学位論文

Ｐｒｏｂｌｅｍ　Ｓｏｌｉｖｉｎｇ　と
数学的な考え方の育成

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科

教科・領域教育専攻　自然系コース

８２３１８　平川年明

はじめに

数学の学習の大半は、問題を解くことにかかわっている。中学生になると、生徒の数学の能力差がかなり大きくなり、問題を解く場合にも、それは顕著に表われてくる。数学はできないものと決めてかかり意欲のない者、意欲はあるが基礎的な知識・技能を習得していないために、うまく問題が解けない者、指導された基本的問題は解けるが、応用問題になると困惑してしまう者などさまざまである。問題解決(Problem Solving)の能力は、数学的知識・技能、問題解決の経験、直観などの要因が、関連しているが、それを育成するためには、どんな手だてが考えられるであろうか。

折しも、米国の数学教育界は、現在その中心課題を"Back to Basics(基礎・基本に帰れ)"から"Problem Solving"へ移し、研究・実践している。また、わが国においては、数十年来、数学教育の目標として、問題解決能力の育成をめざし"数学的な考え方"が強調されてきている。

そこで、それらの研究を参考にしながら、"Problem Solving(特に、問題解決の方略)"と"数学的な考え方"の関連を考察し、問題解決能力を育成するための方策を探るのが、本論文の目的である。

なお、本論文では、主に中学校における教材を対象として考察をすすめる。

昭和58年12月20日

平川年明

目　次

第一章　Problem Solving

(1.1) 問題について

問題解決について論じるために、まず、“問題”の意味を明確にする必要があろう。従来から数学の指導における問題は、数学の内容に関するものから出発し、解法がわからないものとして、主に、教科書や教師から与えられるものが多い。それは、数学的に適切かどうかの吟味はされても、生徒の興味・関心という面からの考慮は、あまりなされてこなかつた。 しかし、戦後の一時期、生活に密着した問題を重視しようという試み(生活単元学習)がなされた。その試みは、数学の系統性の欠如や、児童・生徒の計算力低下などの理由で批判され、後退していったのである。

今日、米国で重視されている問題解決の指導では、問題は実世界 (Real World) に直面して、それを数学化 (Mathematization) し問題とすべきであると考えられている。[1]一方、生活単元学習時代の問題は、単に実世界に直面していて数学に関連する内容を、そっくりそのまま、系統性をほとんど無視して取り扱っていた。

そこで、数学の指導における“問題”とは、どのようなものが適切であるかについて考察しよう。

先行研究では、“問題(problem)”を“練習(exercise)”(さらに“質問(question)”)と区別してとらえているものが多い。[2,3]“問題”と“練習”の大まかな違いは、単に、記憶の再生やルーティン・ワーク(型どおりの手順)で解けるかどうかである。また、問題の備えるべき条件がいろいろ提案されている。[4,5,6]それらを参考にし、本論文において“問題”とは、次のような条件をできるだけ多く備えたものが望ましいと考えたい。

1 ルーティン・ワークですぐに解けないもの。
2 系統性があり、数学的に意味のあるもの。さらに、できれば他の問題への発展性があるもの。
3 問題場面に対して、生徒が興味・関心をいだいたり、内発的動機づけを誘発するようなもの。
4 既習内容との結合に、“自然さ”と 適度の“困難さ”とがあり、できれば解決方法が多面的であること。

5 求められた結果に対するチェックと自己評価が可能であること。

(Open end な問題*も適時取り入れていく)

ここでは、Real World に直面した問題については触れていないが、そのような問題を除外する必要はない。それらは生徒の興味・関心を引き、また、数学の応用という側面からもその意義が認められよう。

しかし、Real World に直面した問題に固執する必要はなく、Real World に直面した問題であろうと架空の World の問題であろうと、上述の条件を満たす問題を取り入れていくことを心掛けるべきであろう。

問題解決能力を育成する上で特に大切なのは 5 であろう。詳細は、(3.4)で述べるが、問題の解決プロセスをふり返ることが、“問題解決の方略” あるいは “数学的な考え方” の育成に大きくかかわってくるからである。

*) 正答がひとつしかない Closed な問題に対して、正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題を Open end な問題と言う。[7)]

(1.2)「問題解決」とは何か

問題解決は、いろいろな分野で議論されているが、問題をどうとらえるかによって、そのとらえかたが異なってくる。そこで、数学の問題に限らず一般的な問題を取り扱っている心理学の先行研究を概観し、数学教育での問題解決を考察する発端としたい。

心理学では、我々が日常生活全般で直面する問題を解決する際に、その解決過程の思考の様相を明確にすることが問題解決の研究の主眼とされている。人間が問題を解決する方法は、大別すると、再生的思考(Reproductive Thinking)によるか生産的思考(Creative Thinking)によるとされている。[8] 学習心理学者の R.M.Gagné は、問題解決について次のように述べている。

「学習者が、ルールを適用すれば、新奇な場面の解決に到達することのできる、以前に学習したルールの結合を発見する過程であると考えることができる。しかし、問題解決は、以前に学習したルールを適用することにとどまるわけではない。それはまた、新しい学習を起こさせる過程でもある。」　〔9) p.179〕

Gagné の言う“ルール”とは、「二つないし、それ以上の事物(Things)の間の関係のこと」であり、以前に学習したルールを思い出すことが再生的思考にあたり、それらの結合を発見したり、発展させたりすることが生産的思考にあたると解釈できよう。

また、最近、認知心理学において問題解決への情報処理的アプローチが盛んである。安西氏によると、それは、

「問題を解く過程を、情報の入出力や、生成・消去・変換といった基礎的な処理の過程とみなし、この意味で情報がどのように処理されていくかという観点から問題解決の過程をとらえようとするもの」　〔10) p.62〕

である。このアプローチの特徴のひとつは、計算機シュミレーション・モデルをはじめとする情報処理モデルを作り研究を進めていることである。このような立場から安西氏は、問題解決を

「"現在の状態"と"目標の状態"の間にある差をなくすために、現在の状態を認知的に変換していく過程」　〔10) p.63〕

と考えている。

これらの心理学研究では、研究対象として算数・数学が用いられることが多い。というのは、算数・数学が他のものに比べ、科学的手法を用いて人間の思考過程を分析するのに適していると考えられるからである。この分野での研究成果は、数学教育に多くの示唆を与えてくれるものと思われる。

さて、次に、数学教育でいう問題解決とは何かについて考えていこう。NCSM (National Council of Supervisor of Mathematics ; 全米数学指導主事協議会) は、1977年に、その"Position Paper"の中で、問題解決を10項目の基礎技能の第一として取り上げ、次のように定義している。

「問題解決は、目新しく不慣れな場面に対して、以前に学んだ知識を適用する過程である。」　〔11) p.20〕

次に、よく引用される NCTMの指導者 S.Krulik による問題解決の定義をあげよう。Krulik は、問題解決を、次の連続的な4つの過程を含むものとしている。〔1) p.649〕

① 実世界 (Real World) の問題に直面している。

② その問題を適切で、使用可能な数学的モデルに翻訳する。

③ その数学的モデルを解決する。

④ 数学的モデルにおける解決を、最初の問題に適するような言葉に翻訳し直す。

G.Polya[12) や F.Lester[13) らの提案する問題解決のプロセス(すでに数学の問題が設定されている所から解決が始められる)は、③ にあたり、それを"狭義の問題解決"と言うならば、Krulikの定義は、① や ② の問題設定といえるプロセスを含めているので、"広義の問題解決"と言えよう。そこでは、Real World に直面した問題が考えられているが、(1.1)でも述べたように、中学校を念頭に置いた場合、必ずしも Real World な問題設定から始める必要はないようにも思われる。平林氏も、

「算数・数学科での問題解決が現実に関与することはむしろ偶発的なことで、本来的に、算数・数学科での問題解決は、架空の世界での問題解決だと心得た方がよさそうである。」〔14)〕

と述べているように、学校数学で扱う問題は、架空の世界を対象としている場合が多いからである。

以上のことをふまえて、筆者は問題解決を次のようにとらえたい。

「問題解決とは、教科書や教師から与えられた、あるいは生徒自ら作った問題((1.1)の条件 1 ～ 5 を満たす)を、主体的に、既習の数学的知識・技能を活用したり、それらをもとに新しいものをうみだすことによって解決する学習活動である。」

(1.3) 米国の「問題解決」研究について

(1) "Agenda" の背景

1970年代、米国の数学教育界は、"Back to Basics"(基礎・基本に戻れとNew Mathの反動として起こった運動で、Basicsが計算のみであると解釈されがちであった)というスローガンをかかげ研究・実践ていた。しかし、1970年代後半に、NAEP(National Assessment of Educational Progress ; 米国教育進歩評価学会) のテスト結果[15]や、PRISM(Priorities in School Mathematics ; 学校数学において優先すべきこと) プロジェクトの報告[16]などから、再び "問題解決" が浮き彫りにされてきた。それらについて、簡単に述べると、NAEPは、1977－78年にかけて、9才、13才、17才の生徒約7万人を対象に数学学力調査を実施した。その結果、知識・技能の面は、比較的良いが、アルゴリズムの適用が機械的であるし、知識・技能が問題場面にうまく生かされていないことがわかり、問題解決能力の育成が重視された。また、PRISMプロジェクトは、1978－79年2回にわたり、数学教育に携わっている者(例えば、小・中学校の教師、数学教育者など)と、そうでない者(例えば、教育委員、校長、PTA会長など)を対象に、学校数学において、1980年代に強調すべきことのデータ収集のために、好みと指導の優先性を調査した。その中でも、問題解決の指導がコンピュータなどの指導よりも強い支持を受けた。

