コンピュータ利用で育成可能な「考え方」

国　岡　高　宏

The Ideas Being Taught with the Computer Uses

Takahiro KUNIOKA

1987

数学教育学研究紀要　第13号　別刷

1987年3月

西日本数学教育学会

数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会）第13号　1987　pp. 50～54

コンピュータ利用で育成可能な「考え方」

広島大学大学院　国　岡　高　宏

(1987.2.28受理)

§0．はじめに

筆者はこれまで，数学教育におけるコンピュータ利用の研究として，主にその教具的利用，問題解決の道具としての利用を調べてきた。[1]それは，従来の算数・数学科内容をコンピュータという新しい道具で教えようとする利用法ではなく，コンピュータにともなった新しい「考え方」の育成を意図していたものである。コンピュータにともなう新しい考え方とは，一体何であるのか，その数学教育的意義は何処にあるのか。本稿は，その点に焦点を当て，コンピュータ利用により取扱いが可能となる数学的考え方の具体例を示し，その考察を行うものである。

§1．アルゴリズム的数学と弁証法的数学

アルゴリズム的な数学と弁証法的な数学との間の観点の相違を説明するために１つの例を示そう。[2]

「方程式 $X^2=2$ の解を求める問題を考えよう。」

さて，この問題に対する２つの解答を示そう。

〔解１〕数 X が $X^2=2$ の解ならば $X=2/X$ が成り立つことに注意しよう。さて，X が幾らか不正確，たとえば過小評価，であるならば，$2/X$ は過大評価である。少しの思考の後に誰でも思い浮かぶことは，過小評価と過大評価の中間は X と $2/X$ のいずれよりもよい評価となることである。定式化して，X_1, X_2, ……を

$$X_{n+1}=\frac{1}{2}\,(X_n+2/X_n),\quad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

によって次々に定義される数列としよう。X_1が任意の正数であれば，数列 X_1, X_2, ……は２位の速さで $\sqrt{2}$ に収束する。（２位の収束とは小数の正確な数字の数が逐次ごとに２倍になることである。）

例えば，$X_1=1$ から始めよう。すると，$X_2=1.5$, $X_3=1.41666\cdots\cdots$, $X_4=1.414215686\cdots\cdots$ である。これが，問題に対する手段もしくはアルゴリズムである。アルゴリズムはただ足し算と割り算によって行われ，実数系の完全な理論を必要としない。

〔解２〕関数 $Y=X^2-2$ のグラフを考えよう。グラフは実は放物線であるが，これは重要ではない。$X=1$ のとき，$Y=-1$ であり，$X=2$ のとき $Y=2$ である。X が１から２まで連続的に動くにつれて，Y は負から正の値に連続的に動く。故に，１と２との間の何処かに $Y=0$，すなわち，$X^2=2$ となる X の値があるに違いない。解は今や完全である。議論の詳細は実数系及びその系の上に定義される連続関数の諸性質によって与えられる。

解１はアルゴリズム的な数学である。解２は弁証法的な数学である。ある意味では，解１も解２も完全な解ではない。解１は段々よい近似を与えるが，ある点で停止するときは10進法での正確な解は得られない。解２は正確な解が「存在する」ことをわれわれに告げるが，それが言うのは１と２との間に解があるということだけである。弁証法的解は存在的解と呼んだらよかろう。

アルゴリズム的数学と弁証法的数学について，P. Henrici はこう述べている。≪弁証法的数学（dialectic mathematics）は厳密に論理的な科学である。そこでは命題は真か偽のどちらかであり，また特定な諸性質を持った対象が存在するかしないか，のどちらかである。アルゴリズム的数学（algorithmic mathematics）は問題を解くための道具である。そこではわれわれは数学の対象の存在だけでなく，それの存在の証明にも関心を持つ。弁証法的数学はそれについての高度の含意がなされている諸規則に沿って演じられる知的ゲームである。アルゴリズム的数学のゲームの諸規則は，研究問題の緊急度に応じて変わるであろう。もしわれわれが軌道が弁証法的厳密さで計算されるべきであると主張していたなら，決して人間を月面に置くことはできなかったであろう。諸規則は利用できる計算装置によっても変わるであろう。弁証法的数学は沈思を歓迎する。アルゴリズム的数学は行動を歓迎する。弁証法的数学は洞察を生成する。アルゴリズム的数学は諸結果を生成する。≫[3]

