中学校数学への「行列」導入についての実験的考察

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科

教科・領域教育専攻　　自然系コース

８２２８４　　　　榎　本　敬　紀

はじめに

我国の数学教育をふり返ると，欧米及び諸外国と同様に，我国でも，中学校では，昭和44年の学習指導要領から現代化の精神をとり入れてきた。しかし，昭和52年に"ゆとりと充実した学校生活"という主張のもとに，学習指導要領が改訂され，実施されてから3年経っている。その改訂に際しては，教育課程審議会答申で，数学教育においては「現代化の方向は維持する。」とあり，現代化の必要性は，数学のためだけでなく，教育的・社会的にも認められている。

ところが，実際には，今回の学習指導要領に対して，「現代化の理想体質を捨てさっている。」とか「「むずかしいものは一斉削除」が改訂の原則であったかのようだ。」とかいう見方もある。

ところで，現代社会は情報化社会またはコンピューター社会ともいわれ，多次元の量を扱うことが，今後ますます必要となってくること，現代化の時代でとり入れられ消えていった教材のもつ性格を考えたとき，今後の数学の学習だけでなく，多くの他の分野への利用，発展性や展望をもつ教材の必要性が大きくなってきている。そのような教材の1つとして，行列が浮かびあがる。

そこで，英国のSMP，米国のSSMCIS等の先行研究をもとに，我国の中学2年生の連立二元一次方程式

の解法とからめ．行列導入について実験的に考察していくことにする．この研究が．今盛んに叫ばれているカリキュラムの多様化，柔軟化の上に寄与することを期待している．

ー 目次 ー

第1章

主題設定の理由

我国では，現在は，現代化の反省の時期であると言われているが，我国に影響を与えた数学教育の現代化運動をふり返ってみよう。

欧米における現代化運動，特に，米国における現代化運動が非常に促進されたのは，1957年ソビエトの人工衛星スプートニク1号の打ち上げ成功がきっかけとなり，国の威信をかけて数学，科学技術教育の改善充実に着手したためである。また，OEEC*（1961年にはOECD**に発展）は，加盟各国内における科学技術者の供給を増加し，質を改善し，それによって西欧自由主義各国の経済の再建を図るための研究を行った。そのため，数学者を大量に必要とし，1959年には，フランスのRoyaumontでセミナーが開かれ，そのセミナーの報告はNew Thinking in School Mathematicsとしてまとめられた(1)。このセミナーでは，シカゴ大学のM.H.Stone教授が「学校数学の改革について」と題する講演(2)をして，数学教育を改革すべき要因として，

a)現代における純粋数学の急激な発展

b)数学的方法に基礎をおく科学的な考え方に依存する度合の増大

をあげ，さらに(3)

c)現代人のあらゆる思考にとって数学は必要である。

* OEEC … Organization for European Economic Cooperation

** OECD … Organization for Economic Cooperation and Development d)世界の中等教育が義務化される傾向にある.

e)数学教師の責任は重大である.

f)子供を数学ぎらいにしない配慮が必要である.

g)数学者, 心理学者, 教師の協同研究が必要である.

などをあげ, そのための方策として, 多面にわたる数学教育の改革について論じた[3]. そういう状況の中で, 米国のUICSM[i], SMSG[ii], 英国のSMP[iii]等多くのプロジェクトができ, ICMI[iv]が数学教育の現代化をとりあげてから, カリキュラム改造が世界的規模で活発になった。

これらのプロジェクトの目ざした方向は次のようである[4].

(1) 現代数学の進歩とその応用面の変化に留意して, 伝統的な見方にとらわれず, 数学教育の中に現代数学における見方や考え方を取り入れる.

(2) 科学技術や社会の進歩に適応できるように, 数学教育内容を決定する。

(3) 最近における数学教育や教育学, 心理学の研究成果に基づいて, 新しい指導法の改善への志向

ただ, このときの学校数学の内容は, フランス$\boxed{\text{のブルバ}}$キの主張した数学的構造を重視するものであった。このようなブルバキ的方向の改革原理に対する批判が, $\boxed{\text{Freudenthal}}$[5], M.Kline[6], R.Thom[7]等から出されたが, 米のNACOME[v]は, 1975年の報告書で, 彼らの「数材の"現代化"は災害であった.」とする批判に対して, 結論的には,

(i) UICSM…University of Illinois Committee on School Mathematics
(ii) SMSG…School Mathematics Study Group
(iii) ~~SMP…School Mathematics Project~~
(iv) ICMI…International Commission on Mathematical Education
(v) NACOME…National Advisory Committee on Mathematical Education

「現代化の方向は健全である。」としている。[8]

以上のような欧米の現代化の影響は，我国では，中学校においては，1969年（昭和44年）の教育課程改訂から具体化されたが，欧米のそれと比べて穏やかな現代化であったといわれている。このときの教育課程審議会答申における

「現代における数学の発展と社会で果たす数学の役割を考慮して，新しい観点から内容を質的に改善し，基本的な概念がじゅうぶん理解され，数学的な見方，考え方がいっそう育成されるようにする。」[9]

という改善の具体方針に基づき，中学校では，集合・確率，不等式，図形の変換の考えや位相的な見方など新しい概念の導入及び関数概念の明確化や論理の強化を図った。しかし，これらの改訂学習指導要領が実施に移されるとともに「計算力の低下」「落ちこぼれの増加」等を指摘したマスコミによる世論や社会的風潮から，現代化の軌道修正が余儀なくされた。昭和48年末から「ゆとり」の名のもとに，新しく設けられた教育課程審議会の第2委員会による算数・数学の内容精選の観点から，内容の取り扱いに行きすぎのあるもの，発展性や応用場面が考えられないもの等を指導内容から削除する答申を出した。[10]

昭和44年と現行（昭和52年改訂）の学習指導要領の目標を次ページにあげ，対比してみる。

S.44	事象を数理的にとらえ，論理的に考え，統合的，発展的に考察し，処理する能力と態度を育成する。 このため 1　数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。 2　数量，図形などに関する基礎的な知識の習得と基礎的な技能の習熟を図り，それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。 3　数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらによって数量，図形などについての性質や関係を簡潔，明確に表現し，思考を進める能力と態度を養う。 4　事象の考察に際して，適切な見通しをもち，論理的に思考する能力を伸ばすとともに，目的に応じて結果を検討し，処理する態度を養う。
S.52	数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方についての能力を高めるとともに，それらを活用する態度を育てる。

これらは、前回の総括目標と4つの具体目標における重複を避け、今回は、中核的な目標を重点的に示すほうがより適切であると考えられて構成された目標である[13]。それで、今回の目標は、前回のそれと基本的には同じであるが、これに対して

「教育基本法、学校教育法、教育課程総則を通じて見られる人間形成の重要な観点を、積極的なアプローチにのせ、日新月歩の現代科学、現代社会への適応に強く視点を置いて、その中の一つの役割を数学科でとしたのが前回の目標であり、現代化への実施の企画・方法の未熟さを考えるより、アッサリと前回の理想体質まで捨て去って、理想への困難なマラソンレースを少し走っただけで、ダウンしてしまったのが現行である。」[14]

とか

「今回の学習指導要領改訂では「難しいものは一切削除」というのが改訂の原理であったかと思われるほどであ

る。」[15]

という見方もあり，昭和44年と今回の学習指導要領の目標の間に大きな変化が感じとられている人もいる。

いずれにしても，諸外国及び我国の現代化の反省のもとに，聖書やコーランのように絶対的存在でない学習指導要領を考察，評価し，発展的に教材を開発していくことが大切である。

そのとき，中島健三氏によれば，教材選択の原理は，[16] 原則として，次のようになる。

1. 算術とか数学とかという，いわゆる親学問の系統からみての妥当性
2. 児童生徒の精神発達からみての習得の可能性
3. 生活事象及び社会の要請からみての必要性

また，義務教育段階にある中学校においては，素朴なプラグマティズム的な意味でなく，数学だけのための数学教育といった数学至上主義ではなく「すべての生徒のための数学」ということを念頭に置かなければならない。ICMI-Unesco編「世界の数学教育」によれば，すべての生徒のための数学教育の一般的な目的の表現は以下のようにまとめられる。[17]

a) 学習の対象が，生徒の発達のために特に適切であるような科学（数学を含む）の初歩に生徒を積極的に接触させることによって，知的な活動を発達させることおよび態度を知性化すること。

b) 現代社会に活動的・知性的に参加するのに不可欠な

知識や技能および概念的な道具やそれを用いる能力，態度を生徒に身につけさせること．

c)学習を続ける生徒に対して一方では，数学的な準備のために不可欠な基礎を与え，他方では数学を学習する能力態度を確実にもたせるようにすること。

もちろん，ここでは，すべての生徒を均一化する意味はない．

しかし，以上の目的達成のためには，我国では「指導において教師が生徒の実態に応じて取り扱う内容の程度の深浅について十分工夫し，弾力的な指導をすることによって，生徒の能力や個性に応じた数学教育が行われることを期待したい．」(18)というが，中学校ともなれば，生徒の能力，適性などが次第に多様化しているのに反し，学習指導要領自体は，単一で画一的すぎる．

以上のような観点から，未来社会に対する配慮，生徒の能力，興味・関心と発展性等を総合的に考察するとき新しい重要な教材の導入が必要となろう．特に日常多次元の量を扱うことが多くなった今日以後の社会においては，ベクトルや行列はその例であるが，ベクトルの中学校への導入は既に実験されているので，それと同様なアイデアである行列をとりあげ，その教材開発を試みることにした．

具体的なカリキュラムとしては，世界的に，後期中等学校において，微積分と線形代数の初歩が中心となって

いく傾向がある[19]．線形代数の初歩であるベクトル及び行列は特に重要で実質的な教材である．興味・関心の程度からいっても，ベクトルや行列の初歩を多次元の量として中学校へ導入するのが妥当ではなかろうか．

また，昭和39年に実施されたＩＥＡによる調査において，我国の生徒（13歳）の数学に対する態度は必ずしも望ましいものとはいえず

a)数学を発展的に見る態度に欠けている．つまり，数学をできあがった動きのとれない知識・技能のよせ集めと考えるものが多く，発展的であり，多様な見方・解法が可能なものとみる者が少ない．

b)数学のむずかしさに対する態度が著しい。即ち，中学生では，数学を特別な能力を持ったものだけが学べる教科と考え，誰でも学習できるものとみる者が少い。

というものであった。[20][21]そして，このことが，前回の学習指導要領の目標に「……統合的・発展的に考察し……」として反映されたわけである．その方向は現行のものにおいても同じであり，数学の概念や法則の数学的なアイデアとしての良さを体験させることは，単に数学的知識を獲得させるだけでなく，数学に対する望ましい関心や態度の育成の見地から重要である．

その点についても，ベクトルや行列は，数学的なアイデアを強調できる教材である．

以上のことから、中学校数学カリキュラムへの行列導入について実験的に考察することを主題にした。

第2章
行列を中学校数学へ導入する可能性と意義

まず、中学校数学カリキュラムに行列を導入することについての可能性について述べる。
これからの社会は情報化社会、または、コンピュータ社会とも言われ、そこではいくつかの量をひとまとめにして考えることがますます必要となってくる。そこで、それらを数学の対象として考える数学的アイデアを知らせ、理解させ、それを用いる能力を養うことは今日以後の数学教育の目標の1つとなるであろう。その目標を達成するための教材の例としては、ベクトルと行列が考えられるが、ベクトルの導入については、昭和46年に、東京学芸大学附属世田谷中学校教諭、坂井裕氏が試みている[1]。また、諸外国の数学教育現代化時代の1970年頃から以後、今日でも使われている中等学校数学教科書の例として、英国のSMP、米国のSSMCIS等をみてみると、行列の導入はともに、我国の中学校相当学年（中位以上）となっている。（第3章参照）
それに、「我国の数学教育においては、数学的な知識の授与やその技能の錬磨に重点がおかれ、それらの知識・技能の数学的アイデアとしての良さを強調することが少なかったのではないかと反省される。」[2]
そこで、指導におけるそのような配慮とともに、数学的

アイデアの良さを強調する教材の開発が必要である．それには，行列は格好の例である．

また，行列のアイデアの応用の例としては，具体的な多次元の量が扱われるが，さらに，中学校数学の内容に連立一次方程式があげられている．即ち，現行の学習指導要領では，連立二元一次方程式とその解法は，中学２年生の学習内容であり，

「問題意識とのつながりからいっても，行列のアイデアは，中学生の年代の関心からいっても高校でやるよりはよいのではないか．」[3] また，要約すると，

「代数学の方程式論の中心課題の１つは，根の公式の発見にあるのだから，一元一次，一元二次方程式の解の公式だけでなく，二元一次方程式の解の公式に触れる必要があろう．」[4]

というような意見の人もいる．

また，現在は，現代化の軌道修正の時期であると言われるが，昭和51年の教育課程審議会答申においては，

「数学教育現代化の方向は維持する．」[5]

という方針がうち出されている．従って，行列の導入は中学校数学の流れに反するものではなく，上の答申の趣旨から言えば，それを先どりするものであるとも言える．しかも，行列という教材の性格は，現代化の中でとり入れられ消えていった教材（例えば，オイラーの多面体定理，一筆書き，…等）の中学校・高校数学で発展や展望の

ないものとは異なり、数学、社会、理科や社会学、心理学をはじめとして、現実の社会において具体例が豊富にあると考えられる。したがって、行列は今後いろんな方面での発展性をもつものである。

次に、行列導入の教育的意義をまとめると次のようになる。(6),(7),(8),(9)

(1) 多次元の量をひとまとめにして考え、保持・保存できることを知る。

(2) 数の場合と同様に演算できるという数学的アイデアとその有効性を知り、望ましい数学観を養うことができる。

(3) 幾何学への変換によるアプローチを可能にする。

(4) 代数的構造を把握するためのモデルとなる。

(5) 情報化社会において、経済学等の多くの他分野における多次元の量への応用が広い。

そこで、英米の例に鑑み、我国で中学2年生において上の教育的意義を達成できるかどうかについて実験で確認するために、行列についての実験授業を行った。この行列についての実験授業では、「行列のアイデアを考え出す過程をたどることによって、数学の演算の対象が数、式や図形にとどまらず、さらに大きく新しく広げられていくものであるということを知らせ、数学に対する新しい目を開かせるところや、数学的アイデアの良さを強調するところに大きな意義があると考えて行った。即ち、

数学的な考え方の育成をねらいとしているということである。」[10]

また、行列の演算を通して、数の計算力の強化も可能である。

以上のことより、私は、中学校における行列導入の目標として次のことを考えた。

(ア) 基本的、具体的な事柄に即して、いくつかの量の組を1つの数学的対象として観察し、保持することができ、とり扱いできる例として行列を理解させる。

(イ) 行列の意味とその相等及びその演算について理解させ、具体的に利用させる。併せて、数計算の強化もさせる。

(ウ) 数の加法、乗法における単位元と同様に、行列の加法、乗法における零行列と単位行列について理解させ、数における反数や逆数の類推から、逆行列の考えを理解させ、公式を用いて2行2列の行列の逆行列を求める過程を知らせる。

(エ) 連立二元一次方程式の解法に行列の考えを利用させて、これが連立一次方程式を解く一般的手法であることを知らせ、その良さを理解させる。

第3章

英国のSMPと米国のSSMCISについて

第1章で述べたような状況のもとで．世界的に　現代化カリキュラムを実験的に研究・開発するためのプロジェクトが　大小あわせて非常に多くつくられた．中でも最も有名で現行の学校制度や試験制度の中で成功した例として．今尚．高い評価を受けている英国のSMPを中心に．それに加えて米国のSSMCISのカリキュラム構成を概観し．それらにおける行列導入の方法と立場を述べる。

SMPは．1961年にサザンプトン大学教授のB.Thwaitesを指導者として組織され．おず[illegible]1〜16歳までの生徒のための教科書Book 1〜5等を作成した．教科書の執筆者は現場の教師であり，導入や展開が具体的で．直観的であり厳密性も生徒の発達段階に応じて徐々に高められてきた．

SMPの基本的な考え方の要旨は

「New Thinkingほどは形式的抽象的でなく．直観を重んじ数学的構造としての群の指導を中学校段階（16歳まで）で扱い，幾何は運動幾何を中心として代数・幾何とも応用も豊富である。」[1]

ということであり．SMPの教材の特徴の1つとして．

「今日，いろいろな題材の中にある相互関係が強調され始めた。例えば．最初はBook 2（12歳〜13歳で使用）

の中で扱うことになっていた行列が，今やトポロジー，変換幾何，関係，逆関数の学習を明快にするために扱われている。[2]」
があり，SMPの教材では，行列は多くの数学的題材を統合するものとしての役目を果たしている。
　そこで，行列に関するものを拾い出してみると次のようになる。

Book 2	第1章 トポロジー	
	§5 ネットワークの行列表示、	・ロンドンの地下鉄の4つの駅のダイレクト・ルートによって導入（4×4まで）
Book 3	第3章 行列	
	§1 行列	・Book 2のネットワークの復習と一種の表（工場とそこでつくるビスケットの種類）を導入 （4×4まで） ・行・列・次数という用語の導入
	§2 行列の加法	・具体例を用いて (2×3)+(2×3) で導入 ・可換・結合法則の成立は練習問題の中で扱われている。
	§3 行行列（行ベクトル）と列行列（列ベクトル）の積	・具体例を用いて (1×4) と (4×1) の積から導入
	§4 行列の積	・§3の発展した型として (3×4)と(4×2)の積から導入 ・非可換なこと、結合法則の成立は練習問題の中で扱われている。