問題解決が重視されるようになったことについて、当時の NCTM会長 S.A.Hillは、

> 「NACOME のレポート(1974)*)、NIE **)のユークリッド会議のレポート(1975)、SAT***)得点に関する大学委員会のレポート、NCSM の Position Paper(1977)、NAEP の結果、これらすべてを、年代順に読み返してみて、その主張(問題解決重視の主張)の一貫性に驚いた。」　〔17) p.50〕

と述べ、さらに、"Agenda" の前兆となる動きが、1970年代にみられたとも述べている。

*)　NACOME (National Advisory Committee on Mathematical Education ; 全米数学教育諮問委員会)『Overview and Analysis of School Mathematics Grades K－12』

**)　NIE (National Institute of Education ; 全米教育研究所)

***) SAT (Scholar Aptitude Test ; 進学適性検査)

また、石田氏は、問題解決重視の理由を次のように推測している。[18)]

① 時代が問題解決能力を要求している

② 学習方法としてメリットがある

③ 米国の算数・数学教育界が、その存在理由を問題解決に求めた

④ プログレシビズム(vs.エッセンシャリズム)思潮の支持

①、② は各国に共通するが、 ③、④ は米国独自のものであり、その二つが今日の問題解決重視に大きく影響していると考えられている。

(2) "Agenda" とそれ以後

上に述べたような背景で、NCTM は、1980年4月に、『An Agenda for Action』[19)] という小冊子を出版した。それは、1980年代の10年間に向けての8つの勧告からなり、最初に"問題解決"が取り上げられている。

勧告1 問題解決が、1980年代における学校数学の焦点とならなければならない

〔19) p.2〕

その勧告の中で、問題解決能力育成に関して、次のことが述べられている。

「問題解決能力を伸ばすことに対して、最も基本的に大切なことは、ものごとを受け入れる開かれた心、好奇心や探求的な態度、丹念に調査し挑戦し知的推測を押し進める意欲的、積極的な行動である。」 〔19) p.3〕

また、その年(1980)、NCTM は年報で問題解決の特集をし、22の論文を掲載している。[20)] その中では、問題解決のとらえ方、問題解決の方略の指導、電卓を用いた問題解決、問題解決能力の評価などが論じられている。その後も、さまざまな雑誌・書物で問題解決に関するものが数多く取り上げられている。

そして、『An Agenda for Action』から3年後の今年(1983)、NCTMは、年報『The Agenda in Action』[21)] を出版した。前者が、問題解決の理論編だとすれば、後者は実践編とも言えるもので、前者の8つの勧告がどのように実現され、努力されているのかを具体的に

明らかにしている。勧告1に関する論説は7編掲載され、問題解決が幅広く論じられている。

以上、米国で何故問題解決が重視されるようになったのか、さらに、その研究動向を概観してきたが、問題解決能力を育成するための方策のひとつとして、問題解決プロセスの中での方略研究があげられる。そこで、方略について次節（1.4）で考察しよう。

(1.4) 問題解決の方略の考察

問題解決能力育成の重要な課題として、問題解決プロセスの中で生徒が用いる方略(Strategy)の指導があげられる。ここでは、さまざまな観点から提案されている方略のリストをいくらかの例を示しながら述べ、方略の概念を明らかにしよう。

(1)方略の羅列

J.Worth は、うまい問題解決者 (Good Problem Solver) の特徴として、彼らがいろいろな問題を解くとき、一般的な計画や多くの類似のステップを用いることを述べ、問題に挑戦する全体的な手順として、学習者が一般的枠組 (General Framework) を身につける必要性を説いている。[22] Worth の言う一般的枠組とは、次のものである。

一般的枠組

1 問題を理解する

2 実行すべきことを選択する

3 実行する

4 ふりかえる

これは、G.Polya のも問題解決の4段階[12]と、ほぼ同じであり、以下述べることも Polya の考えがベースになっているものが多い。Worth は、一般的枠組の 2 で用いられる方略として、次のものをあげている。[23]

Worth の方略

・直接計算する　・方程式を書く　・リストを作る　・グラフをかく

・図表をかく　・推測してテストする　・表を作る　・実験する

G.L.Musser&J.M.Shaughnessyは、方略を問題解決プロセスの本質そのものと位置づけ、数学のカリキュラムが内容を重視するのではなく、方略を重視すべきであるとして、次のような方略を提案している。[23]

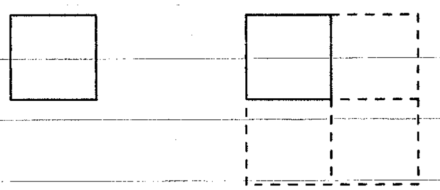
Musser らの方略

・試行錯誤　　・パターンの利用　　・より簡単な問題を解く

・逆に考える　　・シュミレーション

上の方略使用の例をあげてみよう。

(問1) つまようじで作った1×1正方形がある。今、10×10正方形の中に1×1正方形を作るには、何本のつまようじがいるか。



1×1　　2×2

[解] つまようじ、または、つまようじがなければ身近にあるマッチ棒を使ったり、鉛筆で略図を書いて、2×2、3×3 などの場合ついて考察し、問題の意味を理解する。
(これは、マッチ棒の〈シュミレーション〉による〈試行錯誤〉と考えられよう。)
10×10の正方形を作ってその数を数えるのはたいへんだから〈より簡単な問題〉を解きながら〈パターン〉を見けることができればうまくいく。2×2 の正方形を作るためには、1×1 正方形より8本多くいる。3×3 では、さらに12本、4×4 では、16本…。
〈パターン〉を見つけるのを容易にするために表を作ることが有効であろう。

正方形	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	…
つまようじの数	4	12	24	40	60	…

このようにして、この問題の解決がもたらされる。

さらに、この問題の拡張されたものとして次の問題が考えられよう。

(問1´) 一般に N×N 正方形を作るためには、何本のつまようじが必要か。

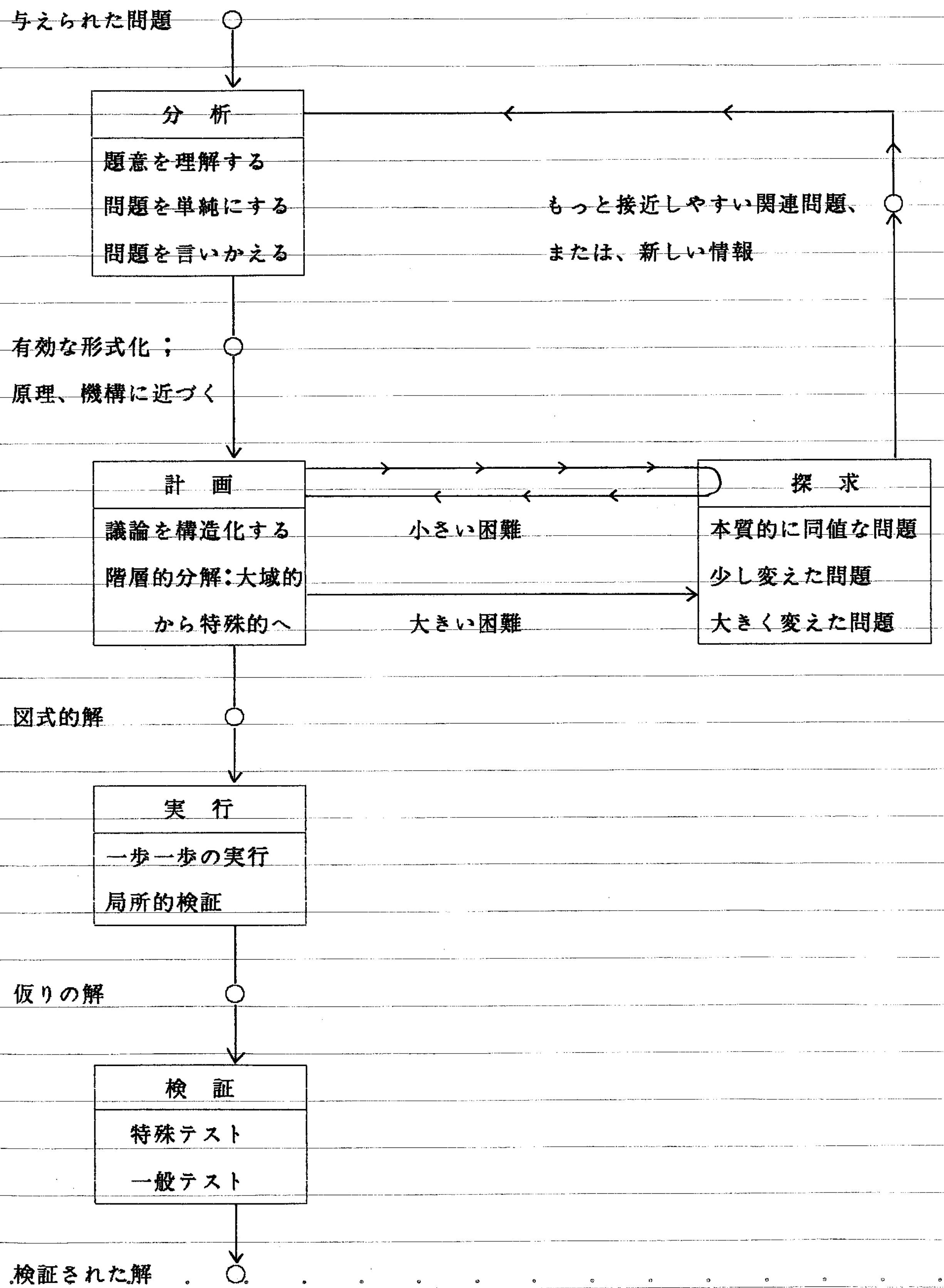
また、〈逆に考える〉という方略は、証明問題を解く時に有効な方略であるが、これについては、彼らは次のようなゲームを例にあげている。