§2. 数値解と記号解

実際の問題解決場面では，何らかの数値，あるいはその数値を見つけるための効果的手続きを要求する場合が多い。即ち，問題解決問題のあるものは有効に機能するアルゴリズムの作成が必要であり，そのアルゴリズムの実行により問題が解決されることが多いようである。一方，数学的アイディアのあるものはアルゴリズムの存在自体を問題とせず，あるいは一旦思考の外においてその理論を発展させている。例えば，「n次の多項式はn個の解を持つ」という代数学の基本定理は，その定理も証明も解の求め方に付いては何も示していない。また，微積分学における中間値の定理は，$f(b)-f(a)=f'(z)(b-a)$ となる $z\in(a,\ b)$ の存在を示しているが，そのzの値の求め方については何も言及していない。

勿論，これらの定理は数学的には重要な意味をもつものであるし，実用性が直接ないからといってその価値を問うことは論外であろう。しかし，実際の問題場面では解の存在性よりも，解そのものについての情報が欲しいのである。

さて，数学的，あるいは一般の問題の解としては，２つのレベルの解が存在する。それは，

(1) 数値解（原始解）

(2) 記号解

の２つである。これらの違いを，数学に限って考え説明しよう。

まず，数値解は，一般的には原始解と呼ばれるもので，「数というものは，その大きさがつかめるように10進数の形で表現されていなければならない」[4] という考えに立っている。そして，この条件にあっていない数の表現をすべて記号解と呼ぶ。例えば，よく見なれた$\frac{1}{2}$や$\frac{3}{7}$なども記号解である。一見変に感じるかも知れないが，$\frac{1223}{263}$等は，「1223を262で割って得られた数」の意味しか持っていない。また，cos（40°）は「余弦関数を40°に適用して得られる数」を表している。つまり，記号解とはアルゴリズムの記述，あるいは定義であり，一方数値解とは10進法で表された数のことである。

１つの特徴的例を示そう。

「１辺３の正方形の面積を求めよ。」

〔解〕新しい関数 Easyout と言うものを定義し，それを EO (T) で表し，この関数の定義を EO(3)がこの問題に対する解であるとする。こうすると，解は，もちろん

解＝EO(3)

である。

この解が数学的には全く正しいが，この問題の解としてはナンセンスなことは明白である。この場合に要求される解は，当然３×３，「３を２乗する」である。上の解は，典型的な記号解である。

さらに，ここで注意しておこう。記号解のアルゴリズムを実行しても，数値解に必ず至るわけではない。それどころか，本来，記号解はある種の問題を原理的に数値解の使用だけでは解けない場合に，その正確な解の記述のために導入されているのである。故に，数値解と記号解の間には根元的ギャップが存在する。

そのギャップを埋めるために，従来は数表，計算尺，新しいところでは関数電卓などが用いられた。最近では，コンピュータ・アルゴリズムを駆使した数値解析の理論がそれに貢献している。

§3. アルゴリズム・モデルの操作

≪同じレール上を２台の列車が30マイルはなれた地点から，それぞれ時速30マイルの速さで接近している。鳥が時速40マイルの速さで列車の間を往復したとすると，列車が衝突するまでには鳥は何マイル飛んだことになるか。≫[5]

A．（方程式モデル）

$$\frac{x}{40}=\frac{30}{30+30}$$

B．（アルゴリズム・モデル）

$$a_0=\frac{3}{7}\times 40$$

$$a_n=\frac{1}{7}\times a_{n-1}$$

$$(\text{飛行距離})=a_0+a_1+a_2\cdots$$

Aの解答の方が，Bの解答よりも「よし」とされるのは一体何故であろう。考えられることは，Bの解答では鉛筆だけを使った手計算では，答えが求められないからであろう。しかし実際には，Bの解答のような考え方を思いつく子供も多いわけであり，その子供の考え方をむげに否定する理由は何処にもない。Bの解答にはそれなりのアイディアがある。それは，鳥が反転するごとの飛行距離を前後の関係から求めようと考えることであり，「再帰手続き」の考え方にも通じるものがある。