第6章 ネットワーク

§1. ルート・マトリックス　　・ルート・マトリックスによる行列の乗法，(2×2)と(2×2)で

§2 勝敗を表す行列

§3 関係と行列

Book 4　第1章 行列と変換

§1 基本ベクトル　§2 変換　§3 変換の合成

§4 逆変換　§5 2×2行列の逆行列

第2章 方程式の解法

§3.5 行列　　・連立二元一次方程式の行列表示，と逆行列をかけることによる解法

第7章 ネットワーク

§1. 位相的同値　§2 樹　§3. 双対性　§4 ネットワークの応用

第9章 3次元の座標

§4. 3次元ベクトル　§5. ユニットキューブ　§6. 3次元行列

第13章 確率

§4 確率行列

Book 5　第2章 ベクトルと三角法

§4. 回転のもとでのベクトル

第6章 幾何における不変量

§2 行列幾何における不変量

§3 不変な点

§4. 不変な直線

次に，米国のSSMCISについて述べる。これは，コロンビア大学の教員養成の大学院の教授H.F.Fehrを指導者として，1966年に組織され，各国の一流の数学者の援助を得て，第7学年から第12学年までの6年間のテキストをつくった。その目標を要約すると，

「教材としての数学は，その内容の中で，人間の精神を発達させ，物理世界やその中の生活で生じる数的，空間的そして論理的な場面を理解し，解釈させたり，科学的，探究的，分析的な態度で問題にアプローチさせなければならない。」(3)

「将来，基本的で有効であると考えられている知識，技能を導入し，それらは数学的な考え方を発達させる過程の中で獲得されなければならない。」(3)

というものである。

また，SSMCISの教科書の幾何の特徴は，(4)

1. 6年間にわたる幾何学的話題の広がり
2. 変換が占める中心的位置
3. 行列の早期導入
4. 幾何学における伝統的題材のいくつかの削除
5. 座標の早期導入
6. 形式ばらない形で与えられている立体幾何の早期導入
7. 公理主義の意味の早期導入，しかし排他的に外の方法は用いないという拘束はない。

そして，直観的な扱いから入っていること，代数と幾何の融合されたものであることがあげられる。

具体的に教科書の目次[5]をあげてみよう。

コースⅢ（第９学年）---(14歳から始まる)

第1章　行列への入門

1.1　行列とは何か　1.3 複雑な状況の記述に行列を使うこと

1.5　行列の演算　1.7 行列とコード化された通信

1.9　行列と変換　1.11 推移行列

第2章　1次方程式と行列

2.1　連立1次方程式　2.3 ピボット法　2.5 連立1次方程式の解き方(続き)

2.7　同次1次方程式　2.9 1次方程式の行列表示から導かれた行列の積

2.11　逆行列

第3章　行列の代数

3.1　行列の世界　3.3 行列の加法　3.5 スカラーによる乗法

3.7　行列の乗法　3.9 M_2における乗法の逆元　3.11 2×2行列の環

3.13　2×2行列の体

なお，後期中等教育では，コースⅣの第2章，2次方程式と複素数，第3章　円関数，コースⅤの第7章　線形写像と線形プログラミングの中でのように行列が重視されている。

以上のように，SMP，SSMCISでの行列導入は我国の中学校相当学年となっている。これらプロジェクトの開発した教科書は主に上位の生徒を対象にしたものであり，我国とは異なった学校制度や試験制度において

用いられており，また用いられたものである．しかし，我国の数学教育の現状をみて，カリキュラム研究の低調さが欠陥の1つとして指摘する人もおり，中でも，できない児童生徒のためのものは活発に研究されているが，できる児童生徒のためのカリキュラム開発は不十分であり，現在，その開発の必要もいわれている．後者は，我国の目下の社会体制の中でどれ程受け入れられるかは，今後の課題ではあるが，子供の能力と適性に応じた教育を目指した習熟度別学級編成を中学校に導入することも検討されており，多様な柔軟なカリキュラム開発の必要性が，世界的にはもちろん，我国でも叫ばれている．今回のICMI－JSME数学教育国際会議’83でも，カリキュラム研究についての発表がかなりあり，これを機会に，低調であると言われているカリキュラム研究にも目が向けられていくだろう．そういう状況の中で，これらのプロジェクトの開発した中等学校用のカリキュラムは，今後とも，我国のカリキュラム開発においても十分示唆を与えるものと考えられる．そこで，両プロジェクトの教科書及びハンドブック[6][7]等を参考にして，行列の考えを我国の中学校に導入し，行列についての指導内容を我国の中学生にふさわしいレベルで定め，以下，これを実験的に考察していく．

第4章

実験授業

4.1 研究方法

(1)・現行のカリキュラムの問題点をあげる．
（第1〜3章参照）
特に，多様化する生徒の学力，適性，進路に対するカリキュラムの画一性の打破，即ち，多様化，柔軟化の必要があること．
・時代及び社会の要請と生徒のニーズと興味に適合するように教材選択を行う。

(2) 中学校レベルにおけるこの教材についての先行研究を調べる．
（第2，3章参照）
・英国のSMP，米国のSSMCIS
・英国のCSMS数学チームの研究結果
・我国においては，中学校数学カリキュラムへの行列導入について実験的に試み，まとめられたものがない．

(3) 予備実験授業の計画・実施

(4) 実施結果の処理，考察

(5) 反省，修正

(6) 本実験授業の計画
(7) 実施
(8) データ処理，考察
(9) 結論

以上の手順に基づいて実験授業を行ったわけであるがそれについて以下に述べていく。

4.2 研究計画

A. 指導内容の決定（単元構成）

§1. 情報のまとめ方と行列（行列の相等を含む）
§2. 行列の加法・減法と実数をかけること
§3. 行列と行列の乗法
§4. 2×2行列の逆行列
§5. 行列を用いた連立方程式の解法

＊各節の指導内容の範囲，ねらい，導入する用語・記号，配当時数は，次ページ表2を参照

表 1

節	ねらい及び指導の流れ	用語・記号	配当時数
1. 情報のまとめ方と行列 (行列の相等)	・情報保管としての行列を知らせる．要素の位置の一貫性と単位の統一 ・行列の相等を定義する．	行列・行・列・要素	1
2. 行列の加法・減法	・具体例をもとに 行列の加法・減法及び実数をかけることができることを知らせる．さらに発展させて一般の行列について加法・減法・実数をかけることをさせる．加法についての単位元について理解させる． ・数計算の復習をさせる．		1
3. 行列と行列の乗法	・具体例をもとに 後で一般的に 行列と行列の乗法もできることを知らせる．（2×2行列まで その中には $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ なども入れておく． ただしa b c dは具体的数 ・練習問題の中で 行列と行列との乗法では 結合法則は成り立つが 非可換なことについて触れる．また 乗法についての2×2行列の単位元の意味と働きについても理解させる．		1.5
4. 逆行列	・数の計算からの類推により逆行列の意味を知らせる．（2×2行列） ・今後の学習への発展を考えて 2×2行列の逆行列をつくる公式を求める．但し この段階では 公式を求めることが主なねらいではなく 公式を用けて 逆行列を求められることをねらいとする． ・上に関連して 式の値を求める復習をさせる．	逆行列	1.5
5. 行列を用いた連立方程式の解法	・連立二元一次方程式を行列表示させる． ・一元一次方程式の解法との類推により 逆行列をかけて方程式を解かせる． ・連立二元一次方程式の解の公式を求め それを利用させる ・この解き方が 連立方程式を解く一般的手法であることを知らせる．		1

ただし、予備実験授業においては、それぞれの節の導入の仕方は同じであるが、2×2行列の範囲にとどめなかったので、それについて述べる。

§1 3×3行列まで。

§2 3×3行列まで

§3 2×3行列と3×1行列まで。

B. 実施

表2

	予備実験	本実験 1	本実験 2
対象	和歌山県 T中2年B組	和歌山県 T中2年生	兵庫県 F中2年生
人数	34名(男17・女17)	98名(男52・女46)	60名(男36・女24)
期間	S58．3．14～ 3．19(実質5時間)	S58．6．20～ 7．1(実質7)	S58．7．21～ 7．28(実質7)
範囲	§1～§3 途中まで	§1～§5	§1～§5

予備実験授業においては、本実験授業の展開と方法を決定したり、仮説設定の手がかりとすることを目的に行った。また、そのときの評価テストは、我国において比較する資料がないので、一応の比較のために、英国のCSMS*数学チームのテストに基づいて作成した。

* CSMS … Concepts in Secondary Mathematics and Science

CSMS数学チーム

このチームは，Dr. K.M. Hartを中心としたもので，英国における中等学校生（11～16歳）の数学の理解の階層化を確立することを目標にしたものである。このチームによって研究されたトピックスは次のようである。

(a) 測度（長さ，面積，体積）12～14†

(b) 数計算（整数についての計算の意味）11～12†

(c) 位取りと小数 12～15†

(d) 分数（分数表示，加法，減法） 12～13†
乗法と除法に拡張して 14～15†

(e) 正と負の数（表記，加法，減法，乗法）13～15†

(f) 比と割合 13～15†

(g) 代数（一般化された計算）13～15†

(h) グラフ 13～15†

(i) 対称と回転 13～15†

(j) ベクトルと行列 14～15†

これらの研究は，教師やカリキュラム開発者に対して，多くの示唆を与えてくれるものである。

(j)の行列の評価テストには，(M)と(A)の２種類があり，(M)はすでに行列の乗法について知っている生徒達用のもので，(A)は，行列の乗法を新しいトピックスとする生徒達用のものである。行列は目下のところ，我国の中学校段階の教材とはなっておらず，そのため，私の実験結果の一応の比較のために，(A)をもとにして評価テストを作

成した．この場合には，2×2行列までにとどめていない。なお，CSMSの(A)のテストを受けたのは，1977年の，我国への対応を求めれば，公立中等学校であるコンプリヘンシブ・スクール3校，第3学年（14～15才）の生徒135名であった．

(A)をもとにして作成したテスト（41～44ページ）の主な評価問題は次のようである．

(ア)「話」の内容のデータを保管するための行列の意味とその利用

(イ)行列の相等

(ウ)行列の加法・減法とスカラー倍

(エ)行列の加法の可換性（数の加法の法則との類似性）

(オ)いくつかの未知数をもつ行列の加法とスカラー倍を含んだ簡単な方程式

(カ)具体的な例をもとにした行列の乗法

(注) Dr. Kathy Hart : Professor of Chelsea College, University of London

CSMSの初めの指導者は Prof. Kevin Keohane と Prof. Geoffrey Matthews である．

C. 実験用テキスト

行列

§1. 情報のまとめ方と行列

現代は情報化社会といわれているように，いろいろな情報が私達に入ってきます．それらの情報を整理し，記憶したり，情報を比較したりすることを考えましょう．たとえば，

「A, B, C 3つの菓子店があって，6月の売り上げが A店では，チョコレートが50個，キャラメル23個，ガム36個で，B店では，チョコレート35個，キャラメル32個，ガム53個で，C店では，チョコレート72個，キャラメル65個，ガム80個であった．」

上のように，文章で示されていることがらを記憶したり，比較したりするのは難しい．どうすれば，記憶しやすくできるでしょうか。

次のような表にしておくとわかりやすいですね．

	チョコ	キャラ	ガム
A店	50コ	23コ	36コ
B店			
C店			

この表で，上の菓子の種類と左の店はわかっているものと考えて次のように示したらどうだろう．

$$\begin{pmatrix} 50 & 23 & 36 \\ 35 & 32 & 53 \\ 72 & 65 & 80 \end{pmatrix}$$

- 1 -

このように、いくつかの数の組をかっこでかこんだものを行列といいます。この行列で、たとえば65を示すとき、店の名などを省いてどういったらわかりやすいだろうか。

そこで、各店の各種菓子の売り上げを表す50 23 36のような横の数の並びを**行**、各種菓子の各店での売り上げを示す $\begin{matrix}50\\35\\72\end{matrix}$ のような縦(たて)の数の並びを**列**と呼びます。また、1つ1つの数を行列の**要素**と呼び、「65は、3行2列の要素である。」と呼ぶことにします。

また、この行列は、3つの行と3つの列からできているので、「3行3列の行列」といいます。

問．次の行列は何行何列の行列ですか。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix}5 & 6\\2 & 8\end{pmatrix}$

例題　次の文章の内容を行列で表してみよう

(1). ある中学校の2年生で、加入しているクラブの調査を行ったところ、バレー部は男子が10人、女子20人で、テニス部は男子が12人、女子25人であった。

(2) その学校の3年生で調べると、バレー部は男子6人、女子17人で、テニス部は男子が10人、女子18人であった。

(3)　２年生と３年生のバレー部・テニス部の男女別の合計人数

練習

1. 私は買物に行き、りんごを３個，なしを２個，みかんを７個買いました．
2. ある日の出席状況をみると、Ａ組は欠席が３人，遅刻が２人、早退がなしで、Ｂ組は遅刻が１人，欠席が２人，早退が１人であった．
3. 姉と私は、布を買いに行きました。姉は赤い布１ｍ、白い布を２ｍ買い、私は、赤い布50cm，白い布を３ｍ買いました．

1.		2.		3.	

$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ で、$x=2$ のとき、つまり対応する要素がそれぞれ、すべて等しいとき２つの行列は等しいといって次のように書きます．

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

§2. 行列の加法・減法と数をかけること.

§1の例題(1),(2),(3)の関係を

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 37 \\ 22 & 43 \end{pmatrix}$$

と書くことにします.

(注) 対応する要素は、常に対応する位置におくこと

また、2年生と3年生のクラブ員の数の差は、

と表せる.

よって その関係を

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & \end{pmatrix}$$

と書くことにします.

練習

1. $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1.		2.		3.		4.	

例題 ある中学校で1年から3年までのクラブ部員の数が各学年ともバレー部男子10人、女子20人で テニス部は、男子が12人、女子25人であったとする. そのとき 1

- 4 -

年から3年まで合計した各部の男女別人数は

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ ですね.

また，各学年のバレー部・テニス部の男女別人数は，それぞれ　$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ ですね.

だから，その関係を

$3\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 60 \\ 36 & 75 \end{pmatrix}$ と書けますね.

練習.

1. $2\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

＝まとめ＝

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

問題　次の計算をしなさい

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $4\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(1)		(2)		(3)		(4)		(5)		(6)	

問．$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$　$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = B$　$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = C$　としたとき

次の①～④を計算してみよう．

① $A + B$　　　　② $B + A$

③ $(A + B) + C$　　④ $A + (B + C)$

＝まとめ＝

行列の加法では $\boxed{}$ 法則，$\boxed{}$ 法則が成りたつ．

以上のことから，今まで学習した数（整数・小数・分数）と同様に，行列の加法・減法においては，行列を１つの数のように，扱うことができそうですね．

§3. 行列と行列の乗法

例題　ある学校で校内陸上競技大会がありました．各競技の１位には５点，２位には３点が与えられることになっていました．２年A組は１位が４人，２位が２人で，B組は１位が３人で，２位が４人でした．

この文章からどんな情報が得られるでしょう．それを行列で表してみよう．

情報 ＿＿＿＿＿＿　　行列 $\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

＿＿＿＿＿＿　　$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

＿＿＿＿＿＿　　$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

A組の総合得点は ＿＿＿＿＿＿＿＿

B組の総合得点は ＿＿＿＿＿＿＿＿

だから A,B各クラスの総合得点を表す行列は

$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ ですね．

また［点数］×［人数］＝［得点］だから

A組の総合得点は，下の左辺のように

$(5\ \ 3) * (4\ \ 2) = (5\times4+3\times2) = (26)$

であるが これを 便宜上

$$(4\ \ 2)\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = (4\times5+2\times3) = (26) = 26 \quad ―― ①$$

と書きます．

同様に B組の総合得点は ①にならって

$$(\quad\quad)\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = (\quad) \quad ―― ②$$

と書きます．

さらに ①，②，2つをまとめて

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26\\27\end{pmatrix} \quad ―― ③$$

と書きます．

この例題で 1位に2点 2位に1点与えるというルールになったら A B各組の総合得点はどうなるだろう．行列で表してみよう．

A組の総合得点… $(\quad\quad)\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ ＿＿＿＿

B組の総合得点… $(\quad\quad)\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ ＿＿＿＿

それらをまとめて $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ ——④

と書ける

さらに ③と④をまとめて

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & \\ 27 & \end{pmatrix} \text{——⑤}$$

と書くことにします．

すると⑤は，２行２列の行列と２行２列の乗法となりますね．

ちょっと複雑になってきたね．そこで２つの行列の積を表す行列の要素は，それぞれ何を表していて，どのように計算されたものかいえますか．

－まとめ－

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}}$$

練習

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

(1)		(2)		(3)		(4)	

• (1)と(2)の計算をみて何か気がついたことがないかな．

____

そうです．行列の乗法では $\boxed{}$ 法則が成りたたないね．つまり行列のかける順番が異なると結果が異なるということですね．

それでは結合法則について調べてみよう．

$A=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}7&4\\6&2\end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$ のとき

$(AB)C=\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}$

$A(BC)=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}$

＝まとめ＝

> 行列と行列の乗法では $\boxed{}$ 法則は成りたたないが $\boxed{}$ 法則は成りたつ．

- (3) と (4) の計算をみて何か気がついたでしょう．

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は数の乗法で何にあたるだろう．

§4．逆行列

数の除法で　たとえば $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$ のときは，これを $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$ となおして計算しましたね．$\frac{3}{2}$ は $\frac{2}{3}$ の逆数ですね．すなわち，$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$ という関係になっています

同じようなことを行列についても考えましょう．§3の中で，行列の乗法で，数の乗法の1と同じはたらきをするのは $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ だとわかりましたね．

だから $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ を例にとって

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる2行2列の

行列Xを求めよう．今 $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+5w & 2v+5x \\ u+3w & v+3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2u + 5w = 1 \\ u + 3w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v + 5x = 0 \\ v + 3x = 1 \end{cases}$$

という関係があります．それで，これらの方程式を解いて　$u = \boxed{}$　$w = \boxed{}$，$v = \boxed{}$　$x = \boxed{}$

であるから　$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ですね．

また　$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ です．

このようなXをAの**逆行列**と呼びます．

これからあと2行2列の逆行列をよく使うので，与えられた2行2列の行列の逆行列をつくる公式を求めておきましょう．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ とし $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ とおくと，

上でやったのと同じような手順を使って

$AX = E$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} au+bw & av+bx \\ cu+dw & cv+dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$au + bw = 1 \text{ —①} \qquad av + bx = 0 \text{ —③}$$

$$cu + dw = 0 \text{ —②} \qquad cv + dx = 1 \text{ —④}$$

①と②より　　　　　③と④より

$$u = \frac{d}{ad-bc} \qquad v = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$w = \frac{-c}{ad-bc} \qquad x = \frac{a}{ad-bc}$$

（ただし $ad-bc$ は 0 でないとする．）

だから A の逆行列 X は

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

で求められます．

練習　次の行列の逆行列を求めよう．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(1)		(2)	

§5．行列と連立一次方程式の解法

行列を用いて　連立一次方程式を解くことを考えよう．

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$ を行列で表すとどうなるだろう．

— 11 —

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$ ですね. ——— ①

一次方程式　$AX = B$ の型になってるね.