(問2) “Force Out(封じ込める)” は、次のルールより二人で行なうゲームである。任意の数が与えられ、その数から、二人が交互に好きな1桁の数を引く。0になるように強いられた方が負けである。今、あなたから始めるとして、勝つための方法を考えなさい。

[解] もし、あなたが最初に1に達すれば、相手は、その1を引く以外に方法はなくあなたの勝ちが保証される。1に達することを確実にするために、相手を2から10までの間の数にさせなければならない。そのためには、あなたは、まず11に達しなければならない。〈逆に考えて〉いくと、勝ちを保証するためには、1の位の数字が1である数を得る必要がある。そうすれば勝てるのである。例えば、37がもとの数だとすると、37から6を引いて31にする。そうすれば相手がどんな1桁の数を引いても、あなたは再び21にできる。同様にして、11,1という数に先に達することができ、相手を0に封じ込めることができるのである。(実際には、もし相手があなたと同様に利口であれば、あなたは9/10の確率で勝つことになる。というのは、例えば、31という数が与えられたとすると、相手がこの方法に気づき、ゲームをあなたから始めるとすると、相手はあなたより先に21,11,1に達することができるのである。だから、1桁の数が1である数が与えられると、相手が勝てるのである。1桁の数が1である確率は1/10であるから、あなたが勝つ確率は9/10である。)

A.H.Schoenfeld は、前述のPolya の4段階プロセスの改訂版ともいえる戦略を提案している。[24)] その特徴は、Polyaの4段階に“探求”の過程を付け加えたことであるといえよう。Schoenfeld は、例題を高校以上のものを用いているので、例証はしないが、その発見法は、問題解決プロセスの全体にかかわることで、生徒にも教師にも多くの示唆を与えてくれると思われるので、Schoenfeld の提案した問題解決方略の概要の図式と発見法を述べておく。

問題解決方略の概要の図式



よく用いられる発見法

分　析

1．できる限り図をかけ。

2．特殊な場合をしらべよ：

a．特殊な値を選んで、その問題を例示し、その“感触”をつかめ。

b．極限の場合を調べて、その可能性を探れ。

c．パラメーターを順次１，２，３，…とおいて、帰納的パターンを求めよ。

3．問題を次の方法で簡単にせよ：

a．対称性を利用することにより

b．“一般性を失わないで”という考えかたで（大きさも含めて）

探　求

1．本質的に同値な問題を考えよ：

a．条件を同値な条件で置き換えよ。

b．異なった方法で問題の要素を結合しなおせ。

c．補助的な要素を導入せよ。

d．次のように問題を作り変えよ。

（i）　見方または表記法を変えて、

（ii）　背理法または対偶法を利用して、

（iii）　解けたとして、解の諸性質を決定して、

2．少し修正した問題を考えよ：

a．下位目標を選べ。（部分的に条件を満たすように）

b．条件をゆるめて、もう一度あてはめてみよ。

c．問題の領域を分けて、別々にやってみよ。

3．大きく修正した問題を考えよ：

a．変数を減らして、似た問題を作れ。

b．変数を1つだけ固定して、その変数の影響を決定せよ。

c．次のような関連問題を考えよ。

（i） 形が似ているもの

（ii） “与えられたもの”が似ているもの

（iii） 結論が似ているもの

関連した、より易しい問題を取り扱うとき、その結果と解き方の両方を、与えられた問題に用いてみるべきである。

結　果　の　検　証

1．解は次の特殊テストにパスするか：

a．適切なデータはすべて用いているか。

b．納得のいく見積もりや予測と一致するか。

c．対称性、次元分析、大きさのテストに耐えているか。

2．解は次の一般テストにパスするか：

a．別の方法でも得られるか。

b．特殊な場合によって立証されるか。

c．知られている結果に還元されるか。

d．知られている何かを一般化するのに用いられるか。

S.Krulik&J.A.Rudnick は、将来教師になる者に対して、生徒に問題解決を指導するためには、彼ら自らが、うまい問題解決者（Good Problem Solver）になるように努力し、さまざまな方略を身につけるべきだとして、次のような方略をあげている。[25)]

Krulik らの方略

・パターン認識　・逆に考える　・推測してテストする
・還元法（Reduction）*)　・枚挙法(Exhaustive Listing)**)　・論理的演えき
・シュミレーションまたは実験
・データを表現する（グラフ、方程式、表、図など）

また、彼らは現場の教師のための問題解決の手引き書を著わしている。[26)]その中で、問題とは何か、なぜ問題解決を指導するのか、発見法とは何かなどを、主に、小・中学校の例題をもとに論じている。彼らは、アルゴリズムと発見法を次のように特徴づけ、問題解決のためには、発見法が重視されるべきであるとしている。

アルゴリズム

ひとつのクラスの問題に適用できるテクニックで、それが、計算ミスなしに適用されれば、成功を保証する。

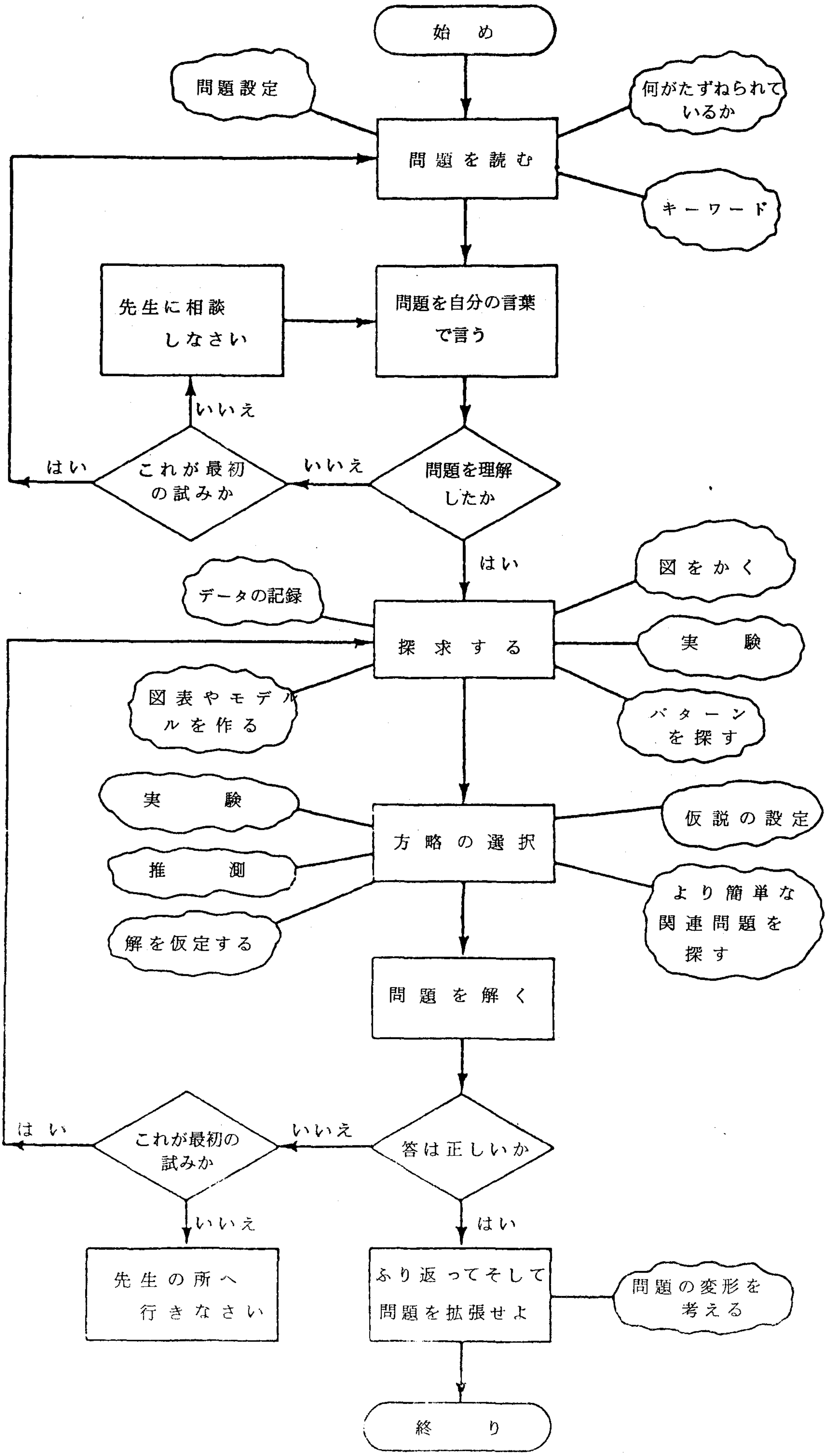
発見法

問題解決を助けるために用いる創造的なガイドライン。それらは、示唆の集まりで、必ずしも成功を保証しない。発見法は、特別なトピックに依存しない一般的方略（General Strategy）である。