Aの解答とBの解答にはその発想からして異なるものがあるが，その発想の違いは操作の違いとなって現れてくる。Aでは求めるべきものをXと置いているので，子供は式を変形・操作してそのXを一目散に求めて行けばよい。ところがBでは，求めるものはa_0，a_1，……を次々に計算した後に，それらをたして行かなければならなく，いつまでその計算をしなければならないか分かっていない。しかし，やるべき操作はハッキリしているので，実験的にやってみて，答えの大体の予想はつけられるであろう。つまり，Aでの操

作は式を変形することであり，Bでの操作はモデルに表されたアルゴリズムを実行することである。ここで注目すべき点は，Aの式には行うべき操作（式変形）の手続きは何も表されておらず，ただ方程式の操作に習熟した者がその操作を方程式から読み取っているのであり，Bの式には実行すべき操作そのものが表されているという点である。

従来，Bのような考え方が扱い難かった原因として，実行手段の欠如が考えられよう。卓上計算機を使うにしてもこのような反復的計算にはかなりの時間がかかるであろうし，計算結果をいちいち書き留めておかなければならないのも面倒である。また，従来のように紙と鉛筆が主な計算道具の世界では，Bのような考え方自体の価値も少なくなってしまうのであろう。

一方，コンピュータ科学やその利用においては，Bのような考え方が重要なのであり，それはコンピュータの機能特性に原因している。従って，コンピュータの特性を活かし，その利用方法を数学教育に導入しようとする場合，Bのような考え方も生かせるような利用法を考えたいものである。

§4．コンピュータ利用で育成可能な考え方

ここまで，アルゴリズム的数学とそこで扱われるモデル，および数値解について，具体例を交えながら説明してきた。それらはコンピュータと深く結びついた内容であるし，数学教育におけるコンピュータ利用で取り扱うことが可能となる内容であると，筆者が考えているものである。

さて，コンピュータを利用しそれらの内容を取り扱うことが教育的にどのような意味を持つのであろうか。そこで用いられる「考え方」の説明を交えながら，その点を考察してみたい。

(1) アルゴリズム数学的考え方

アルゴリズム数学の諸規則は，それを実行する方法（道具）によって異なってくる。また，解決すべき問題の緊急度によっても，それは異なってくる。より強力な実行手段が与えられれば，その諸規則は柔軟なものとなろうし，問題の緊急度が増せば，それに対処できる新しい方法が導入されよう。このように，アルゴリズム数学の諸規則はダイナミック（力動的）なものである。

また，アルゴリズム数学の諸規則は，問題の具体的解決方法を研究するものである。つまり，答えを出すための実際的方法を第一とするものである。その方法は，有限の材料を使い，有限のステップで遂行できるものでなくてはならない。

このように，問題とそれを解決するために使用できる道具によって，その解決方法を決定したり，具体的にその答えを求めるための方法を実行可能なかたちで求めなければならないというのが，アルゴリズム数学で大切な考え方であろう。そして，コンピュータの利用は，そういったアルゴリズムの実行手段として強力な道具となるものである。

(2) 数値解を求める考え方

元来，数学のなかには数値的な問題を対象とする内容があるわけで，従来その扱いがあまりなされず，主に記号解に依存した解法が採られてきた原因として，数値解を扱うための膨大な計算処理方法の欠如が考えられよう。しかし，コンピュータを利用することで，計算量に対する問題はかなり解決できる。

例えば，無理数の10進数近似や有理数近似は，数学的にも重要な概念であり，そのような取扱いもコンピュータを利用することで容易になる。また，大きな素数を見つけ出すという問題も，従来，扱い難い問題の一つであったが，コンピュータを利用することで，そのように桁数の大きな数を扱う問題の解決方法が与えられる。

数値解は，何より，その数の大きさが分かりやすいという利点をもつ。反面，ある種の問題では正確な値を表せないという欠点をもつ。したがって，そのような数値解の長所短所を正しく理解し，それを用いるにふさわしい場面を吟味する必要がある。しかし，あくまでも数値（10進数）にこだわり，問題に対する答えを数値で求めようとする考え方も重要であろう。