今まで，たとえば $3x = 6$ を解くのに

両辺に3の逆数をかけて

$$\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 6$$

$$x = 2$$

としたように　①の場合には

両辺に $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\boxed{}$ を左から

かけて　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + (-1) \times 9 \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

となりますね. すなわち　$x = \boxed{}$　$y = \boxed{}$ です.

このように解を求める公式をつくっておこう.

$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$ です

両辺に $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 $\boxed{}$ を左からかけて

（$ad - bc \neq 0$ とする）

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

だから　$x = \boxed{}$　　$y = \boxed{}$　です

練習　上の解の公式を用いて　次の連立方程式を解いてみよう.

(1) $\begin{cases} x+2y=-4 \\ 2x+3y=-6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ -2x+y=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

発展　連立二元一次方程式は　解の公式を用いて解くことができましたが, 連立三元一次以上の場合にも, 同じ考えで解くことができます. ここでは連立三元一次方程式の解き方を紹介しておくだけにします.

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$ をまず行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

となります.

そこで $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の逆行列を両辺にかけると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

となって解が求められます。

4.2 研究目標

中学2年生において，2×2行列までの範囲で，その意味と相等，加法・減法及びスカラー倍，乗法，2×2行列の逆行列を，ある水準以上の生徒が理解できるかどうかを調べ，カリキュラムへの導入について考察する。

4.3 研究仮説

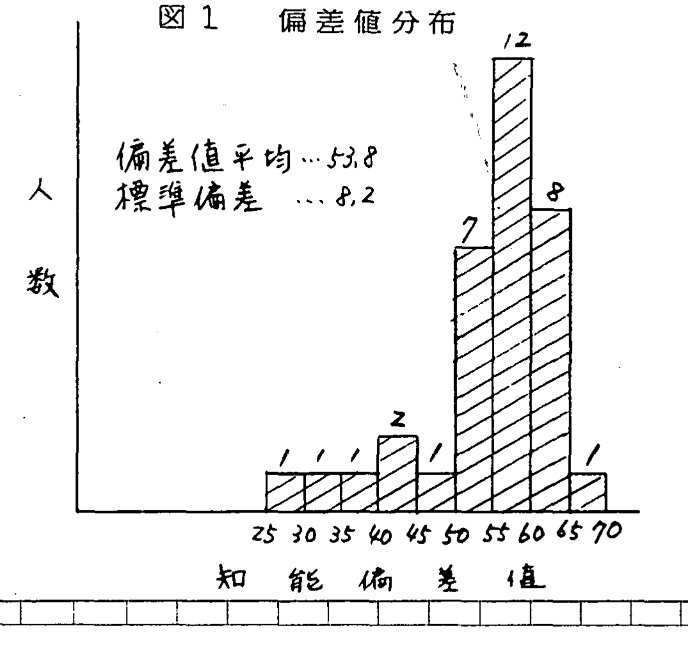
(I) 中学2年生で中位以上の生徒は，行列の加法・減法及びスカラー倍は，具体例を通して理解できる。

(II) 中学2年の上位の生徒は，2×2行列の乗法と逆行列を用いて連立二元一次方程式を解くことについては理解できる。

4.4　予備実験授業

(1)T中実験群の実態：和歌山県の郡部に位置するT中学校の2年生の1学級である．3学期に行った実力テストにおける偏差値分布は，図1のとおりであり，全体としては比較的よくできる学級といえよう．また，1簡単な正負の数の計算，2一元一次方程式と3加法の計算法則を含んだプレテストにおいては　正答率が79％であり，全体としては，ケアレスミスを考察するとき，正答率が90％となり，今回の実験授業における行列導入のレディネスが一応できているものと考えられる．

図1　偏差値分布



(2) 評価テストとその結果

ア．テスト問題

行列

2 年 組 番

1　ある会社は　3つの工場をもっている．　1つはA市に，1つはB市に，1つはC市にある．各工場は　鉄，すず，銅　を使っている．　そして，1月にはA市の工場は，鉄3トン，すず2トン，銅1トン，を使う．　B市の工場は鉄6トン，すず4トン，銅6トン使う．これらの量を，C市の工場の使う量とまとめて　次の行列で表わしている．

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 鉄 & すず & 銅 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) C市の工場で使われるすずの量はどれだけか．　(1)

2月のA市とB市の工場の使用量は，次の行列で示されている．

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 鉄 & すず & 銅 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) C市の工場は　銅4トン，鉄5トン，すず5トンを使う．　上の行列を完成しなさい．　(2)

(3) 1月と2月に各工場で使う鉄，すず，銅の量を示す次の行列を完成しなさい．

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

(3)

3月のはじめに各工場の倉庫にはいっている鉄，すず，銅の量を示しているのが　次の行列である．

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

次の行列は，3月中に各工場で倉庫から出して使われた金属の量を示している．

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) 3月の終わりに倉庫に残っている金属の量を示す行列をつくりなさい．

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

(4)

次の行列は　4週間合計の工場へ運ばれる鉄，すず，銅の量を示している．

$$\begin{pmatrix} 16 & 16 & 12 \\ 28 & 20 & 24 \\ 24 & 20 & 16 \end{pmatrix}$$

(5) 毎週，同じ量ずつ運ばれている．．　次の行列は何を示しているか．

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(5)

(6) 次の等式を完成させなさい．

$$3\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 9 \\ 21 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

(6)

(7) これは　何週間の配達を示しているか．　(7)

2　次の2つの行列は　6月と7月にL市とM市の工場で生産されている　製品PとQとの量をトン数で示している．

(8) 加法を完成しなさい．

$$\begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

(8)

次の計算をしなさい．

(9)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

(10)
$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

(9)
(10)

(11) (9)と(10)を比べて　どんなことがわかりますか．　(11)

(12) これは　なぜですか．　(12)

次の計算をしなさい．

(13) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　(14) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ (13)

(14)

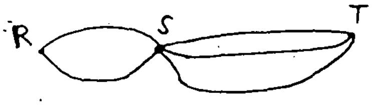
3　次の文字にあてはまる数を求めなさい． (15)

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$　　$4\begin{pmatrix} 5 & c \\ d & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ (16)

(17)

(15) $a =$　　(16) $b =$　　(17) $c =$　　(18) $d =$ (18)

4 (19) RからSへは，2本の道があり，SからTへは，3本の道がある．
この時，RからSを通ってTへ行く道の数が6通りある．なぜ
6通りあるかを説明しなさい (19)



(20) もし　さらに，1本の道がRからSへつけ加えられて，RからSへ3本の道があり，SからTへ3本の道があるとするなら，RからSを通ってTへ行くのに何通りの道があるか． (20)

(21) もし　RからSへ6本の道があり，SからTへ5本の道があるとするなら，RからSを通ってTへ行くのに何通りの道があるか． (21)

5 (22) 太郎と健治はキャンプ用のいすをつくることになっている．　太郎は5メートルの布と3メートルの木と，4メートルの糸が必要で，健治は，4メートルの木と，3メートルの布と，2メートルの糸が必要である．太郎は技術の先生に提出するために，2人の必要とするものを行列で示した．しかし，まちがっている，と先生に言われた．なぜか．

$\begin{array}{c} \\ 太郎 \\ 健治 \end{array} \begin{array}{c} 布 \quad 木 \quad 糸 \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$　　こたえ ____________________ (22)

(23) 太郎と健治は，もっと　小さいいすをつくることにした．太郎のいすは1メートルの布と　50センチメートル　の木と3メートルの糸が必要で，健治は，1メートルの布と1メートルの木と2メートルの糸が必要である．健治は2人の必要とするものを行列で示した．しかし　まちがっている．なぜか．

$\begin{array}{c} \\ 太郎 \\ 健治 \end{array} \begin{array}{c} 布 \quad 木 \quad 糸 \\ \begin{pmatrix} 1 & 50 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$　　こたえ ____________________ (23)

6　次の行列の加法をみて　物語を考えて　それぞれの数が何を示しているか述べなさい．

$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

(24)
5は ____________________
6は ____________________
2は ____________________
4は ____________________

(25)
10は ____________________
11は ____________________
7は ____________________
8は ____________________

(26)
15は ____________________
17は ____________________
9は ____________________
12は ____________________

(27) その物語が加法で表わされるのはなぜか．

行列　　2年　組　番

7　陸上競技の試合では　各競技のポイントは　次のように与えられた.

/位　3点
2位　2点　　これを列行列に表せば $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ------(※)
3位　/点

A校は　/位が2人　2位が5人, 3位が3人であった. これを次のように表わす.

$(2\quad 5\quad 3)$

(28) A校は　/位について6点得た. 2位について何点得たか.　(28)

(29)　3位について何点得たか.　(29)

(30) A校は合計何点得たか.　(30)

(31) 私たちは合計得点を示す行列を求める時に　次のように2つの行列をかけあわすことによっても計算できる.

$$(2\quad 5\quad 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(19)$$

上の
合計得点をどのように計算したのか説明しなさい.　(31)

(説明)

(32) B校は, /位が4人, 2位が/人, 3位が3人であった. このことを下の(ア)の行列に表わしなさい.　(32)

$$(\quad (ア)\quad)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(\quad (イ)\quad)$$

(33) 上の行列の乗法を使って、B校の合計得点を計算し(イ)にかきなさい.　(33)

(34) どちらの学校が　その試合に勝ったか.　(35) 何点差か.　(34)(35)

(36) 試合が終わって　次の年からはポイントを与えるのに　上の7の※の行列の代わりに $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ を使うことにすると提案された. この場合は, /位に何点与えられるのか.　(36)

(37) 次の年　A校とB校が再び試合をした. その結果は次の行列で示されている.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc}1位 & 2位 & 3位\end{array}\\
\begin{array}{c}A校\\B校\end{array} & \begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\4 & 1 & 4\end{pmatrix}
\end{array}$$
(37)

B校には　2位の人は何人いたか.

(38) あるスコアラーは/位に3点, 2位に2点, 3位に/点与えるのだと思い試合の結果を次のように2つの行列をかけあわし計算した.　(38)

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\4 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\ \ \end{pmatrix}$$

/8はA校が合計/8点得たことを示している. 上の右辺の行列を完成しなさい.

(39) あなたが今入れた数は何を表わしていると考えますか.　(39)

(40) 別のスコアラーはポイントを与えるのに, 昨年の新しい提案によって $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ を使って次のように表わした.

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\4 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ \ \end{pmatrix}$$ ----------(※※)

20は何を表わしているか.　(40)

(41) 上の※※の行列を完成しなさい.　(41)

(42) ポイントを与えるのに $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ を使うと　どちらが勝つか.　(42)

(43) ポイントを与えるのに $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ を使うと　どちらが勝つか.　(43)

8　次の行列は　P地とS地にある工場で　働く人を運ぶためにやとった普通バスと小型バスの数を表わしている．

$$\begin{array}{ccc} & 普通バス & 小型バス \\ P & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ P \\ S \end{array} \begin{array}{c} 普通バス\ \ 小型バス \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

普通バスを／台をやとうのに　／２００円　小型バスをやとうのに／０００円かかる

(44) P地の工場に働く人を運ぶのにいくらかかるか.・・・・ (44) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(44)

(45) S地の工場に働く人を運ぶのにいくらかかるか.・・・・ (45) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(45)

9　甲と乙の店では　コーラとサイダーを売っている．２つの店が　月曜日に売るびんの本数は　次の行列で示されている．

$$\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \end{array} \begin{array}{c} コーラ\ \ サイダー \\ \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

コーラは／本７０円で　サイダーは／本５０円である．

次のように　２つの行列をかけあわすことができる．

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1900 \\ 1650 \end{pmatrix}$$

(46) /９００は何を表しているか．・・・・ (46) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(46)

(47) /６５０は何を表しているか．・・・・ (47) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(47)

(イ) 評価テスト結果

表3　得点分布(47満点) 平均　標準偏差

	0～29	30～32	33～35	36～38	39～41	42～44	45～47	平均	標準偏差
全	1	1	1	1	4	11	15	43.1	3. 9
男	0	0	0	0	2	5	10	44.6	1. 9
女	1	1	1	1	2	6	5	41.6	4. 7

表4　各問題の正答率（上）とCSMSの結果（下）

1	94.1 / 80.7	8	100 / 89.6	15	97.1 / 74.8	22	97.1 / 48.1	29	93.9 / 78.5	36	90.9 / 62.2	43	90.9 / 42.2
2	94.1 / 79.3	9	100 / 85.9	16	100 / 72.6	23	100 / 46.7	30	93.9 / 74.8	37	100 / 83.7	44	93.9 / 49.6
3	100 / 71.9	10	100 / 85.9	17	94.1 / 61.5	24	79.4 / 11.9	31	93.9 / 54.1	38	93.9 / 50.4	45	97.0 / 48.9
4	100 / 79.3	11	91.2 / 79.3	18	97.1 / 60.7	25	79.4 / 11.1	32	100 / 74.8	39	93.9 / 34.8	46	93.9 / 39.3
5	88.2 / 63.7	12	44.1 / 2.2	19	82.4 / 54.8	26	76.5 / 9.6	33	93.9 / 63.0	40	87.8 / 30.4	47	93.9 / 39.3
6	97.1 / 83.0	13	100 / 79.3	20	94.1 / 54.1	27	47.1 / (4.4)	34	97.0 / 72.6	41	87.8 / 41.5		
7	100 / 70.4	14	100 / 76.3	21	94.1 / 33.3	28	93.9 / 77.8	35	100 / 55.6	42	78.8 / 34.8		

(注)　(　) は問題が異なる.

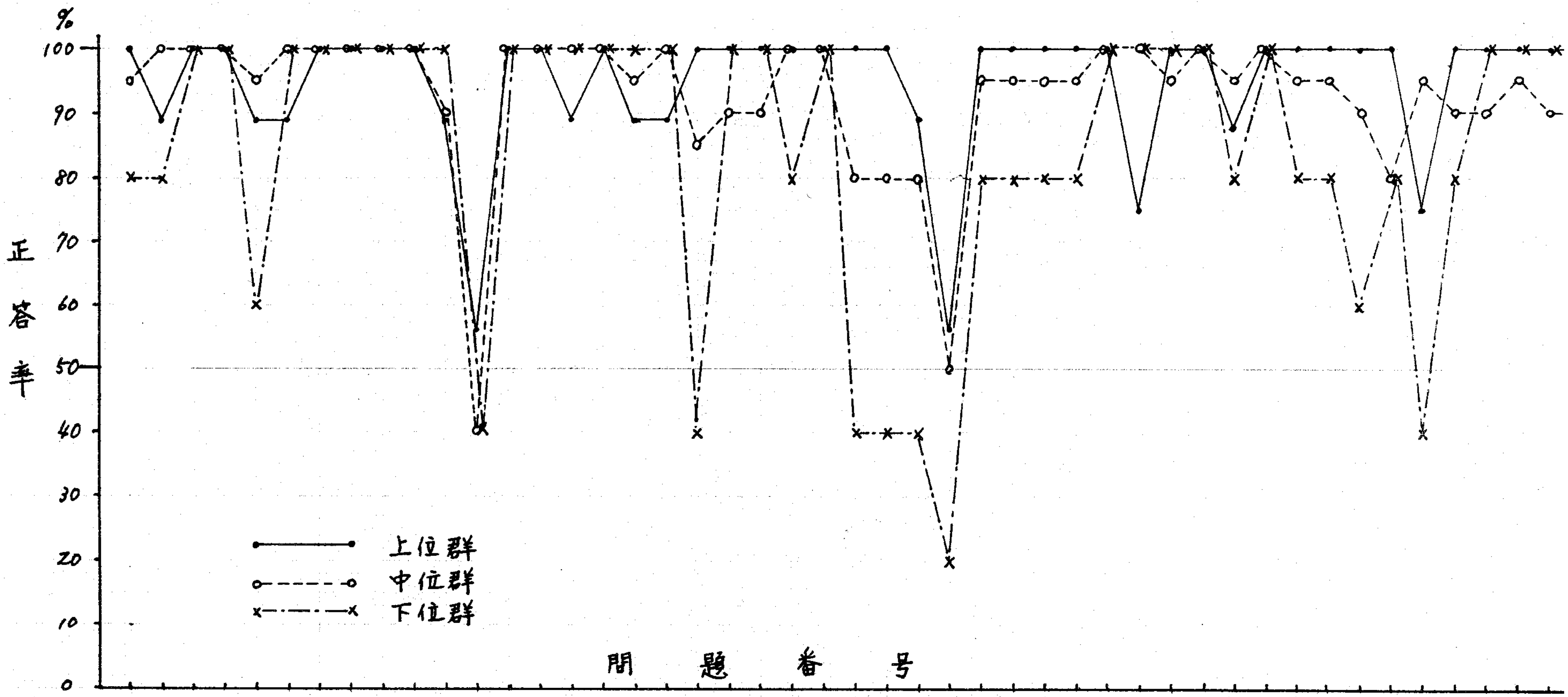
表5　実力テスト偏差値による上中下位群の分類と各群の平均・標準偏差

	下位群	中位群	上位群
偏差値	20～44	46～58	60～80
人　数	5	20	9
平　均	39. 4	43. 5	44. 3
標準偏差	4. 63	3. 85	1. 94