さらに、その発見法を次の図1のようにフローチャートで示している。

*)　より簡単な場合に還元して考察すること
**)　場合の数など調べるとき、次から次へと考えられる場合を挙げていき、完全なリストを作ること

図 1


始め
問題設定
何がたずねられているか
問題を読む
キーワード
先生に相談しなさい
問題を自分の言葉で言う
いいえ
はい
これが最初の試みか
いいえ
問題を理解したか
はい
データの記録
図をかく
探求する
実験
図表やモデルを作る
パターンを探す
実験
仮説の設定
方略の選択
推測
より簡単な関連問題を探す
解を仮定する
問題を解く
はい
これが最初の試みか
いいえ
答は正しいか
いいえ
はい
先生の所へ行きなさい
ふり返ってそして問題を拡張せよ
問題の変形を考える
終り

R.G.Marcucci も、Krulik らと同様の立場から、将来教師になる学生の問題解決技能と教育技術について述べている。[27] 学生の多くは問題を解く際に、基本的な問題解決方略を意識せずに問題を解決している。だから、次に述べる方略について親密さを増すために、できるだけ多くの種類の問題を学生たちに解かせ、方略を身につけさせることが大切であるとしている。(この論文は、Agenda の勧告7"教師の専門性"を受けてのものである。)

Marcucci の方略

・図表をかく　　・実験する　　・逆に考える

・小さな数を使うことによって問題を簡単にする。　・推測してテストする

・電卓を用いる。　　・表を作ったりリストを体系化する

・公式を使う　　・方程式を使う

さて、今まで述べてきた方略をふり返ってみると、リストされた項目は、提案者によって異なり、その適用範囲を考えても広いものから狭いものまで、みんな一緒にリストアップされている。さまざまに異なる方略を同じ水準で見るのではなく、それらをある観点から分類してみようとした研究がある。以下では、方略を一般的方略と補助的方略、管理方略と課題方略という分類に従って考察することにする。

（2）　一般的方略と補助的方略

まず、初めは、J.F.LeBlanc の研究である。LeBlanc は Polya の4段階の解法プロセスの中で、第2段階（計画の立案）において用いられる方略を、次のように2つに分類している。[28]

一般的方略（General Strategy）

――― 問題を解くために立てられた全体的な計画 ―――

・試行錯誤　　・実験　　・リストの体系化　　・演えき

・簡潔化　　・計算　　・パターンを探す　　・逆に考える

補助的方略 (Helping Strategy)

―――― 一般的方略を実行するために用いられる補助的な方略 ――――

・図表　　・グラフ　　・方程式

・表　　・リスト

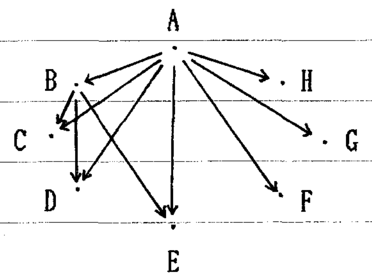
LeBlanc が取り上げている握手(Handshake)の問題をもとに、これらの方略を例証してみよう。

（問３）　８人がパーティに出席していて、それぞれ全員と1回ずつ握手を交わした。握手は、全部で何回なされたか。

[解]

〈実験〉　実際に８人集めてやってみる。

〈図表〉　人を表わす点を円状にかき、握手を示す線を引く。



〈リストの体系化〉

８人にそれぞれ名前をつけて、次のようなリストを作る。

Jim	Jane	John	Joan	Bob	Beth	Bill	Barb
Jane	John	Joan	Bob	Beth	Bill	Barb	
John	Joan	Bob	Beth	Bill	Barb		
Joan							
Barb							

$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$

〈パターンを見つけるために表を用いる〉

人数	2	3	4	5	6	…
握手の数	1	3	6	10	15	…

〈演えき〉

各人が、他の全員と握手するのだから、８人の人が７人と握手することになる。だから、８×７かな？しかし…。

この例で用いられている方略を、一般的方略と補助的方略という分類で考えてみると、〈図表〉だけ補助的方略で、他の４つの方略は、みな一般的方略に含まれている。なぜ、補助的方略である〈図表〉が一般的方略と混合してあげられているのだろうか。LeBlanc は、そのことについて言及していないが、〈図表〉をかくというのは、〈リストの体系化〉という一般的方略を実行するための補助的方略として考えることができよう。同様に、〈パターンを見つけるために表を利用〉しているが、〈パターンを探す〉という一般的方略を実行するために、〈表〉が補助的方略として利用されていると考えられよう。

上述の問題の拡張としては、次のような問題が考えられよう。

（問３´）パーティに出席した人が、それぞれ他の全員と握手を交わしていた。その時、握手は、全部で６６回された。出席者は何人であったか。

[解]　この場合、〈実験〉、〈図表〉という方略は利用できそうにない。

〈リストの体系化〉

前の問題をこの方略で解いているから、それと同じことをこの問題の時もやれば、利用できそうである。

〈パターンを見つけるために表を用いる〉

上と同様

〈演えき〉

N人の人が出席したとすれば、握手の回数は、$N(N-1)/2$ だから、〈方程式〉を作ると、

$N(N-1)/2=66$　である。それらを解くと…

R.I.Charles & F.K.Lester も、LeBlanc と同じように、２つのタイプに方略を分けて提案している。[29)]

一般的方略 (General Strategy)

―――― 問題を攻略する全般的な計画に関連している ――――

・パターンを探す ； 一般化する

・演えきする(または、帰納する)

・逆に考える　　・推測してチェックする

・まず、似た問題を解く(類似なもの、または、条件や変数を減らして簡単にしたもののどれか)

・方程式を書く

補助的方略 (Helping Strategy)

―――― 一般的方略を用いることを容易にするような方略 ――――

・問題を読み返す

・鍵となる言葉や句を探す

・重要な情報を書きとめる

・整理した目録、表、図表を作る

・挿絵、教具、グラフを用いたり作ったりする

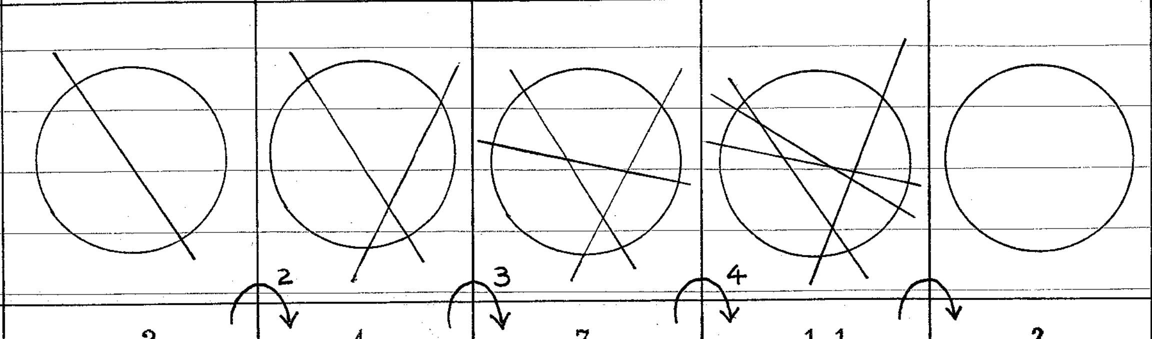
・その問題を実験したり実演したりする。

・もっと簡単な数を用いてみる

上の方略の具体的な使用例をあげてみよう。

(問４) ひとつのピザを５本の直線で切るとき、最大いくつの部分に分けられるか。

[解]　この問題を解く際の一般的方略は、〈パターンを探す〉ことであると考えられる。そのためには、補助的方略の中の〈図表〉が役に立つであろう。切る数を１，２，３，４，５とすると、部分の数が、それぞれ２，３，４，５と増えるパターンがわかる。

切断数	1	2	3	4	5
					
最大数	2	4	7	11	?