(3) アルゴリズム・モデルという考え方

文章題などの問題を解く場合，方程式などの数学的モデルがよく用いられる。文章題から，ある特性の間の関係を見つけ出し，それを式に置き換え，その式を操作・変形して問題の答えを出すというものである。しかし，問題から作られるモデルは，§3の例のように方程式だけではなく，答えを求める手続きを直接表現したアルゴリズム・モデルもあるわけである。

コンピュータ利用を前提としたアルゴリズム・モデルは，答えを出すための計算や手続きの実行を，はじめからコンピュータに任せようとするものである。従って，方程式モデルを作るときのように，それを解く自分の手間を考える必要はない。コンピュータに実行可能な手続きであるかを注意すればよいのである。また，アルゴリズム・モデルが完成すれば人間のやるべき作業は終わり，後はコンピュータの実行結果を見て，誤りがある場合は，もとのモデルに修正を加えて行けばよいのである。つまり，アルゴリズム・モデル自体が問題の答えとなっているのである。

方程式モデルが四則演算やベキ乗，ベキ根などの計

算方法に依存するように，アルゴリズム・モデルはコンピュータの能力と使用するプログラミング言語に依存している。しかし，そのモデル操作は，人間が行うものと比較すれば，非常に高速であり，従って，今まで実行時間などの関係で扱えなかった問題も，アルゴリズム・モデルをコンピュータに実行させることで解決できよう。

§5．「メタ手続き」としての手続き反省

さて，以上のような「考え方」を育成する中で，一体何を意図した学習が可能なのであろうか。それは，「手続き」を対象とした学習と，それにともなう「手続き反省の手続き（メタ手続き）」の学習であると，筆者は考えている。

(1) 説明することによって学ぶ学習

コンピュータに何らかの作業をさせようとする場合，その作業の手続きをコンピュータに「説明」する必要がある。しかも，その説明は曖昧なところや矛盾したところがあってはならない。従って，生徒はその作業についての明確な手続きを認識しなければならないのであり，ただなんとなくやっていたことにも，より注意深い考察が必要になってくる。

≪ある事柄をよく知っているかどうかを調べる最良の方法の1つは，誰か他の人に説明できるかどうか試してみることである。言いかえれば，説明の仕方を学ぶことが，物事を学ぶ最良の方法の1つである≫[6]

従って，コンピュータにある作業の手続きを「説明」することは，物事のより深い理解を与えるものと言えよう。

(2) 「手続き」を表現する学習

従来，生徒にとって，ある事の「手続き」は自分ができればよいものであり，それは自分の理解で納得していればよいものであった。例えば，2次方程式の解法は，教師が説明する手続きを理解し覚え，実際に自分も2次方程式が解ければよいのであって，その手続きを誰かに説明できる必要はないのである。

しかし，コンピュータに何かをさせようとすれば，その「手続き」の説明が必要になる。しかも，「手続き」を正確で明確に「表現」する必要がある。コンピュータ・アルゴリズムの作成は正に「手続き」の表現活動であり，それを通して，「手続き」を客観的に表現するという考え方が育成できると考えられる。つまり，コンピュータ・アルゴリズムの作成は「手続き」の正確な表現の必要性を感じさせ，その方法を与えるものである。

(3) 「手続き」を反省する手続き（メタ手続き）の学習

問題解決の一般的ストラテジーとして，解決方法，即ち，解決手続きの発見，修正，変更，応用という，いわば「手続きを生み出し反省する手続き」が考えられよう。

≪1つの問題を解くことにより，その問題が解けるプロセスを監視（モニタ）する手続きを明らかにし，異なる問題においても，以前よりも「より知的に」解けるような知恵を作り出す手続きを持たねばならないのである。≫[7]

そして，コンピュータ・アルゴリズムは手続きの反省を可能にするものである。なぜならば，記述されたコンピュータ・アルゴリズムは手続きそのものであるので，それを修正，変更，応用して行くことは手続きの反省に他ならないからである。即ち，手続きを直接，「操作」する手だてを持つことができるのである。しかも，そうした「操作」の結果はコンピュータに実行させてみることで，すぐに知ることができるのである。

従って，コンピュータアルゴリズムの学習は，「手続き」そのものを考察の対象とすることを可能にし，「手続きを反省する手続き（メタ手続き）」を意識させるものと言えよう。