表6　平均値の差の検定

上	中	下
	0. 51	2. 25
		2. 10

図2. 各群の正答率・グラフ



問題番号	上位(9)	中位(20)	下位(5)
1	100	95	80
2	89	100	80
3	100	100	100
4	100	100	100
5	89	95	60
6	89	100	100
7	100	100	100
8	100	100	100
9	100	100	100
10	100	100	100
11	89	90	100
12	56	40	40
13	100	100	100
14	100	100	100
15	89	100	100
16	100	100	100
17	89	95	100
18	89	100	100
19	100	85	40
20	100	90	100
21	100	90	100
22	100	100	80
23	100	100	100
24	100	80	40
25	100	80	40
26	89	80	40
27	56	50	20
28	100	95	80
29	100	95	80
30	100	95	80
31	100	95	80
32	100	100	100
33	75	100	100
34	100	95	100
35	100	100	100
36	88	95	80
37	100	100	100
38	100	95	80
39	100	95	80
40	100	90	60
41	100	80	80
42	75	95	40
43	100	90	80
44	100	90	100
45	100	95	100
46	100	90	100

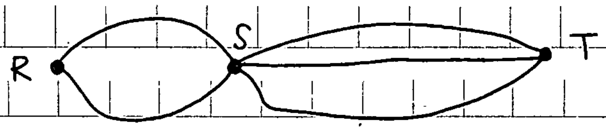
(3)考察と結論

最初の問題では，データを保管するための行列ということで，3×3の行列を用いた。問題は行列についての解釈，データを要素の欠けている行列に，問題文から挿入することや，加法の問題を含んでいた。それらの正答率は90％以上であった。また，行列に挿入されるべきデータが正しい順序で与えられていないものについても2人が誤っただけで，ふだんの理解力からいって明らかに読みの不注意によるものであった。全体の平均正答率が90.8％であることからすれば，行列の意味の解釈及び相等の理解は十分可能であることがわかる。

2番目の問題では，データを保管した行列の加法を用いた後，行列の加法の下における可換性を調べた。加法については高い正答率であったが，なぜ可換法則が成り立つかを説明できたのは44.1％と非常に少なかった。これは，一般に数の計算において，現在は法則があまり強調されていないことや，問題の意味が理解できなかったこと，即ち，数の加法と同様な意味で交換法則が成り立つかなどのように問い方に丁寧さが欠けていたため，また，理由など文章で適切に答えるのが苦手であったり，文章で答えるのをいやがるというようなことからの結果であろう。

4番では，乗法的である道の数の構造が含まれている。つまり次ページの図におけるRからSを通ってTへ行く

道の数に注目した。問題(19)～(21)の解答反応をみると、表



7.のようになった。

表 7

タイプ	(19)	(20)	(21)	人数	反応率
Ⅰ	1	1	1	27	79.4
Ⅱ	1	0	0	1	2.9
Ⅲ	0	1	1	5	14.7
Ⅳ	0	0	0	1	2.9

1 - - - 正答
0 - - - 誤答

ここでも、「なぜか」という問に対して適切に文章で述べることができないものが目立った。問題(19)を、図で道すじを数えて正答した2人のうち1人は道の数が多くなると数えられなかった。(タイプⅡ)。CSMSチームは同じタイプの問題である(20).(21)に対する正しくない解答に目を向けた。そうすると加法のストラテジーと、加法をして1加えるというストラテジーと、図示するという3つの型が現われた。それらの発生率を参考までにあげると表のようである。

表8　乗法的でないストラテジー

ストラテジー	加法		加法＋1		図をかいた
問題	(20)	(21)	(20)	(21)	(21)
Aサンプル　14歳	6.7	12.6	4.4	5.9	5.9
実験群 14歳	0	0	2.9	2.9	0

私の実験では，加法＋1のストラテジーで答えた生徒はタイプ(LV)の1人だけであったが，これは誰しも一度は考えるストラテジーであろう。

　このようなネットワークの問題は，前述（15ページ）のSMPの教科書では，ルート・マトリクスとして，行列の乗法の導入にも用いられているが，CSMS数学チームではこの導入方法はあまり正当であるとは認められないとしている。

　問題5はデータ保管の論理（(22)要素の位置の一貫性と(23)要素の単位尺度の統一）についてである。

表9　データ保管の論理

群＼問題	(22)	(23)
Aサンプル 14歳	48．1	46．7
実験群 14歳	97．1	100

　CSMS数学チームの調査全体（Aサンプル14歳と15歳，Mサンプル14歳と15歳）としては，上表Aサンプルの傾向とは異なり，問題(22)より(23)の方が高い正答率を示した。これは注意深く問題を読んでいないことによる分が大きかったためであろう。また問題(23)において50という数字が最も目立ってしまっていることも一因であろう。それについてCSMS数学チームでは，ヤード・ポンド法をメートル法にきりかえて間もないので，メートル法体系のもとでは避けられないだろう。もし，フィートとヤードが混合した単位で用いられていたら，その正答率

はもっと低いものであろうと分析している。T中実験群では，問題(22),(23)の正答率に差は認められなかった。

　問題6は行列の正しい加法計算が与えられており，それをもとにして「話」をつくることが求められた。この問題は，他の問題と比較して目立って正答率が低かった。また構造が正しいので正答とした中でも，単に例題をまねたものが多く，現実の「話」としては不適当なものもあり，文章でまとまった問題をつくることの難しさを示した。

　問題7では，データ保管による行列の乗法の導入が与えられた。ここでは，問題(28)から(43)までの一連のかなり長い質問が与えられた。問題(38),(39)では，行列の積（2×3行列と3×1行列）を完成し，解釈することが求められた。

表10　行列の積の完成と解釈

	正しい乗法	解釈
Aサンプル 14歳	50	35
実験群 14歳	93．9	93．9

CSMS数学チームによると，計算はできても解釈が難しいという傾向があるようである。また，問題(42)と(43)では，異なるスコア体系*でのA，B両校の総合得点の比較を求めたが，実験群では，それらにおいても高い正答率78.8%，90.9%を示し，解釈の点でもあまり問題はないようであった。それから，2×2行列と2×1行列の乗法からできた行列の要素の解釈で（問題(46),(47)）さらに高い正

＊異なるスコア体系…1位に3点，2位に2点，3位に1点与えるのと，1位に4点，2位に2点，3位に1点与えるというもの

答率93.9%を示している。よって実験群では、具体例をもとにして導入すれば、行列の積（2×3行列と3×1行列や2×2行列と2×1行列）の解釈も十分できると言えよう。

次に、46ページの各群の正答率とそのグラフを見ると、各群ともほぼ同じ型をしており、それぞれの群が、同じような問題に誤答している様子がわかり、この段階の生徒の難しかった点が明確になっている。

また、このテストの平均と標準偏差は、表5のとおりであり、各群の平均値の差を検定したところ、1%の有意水準のもとでは、各群に差は認められなかった。（表6）

さらに、実力テストの偏差値と評価テスト得点との相関係数 $r=0.247$ であり、検定の結果、相関の有意性は認められなかった。

以上のことから、結論的に次のことが言えよう。

- ここまでの学習範囲では、下位群においても、行列導入の可能性は十分高いのではなかろうか。
- 2年生の2学期までの学習内容とはあまり強い関係がなく、具体的な意味のある行列は、発展性のあるトピックスとして導入できるのではなかろうか。

(4) 予備実験の結果に基づくテキストの修正

今回の授業では、比較のため2×2行列までの範囲にとどめなかったが、考え方は2×2行列の場合と全く同様であるので、計算の面倒さを減じ、授業時間を有効に用いるために、本実験授業では、「情報のまとめ方と行列」の節以外は、2×2行列までの範囲にとどめることにした。また、評価テストは、問題数が非常に多く、時間不足による無答と、わからないことによる無答の区別の必要を除くこともねらって、2回（各35分）に分けてテストを行った。しかし、本実験のポストテストでは、最小必要限20問にとどめる。

4.5 本実験授業1（T中）

(1) T中の実験群の実態：和歌山県の郡部に位置する中学校の2年生98名（男52・女46）で知能偏差値の平均は50.8で、検定の結果ほぼ全国標準レベルにあると考えられた。この実験授業の場合、上、中、下位の群は知能偏差値をもとにして下の表のように分けた。

表11 知能偏差値分布

群	下位	中位	上位
知能偏差値	1 ～2	3	4 ～5
人数	26	41	31

プレテスト結果：授業（第1時）の最初において10分間のプレテストを行ったが、各群の平均及び標準偏差は59ページ表15のとおりで、それぞれの問題についての正答率は次ページ表12のようである。それをみると分数の混ざった正負の数の計算や、$-a^n$，$(-b)^m$ の型を含んだ数の計算の正答率が極端に低かったが、その他の正答率は高く、本実験授業における計算のレディネスは一応できていると考えられる。ただ連立二元一次方程式は、解法についての学習直後にもかかわらず、上位群においても少し低い正答率であった。またプレテストにおける各群の平均値の差の検定をしたところ、表13のように、上－中位群に

おいては，5%の有意水準のもとで差がなく，上－下位群，中－下位群においては有意差があった。

表 12，プレテスト正答率

問題＼群	下位	中位	上位	全体
1. $2+(-3)$	92.3	92.7	100	94.9
2. $-5-(-4)$	65.4	90.2	96.8	85.7
3. $5\times(-6)$	96.2	100	100	99.0
4. $-8-5\times\left(-\frac{2}{3}\right)$	15.4	36.6	51.6	35.7
5. $(-3)^2+(-2)^2-2^3$	11.5	31.7	48.4	31.6
6. $x+3=2$	65.4	90.2	100	86.7
7. $4x=24$	69.2	92.7	96.8	87.8
8. $3(x-2)-(x+4)=0$	38.5	61.0	77.4	60.2
9. $\begin{cases}3x-y=7\\2x-y=5\end{cases}$	34.6	73.2	67.7	61.2
10. $\begin{cases}3x-7y=-17\\6x+5y=4\end{cases}$	15.4	58.5	61.3	48.0

表 13　平均値の差の検定

上	中	下
	1.587	5.989**
		4.578**

** …1%有意水準

また，知能偏差値とプレテスト得点との相関を調べたところ，60ページの表17のように，上位群においては5%の有意水準で，中，下位群においては1%の有意水準のもとで，相関が認められ，全体としてもかなりの相関が認められた。

計算法則について：行列については数の演算に準じて，加法，減法及び乗法等を取り扱うので，加法についてのみ，計算法則を理解しているかどうかを第2時限の最初に調べたところ表14のようになった。

表14 計算法則

		下位群 A	下位群 B	下位群 C	下位群 D	中位群 A	中位群 B	中位群 C	中位群 D	上位群 A	上位群 B	上位群 C	上位群 D	全体 A	全体 B	全体 C	全体 D
交換	(人)	2	2	3	19	3	8	2	28	9	6	1	15	14	16	6	62
	(%)	7.7	7.7	11.5	73.1	7.3	19.5	4.9	68.3	29.0	19.4	3.2	48.4	14.3	16.3	6.1	63.3
結合	(人)	0	4	2	20	1	8	2	30	6	9	1	15	7	21	5	65
	(%)	0	154	7.7	76.9	2.4	19.5	4.9	73.2	19.4	29.0	3.2	48.4	7.1	21.4	5.1	66.4

A… 正答　B…法則名は覚えているが一致していない．C…デタラメ　D…無答

上表から次のようなことが見い出されよう。

- 全体的に法則に対する意識が非常に低い。それも下位群ほど低い。
- "交換"法則よりも"結合"法則の方がより低い定着率を示している。

前者については，現代化時代に導入された「数の集合のもつ構造」（及び剰余系）については，その内容のうち「演算について閉じていることの意味」や「交換，結合や分配法則が成り立つことの意味」を現行の学習指導要領のもとでは正の数，負の数の拡張や計算と関連してとり扱う程度にとどめていることから，法則自体あまり強調されて指導されていなかったのではなかろうか。し

かし，今回の授業の中でのように，生徒は行列をひとまとまりの数の組として扱えることを知る過程の中で，数の計算の特別な性質，即ち，法則の成立や単位元，逆元の存在を理解することができる。特に，行列の乗法における非可換性を知ってはじめて交換法則成立の意義も知れようし，今後，負の数だけでなく無理数等への数の拡張をしていく上でも，生徒にその視点を与えるだろう。
後者については，数学における用語においては，日常用いられることばより限定された意味に用いたりすることによるものであろう。

(2) ポストテストとその結果：第7時限において，各群の学習内容についての理解をみるために，次のようなテスト（40分）を行った。

(i) ポストテスト問題

行列　　　2年　組　番

1. ある会社は，2つの工場をもっている。1つはA市に，1つはB市にある。各工場は鉄，すず，銅を使っている。そして，1月にはA市の工場は鉄3トン，すず2トン，銅1トンを使った。これらの量をB市の工場で使った量とまとめて次の行列で示している。

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 鉄 & すず & 銅 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) B市の工場で使われたすずの量はどれだけか。

・2月のA市の工場での使用量は次の行列で示されている。

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 鉄 & すず & 銅 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) 2月のB市の工場での使用量は，銅4トン，鉄5トン，すず5トンであった。上の行列を完成しなさい。

・毎週，同じ量の鉄，すず，銅が，各工場へ運ばれているとする。

(3) 次の行列を完成しなさい

$$4\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & & 12 \\ & & \end{pmatrix}$$

(4) これは，何週間の配達を示しているか

2. 次の2つの行列は，6月と7月にL市とM市の工場で生産されている製品PとQの量をトン数で示している。

(5) 次の行列の加法を完成しなさい。

$$\begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

3. 次の計算をしなさい。

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　　(7) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. 次の文字にあてはまる数を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(8) $a =$　　(9) $b =$

5. 水泳の競技会がありました。各競技のポイントは次のように与えられた。

1位 3点
2位 1点

(10) 行列に表わすと $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ である。

A校は1位が2人、2位が5人であった。これを (2 5) で表す。

(11) A校は合計何点得たか。

私達は、合計得点を示す行列を求める時、次のように行列をかけあわすことによっても計算できる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

(12) この計算で合計得点をどのように計算したのか示しなさい。

- B校は1位が4人、2位が1人であった。このことを下の(13)の行列に表わしなさい。

$$\begin{pmatrix} (13) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (14) \end{pmatrix}$$

(14) この行列の乗法を使ってB校の合計得点を求めなさい。

6. 次の行列の乗法をしなさい

(15) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ である。(ただし $ad-bc \neq 0$)

(16) 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- 次の連立方程式を行列を使って表しなさい。

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (17) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (18) \end{pmatrix} \text{————} (※)$$

- (16)で求めた逆行列を使って(※)の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (19) \\ (20) \end{pmatrix}$$

(ii) ポストテストの得点分布

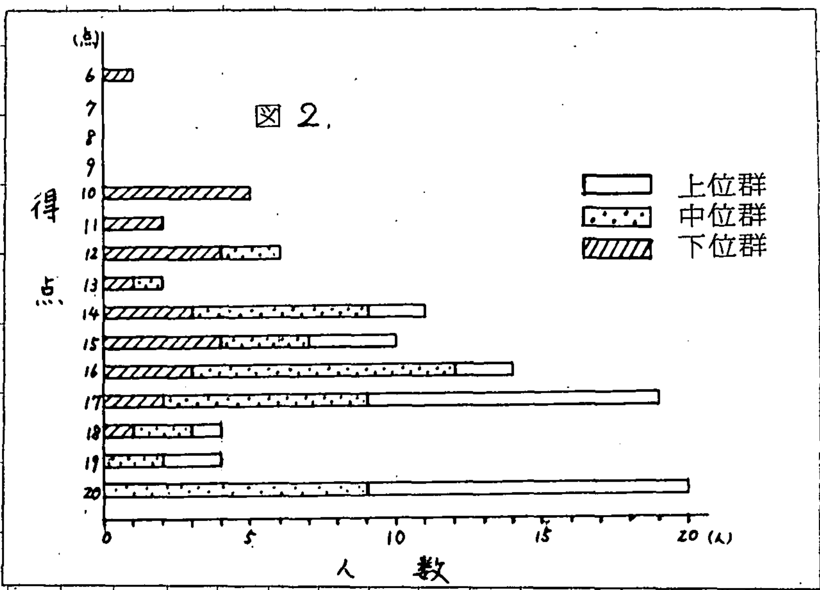


図2.