Charles らは、一般的方略と補助的方略の関係を、次のように述べている。

「一般的方略は、補助的方略にもなりうるのか、その逆はどうかと疑問に思うかも知れない。もちろん、その答えはイエスである。例えば、ある問題が１つの最終的な解へ導く２つ以上の部分的、または、予備的な答えをもっていれば、数個の異なった一般的方略が用いられるだろう。こうした場合に、それぞれの一般的方略は、ある意味において補助的方略にもなっている。また、補助的方略も一般的方略として用いられる。」

〔29) pp.18－19〕

この引用文を、次の問題で説明してみよう。上の問題に

「N本の直線で切るときは、最大いくつの部分に分けられるか。」

という問題が付け加えられたとする。N＝１，２，３，４ で〈パターンを探し〉、N本の場合は、$(N^2+N+2)/2$ の部分に分けられると〈帰納〉し、それを、数学的帰納法で証明しなければならない。この場合、〈パターンを探す〉と〈帰納〉は、両方とも一般的方略であるが、前者は、一時的に補助的方略になっていると解釈される。

これらのことから、一般的方略と補助的方略の関係は、相互に入れ替わることがありうるということであり、その分類の意義が少しあやふやな面があるように思える。最後に、一般的方略・補助的方略という分類ではないが、それらをもとに方略を分類している古藤氏の考えをあげておこう。

古藤氏は、数学的な考え方との関連を考慮して、方略を次の３つに分類している。[30]

① 全体的方略 (Global Strategy)

《算数・数学に限らず、すべての教科において、いろいろな場面で
必要とする問題解決のための総合方略》

- Polya の４段階
- Wickelgren の提案する方略[31]
  (サブゴール、逆に考える、矛盾の方法など)

② 一般的方略 (General Strategy)

《上述の全体的方略ほど総合的な方略ではないが、後述の局部的方略ほど
狭いものではない、数学的な(むしろ、科学一般の)方略である。》

- 帰納、類比、演えきなど
- 前述の Musser らの提案する方略

③ 局部的方略 (Local Strategy or Tactics)

《当面する場面を数学化するために必要なアイデアや、
与えられた課題を解決するための具体的な方策》

- 前述の LeBlanc の補助的方略

ここで、今まで述べてきたことをふり返ってみることにする。 Worth , Musser& Shaughnessy, Schoenfeld , Krulik & Rudnick ,Marcucci らは、それぞれの立場から、方略のリストを羅列して述べていた。 LeBlanc , Charles & Lester は、方略を一般的方略と補助的方略に、古藤氏は、全体的方略、一般的方略、局部的方略に分類していた。

問題解決能力を育成するための重要な要因として、方略が考えられるのは明らかで、今までの方略のリストは確かに有効である。しかし、単に方略を羅列して指導しても、生徒が問題を解決できるとは限らない。また、LeBlanc と Charles らの分類は、アイデアとしては興味深いが、一般的方略と補助的方略という分類は、それぞれリストされているものが入れ替わっていたり(例えば、<方程式> は、前者は、補助的方略に、後者は、一般的方略に含め、<実験> は、その逆になっている)、欠けていたり(例えば、<試行錯誤> は、

前者は含め、後者は含めていない)して、分類の意義、概念があやふやな面があるように思える。そうすると、それらのことをもとにして提案された古藤氏の考えも、筆者の考えに一致しないところがでてくるのである。

（3） 管理方略と課題方略

今、これまで述べてきたような方略をある程度身につけている生徒がいるとしよう。彼が、困難な問題に出会ったとき、必要とすること、あるいは、助けになるようなことは、どんなことだろうか。数学的な知識・技能を身につけておくことは、当然必要なことである。だが、それらを機械的に適用するだけで、問題が解決することは少ない。そこで、助けとなるのは方略であろう。ただ、それらを知っているだけでなく、当面している問題に適した方略をうまく決めることが重要である。即ち、自分の持っている方略のレパートリーの中から、その問題の解決に必要な方略を選んでくる方略のようなものを身につけていれば、うまく問題解決ができる可能性が高くなると思われる。これらのことについて、R.M.Gagné の論説[32)]を参考に考察する。

Gagné は、問題解決にかかわる人間の能力を次の3つととらえている。

① 知的技能　(Intellectual Skill)
② 言語知識　(Verbal Knowledge)
③ 認知的方略　(Cognitive Strategy)

それぞれについて少し説明しよう。

① 知的技能

知的技能とは、言語・文字・表などのシンボルを使うことによって、思考の対象を分類したり、分析したり、数量化したりすることを可能にする能力のことである。この知的技能を身につけていることは、Knowing how (いかに…するかを知っている)[33)]を意味するのである。例えば、数学の学習で、$2X-3-(5X-4)$を簡単にしなさいと問われたとき、数や文字の四則演算の知識を用いて計算をすすめるが、数や文字を使って、その演算がで

きることが知的技能を身につけていることを意味する。

② 言語知識

これは、最も簡単な形では、対象物の名前であり、複雑な形では、知識の組織的な集合体のことである。あることについて、それを人に言うことが出来るとき、その人は、言語知識を身につけているとみなされる。知的技能は、Knowing how を意味するものであるが、この言語知識は、Knowing that (…ということを知っている)にかかわっている。さらに、Gagné は、言語知識と問題解決の関連について次のように述べている。

「命題 (Propositions) の“組織的なネットワーク”の形式である言語知識は、新奇な問題場面における新奇な問題に対する学習の転移に関して、重要な役割を担うと考えられる。」 〔32) p.87〕

このことは、次のように解釈できょう。例えば、ある問題の中に三角形という言語があったとする。その場合に、単に三角形の定義を知っているだけでは、その知識がネットワークになっていないのであまり役に立たない。問題解決において、その言語知識が生かされるには、三角形の定義を知っていることと、三角形の内角の和・合同条件・重心などの知識が、別々でなく、組織的ネットワークになっていることが重要である。

③ 認知的方略

これは、情報処理論に基づくと、学習された内容の注意、知覚、符号化、検索のような内的プロセスをコントロールする能力であると考えられている。Gagné は、認知的方略を

「問題を解くための方法を、構築したり、選択したりする能力」 〔32) p.88〕

と考えている。

そして、ある人が、問題を解く際には、上の３つの能力が必要であるとしている。即ち、まず、問題に関連した概念とルール(知的技能)が必要であるし、組織化された言語知識が、創造的な思考の媒介として必要である。さらに、これらの２つとかかわりあいながら、その問題をどんな方法で解くか(認知的方略)を人は決めるのである。ここで興味深いことは、

Gagné が、認知的方略を管理方略 (Executive Strategy) と課題方略 (Task Strategy)に分けていることである。[34)]

管理方略

この方略によって、自分の保持している課題方略をレビューし、その中から、その問題に適した課題方略を選択する。

課題方略

ある特定の(種類の)問題に直面したとき、その人の思考過程を導いて解決をもたらすもの

Gagné は、これらの方略について、それぞれに含まれる具体的なものは示していない。これらの方略の指導の可能性については、次のように述べている。課題方略は、指導することが可能であろうが、管理方略については、現在のところ直接指導されうるかどうかについての証拠が不足している。もし、可能だとしても、問題解決の経験(長期にわたり、いろいろな場面での学習)と反省的思考 (Reflective Thought) が関係してくると述べている。ここで言う、反省的思考とは、解決に至る過程や、そこで使用された手順を一般化してふり返り、他の問題の解決にも役立つようにすることと解釈できよう。

これまで、(1)~(3)で方略について、いろいろ述べてきたが、ここで筆者の考えを明らかにしよう。

方略とは、学習者が問題解決過程で用いる方法のことであるが、そのことについて、A.H.Schoenfeld は、

「もし、ある方法 (Method) が二度目もうまくいき、その方法をうまく使ったことを思い出して、別の似た問題にそれを使ってみようと考えたとき、その方法は方略になる。」

〔35) p.315〕

と述べている。即ち、学習者が、今まで無意識に使っていた方法を、次から意識的に使おうとするとき、その方法が方略となると考えられる。それらの方略を(2)では、一般的方略と補助的方略の2つに分類していたが、それらは、前にも述べたように分類の意義、概念があやふやな面がある。だから、筆者は、(1)、(2)でリストされた方略の項目をまと

めて、Gagné の言う課題方略ととらえたい。

また、実際に問題を解く際には、その問題に適した特定の方略を選ぶための方略（管理方略、これは、“メタ方略”とでも呼べるもの)が重要な役割を演じると考える。数学の学習における問題解決を考えるとき、方略を管理方略と課題方略に分けて考えることは、非常に興味深い。いくら多くの課題方略を身につけていても、当面する問題の解決に至るとは限らない。その問題に適した方略をうまく選択し実行することが大きなポイントである。

しかし、この管理方略の重要性については、あまり認識されていないように思える。問題解決の能力は、数多くの問題を解くことによって自然と身につくものであるとする見方もあろう。確かに、Gagné も指摘しているように、経験も重要な要因であろうが、管理方略の概念が明確にされれば、もっと効果的に問題解決能力を育成することが可能となるだろう。しかし、現在までのところ、管理方略を提唱した Gagné においてさえ、その具体的な内容を明らかにするまでには至っていない。今後の大きな課題であろう。本論文でも、管理方略の内容を明確に規定することはできなかったが、管理方略を育成する要因として、“問題の理解”、“解を得るための条件を探求する”、“下位目標の設定” の3つを仮説として設定し、問題解決能力育成のための方略指導について考察を進めたい。管理方略の育成要因としてそれらを選んだのは、管理方略は、特定の問題の解決に有効な方略ではなく、いろいろな問題に有効に用いられる方略であり、これらの３つのものは、その育成にかかわっていると考えたからである。

いままでのことをまとめると、筆者の考える方略とは

「学習者が、問題を解決する際に、解決過程において意識して用いる方法」

のことであり、それを、学習者が特定の問題を解決する際に用いる方略(課題方略)、さらに、その方略を選択し、実行する方略(管理方略)と分けてとらえる。

管理方略

“問題の理解”,“解を得るための条件を探求する”,“下位目標の設定”

課題方略

・試行錯誤　・パターンを探す　・一般化

・特殊化　・より簡単な問題を考える

・演えき、帰納、類推　・実験　・逆に考える

・リストの体型化　・図、表、グラフ

・似た問題を考える　・推測してチェックする

・シュミレーション　etc.

