智・仲本康一郎著／山梨正明編（2008），『講座認知言語学のフロンティア３／概念化と意味の世界ー認知意味論のアプローチ』，研究社.

松本曜編（2003），『シリーズ認知言語学入門　第３巻認知意味論』，大修館書店.

丸野悟（2002），「作図ツールを用いた対象変換に関する一考察ーEmbodied Cognition を視点とした Conceptual metaphor への注目ー」，日本数学教育学会『第35回数学教育学論文発表会論文集』，pp.265-270.

ギブズ，L.（2008），『比喩と認知』，研究社.

クライン，M.（1962），『数学文化史』，河出書房新社.

ジョンソン，M.／菅野盾樹・中村雅之訳（1991），『心のなかの身体』紀伊国屋書店.

ジェインズ，J／柴田裕之訳（2005），『神々の沈黙』，紀伊国屋書店.

ホリオーク，K.＆サガード，P.／鈴木宏昭・河原哲雄監訳（1998），『アナロジーの力　認知科学の新しい探求』，新曜社.

ヘッセ，M.（1986），『科学・モデル・アナロジー』，培風館.

ポリア，G．／柿内賢信訳（1954），『いかにして問題をとくか』，丸善.

ポリア，G.／柴垣訳，（1959），『数学的発見はいかになされるか１　帰納と類比』，丸善.

メイザー，J.／松浦俊輔訳（2006），『数学と論理をめぐる不思議な冒険』，日経 BP 社.

English, L. & Sharry, P. (1996), Analogical Reasoning and the Development of Algebraic Abstraction, *Educational Studies in Mathematics* 30: 135-157.

English, L. eds. (2004), Mathematical and analogical reasoning of young learners, Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1983), Structure-mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive Science* 7, pp.155-170.

Halford, G. & Boulton-Lewis, G. (1992), Value and Limitations of analogues in teaching mathematics, in Demetriou, A. et al. (eds.) Neo-Piajetian Theories of Cognitive Development, Routledge, pp.183-209.

Halford, G. (1993) Children's Understanding The Development of Mental Models, LEA.

Kunioka, T. (1998), A study of mental representations in mathematics learning (Ⅶ): problem solving by analogy, 日本数学教育学会『第31回数学教育論文発表会論文集』, pp.377-382.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). Metaphors We Live By, University of Chicago Press.（渡邊昇一・楠瀬淳三・下谷和幸訳（1986).『レトリックと人生』, 大修館書店.）

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000), Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics in being, Basic Books.

Pimm, D. (1980), Metaphor and analogy in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp.47-50.

Vosniadou, S. (1989), Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: A developmental perspectve. In Vosniadou, S. & Ortony, A. (Eds.), Similarity and analogical reasoning, Cambridge University Press. pp.413-437.

Study on Analogy in Mathematics Education (2): Analysis of Mathematics Learning by Conceptual Metaphor

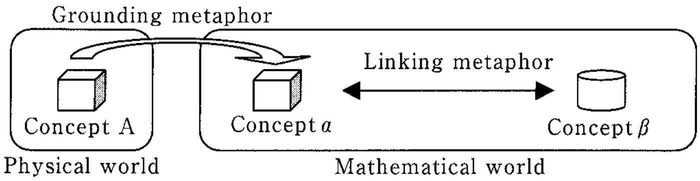
Takahiro KUNIOKA
Hyogo University of Teacher Education

Abstract

There are two types of conceptual metaphor, that is, grounding metaphors and linking metaphors. Grounding metaphors allow you to project from everyday experiences (like putting things into piles) onto abstract concepts (like addition). Linking metaphors link two different branches of mathematical concepts, for instance linking geometry to arithmetic, as when you conceive of numbers as points on a line.

The purpose of this paper is to analyze mathematics learning from the view of conceptual metaphor. Two types of conceptual metaphor yield two types of mathematics learning, that is, mathematics learning by grounding metaphors and mathematics learning by linking metaphors.

The following figure and table show some differences between mathematics learning by grounding metaphors and mathematics learning by linking metaphors.



	Mathematics learning by grounding metaphors	Mathematics learning by linking metaphors
Base domain	Physical or everyday experience A	Mathematical concept α
Target domain	Mathematical concept α	Mathematical concept β
Similarity	Perceptional similarity	Structural similarity
Conditions for the construction of image schema	Repetition of perceptional experience which yields physical and/or sensory patterns	Repetition of thinking experience which yields patterns of mathematical concepts and/or mathematical operations
Conditions for successful mathematics learning	Physical and/or sensory patterns have become an image schema	Mathematical concept α have become an image schema

Through several specific topics of mathematic learning, the author shows some features of the two types of mathematics learning. The results are as given below.

- In the mathematics learning by grounding metaphors
  - [G-1] Concrete experiences give a meaning to mathematical concepts.
  - [G-2] The proficiency of mathematical concepts yields the reification of symbolic representations of mathematical concepts.

- In the mathematics learning by linking metaphors
  - [L-1] Meaning of a mathematical concept will come from the other mathematical concept by linking metaphor.
  - [L-2] Mathematical problems can be solved by linking metaphors in which original problems are metaphorically replaced by other problems.
  - [L-3] The linking metaphor may encourage the emergence of new mathematical ideas.