(iii) 平均及び標準偏差：各群のポストテストの平均及び標準偏差は表15のとおりであり，平均値の差の検定を行ったところ，上－中位群では5％の有意水準，上－下位群，中－下位群では1％の有意水準のもとで差が認められた。

表15 実施したテストの平均及び標準偏差

群＼変量	ISSの平均	ISSのSD	Pre- test 平均	Pre- test SD	Post- test 平均	Post- test SD
上 位	62．1	7．9	8．0	1．4	17．8	2．0
中 位	50．3	2．7	7．3	1．9	16．7	2．4
下 位	38．1	5．3	5．0	2．2	13．1	2．8
全 体	50．8	10．4	6．9	2．2	16．1	3．0

ISS…知能偏差値

表16．平均値の差の検定（Post-test）

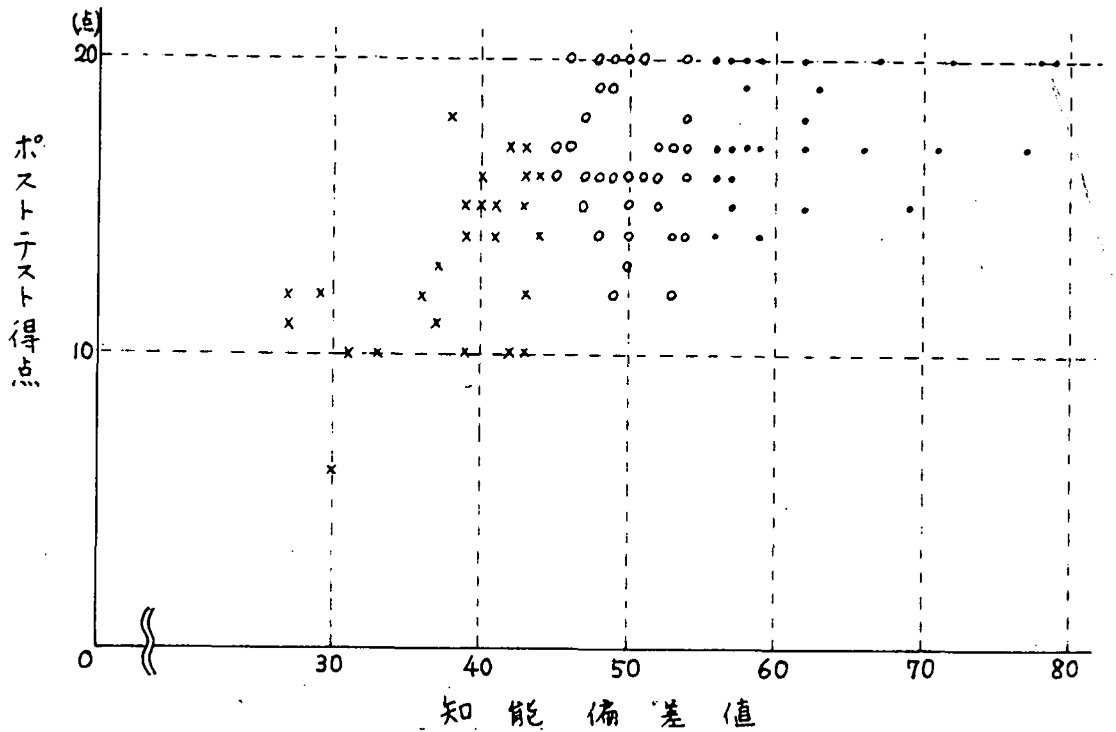
	上	中	下
上		2．100*	7．151**
中			5．458**

(iv)相関：ポストテスト得点と知能偏差値との相関係数を求めたところ．上，中位群には相関が認められなかったが，下位群においては1%の有意水準のもとで相関が認められた。全体としても相関が認められた．(1%有意水準）それらの様子は図3.からもわかる．

表1.7 ISSと実施したテストの相関係数

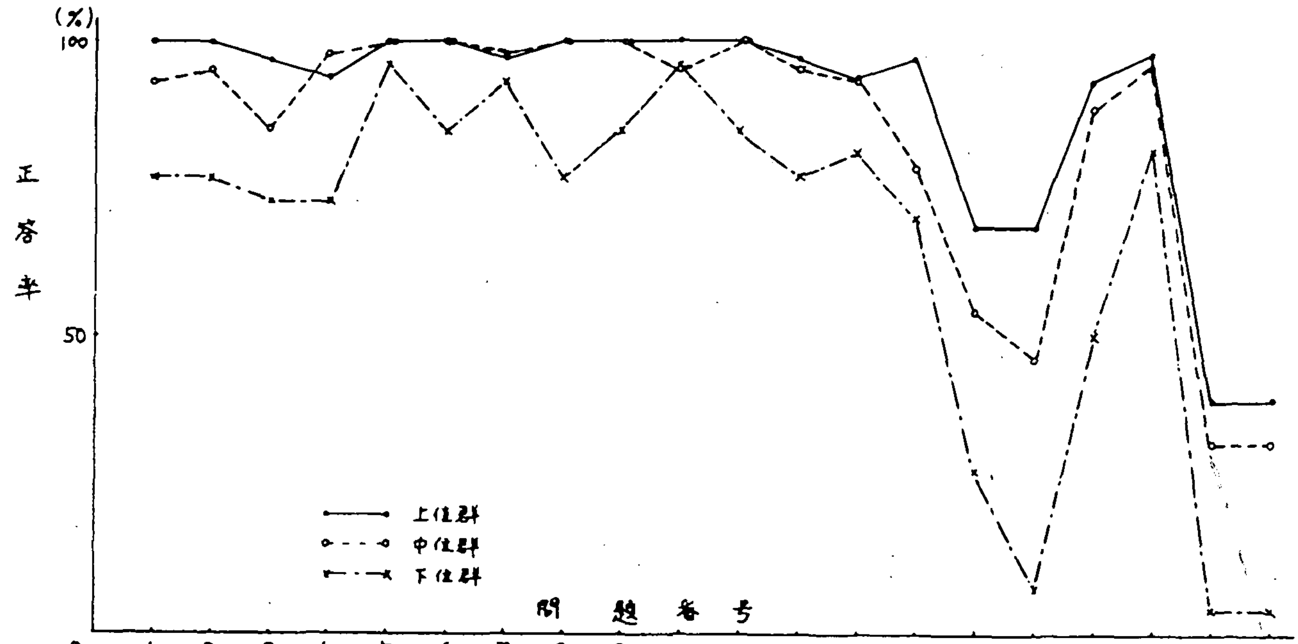
群＼変量	Pre- test	Post- test
上 位	0. 42*	0. 21
中 位	0. 50**	−0. 13
下 位	0. 54**	0. 54**
全 体	0. 58**	0. 59**

図3， 相関図



(V) 各問題の正答率：ポストテストの各問題に対する各群の正答率は以下のとおりであり、ほぼ、上、中、下の順になっており、それをグラフ表示したところ(図4)各群ともにほぼ同じ型をしており、程度の差はあれ、各群とも同様な問題に誤答していることがわかる。

図4. ポストテスト正答率・グラフ



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
上位群	100	100	96.8	93.5	100	100	96.8	100	100	100	100	96.8	93.5	96.8	67.8	67.8	93.5	96.8	38.7	38.7
中位群	92.7	95.1	85.4	97.6	100	100	97.6	100	100	95.1	100	95.1	92.7	78.0	53.7	46.3	87.8	95.1	31.7	31.7
下位群	76.9	76.9	73.1	73.1	96.2	84.6	92.3	76.9	84.6	96.2	84.6	76.9	80.8	69.2	26.9	7.7	50.0	80.8	3.8	3.8
全体	90.8	91.8	85.7	89.8	99.0	95.9	95.9	93.9	95.9	96.9	95.9	90.8	89.8	81.6	50.0	41.8	79.6	91.8	25.5	25.5

(vi) 正答率の差の検定：上，中，下位群の正答率の差の検定を行ったところ，表18のように，上位群と中位群の間には有意差のある問題はなく（5％有意水準），両群ともほぼ同じくらいの達成率であった。ただし，ポストテスト全体としては，5％の有意水準のもとで，両群に差が認められた。（59ページ表16）上－下位群間，中－下位群間に特に差があったのは，行列の乗法，逆行列，連立二元一次方程式の行列表示と，それにもとづく解法であった。それらについての考察は，(ix)誤答分析のところで行う。

表18　正答率の差の検定

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
上一中																				
中一下				※		※		※※	※		※					※※	※※		※	※
上一下	※	※	※					※						※	※※	※※	※※		※※	※※

※　5％有意水準　　※※　1％有意水準

(vii) S－P表

学習指導過程における指導内容（刺激）と生徒の学習（反応）との関係（両者の結合のようすや程度）をみるためにS－P表を作成したところ，次ページの表19のように，典型的なポストテスト型を示した。また，近似式により差異係数D^*を求めると，$D^* \fallingdotseq 0.221$となり，経験的に指導と生徒の反応の密着性の高さを示す指標，$D^* \fallingdotseq 0.4$前後であることからすると，かなり密着性が高いとい

2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
59	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
63	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
65	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
69	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
61	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	19	1.00
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	19	0.00
58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	19	1.00
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	19	0.00
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	18	1.09
67	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	18	0.00
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	18	0.00
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	18	1.09
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.06
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
70	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
71	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
76	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
64	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
53	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	16	0.17
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
68	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
45	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	16	0.23
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	16	0.25
30	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	16	0.23
72	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	16	0.23
60	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	16	0.31
79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	16	0.23
48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	16	0.21
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	16	0.23
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	15	0.03
75	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	15	0.07
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	15	0.06
56	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	15	0.00
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	15	0.30
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	15	0.00
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	15	0.06
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	15	0.00
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	15	0.03
66	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	15	0.28
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	14	0.09
50	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	14	0.13
51	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	14	0.32
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	14	0.03
82	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	14	0.31
62	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	14	0.06
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	14	0.27
42	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	14	0.09
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	14	0.06
73	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	14	0.35
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	14	0.09
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	13	0.09
91	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	13	0.06
41	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	12	0.07
78	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	12	0.10
57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	12	0.01
92	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	12	0.09
96	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	12	0.12
97	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	12	0.12
90	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	11	0.02
98	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	11	0.07
93	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	10	0.13
94	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	10	0.29
77	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	10	0.21
81	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	10	0.17
86	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	10	0.16
95	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.24
TC	97	95	94	94	94	94	92	90	90	89	89	88	88	84	79	78	49	41	25	25	1575	
CP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
	0	6	3	0	0	3	1	3	4	4	4	5	2	3	3	3	1	0	0	0		
	0	3	1	7	7	1	4	1	3	9	9	2	0	2	7	1	1	9	1	1		

S曲線

P曲線

表 19
ポストテスト
S- P表

えよう。

次に、生徒の得点の累積分布であるS曲線をみると、17点の生徒が目立っている。そこで、その原因であると考えられる連立方程式の解法に関する問題について反応パターンをみる。（ただし、採点にあたっては、問題(19)(20)は(15)～(18)に従属する問題であるので、問題(15)～(18)のどれか1つでも誤答であれば、問題(19)(20)はいずれも誤答とみなした。）

表20

パターン	乗法	逆行列	連立方程式の行列表示		解を求める		人数			
	15	16	17	18	19	20	全	上	中	下
1.	1	1	1	1	1	1	24	(11	12	1)
2.	1	1	1	1	1	0	1	(1	0	0)
3.	1	1	1	1	0	1	1	(1	0	0)
4.	1	1	1	1	0	0	2	(1	1	0)
5.	0	1	1	1	0	0	9	(5	4	0)
6.	1	0	1	1	0	0	17	(9	6	2)
7.	0	0	1	1	0	0	20	(2	12	6)
8.	1	0	1	0	0	0	2	(0	1	1)
9.	0	1	0	1	0	0	5	(1	0	4)
10.	1	0	0	1	0	0	2	(0	2	0)
11.	0	0	1	0	0	0	3	(0	0	3)
12.	0	0	0	1	0	0	9	(0	2	7)
13.	0	1	0	0	0	0	1	(0	1	0)
14.	0	0	0	0	0	0	2	(0	0	2)

（実際のS-P表では、(18) ＞ (17) ＞ (15) ＞ (16) ＞ (19) = (20) の順で正答率が低くなっている。）

上位群において，パターン2，3，4は単純な計算ミスによるものであるが，方程式の解が求められなかった生徒のうち，問題(15)（乗法）のみができていなかったためと考えられるパターン5が5人（16.1%），問題(16)（逆行行）のみを誤ったためと考えられるパターン6が9人（29.0%）と目立った。中位群においても同様な傾向が見られた。中，下位群では，連立方程式の行列表示だけしかできていないパターン7が，それぞれ，12人（29.3%），6人（23.1%）と多く，行列の乗法，逆行列の困難さを示している。

さらに，生徒の特徴及び問題の難易適切性を判断するために，注意係数（CS_i）－得点平面，注意係数（CP_j）－正答率平面を利用する。その見方は次のとおりである。

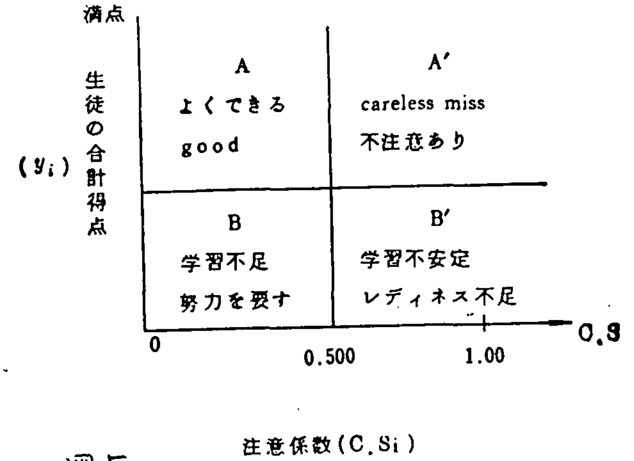


図5. 「注意係数－得点」平面

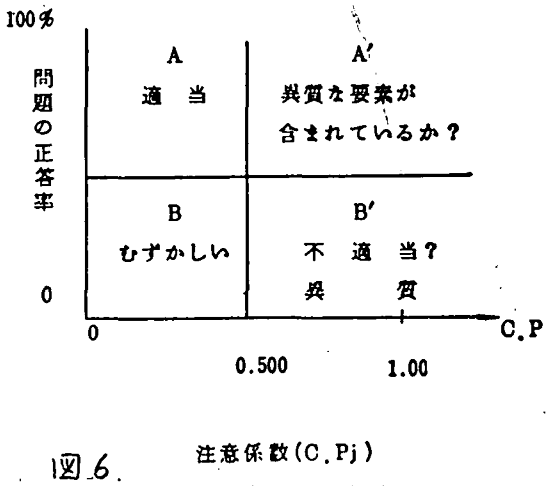


図6. 「注意係数－正答率」平面

（参考文献(3) P71，73より転写）

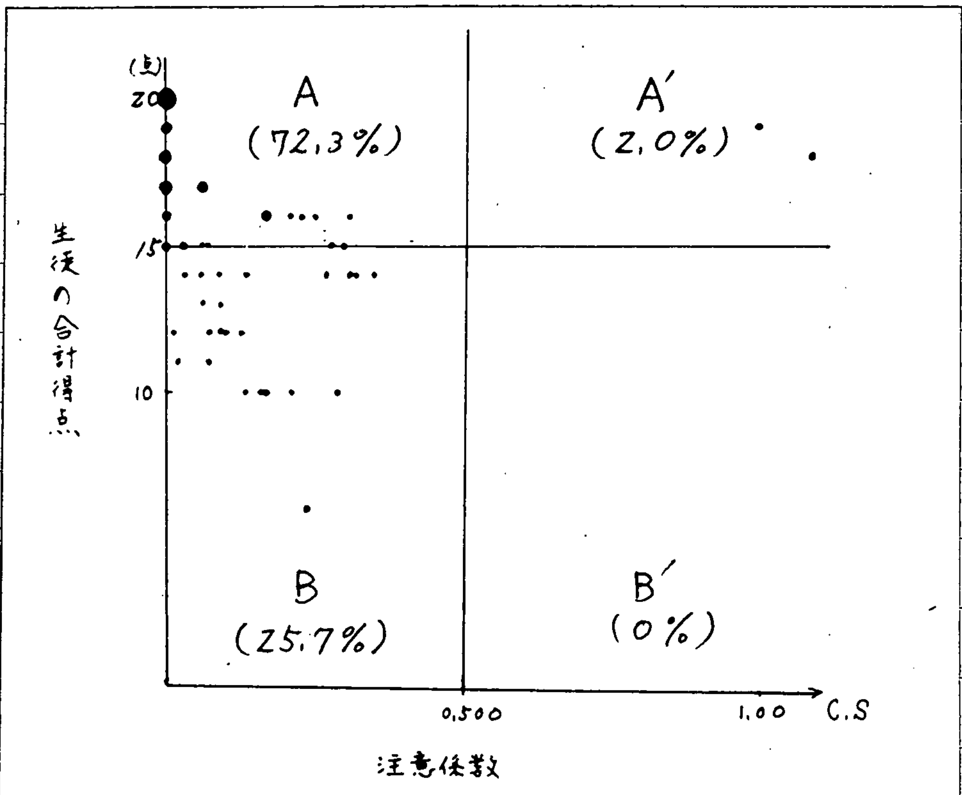


図7　注意係数－得点平面

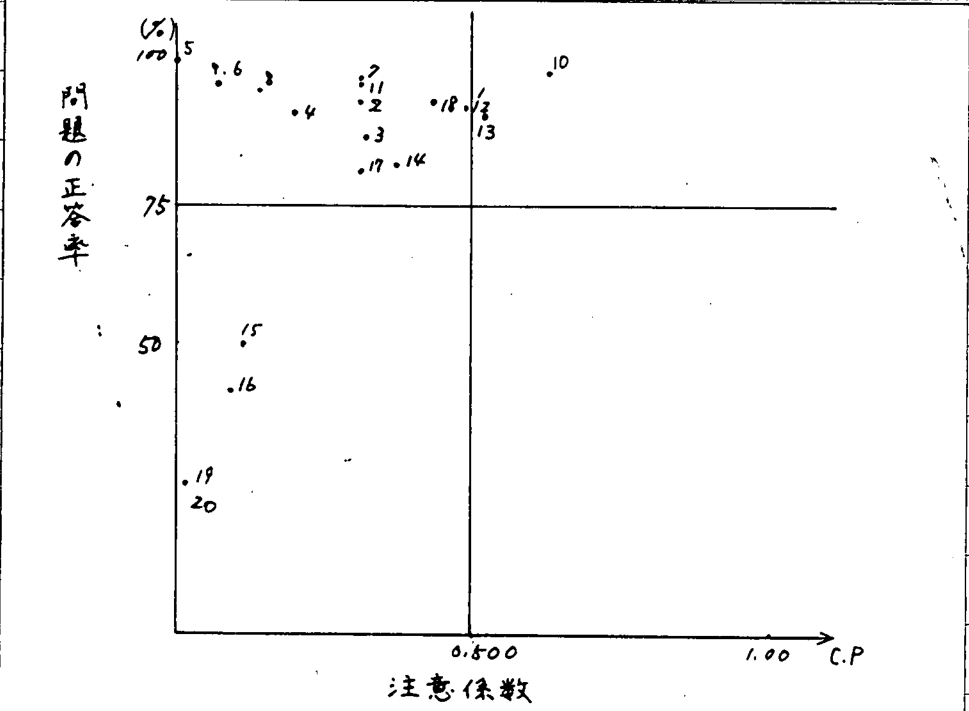


図8　注意係数－正答率平面

図7を65ページの図5に照らしてみると、生徒については、予想平均15点を上まわっているものが、72.3％おり、この教材に学習不足を感じさせる生徒が、25.7％いた。得点は高いが、注意係数も高い、つまり、難しい問題は解けているが、簡単な問題に誤っていて、不注意によるミスを犯していると考えられる生徒が2％いた。