管理方略、課題方略の具体的な使用については、（３．３）で例をあげて説明する。

第二章　数学的な考え方

第一章では、生徒の問題解決能力を育成するための方策として、方略について述べてきたが、我が国においては、数十年来、数学教育の目標として“数学的な考え方”の育成が強調されている。それは、問題を解決するためには、知識・技能を身につけるばかりでなく、数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力の育成を目指したものである。そこで、この章で、“数学的な考え方”について、まず、学習指導要領の改訂にそって考察し、そのとらえかた、構造を明らかにしたい。

(2.1) 学習指導要領の改訂にそって

ここでは、“数学的な考え方”が、昭和３３年の学習指導要領に初めて明記されて以来、どのような過程を経て今日に至っているのかを、学習指導要領改訂のねらいとその目標を中心に考察する。

(1) 昭和３３年　中学校学習指導要領　数学科

この年の改訂の主な特色は、戦後の米国の占領下における教育から、我が国の教育状勢を考慮した、主体的な学習指導要領作成へと変化したことである。そのねらいとしては、

① 基礎学力の充実

② 社会的要求による科学技術教育の推進

があげられる。① は、戦後の生活単元学習により、数学本来の学力が低下したことを反省し、学習内容に系統性を持たせ、内容の精選を計ろうというものであった。② は、敗戦のどん底からはいあがり、科学の進歩を利用して日本の社会を進展させるために、既習の知識・技能のみにたよるのではなく、自ら問題に挑戦し問題を解決できる能力、あるいは、考え方を獲得させ、科学技術の発展に寄与できるように教育するのがねらいであった。そんなねらいを実現するために、学習指導要領の目標の中に初めて“数学的な考え方”という言葉が取り入れられた。[36]

目　標

1．数量や図形に関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力を伸ばす。

2．数量や図形に関して、基礎的な知識の習得と、基礎的な技能の習熟を図り、それらを的確かつ能率的に活用できるようにする。

3．数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め、それらによって、数量や図形についての性質や関係を簡潔、明確に表現したり、思考を進めたりする能力を伸ばす。

4．ものごとを数学的にとらえ、その解決の見通しをつける能力を伸ばすとともに、確かな根拠から筋道を立てて考えていく能力や態度を養う。

5．数学が生活に役立つことや、数学と科学・技術との関係などを知らせ、数学を積極的に活用する態度を養う。

(2)昭和44年　中学校学習指導要領 数学科

この年の改訂は、スプートニック・ショック以来の世界的な数学教育現代化運動の影響を受けたものであった。その現代化にいかに対応するかについて、当時かなり問題と議論があったが、教育課程審議会は、「時代の進展に応じる」ということと「基本的事項を精選する」ということを調和させるという答申を行った。目標については、

「現代における数学や数学教育の発展を考慮して、数量、図形などに関する基礎的な概念や原理、法則をじゅうぶんに理解できるようにし、数学的な考え方がいっそう育成されるようにするとともに、それが積極的に活用されるように明確にすること。」

〔37) p.25〕

と、その方向を示し、従来からの"数学的な考え方"の育成をいっそう充実させることをねらいとしていた。そして、その理念を強調するために、また、数項目の目標を簡潔にとらえやすくするために新しい総括的な次の目標が付け加えられた。

「事象を数理的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成する。」〔38)〕

目標の各項目は、多少の字句の変更はあるが、趣旨においては、前回のものとほとんど変わっていない。ただし、前回の目標５は削除されている。

（３） 昭和５２年 中学校学習指導要領 数学科

今回の改訂は、前回（昭和４４年）の改訂において、我が国の学校教育に取り入れられた現代化に対する反省が重大な課題であった。前回の改訂後、教育現場は、新教材の“集合”などに対して、マスコミ等の批判を受け、少なからず混乱していたのである。それらのことと、ほぼ時を同じくして、教育課程審議会が発足（昭和４８年）し、学校教育の内容を検討し始めた。その答申において、中学校数学の改善の基本方針を

・自ら考える力を養い創造的な知性と技能を育てること
・基礎的な知識の習得や基礎的な技能の習熟を重視し、併せて数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度の育成が、児童・生徒の発達段階に応じて、より効果的に行なわれるようにする。

とし、それらのねらいを考慮し、新しい総括的な目標が次のように定められた。

「数量、図形などに関する基礎的な原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方についての能力を高めるとともに、それらを活用する態度を育てる。」〔39)〕

この目標の中には、教育課程審議会の基本方針で述べられた“数学的な考え方”については触れられていない。このことに関し、福森氏は、次のように述べている。

「従来、算数・数学教育の目標として、数学的な考え方の育成ということが重視されてきたが、数学的な考え方の育成ということは、実際の指導場面においては、具体的な指導内容(教材)を通して行なわれることであり、数学的な表現や処理のしかたについての能力を養うことによって、数学的な考え方が育成されていくと考えることができよう。」 〔37) p.71〕

福森氏は、総括的な目標の意図するところによって“数学的な考え方”が育成されるだろうとしているが、それに対して、中島氏は、

「特に、ここでは(注;目標のこと)、“数学的な考え方”の育成についての積極的な表現がないが、算数の場合と同じように、簡潔とか統合とかいった価値観にに関するものもまったく表面には出てこない。 …(中略)… これからの教育の方向を考えるとき、“数学的な考え方”についてのもっと積極的な方策が直接よみとれるようなものが望ましいと考えたい。」 〔40) pp.50−51〕

として、“数学的な考え方”の育成が、明確にされていないことを憂慮している。二人の見解の相異の原因のひとつは、“数学的な考え方”のとらえかたが違うことに起因していると考えられるが、ここでは、深入りしないことにする。

以上、(1)~(3)で昭和33年以後の学習指導要領の改訂にそって“数学的な考え方”に焦点をあてて、数学教育の大まかな流れを見てきた。その中で、中学校数学の目標は、多少字句の表現は変わってきているが、“数学的な考え方”の育成を念頭に置いて定められていると言えよう。そこで、問題となるのが、“数学的な考え方”とは何かであろう。そのことについて、次節以降で考察しよう。

(2.2) 数学的な考え方のとらえ方

前節で述べたように、“数学的な考え方”の育成が、数十年来、主張されてきているが、そのとらえかたは、十人十色であり、明確にされていないのが現状である。

そこで、“数学的な考え方”について、代表的なとらえかたを概観し、その特徴について述べることにする。ここでは、栗田氏の言うように数学的な考え方とは、こういうものであると一義に決めるのではなく、こういうものは、数学的な考え方である[41)]という立場で考察を進めたい。

それぞれ主張する立場の違いを考え、以下に述べる3つの視点から“数学的な考え方”を考察していくことにする。

(1) 数学的創造をもたらす思考過程としての数学的な考え方

中島氏は、“数学的な考え方”を次のようにとらえている。

「数学的な考え方とは、算数・数学にふさわしい立場で、主体的に課題をとらえ、創造的に考察し処理するという、目的をもった一つの全体的な活動ができることを指している。」〔40) p.107〕

中島氏の考えにそって、数学的な考え方と創造的な活動の関係について考えてみよう。教師が、日常の算数・数学の指導の中で、個々の学習内容について創造的な思考を重視した指導を行なうことによって、生徒たちは創造的な過程の体験を積むことができる。そして、その体験によって身についた数学的な考え方を頭の中で用い、結果として、創造的な活動となって現われてくると考えられる。

また、植松氏らは、

「数学者が、新しい数学を創造したり、児童・生徒が自分にとって、新しい算数・数学の内容を、自分で再発見し、再創造するとき、効果的に働く思考過程を数学的な考え方という。」〔42) p.2〕

と述べている。

ここで、両氏が考える“数学的な考え方”を理解するためには、“創造的”という言葉を、どんな意味で用いているかを明らかにする必要があろう。

中島氏は、創造的とは、何かしら新しいものをつくり出すことであるが、それは、小・中学校では、不可能に近いことであると述べている。学問的に、新しいことを創造していくことは、無理であるが、それを、引き起こす原動力として、簡潔・明確・統合といった観点が考えられる。実際の学習指導において“創造的な思考を重視した指導”が、どのように実践されるべきかについて

「算数や数学で、子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に、教師が、既製のものを一方的に与えるのではなく、子どもが、自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すように、教師が適切な発問や助言を通して仕向け、結果において、どの子どもも、いかにも自分で考え出したかのような感激をもつことができるようにする。」　〔40) p.70〕