以上のように，手続きを反省しそれに手を加えることは，手続きの操作であり，それは，ある目的作業のコントロールであると考えられる。つまり，「メタ手続き」は，手続きそのものを思考の対象とする活動であるといえよう。

手続きを説明する，表現する，反省する，といった学習は，従来も行われていたものであり，何もコンピュータ利用によって初めて可能となるものではない。しかし，従来の手続き説明，表現，反省は，主に教師と生徒の間で行われていたものであり，ここで説明したものはコンピュータと生徒の間で行われるものである。その違いを，以下の表に筆者なりの言葉でまとめてみた。

	従来の学習	コンピュータ利用による学習
説明の対象	教師に 友達に (間違うとはずかしい)	コンピュータに (はずかしがる必要はない)
表現の手段	言葉で 筆記で (曖昧でも通じる)	プログラミング言語で (曖昧では通じない)
反省の動機	教師や友達の指摘 (自分のやり方を修正)	コンピュータの実行結果 (プログラムを修正)

§6．おわりに

数学教育におけるコンピュータ利用により育成可能

となる考え方と，それにともなう「手続き」学習の意義を考察してきた。それらの考え方や「手続き」学習の意義は，そこで扱われる学習内容に大きく依存するものであろう。しかし，本稿では具体的学習内容や，その指導方法についての考察がなされていない。この点に関して，実践面での効果や妥当性を実証的に調査して行くことを，今後の課題としたいところである。

≪引用，及び参考文献≫

1) 拙稿：「パソコンを利用した算数・数学科授業の研究——コンピュータ利用によるモデル・アプローチ——」，第38回中国四国教育学会発表資料，昭和61年11月8・9日

2) P. J. デービス・R.ヘルシュ／柴垣和三郎・清水邦夫・田中裕訳;「数学的経験」，森北出版，1986．P170-176．

3) 同上，P173．

4) J. K. ライス・J. R. ライス;「コンピュータ・サイエンスⅠ」，サイエンス社，昭和49，P29．

5) R. R. Skemp／藤永保・銀林浩訳;「数学学習の心理学」，新葉社，昭和57，P223．

6) M. L. Schagrin・W. J. Rapaport／大矢建正訳;「論理とアルゴリズム」，マグロウヒルブック，昭和60，pXⅢ．

7) 佐伯 胖監修;「LISPで学ぶ認知心理学2」，東京大学出版会，1981，P14．

8) E. W. Hart;" Is Discrete Mathematics the New Math of the Eighties?" Mathematics Teacher May 1985, p334-338.

9) James T. Fey;" Impact of Computing on Discrete Mathematics and Algorithmic Methods": COMPUTING AND MATHEMATICS, NCTM 1984, p71-88.

10) S. B. Maurer;" Two Meanings of Algorithmic Mathematics", Mathematics Teacher September 1984, p430-435.

11) Larry L. Hatfild;" Toward Comprehensive Instructinal Computing in Mathematics", NCTM 1984 yearbook 'Computer in Mathematics Education' p1-9.

The Ideas Being Taught with the Computer Uses

Takahiro KUNIOKA
Hiroshima University Graduate School

Abstract:

The auter have studied the computer uses in mathematics education, specially, for a instructional equipment and a tool of problem solving. So I meant to make it clear what ideas the teacher can teach by the computer uses in mathematical instruction. In this article, I focused on three ideas, that is, algorithmic mathematics, numerical solutions, and algorighmic models. Then I would explain the significance of them.

The idea of algorithmic mathematics is so dynamic that we can change the rules in accordance with the tool which we can use for problem solvings. The idea of numerical solutions demands many concepts: error, overflow, complexity, et al. The idea of algorithmic models presents a new method with which we are able to approach the problem that is difficult to deal with in a former method, for instance, equations.

Now, through those ideas, what is possible to be developed by our students? I think that there are three points following.

(1) Learning through explaining

Students can more closely understand things through explaining the procedure of their work to a computer.

(2) Learning of explaining the procedure

It is nessesary for students to explain the procedure clearly, objectively, which they would entrust a computer.

(3) Learninig of "Meta-procedure": the procedure with which we reflect on the procedure.

Computer-algorithm is a very procedure, so it is a reflection of the procedure to recise, change, and apply it. Then, students can have the method to operate some procedure directly through computer-algorithm by using a computer.