次に、図8を65ページの図6に照らしてみると、正答率が低く、しかも、注意係数が0.50以上の問題はなく、従って不適当または異質な問題が含まれていないことがわかる。また、A'の部分に入っている問題について検討する。問題(10)を誤った生徒は、上位群に2人、下位群に1人であった。しかし、正答率が96.9％であることからいえば単なる不注意なミスであり、問題はないであろう。問題(13)を誤った生徒は、上位群に2人、中位群に3人、下位群に5人であった。それらの誤答は、下位群の1人の(1 4)という答以外はすべて(4 2)というものであった。これも単純な読みちがいで、異質な問題とは言えないだろう。Bの部分に入っている結果として、生徒が難しかった問題は、(15)(16),(19),(20)であるが、(19),(20)については、独立した問題ではなく、問題(15)～(18)に従属するもので、(15),(16)についての正答率の低さが、注意係数を非常に小さい値にしている。そこで、特に、問題(15),(16)を中心に各群の誤答分析を行う必要があるが、F中での実験結果とあわせて比較しながら、中学2年生での傾向を見ることにする。

(viii)誤答分析：各群ともに低い正答率を示し，注意係数－正答率平面においても難しかったと考えられる問題(15),(16)について各群の誤答例及び誤答人数（割合）を示す。問題(19),(20)は，正答率が非常に低いが，問題(15)～(18)に従属する問題なので省く。（F中の場合も同様）なお，誤答分析の考察については，後述するF中の場合においても類似した誤答傾向がみうけられ，F中の誤答分析のところで指導との関連で述べる。

(15)	$\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$	正解 $\begin{pmatrix}9&10\\13&10\end{pmatrix}$

型	A	B	C	D	E
誤答例	$\begin{pmatrix}6&6\\4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&3\\8&2\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}6&8\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}19\\23\end{pmatrix}$, (19) …etc	$\begin{pmatrix}5&5\\5&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&1\\3&1\end{pmatrix}$	その他
解説	対応する要素をかけあわせただけ	$\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$ と‥う指導の際のイメージ違い	2×2行列になっていない	加法又は減法をした。	
上	2人(6.5%)	3(9.7)	1(3.2)	0	5(16.1)
中	3(7.3)	1(2.4)	3(7.3)	1(2.4)	8(19.5)
下	3(11.5)	3(11.5)	3(11.5)	2(7.7)	10(38.5)
全	8(8.2)	7(7.1)	7(7.1)	3(3.1)	23(23.5)

(16) $\begin{pmatrix}3&-1\\2&-1\end{pmatrix}$の逆行列を求めなさい。 正解 $\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}$

ただし、このポストテストでは、短期間の学習のあとでもあり、逆行列を求める公式を覚えているかということより、それを用いることができるかということを調べるために、問題に、行列$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$の逆行列として、$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$を示した。

型	X	X′	X″	Y
誤答例	$\begin{pmatrix}1&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$ …… etc.	$\begin{pmatrix}-1&1\\-2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ … etc.	その他(無答含む)
解説	公式の文字に数値を代入するとき及び、符号をかえる点についての錯覚	X型であるが最も誤答人数の多かったもの	X型であるがad−bcの不注意による計算ちがい	
上	3 (9.7%)	7 (22.6)	0	0
中	6 (14.6)	13 (31.7)	0	3 (7.3)
下	7 (26.9)	9 (34.6)	1 (3.8)	2 (7.7)
全	16 (16.3)	29 (29.6)	1 (1.0)	5 (5.1)

(3) アンケート：第6時限終了後，行列の授業をふりかえって，学習へのとり組み，満足感，興味，及び内容の理解についてのアンケートを行った。また，自由な作問により，行列の授業を通しての印象・感想等も書かせた。

組　　番

○行列の授業をふりかえって　次の項目について　自分があてはまると思う番号に○印をつけてください。

1	全体的によくがんばった	5　4　3　2　1	がんばれなかった
2	行列の意味や計算の意味がわかった	5　4　3　2　1	わからなかった
3	スカッとした	5　4　3　2　1	モヤモヤした
4	おもしろかった	5　4　3　2　1	つまらなかった
5	集中できた	5　4　3　2　1	気がのらなかった

行列の授業を受けた感想を書いてください。　たとえば　行列の考えを知っての印象や感想　どういう内容が深く心に残っているか・・・等

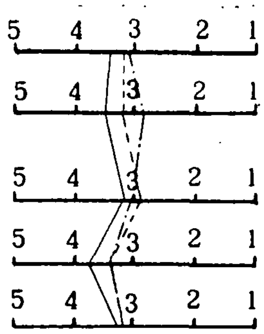
各項目への反応の様子は，次ページ表21.22で示す。

自由な作問では，その傾向を1つの統計量として示すことは困難であり，同様な感想をまとめてその人数を示すが，その数自体が問題なのではない。行列という教材が生徒に与えた影響の具現化されたものとして，少数の意見であっても尊重しなければならない。

表 21　各項目の反応率・平均．標準偏差

項	群	5	4	3	2	1	平均	標準偏差
1	上	3.2 %	32.3	61.3	3.2	0	3.4	0.73
	中	5.0	25.0	60.0	5.0	5.0	3.2	0.76
	下	0	20.8	70.9	8.3	0	3.1	0.59
	全	3.1	25.5	61.3	5.1	2.0	3.2	0.71
2	上	9.7	38.7	41.9	6.5	3.2	3.5	0.85
	中	12.5	22.5	20.0	15.0	5.0	3.2	0.89
	下	0	29.2	45.8	12.5	12.5	2.9	0.85
	全	8.2	28.6	42.9	11.2	6.1	3.2	0.87
3	上	9.7	12.9	61.3	16.1	0	3.2	0.77
	中	7.5	15.0	52.5	12.5	12.5	2.9	0.85
	下	8.3	16.7	50.0	16.7	8.3	3.0	0.82
	全	8.2	14.3	53.1	14.3	7.1	3.0	0.78
4	上	22.6	32.3	41.9	3.2	0	3.7	0.86
	中	15.0	30.0	37.5	15.0	2.5	3.4	0.92
	下	12.5	25.0	54.1	4.2	4.2	3.4	0.85
	全	16.8	28.6	41.9	8.2	2.0	3.5	0.89
5	上	3.2	35.5	48.4	9.7	3.2	3.3	0.81
	中	7.5	30.0	45.0	12.5	5.0	3.2	0.85
	下	4.2	29.2	45.8	20.8	0	3.2	0.81
	全	5.1	30.6	44.9	13.3	3.1	3.2	0.82

表 22

SDプロフール	平均 上位群	中位群	下位群	上と下の差	t値
	3.4	3.2	3.1	0.3	1.457
	3.5	3.2	2.9	0.7	2.623*
	3.2	2.9	3.0	0.3	1.071
	3.7	3.4	3.4	0.4	1.821
	3.3	3.2	3.2	0.2	1.171

—— 上位群
---- 中位群
—·— 下位群

上---上位25％
下---下位25％

表22のように，下位群の項目2（内容の理解）と中位群の項目3（満足感）における平均2.9を除けば，各群とも平均以上の値を示しており，全体としては，平均以下の項目はなかった。また，各群における各項目間の平均値の差を検定したところ，有意差のある項目はなかった。そこで，上位25％と下位25％の間で差を調べたところ，項目2において，5％の有意水準のもとで差が認められた。項目4（興味）において各群の平均値の高いことから，各群ともこの教材を興味をもって学習できたようであるが，下位群においては，内容の理解に困難を感じたようである。困難を感じたところは，自由な作問によって想像されるが，それを明確にするために，アン

ケート項目の修正を行い，F中において用いることにした。（89ページ）

次に，自由な作問による感想をまとめ，その反応人数をあげる。

表23

分類	理由	反応数(人)
好意的		
	行列の考えを知って興味がわいてきた.(発展的)	4
	行列のアイデアに感激・驚きを感じた.	6
	法則についての再・新発見ができたし復習にもなった	11
	簡単に連立方程式が解け,便利である.役に立つ.	14
	教科書以外の連立方程式解法を知り,視野が広がった.	3
非好意的		
	加減法の方が連立方程式を解きやすかった.	3
	規則や公式がややこしい.	9
	(単に)むずかしい(と述べた)	9
	(むずかしかったところを指示して述べた) 乗法	3
	逆行列	5
	解法	15
その他		
	わかったようなわからなかったような気がした.	2

(注).「初めの方は簡単だったが,途中から難しくなった.」流の感想が多かったが，それらは反応人数には含めていない.

4.6 本実験授業2（F中）

(1) F中の実験群の実態：兵庫県の郡部に位置する中学校の2年生60名（男36・女24）であるが，知能偏差値の平均は54.6で，検定の結果，1%の有意水準のもとで，全国標準よりも高い知能偏差値群であることが認められた。この場合も，上，中，下位群の分類はT中の場合と同様に下表のようにした。

表20 知能偏差値分布

群	下位	中位	上位
知能偏差値	1～2	3	4～5
人数	8	17	35

プレテスト結果：第1時限において行ったプレテスト（10分間）についての各群の平均及び標準偏差は表21のとおりである。それをみると，下位群の問題(4)(5)に対する正答率は低かったものの，その他の正答率は高かった。しかし，上位群に簡単なミスが目立った。またプレテストにおける上，中，下位それぞれの群の平均値の差の検定をしたところ，上－下位群間にのみ1%の有意水準のもとで差が認められた。（表22）

表21　プレテストの正答率

問題＼群	下位	中位	上位	全体
1. $2+(-3)$	87.5	100	100	98.3
2. $-5-(-4)$	100	88.2	100	96.7
3. $5\times(-6)$	100	100	100	100
4. $-8-5\times\left(-\frac{2}{3}\right)$	12.5	70.6	68.6	61.7
5. $(-3)^2+(-2)^2-2^3$	0	64.7	48.6	46.7
6. $x+3=2$	87.5	100	94.3	95.0
7. $4x=24$	75.0	88.2	97.1	91.7
8. $3(x-2)-(x+4)=0$	50.0	64.7	88.6	76.7
9. $\begin{cases}3x-y=7\\2x-y=5\end{cases}$	62.5	70.6	94.3	83.3
10. $\begin{cases}3x-7y=-17\\6x+5y=4\end{cases}$	62.5	70.6	57.1	61.7

表22. 平均値の差の検定

上	中	下
	0.894	4.348
		1.915

また、知能偏差値とプレテスト得点との相関係数を各群について求めたところ77ページ表26のようになった。丁中の場合と異なり、検定の結果、全体としては低い相関が、1%の有意水準のもとで認められたが各群間には相関が認められなかった。（　）

計算法則について：T中の場合と同様に，第2時限において，加法についてのみ計算法則の理解を調べた。

表23　計算法則

		下位群				中位群				上位群				全体			
		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
交換	(人)	2	0	0	6	8	1	2	6	17	4	3	11	27	5	5	23
	(%)	25.0	0	0	75.0	47.1	5.9	11.8	35.2	48.6	11.4	8.6	31.4	45.1	8.3	8.3	38.3
結合	(人)	2	0	0	6	5	2	1	9	12	7	0	16	19	9	1	31
	(%)	25.0	0	0	75.0	29.4	11.8	5.9	52.9	34.3	20.0	0	45.7	31.7	15.0	1.7	51.6

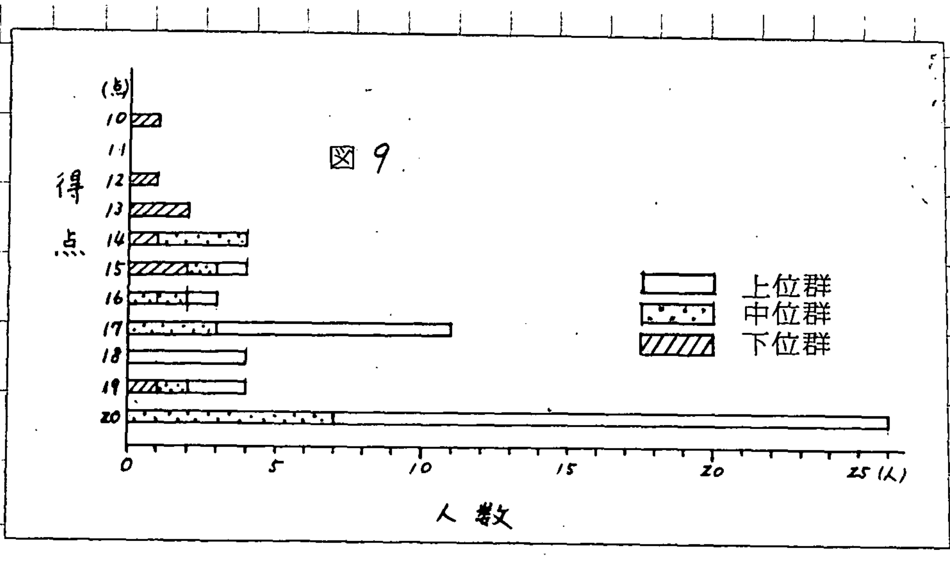
A…正答，B…法則名は覚えているが一致していない，C…デタラメ　D…無答

上表より，次のことが見い出される。

- T中の場合と比べて，全体としては，法則に対する意識は高い。
- T中の場合と同様に“交換”法則よりも“結合”法則の方が定着率が低い。

(2) ポストテスト結果：第7時限にT中と同じポストテスト（40分）を行ったところ，以下のような結果を示した。

(i) 得点分布



(ii) 平均及び標準偏差：各群の平均及び標準偏差は，下表のとおりであり，また，平均値の差の検定をしたところ上－中位群では5％の有意水準，上－下位群，中－下位群では1％の有意水準のもとで差が認められた。

表24 実施したテストの平均及び標準偏差

群 ＼ 変量	ISSの平均	ISSのSD	Pre- test 平均	Pre- test SD	Post- test 平均	Post- test SD
上　位	60. 3	4. 5	8. 5	1. 0	18. 8	1. 5
中　位	49. 8	2. 5	8. 1	2. 1	17. 6	2. 3
下　位	39. 6	2. 9	6. 4	1. 9	14. 0	2. 5
全　体	54. 6	8. 4	8. 1	1. 7	17. 8	2. 5

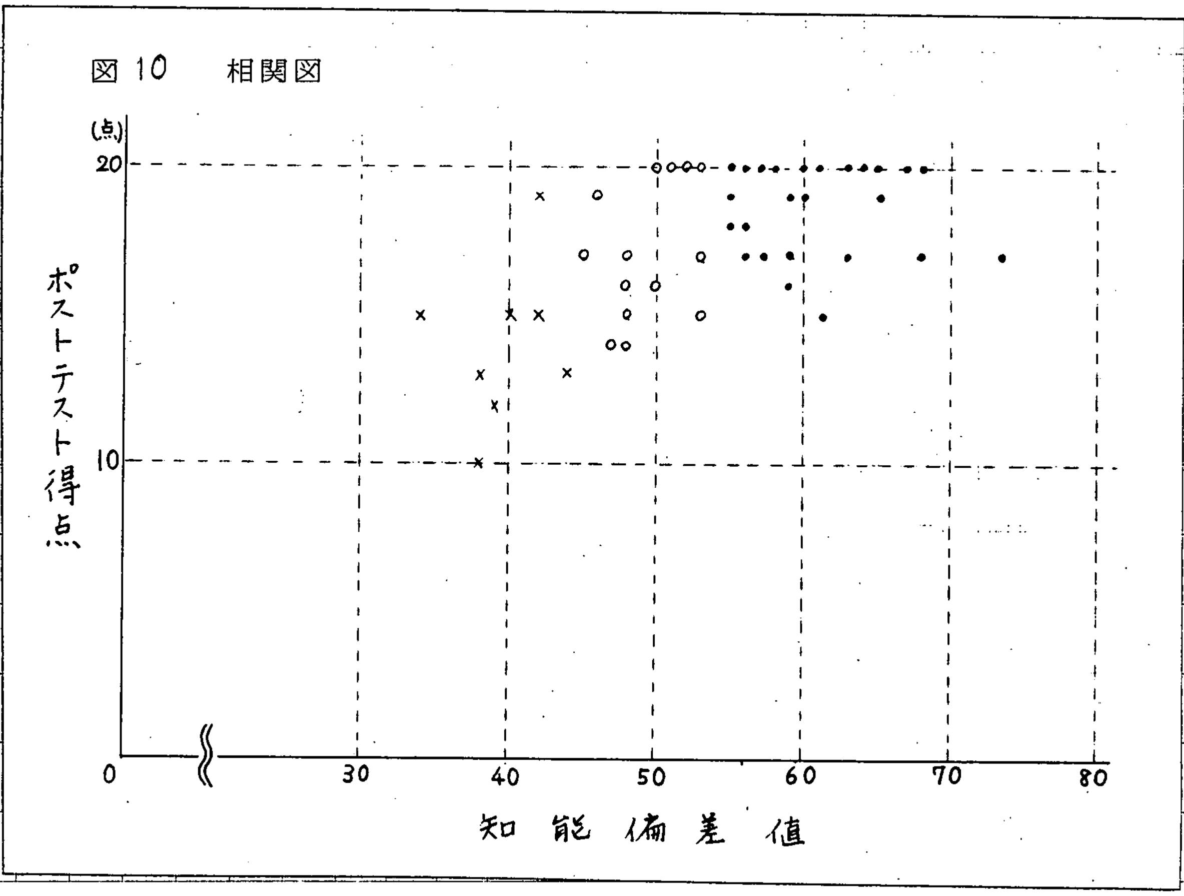
表25 Post-test 平均値の差の検定

	上	中	下
上		2.156*	6.886**
中			3.343**

(iii) 相関：ポストテスト得点と知能偏差値との相関を調べたところ，全体としては1％の有意水準のもとで相関が認められたが，各群には，相関が認められなかった。（表26）そのようすは次ページの図10から明らかになるであろう。