と述べている。

一方、植松氏らは、創造性の評価基準として、J.A.Dunnの考えを取り上げている。

① 他の児童・生徒が、とくに好奇心を持たないようなことがらの中に、問題を見つけたり、作ったりすること。

② 帰納により解決の筋道を見つけたり、おなじようなパターンを見つけ、類推して特殊な結果を一般化すること。

③ 一つの問題に対して、いろいろな方法を考える活発性のあること。

④ 一つの問題に対して、ありきたりの解法でなく、気のきいた答え、一般的でない答えをだすこと。　〔42) p.3〕

①は日常身辺におこるふつうの事象や問題の中に、新しい問題を見つけることであり、②は問題の解決法に関することである。③は創造性が、数学だけでなく生徒の興味・関心にも関係するとし、④は問題の構成要素の特殊な関係を、高い立場、広い視野から考察し利用することによってできるものである。

（2） ものの見方・考え方としての数学的な考え方

片桐氏は、数学的な考え方について次のように述べている。

「問題解決の過程を身につけさせただけでは、いろいろな問題にぶっかったときに、自分の力で問題を解決していくことは、必ずしも期待できないのである。 そのような解決の過程でよく使われている数学的な目のつけどころ、あるいは、数学的な方法を、子どもたちに漸次わからせていくことも必要である。その数学的な目のつけどころ、あるいは、数学的な方法といったものが、ここで考えている数学的な考え方である。」

〔43）p.10〕

片桐氏は、児童・生徒に自ら、問題解決を行わせるためには、数学的な考え方を、ある程度指導し身につけさせる必要があると主張している。そして、それがどの程度、指導できるかについては、今後研究の余地があるとも述べている。

また、大野氏も、片桐氏と同じような立場をとり、数学的な考え方について次のように述べている。

「数学に限らず、よく物の見方・考え方がどうのこうのということがいわれる。それは、その考え方に基づく多くの具体的な事がらを個々に問題にする前に、それらに共通して根底に流れる基盤となるものをさしているといえよう。これをしっかり把握しないで、個々のものを断片的、末梢的に取り上げているだけでは、 本質を失って誤った判断をしたり、非能率的な考察を進めたりするとも言えるのである。数学的な考え方というからには、数学における基本的かつ固有なアイデアや思考、ないしは、それに基づく手法が、その中心としてあげられることは論をまたない。」 〔44）p.10〕

さらに、古藤氏も、数学的な考え方をものの見かた・考え方として、次のようにとらえている。

「われわれが、ある１つの問題の解決を要求され、しかも、その問題が既習の学習内容や経験のみでは解決できないとき、われわれは、その解決のため、いろいろなアイデア（着想）を用いる。このとき、その問題の解決に用いたアイデアをその問題限りの単なる思いつきにとどまらせてはいけない。そのアイデアを、さらに、一般化し、“ことば”で表わし、法則化し、それを他の問題の解決にも利用できるよう“考え(方)”としてまとめておくことがたいせつである。」　〔45) p.74〕

そして、それが生まれる過程を、

idea　→	thinking　→	thought
（着想）	（考え方）	（思考）

と考えている。

（３）　無定義用語としての数学的な考え方

秋月氏は、“数学的な考え方”というものは、こんなものだと言ってみても、ほとんど意味がなく、児童・生徒が、数学の学習を進めていくうえで、彼ら自身で身につけていくものであるとしている。

「“数学的な考え方”の定義などはないし、また、定義してみたところで何の役にもたたないであろう。いろいろな実例に接してみて、こうでもあろうか、ああでもあろうかとたえず尋ね求めていくべきものである。」　〔46) p.1〕

また、

「数学的な考え方と称するものは、数学活動 ―――― 表現された数学だけでなく、数学を創り出していく思考もふくめて ―――― のすべてを通じて、体験的に、総合的に、むしろ直観的にとらえられるものではないかと思われる。」　〔47) p.9〕

秋月氏は、上記のように、“数学的な考え方”のとらえかたについては明確にしていないが、数学的な考え方を育成するための方法としては、生徒に“良い問題”を与えてやることが、最も重要なことであろうとしている。

以上、“数学的な考え方”を

（１） 数学創造をもたらす思考過程としての数学的な考え方

（２） ものの見方・考え方としての数学的な考え方

（３） 無定義用語としての数学的な考え方

の３つに分類して概観してきた。前述の通り、数学的な考え方とはこんなものだと一義に決められるものだとは思わないが、上に述べた３つのとらえかたをふまえて、筆者の考えを明らかにしたい。本論文の目的が、問題解決と数学的な考え方の関連を考察することであるので、ある程度“数学的な考え方”のとらえかたを明らかにする必要がある。

このことは、次節の“数学的な考え方の構造”とも関連してくることであるが、ここでは、（２）の立場の古藤氏の考えに従いたい。即ち、“数学的な考え方”とは、

「問題を解く際に用いたアイデア（着想）を、その問題限りの単なる思いつきにとどまらせないで、そのアイデアを、さらに一般化し、“ことば”で表わし、法則化し、それを他の問題解決にも利用できるように“考え(方)”としてまとめたもの」

をさすととらえて、論を進めていきたい。

(2.3) 数学的な考え方の構造

前節で、"数学的な考え方"のとらえかたについて述べてきたが、それだけでは、抽象的すぎてその中味が明確になったとは言えないだろう。そこで、もう少し具体的に、"数学的な考え方"について考察を進めよう。

数学的な考え方と言われるものは、かなり古くからいろいろな雑誌、図書、論文などで論じられているようにたくさんある。ここでは、問題解決の方略との関連を考察するために、まず代表的な主張を概観し、筆者の考えを明らかにしていこう。

大野氏は、"数学的思考とは何ぞや"の問いに対しては、簡潔、明確な定義らしい答えを欠いているだろうとしている。ただ、数学的な思考である限り、数学に関する思考であるに違いないとし、前述の通り「ものの見方・考え方」というようにとらえ、数学的思考を次の2つに分けている。[48]

(i) 数学の内容そのものからの思考

- 集合の考え
- 関数の考え
- 図形の考え
- 確率の考え
- 統計的な考え

(ii) 数学の学習で扱う限り、数学の内容を媒体とし、それなくしては考えられないが、個々の内容にとらわれない思考

- 論理的思考
- 演えき的思考
- 帰納的思考
- 類比的思考
- 抽象化の考え
- 一般化の考え

(i)は、数学を構成していくときの基本的概念であり、数学固有のものである。それに対し(ii)は、数学ばかりでなく、他教科でも重要なことであるとしている。

次に、古藤氏は、数学的な考え方を数学の内容と方法に視点をおいて、次のように分類している。[30]

① 数学的内容に関する数学的な考え方

・数や式の考え　・図形の考え　・統計、確率の考え

・集合の考え　・関数の考え　・式表示の考え

② 数学的方法に関する数学的な考え方

・抽象化　・一般化　・特殊化

・帰納　・演えき　・類比

片桐氏は、数学的な着眼点、方法といったものを数学的な考え方ととらえ、次のようにかなり詳細にわたり、包括的に述べている。[49]

Ⅰ 数学的な考えを生み出す背景となる考え方

・自主的に行動しようとする

・合理的に行動しようとする

・内容を明確にし、これを簡潔、明確に表現しようとする

・思考労力を節約しようとする

Ⅱ 数学の流れをつくる数学的な考え方

(1) 数学のねらいともいわれる数学的な考え方

・帰納的考え方　・類比的考え方

・逐次近似的考え方　・演えき的考え方

・統合的考え方　・拡張的考え方

・公理的考え方

(2) 思考の対象に対する数学的な考え方

・抽象化　・数量化や図形化　・記号化

・理想化　・単純化　・一般化

・特殊化　・形式化

Ⅲ　数学の内容からみた数学的な考え方

・数、式における考え　　・測定における考え

・図形における考え　　・統計における考え

・関数における考え　　・集合における考え

以上、3人のとらえる数学的な考え方の構造を概観してきたが、ここで、筆者の考えを明らかにしよう。

これまで述べてきた3人は、数学的な考え方について具体的に分類しているが、その分類方法、項目はひじょうに似ている。即ち、大野氏と古藤氏は、数学の内容に関する数学固有の考え方と、数学の内容にあまりとらわれない一般的考え方の2つに分類していて、それらは、リストされている項目もほぼ同じとみなせる。片桐氏は、その2つに加えて、数学的な考え方を生み出す背景となる考え方をも含めていて、より広いとらえかたをしている。従って、それらをふまえて筆者は、数学的な考え方の構造を古藤氏の分類

①　数学的内容に関する数学的な考え方

②　数学的方法に関する数学的な考え方

によってとらえ、その根底には、簡潔、明確、統合などといった考え方があるものととらえる。

第三章　Problem Solvingと数学的な考え方の関連

（3．1） わが国の数学教育の現状

ここでは、IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement ; 国際教育到達度評価学会) による「第２回国際数学教育調査」の国内報告に基づいて、生徒の問題解決能力、教師の指導法などの現状を探るのが目的である。そのために、次の２つの報告書を参考にする。