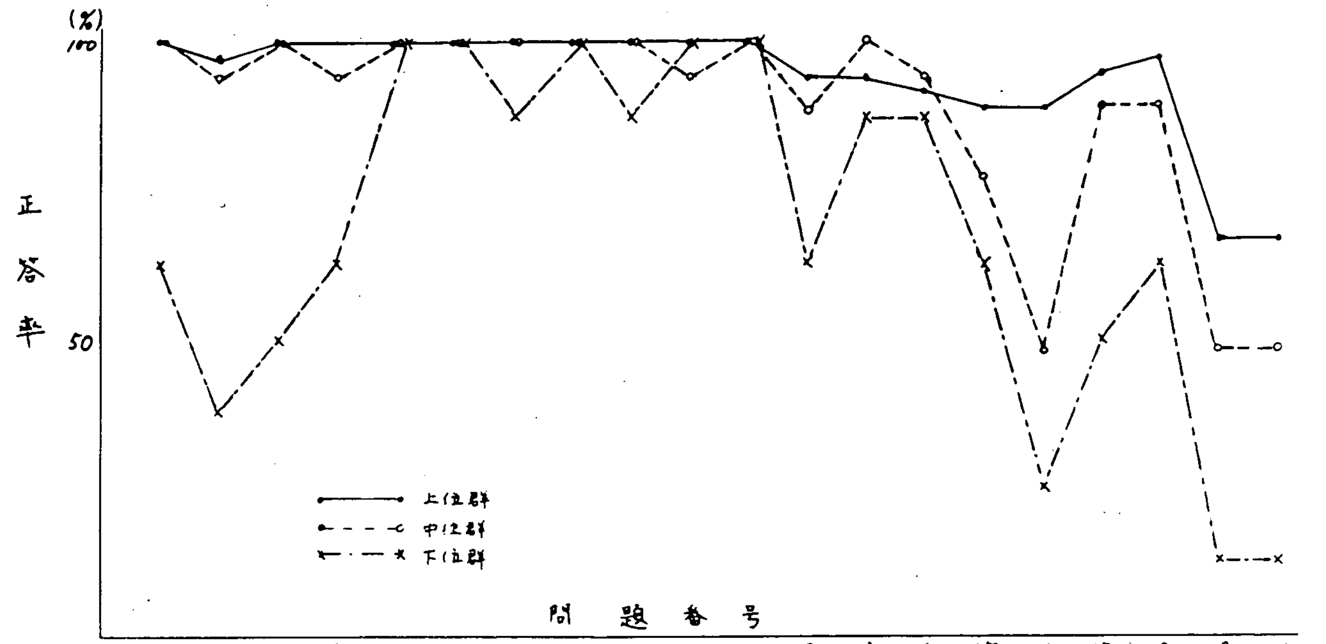
表26 ISSと実施したテストの相関係数

群 ＼ 変量	Pre- test	Post- test
上　位	0. 20	－0. 05
中　位	0. 15	0. 41
下　位	－0. 02	0. 24
全　体	0. 39**	0. 52**



(iv) 各問題の正答率：各問題に対する各群の正答率は，次ページ図11のとおりで，それをグラフ表示したものをみると，全体的には，T中の場合と同じような型をしており，この段階での生徒の理解の傾向が示されているといえよう。ただ，下位群においては，問題(1)～(4)についてF中の他の群，T中の下位群よりも著しく低い正答率であった。これは，個別に調べてみると，単純な不注意によるミスであった。

図11，ポストテストテスト正答率・グラフ



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
上位群	100	97.1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	94.3	94.3	91.4	88.6	88.6	94.3	97.1	65.7	65.7
中位群	100	94.1	100	94.1	100	100	100	100	100	94.1	100	88.2	100	94.1	76.5	47.1	88.2	88.2	47.1	47.1
下位群	62.5	37.5	50.0	62.5	100	100	87.5	100	87.5	100	100	62.5	87.5	87.5	62.5	25.0	50.0	62.5	12.5	12.5
全　体	95.0	88.3	93.3	95.0	100	100	98.3	100	98.3	98.3	100	90.0	95.0	91.7	81.7	68.3	88.3	91.7	53.3	53.3

(V) 正答率の差の検定：各問題に対する各群の正答率の差の検定を行ったところ，表27のように，上ー中位群間には，問題(16)（逆行列）においてのみ有意差があった。これは，T中の中位群の正答率46.3%，F中47.1%とあまり差はなかったが，F中の上位群の正答率が非常に高かったからである。また，問題(1)～(4)において，下位群の情報の読みとりのまちがい，2×2行列のイメージが強く，2×3行列のスカラー倍で，2×3行列になってい

ない等の誤答により、上－下位群、中－下位群に有意差があらわれた。

表27　正答率の差の検定

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
上－中																※※				
中－下	※	※※	※																	
上－下	※※	※※	※※	※												※※			※	※

(vi) S－P表：S－P表を作成したところ、T中の場合と同様に典型的なポストテスト型を示した。(表28)　一応の比較のために、両校の正規化S－P表を示す。(ただし、問題の難易の順は異なる。

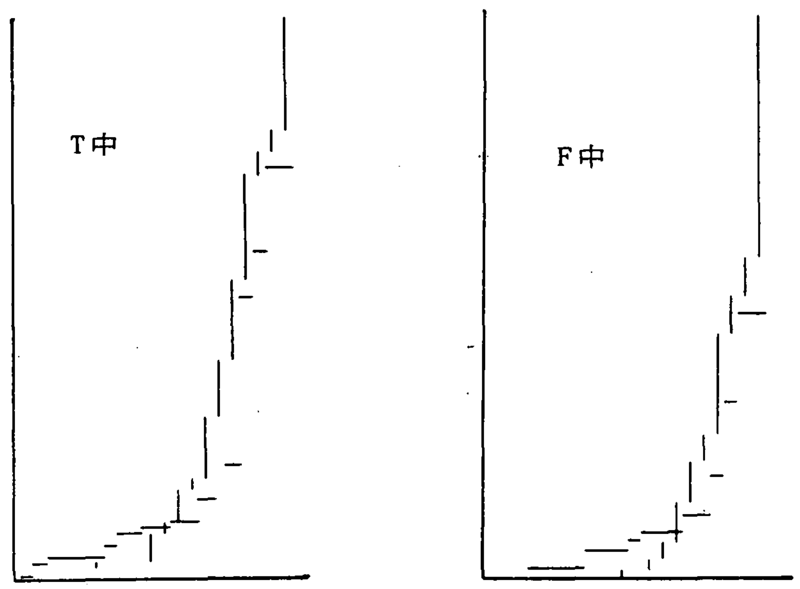


図12　正規化S－P表

(注)　｜はS曲線　──はP曲線

**** S-P TABLE ****

NO.	5	6	11	8	9	10	7	4	1	13	3	14	18	12	17	2	15	16	19	20	TC	CS
103	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
107	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
109	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
110	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
112	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
116	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
117	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
118	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
121	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
122	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
124	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
125	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
201	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
206	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
207	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
208	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
216	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
220	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
223	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
306	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
313	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
322	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
323	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
324	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
325	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.00
215	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1.08
115	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	19	0.98
114	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	19	0.98
318	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1.17
104	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	18	1.12
307	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	18	0.00
210	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	18	1.12
106	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	18	0.00
209	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.15
311	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
217	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.15
315	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
317	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.15
202	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
320	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
212	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	17	0.22
301	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	0.15
304	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	17	0.00
113	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
219	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	16	0.08
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0.00
225	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	15	0.12
211	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	15	0.13
303	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	15	0.32
123	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	15	0.00
213	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	14	0.13
203	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	14	0.25
316	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	14	0.03
321	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	14	0.03
312	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	13	0.19
224	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	13	0.27
101	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	12	0.21
310	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	10	0.34
TC	60	60	60	59	59	59	59	57	57	57	-56	55	55	54	53	53	49	41	32	32	%1067	
CP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
	0	0	0	2	2	5	3	1	4	7	0	7	1	2	2	3	3	1	0	0		
	0	0	0	5	5	1	8	0	9	6	4	8	4	6	0	7	4	5	0	0		

S曲線

P曲線

表 28
ポストテスト
S- P表

また、差異係数D^*≒0.290となり、指導と生徒の反応の密着性は高いといえる。

次に、T中の場合と同様に、(15)～(20)の問題について反応パターンを分類して以下に示す。

表 29

パターン	乗法	逆行列	連立方程式の行列表示		解を求める		人数			
	15	16	17	18	19	20	全	上	中	下
1	1	1	1	1	1	1	32	(22	8	1)
2	1	1	1	1	0	0	2	(2	0	0)
3	0	1	1	1	0	0	4	(4	0	0)
4	1	0	1	1	0	0	12	(4	5	3)
5	1	1	0	1	0	0	1	(1	0	0)
6	0	0	1	1	0	0	2	(0	2	0)
7	1	1	0	0	0	0	1	(1	0	0)
8	1	0	1	0	0	0	1	(0	0	1)
9	0	1	0	0	0	0	1	(0	0	1)
10	0	0	0	1	0	0	2	(0	0	2)
11	0	0	0	1	0	0	2	(0	2	0)

上表より、乗法または逆行列のみを誤ったために解が求められなかったものが目立った。中、下位群においては、前者による誤答はなく、後者による誤答の生徒が、5人(29.4%)、3人(26.7%)と多く、両群にとって、連立方程式の解法に至る大きな困難点は逆行列であることが明らかである。

さらに、S-P表から求めた注意係数を利用して、注意係数-得点平面、注意係数-正答率平面をかいて、65

ページの図5,6により、生徒や問題の特質をみる。

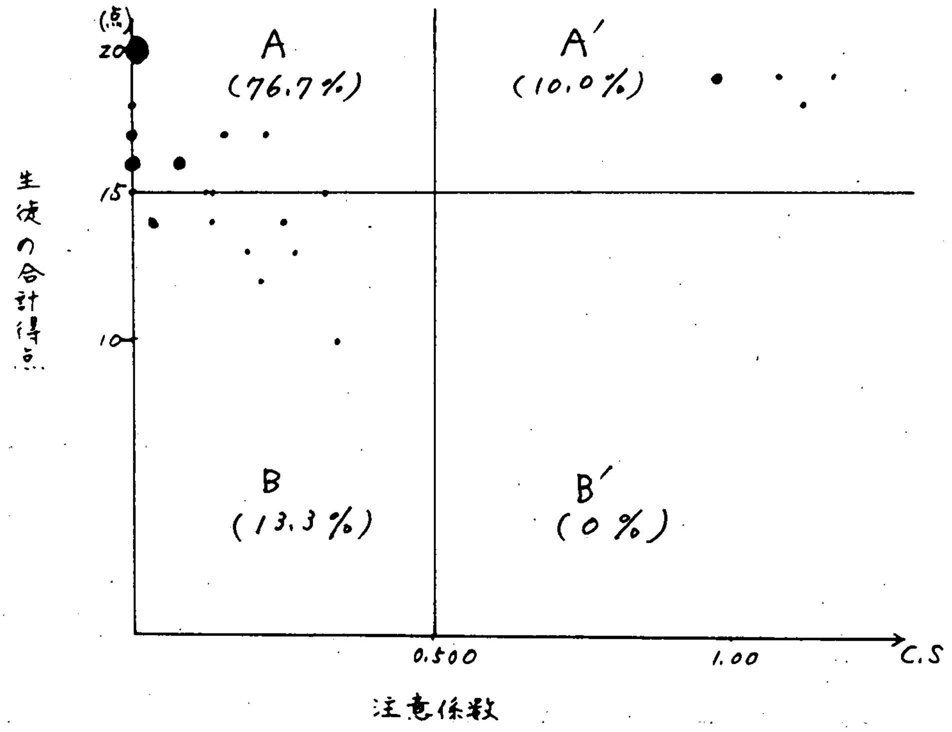


図13　注意係数－得点平面

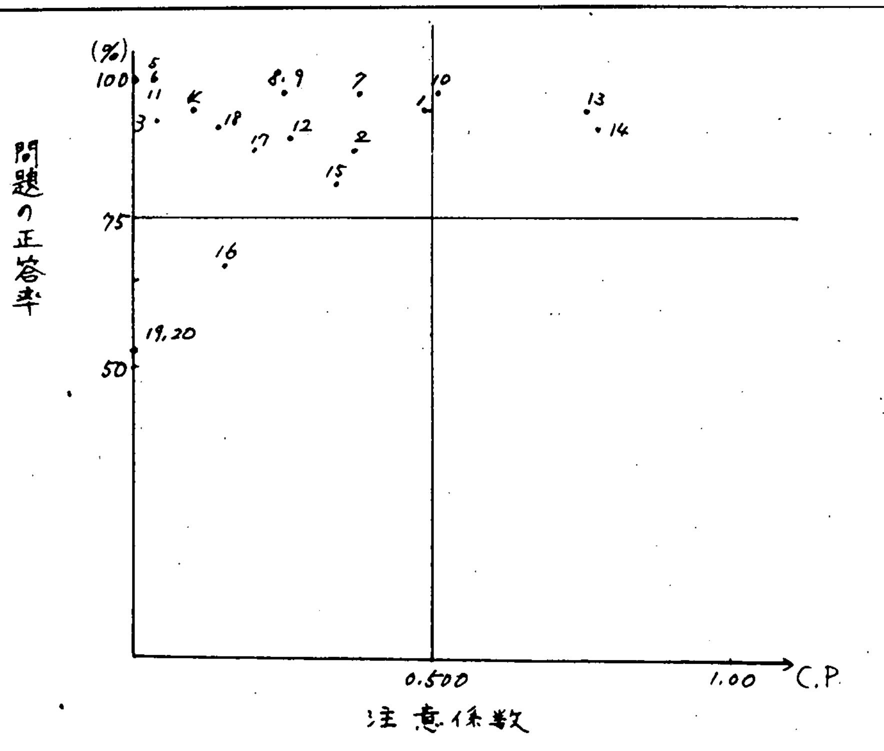


図14，注意係数－正答率平面

まず，前ページの図13から，このポストテストに関しての生徒の特徴を分類すると，よくできる生徒は46人(76.3%)と多く，不注意を犯していると考えられる生徒は6人(10.0%)で，この教材の学習において，学習不足，努力の必要があると考えられる生徒は8人(13.3%)で，学習不安定，レディネス不足と考えられる生徒はいなかった。

次に，図14から問題の適切性，難度を検討する。問題(13),(14)は注意係数は高いが，正答率も高く，不注意によるミスと考えられ，問題はないようである。問題(16),(19),(20)は全体的にみて少し難しい問題であったようである。不適当または異質と考えられる問題はなかった。これらにおいても，T中と非常によく類似した傾向を示し，生徒の理解の難易についての一般的傾向を知る上で，有効な手がかりとなろう。

(vii) 誤答分析：既述のように，問題(15),(16)について，まずF中の場合のみ分析し，次にT中の場合とあわせて考察する。

(15)	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	正解 $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$

型	A	B	C	D	E
誤答例	$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 19 \\ 23 \end{pmatrix}$ (19) ……etc	$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	その他
解説	対応する要素をかけあわせただけ	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$という指導の際のイメージ強い	2×2行列になっていない	加法又は減法をした.	
上	2人(5.7%)	0	1(2.9)	0	1(2.9)
中	3(17.6)	0	0	0	1(5.9)
F	1(12.5)	1(12.5)	0	0	1(12.5)
全	6(10.0)	1(1.7)	1(1.7)	0	3(5.0)

両校において最も目立った誤りは，A型である。これは $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times3 & 3\times2 \\ 4\times1 & 1\times2 \end{pmatrix}$ としたもので，行列の乗法の意味を忘れていて，問題(15)が提示され乗法をするように求められたとき，誰しも一度は考えることであろう。B型については，具体例をもとに乗法を指導した後，一般的に行列の乗法を指導するわけであるが，その一般化の際のかけあわせる要素同士を矢線で結ぶ様子のイメージだけが強く残っていると考えられるものである。C型につい

ては，指導の際，一般の行列の乗法で，2×2行列と2×2行列の積が，2×2行列になることの強調が弱かったせいか，T中においては，2×1行列または1×2行列で答えた生徒が7人（7.1%）いた。D型については，テストの加法，減法の問題とのつながりの感覚から計算を行っているもので，不注意によるミスである。E型は，どういう規則で乗法をしたのか理解できないもので，T中において少し目立った。A～E型のいずれにしろ，2×2行列と2×2行列の乗法では，具体例をもとに，行列の乗法の意味とその規則の理解にもう少し時間をかける必要があると考えられる。（予備実験授業の結果，2×3行列と3×1行列の乗法では，上，中，下位群ともその計算及び解釈において高い正答率を示していることから，2×2行列と2×1行列の積までは問題ないであろう。）

そうすることによって，内容については数の計算であるので，この段階の生徒にとっては，2×2行列の乗法，逆行列は十分理解できるであろう。それで，具体的な量から入って，十分習熟した上で，数の概念を小学校，中学校において確立する場合と同様に，具体量から離れて一般の行列の演算をやれるようにしたい。

(16)	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい。	正解 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(注) 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ で提示

	X	X′	X″	Y
誤答例	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ・・・・etc.	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ・・・etc.	その他 (無答含む)
解説	公式の文字に数値を代入するとき及び、符号をかえる点についての錯覚	X型であるが最も誤答人数の多かったもの	X型であるが ad−bc の不注意による計算ちがい	
上	1人 (2.9%)	1 (2.9)	1 (2.9)	0
中	3 (17.6)	4 (23.5)	1 (5.9)	1 (5.9)
下	1 (12.5)	2 (25.0)	1 (12.5)	0
全	5 (8.3)	7 (11.7)	3 (5.0)	1 (1.7)

この問題(16)は、T, F両校において一番正答率の低かったものであるが、上表のように4つの型に分けて考察する。

まずX型であるが、このような公式に値を代入する際の混乱は中、下位群においては大きいようであり、式に代入して値を求めるということの理解に欠ける面があらわれていると言えよう。最も誤答人数の多かったのは、

X'型である。この問題については，T中での指導時に，逆行列の公式を $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ という型で示して，もとの行列との要素間の関係を明確にしておくことをねらったが，学習後のアンケートの自由な作問の中に「……ad-bc が，外に出ているためわすれてしまう。ややこしかった。(原文のまま)」というような感想も出されており，それも誤答の大きな要因と考えて，F中においては $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ の型で提示した。そのようなことによってもF中の正答率が高くなったとも考えられる。そこで，次のことを提案したい。

　提案…「2×2行列の逆行列の公式を提示し利用させる際，中学2年生段階では $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 型よりも $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ 型の方が用いやすい。」

(参考)—逆行列を求める公式の提示の仕方—

表30

SMP Book 4	行列式$\lvert A\rvert = ad-bc$を導入して $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{\lvert A\rvert} & \frac{-b}{\lvert A\rvert} \\ \frac{-c}{\lvert A\rvert} & \frac{a}{\lvert A\rvert} \end{pmatrix}$ の型で	・まとめの中で提示 ・連立方程式の解法では $\frac{1}{ad-bc}$ を前に出している
SSMCIS コースⅢ	$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の型で	・定理の中で覚え易いとして ・解法の際も同じ
幾何学* 変換のアプローチ	$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ の型で	・定理の中で

* F. Coxford, Z.P. Usiskin : Geometry - A Transformation Approach

また、X″型は、X型ともいえるが、ad−bcの計算まちがいによる誤答とはっきりわかるものであり、両校ともに誤りは少なかった。Y型は、X型以外と考えられるものである。

これらの結果により、逆行列導入においては、文字式に数値を代入して式の値を求める復習をさらに時間をかけ十分しておく必要があると言えよう。

(3) アンケート：第6時限終了後、行列を学習しての感想をアンケート（T中の際のものを修正）で求め、学習内容のどのあたりで困難を感じたかを明確にし、また、情意的な面も調べた。自由な作問も書かせた。

組　　番

行列の授業をふりかえって　次の項目について自分があてはまると思う番号に○印をつけてください。

1	全体的によくがんばった	5　4　3　2　1	がんばれなかった
2	行列の意味がわかった	5　4　3　2　1	わからなかった
3	行列の加法・減法とその意味がわかった	5　4　3　2　1	わからなかった
4	行列と行列の乗法とその意味がわかった	5　4　3　2　1	わからなかった
5	逆行列の意味とつくり方がわかった	5　4　3　2　1	わからなかった
6	行列のアイデアに感激した	5　4　3　2　1	感激しなかった
7	スカッとした	5　4　3　2　1	モヤモヤした
8	おもしろかった	5　4　3　2　1	つまらなかった
9	集中できた	5　4　3　2　1	気がのらなかった

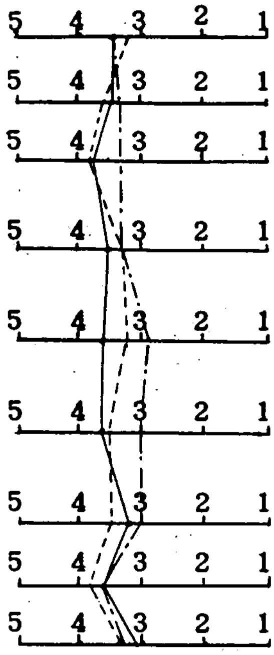
行列の授業を受けた感想を書いてください。　たとえば　行列の考えを知っての印象や感想　どういう内容が深く心に残っているか・・・等

各項目への反応の様子は次ページ表31からわかる。

表31 各項目の反応率・平均．標準偏差

項目	群	5	4	3	2	1	平均	標準偏差
1	上	2.8%	47.2	41.7	2.8	5.6	3.4	0.68
	中	5.9	47.1	23.5	11.8	11.8	3.2	0.96
	下	12.5	37.5	25.0	25.0	0	3.4	0.94
	全	4.9	45.9	34.4	8.2	6.6	3.3	0.87
2	上	11.1	41.7	30.6	13.9	2.8	3.4	0.90
	中	29.4	23.5	35.3	5.9	5.9	3.6	0.98
	下	12.5	25.0	50.0	0	12.5	3.3	0.91
	全	16.4	34.4	34.4	9.8	4.9	3.5	0.93
3	上	27.8	27.8	30.6	11.1	2.8	3.7	0.96
	中	35.3	29.4	23.5	5.9	5.9	3.8	0.97
	下	12.5	25.0	37.5	25.0	0	3.3	0.91
	全	27.9	27.9	29.5	11.5	3.3	3.7	0.97
4	上	16.7	33.3	38.9	8.3	2.8	3.5	0.90
	中	17.6	17.6	47.1	11.8	5.9	3.3	0.92
	下	12.5	12.5	62.5	12.5	0	3.0	0.81
	全	16.4	26.2	44.3	9.8	3.3	3.4	0.90
5	上	19.4	30.6	41.7	8.3	0	3.6	0.88
	中	17.6	23.5	29.4	23.5	5.9	3.2	0.99
	下	12.5	12.5	37.5	25.0	12.5	2.9	0.95
	全	18.0	26.2	37.7	14.8	3.3	3.4	0.94
6	上	27.8	30.6	25.0	11.1	5.6	3.7	0.98
	中	41.2	5.9	35.3	11.8	5.9	3.6	1.07
	下	25.0	12.5	37.5	12.5	12.5	3.0	1.00
	全	31.1	21.3	29.5	11.5	6.6	3.6	1.05
7	上	8.3	30.6	36.1	22.2	2.8	3.2	0.89
	中	29.4	23.5	23.5	11.8	11.8	3.5	1.07
	下	12.5	0	62.5	25.0	0	3.0	0.71
	全	14.8	24.6	36.1	19.7	4.9	3.2	0.94
8	上	30.6	27.8	22.2	8.3	11.1	3.6	1.05
	中	47.1	5.9	29.4	11.8	5.9	3.8	1.09
	下	25.0	37.5	12.5	25.0	0	3.6	0.99
	全	34.4	23.0	23.0	11.5	8.2	3.7	1.05
9	上	0	36.1	44.4	16.7	2.8	3.1	0.78
	中	11.8	41.2	29.4	11.8	5.9	3.4	0.93
	下	12.5	37.5	12.5	37.5	0	3.3	1.00
	全	4.9	37.7	36.1	18.0	3.3	3.2	0.87

表32



SDプロフィール	平均 上位群	平均 中位群	平均 下位群	㊤と㊦の差	t値
1. 5 4 3 2 1	3.4	3. 2	3. 4	0. 3	0. 847
2. 5 4 3 2 1	3. 4	3. 6	3. 3	0. 6	1. 900
3. 5 4 3 2 1	3. 7	3. 8	3. 3	0. 7	1. 644
4. 5 4 3 2 1	3. 5	3. 3	3. 3	0. 9	2. 827**
5. 5 4 3 2 1	3. 6	3. 2	2. 9	1. 2	3. 653**
6. 5 4 3 2 1	3. 7	3. 6	3. 0	1. 1	3. 012**
7. 5 4 3 2 1	3. 2	3. 5	3. 0	0. 4	1. 310
8. 5 4 3 2 1	3. 6	3. 8	3. 6	0. 4	0. 957
9. 5 4 3 2 1	3. 1	3. 4	3. 3	0	0

——— 上位群
- - - - 中位群
-・-・- 下位群

㊤…上位25%
㊦…下位25%

表32のように、平均3.0を下まわっているのは、下位群における項目5（逆行列）のみで、全体としては、平均以下の項目はなかった。ただし中位群では、項目5に平均以上の値を示しているが、実際のポストテストの正答率は50%を少し下まわっており、生徒の感想と実際のでき具合との間のギャップを感じさせるものもあった。また、各項目に対する各群間の平均値の差を検定したところ有意な差は認められなかった。そこで、上，下位群

の特徴をはっきりさせるため、T中の場合と同様に、上位25%と下位25%の間で差の検定を行ったところ、項目4（乗法）、5（逆行列）、6（アイデアに感激）において1%の有意水準のもとで、差が認められた。よって、上位群の項目3,4,6,8の平均値の高さとあわせて考えると、上位群では、行列の乗法、逆行列も十分理解できたと感じ、この教材に興味をもってとりくみ、そのアイデアに触れ感激したといえよう。

最後に、T中の場合と同様に自由な作間をまとめる。

表33

分類	理由	反応数(人)
好意的		
	行列のアイデアを知って興味がわいてきた。(発展的)	4
	行列のアイデアに感激・驚きを感じた。	10
	法則についての再新発見ができたし、復習にもなった。	3
	簡単に連立方程式が解け、便利である。役に立つ。	17
	教科書以外の連立方程式解法を知り、視野が広がった。	2
非好意的		
	加減法の方が連立方程式を解きやすかった。	2
	規則や公式がややこしい。	4
	難しかった。	3
その他		
	もっと簡単にできればよかった。	1
	もっと時間をかけてやりたかった。	2
	わかったが、何故そうなるのかわかりにくい。	1

第5章

結論

予備実験において　CSMS数学チームのテストに基づくテストでは，2×3行列と3×1行列の積までを導入していたが，実力テストによる上，中，下位群の平均値に差はなかった。

私は，T，F両校における本実験では，仮説(I)(II)のもとに授業を行った。

ポストテストの行列のスカラー倍まで，即ち，問題(1)〜(9)までについて，知能偏差値による上，中，下位群の間で平均値の差を調べたところ，上－中位群間に両校とも有意差が認められなかった。そして，それぞれの群の正答率が，T中では98.6％，96.5％で，F中でも99.7％，98.7％と非常に高く，仮説(I)が検証されたといえよう。

表34

T中	中	下
上	1.543	4.834**
中		4.670**

F中	中	下
上	1.288	8.605**
中		5.504**

**…1％有意水準

次に仮説(II)について述べる。T中においては，行列の乗法，逆行列は，上位群では，ほぼ70％の正答率でまずまずであったが，それを用いた連立方程式の解法では，

ほぼ40％と低かった。F中においては，前者は，ほぼ90％，後者はほぼ67％であった。

(参考)表35　知能偏差値60以上の生徒の正答率

	15	16	17	18	19	20
T　中	61.5	84.6	92.3	100	38.5	46.2
F　中	88.9	88.9	94.4	94.4	72.2	72.2

以上が行列への配当時間数（表11）による授業の結果であったが現行の高校２年の「代数・幾何」においてはある教科書によると，行列の乗法5時間，逆行列（連立方程式の解法含む）4時間となっていること及び，IEAの国際数学教育調査によると，大学進学を直前にひかえた17歳の生徒の行列の乗法に関する問題の正答率は，第1回では24.9％，第２回では57.6％であったこと，英国のAPU*の15歳の生徒を対象にした調査で，5以下の正の整数を要素にもつ２×２行列と２×２行列の積の完成については約20％の生徒が，行列式及び逆行列をみつけられたのが約5％であったということを考えあわせれば，この段階の正答率は決っして低いものではなく，むしろ高いといってもよく，行列の乗法と逆行列にあてた3時間を5～6時間に広げ既習事項の復習にも十分時間をかければ，上位の生徒には，２×２行列の乗法，逆行列の学習，理解が可能であると言える。

*APU…Assessment of Performance Unit

第6章

今後の課題

仮説(I)(II)のもとに，行列の基礎的内容の学習の可能性について実証的に考察してきたが，T，F 2中学校における実験のみであり，この実験授業ではある程度の限界が感じられる．そこで，提案の型で示した「中学2年生の段階では，逆行列の公式は $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の型よりも，$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ の型の方が用いやすい．」ということの検証も含め，より大きなサンプルで実験を重ね，より一般性を高めていく必要がある．また，T中においては，上－中位群間の正答率において有意差のある問題はなく，F中においても，両群に有意差のあるのは問題(16)（逆行列）だけであり，中位群への導入の可能性もあるだろう．そのためには，結論の章で述べた配当時数のもとで実験し検証したい．

引用・参考文献

第1章

(1) OEEC:New Thinking in School Mathematics,1961
(2) 前掲書(1) pp.14－29
(3) 古藤怜:数学科における学習指導,共立出版,1982,pp.38－39
(4) 前掲書(3) p.41
(5) H.Freudenthal:Mathematics as an Educational Task,Reidel Dordrecht,1973, pp.332－374
(6) M.Kline:Why Johnny Can't Add,St.Maltin Press,1973
(7) R.Thom:Modern Mathematics;As Educational and Philosophic Error, American Scientist,Vol.59,1971,11～12月号
(8) NACOME Report:Overview and Analisis of School Mathematics Grade K－12, Conference board of MathmaticalSciences,1975,p.25
(9) 文部省:中学校指導書 数学編,1970,pp.2－3
(10) 教育課程審議会の1976年の答申,pp.22－24
(11) 文部省:中学校学習指導要領,1969,p.57
(12) 文部省:中学校学習指導要領,1977,p,33
(13) 文部省:中学校指導書 数学編,1978,pp.22－24
(14) 広川清隆:日本数学教育の根本問題,明治図書,1979,p.29
(15) 平林一栄:日本数学教育の体質,日本数学教育学会,第15回数学教育論文発表会集, 1981,A－18
(16) 中島健三,大野清四郎:現代教科教育学大系4 数学と思考,第一法規,1974,pp.97－99
(17) 数学教育国際委員会(ICMI)編:世界の数学教育 その新しい動向,共立出版,1981, p.44,p.48
(18) 福森信夫:中学校新教育課程の解説 数学,第一法規,1977,p.39
(19) 森毅:現代数学と数学教育 筑華房,1976,p.90
(20) IEA:第1回国際数学教育調査,国立教育研究所,1964,pp.101－107
(21) 前掲書(3),pp.78－79

第2章

(1) 日本数学教育学会誌 第57巻 臨時増刊,数学教育学論究 Vol.28,1975,pp.1－24
(2) 古藤怜:数学科における学習指導,共立出版,1982,
(3) 森毅:現代数学と数学教育 裳華房,1976,p.99
(4) 駒林邦男,銀林浩編:アルゴリズムと発見学習,明治図書,1971,p.123
(5) 教育課程審議会の昭和51年の答申,p.144
(6) 文部省:高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編,1972
(7) NCTM,井上義夫・佐々木元太郎監訳:幾何教育への新しいアプローチ,教育出版,1980, pp.166－244
(8) 古藤怜・金子忠雄:幾何教育と変換の考え,近代新書出版社,1974,pp.122－141
(9) 日本数学教育会編:数学的考え方とその指導 高校編,明治図書,1969,pp.92－109
(10) 前掲書(6),pp.34－37,pp.77－81,p.92,pp.101－106,pp.130－132

第3章

(1) B.Thwaites(ed.),SMP:the first ten years ,Cambridge University Press,1972, pp.217－221
(2) SMP:Book1(1965),Book2(1966),Book3(1967),Book4(1968),Book5(1969),Cambridge University Press
(3) SSMCIS:Information Bulletin Spring,Columbia University,Teacher College Press, 1973,pp.4－5
(4) NCTM,井上義夫・佐々木元太郎監訳:幾何教育への新しいアプローチ,教育出版,1980, p.406
(5) SSMCIS,日本数学教育学会訳:現代の統合数学 中学校編3上,新教社,1976,pp.11－105
(6) T.J.Fletcher(ed.):Some Lessons in Mathematics-A Handbook on the Teaching 'Modern'Mathematics,1965,pp.324－355
(7) 日本数学教育学会:数学科教育課程研究委員会(委員長 佐々木元太郎)研究資料 SSMCIS リポート・ヨーロッパおよび日本における数学教育,1973

第4章

第3章掲示書以外

(1) The CSMS Mathematics Team:Children's Understanding of Mathematics:11−16, Alden Press,1981,pp.168−179

(2) K.M.Hart,D.C.Johnson:Secondary School Children's Understanding of Mathematics,Mathematics Education Center of Science Education,1980,pp.328−357

(3) 佐藤隆博:S−P表の作成と解釈,明治図書,1975

(4) 佐藤隆博:授業設計と評価のデータ処理技法,明治図書,1980

(5) F.Coxford,Z.P.Usiskin:Geometry−A Transformation Approach,Laidlaw Brothers, 1971,p.473

(6) 岩井勇児,鈴木雄:統計法入門,福村出版,1980,pp.55−64,pp.88−113,pp.157−198

第5章

(1) IEA:第1回国際数学教育調査,国立教育研究所,1964,p.248,p.253

(2) 国立教育研究所:中学・高校生の数学の成績,第2回国際数学教育調査中間報告, 第一法規,1981,p.141,p.172

(3) APU:Mathematical Development Secondary Survey Report No.1,London, Her Majesty's Stationery Office,1980,p.45

おわりに

現在の我国の数学教育研究は、NCTMの1980年のAGENDAの影響を強く受け、問題解決、コンピュータの利用をはじめ、指導法の研究が盛んになってきているが、それら問題点のもととなる教材開発研究は、全体的に低調である。しかし、多様なカリキュラム開発の必要が叫ばれ始め、教材開発研究も今後ますます盛んになっていく徴候が感じられる。

そういう状況ではあるが、学習の進度やその他学校独自の事情から、実験に協力していただける学校が少ないのが現状である。しかし、今回の研究において、万難を排して、実験を許可されたT、F両校の校長並びに数学担当の先生に厚く感謝する。

最後に、この研究を通じて、数学教育における豊富な実績及び経験から、教材開発の視点や研究方法について詳細に又時間をいとわず御指導いただきました佐々木元太郎教授に厚く感謝の意を表します。