① 『中学・高校生の数学の成績』[50)]
② 『中学・高校生の数学成績と諸条件』[51)]

この調査は、次のことを目的として実施された。

「各学校段階における生徒の成績(学習到達度)を、国際的に共通なテスト問題によって調べるとともに、生徒の成績と各国の学校制度・カリキュラム・指導法・教員の資質・生徒の環境条件等との関係を分析し、それらを比較考察することを目的としている。
わが国は、この調査に参加することにより、わが国の生徒の成績やその他の諸特性を的確に把握し、今後の数学教育の改善に資することを目的とした。」 〔50) p.1〕

調査対象は、<表１>の通りである。

<表１>

対象	学校数	教師数	生徒数
中１集団	２１２人	２１２人	８１０３人
高３集団	２０７人	２０７人	７９８２人

本論文では、中学生を念頭において考察を進めているので、以下では、中１集団（中学教師を含む）のみを考えることにする。

調査時期は、１９８０年５月中旬と１９８１年２月下旬の２回、同一生徒を用いて行なわれた。これは、成績の伸びと教師の指導法との関連を探るためである。調査問題・質問紙の種類は、生徒質問紙、数学問題、教師質問紙などであった。

① について

この報告書は、数学の成績についての結果を中間報告としてまとめている。今回の調査問題（全体では、176題）の中に、前回（1964年）と同じ問題が３７題含まれている。それらを、“計算題”と“文章題”に分類して成績（平均正答率）の比較をしたのが〈表２〉である。

〈表２〉

	問題数	今回	前回	差（今回－前回）
計算題	20題	62.8%	60.0%	2.8%
文章題	17題	66.1%	70.1%	−4.0%

この表を見ると、“計算題”は前回よりよくなっているが、反対に“文章題”の成績は悪くなっている。

この調査問題は、内容別にみると、“算数”、“代数”、“幾何”、“確率・統計”、“測定”の５領域に分けられ、また、目標別には、“計算”、“理解”、“応用”、“分析”の４領域に分けられている。

Ⅰ　計算（Computation）

生徒が、すでに学んだ規則に従って、問題の要素を直接に操作することをみる。特殊な事実、用語に関する知識やアルゴリズムを実行する能力をみる。

Ⅱ　理解（Comprehension）

概念、原理・法則、一般化の想起、あるやり方から別のやり方へ問題を変換する能力をみる。

Ⅲ　応用（Application）

関連のある知識の想起、適切な演算の選択、演算を遂行する能力をみる。きまり切った手順で問題を解く能力をみる。

Ⅳ　分析 (Analysis)

きまり切った手順ではできない応用を要求する能力をみる。パターンの発見、証明を構成したり、批判したりする能力のように高次の思考過程を要求する能力をみる。

各問の正答率を、上の目標別に見たのが〈表３〉である。

〈表3〉

目標	計算	理解	応用	分析	計
問題数	59	56	50	11	176題
正答率	66.3	57.9	64.3	58.3	62.5%

〈表３〉によると、数学的知識やアルゴリズムを問題に適用することは、比較的うまくできるが、きまり切った手順では解決できない問題（即ち、より高次の思考過程を要する問題）には、あまりうまく対応できないことがわかる。

１年間の成績の伸びを分析することにより、指導法と生徒の問題解決能力の関連を見ることも興味深い。

▲ 成績が伸びた問題　　　　；学年末の正答率が学年始めの正答率より１０％以上高いもの

▼ 成績の伸びが少なかった問題；学年末の正答率と学年始めの正答率の差が１０％未満のもの

〈表４〉

	計算	理解	応用	分析	計
▲	９題	６題	６題	３題	24/60
▼	6	１４	１１	5	36/60

学年始めと学年末の共通の問題が６０題あり、▲ にあてはまるものは24題、▼ にあてはまるものは36題である。▼ の“理解”、“応用”の問題が多いのが目につく。そのことについては、

「一般に、指導の強弱に生徒の成績は比例するが、指導の直後で成績の伸びが顕著なのは、計算問題等の単純な思考過程を要する問題であり、"応用"、"分析" 等に属する問題はそれ程でもない。」　〔50) p.52〕

と述べている。それらのことから判断すると、より高次の思考を育成するように意識的に強調した指導が欠けているのではないかと思われる。

② について

これには、生徒、教師、学校に対する質問紙調査の結果と数学成績との関連が報告されている。その質問の中から、問題解決指導に関連するいくつかの項目を取り出し考察しよう。

次の(1)~(5) は、"数学の勉強" の項目から取り出し、(6)~(12) は、"数学とは何か" の項目から取り出した。

(1) 問題の答えをもとにもどってたしかめること　〔16〕
(2) 法則や公式を覚えること　〔17〕
(3) 文章の問題を解くこと　〔19〕
(4) 方程式を解くこと　〔20〕
(5) 問題の答えの見当をつけること　〔23〕
(6) ほとんどの数学の問題には、いろいろな解き方があります。　〔37〕
(7) 数学の勉強は、ほとんど暗記ばかりです。　〔38〕
(8) 数学では、きまりきったやり方を使わなくても問題を解くことができます。〔39〕
(9) うまくいかなかったら別の方法でやり直すというやり方(試行錯誤)は、数学の問題を解くのによく使われます。　〔40〕
(10) 数学の問題は、あるきまりきったやり方に従えば、必ず解けるものです。　〔41〕
(11) 数学の問題は、いつもいろいろな方法で解くことができます。　〔44〕
(12) 数学の勉強をすると、筋道をたてて考えることができるようになります。　〔45〕

(〔 〕の中の数字は、質問紙の変数番号である)

項目 (1)～(5) については、生徒と中学教師((4)は除く)に対し、A (重要度)、B (難易度)、C (好き嫌いの程度) の３つの質問がなされた。

A (1.非常にたいせつ 2.たいせつ 3.きめられない 4.あまりたいせつでない 5.まったくたいせつでない)

B (1.非常にやさしい 2.やさしい 3.はっきりいえない 4.むずかしい 5.非常にむずかしい)

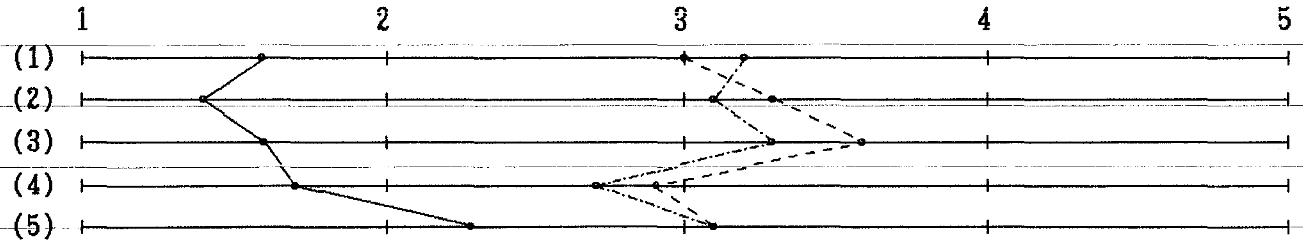
C (1.大好き 2.好き 3.どちらでもない 4.きらい 5.大きらい)

また、項目 (6)～(12) については、

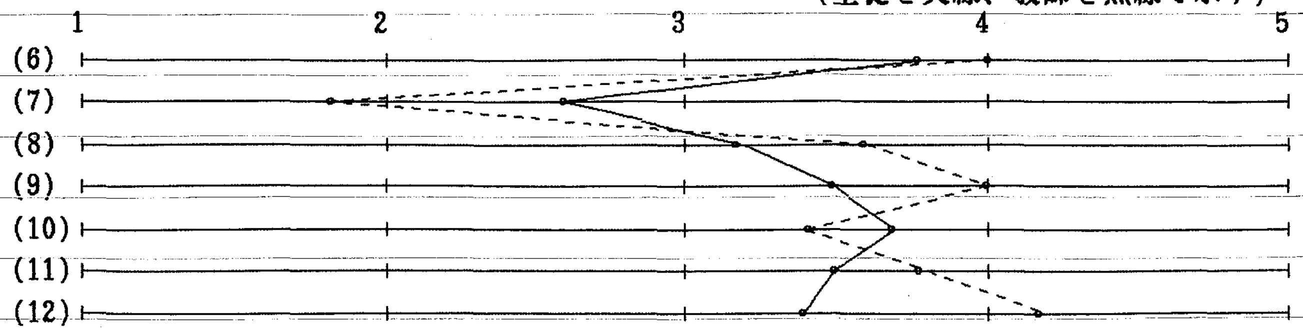
(1.大反対 2.反対 3.どちらともいえない 4.賛成 5.大賛成)

の質問がなされ、それぞれ５つの選択肢からひとつを選んで回答するのである。そして、各選択肢 (1,2,3,4,5) を得点とみて、その平均値をグラフで示すと次のようになる。

(生徒のみ)



(生徒を実線、教師を点線で示す)



※ (1)～(5) について (生徒のみ)

まず、(1),(5) を考えてみよう。それらは、問題を解く前、さらに問題解決後において、重要なプロセスである。重要度からみると「答えの見当をつけること」は、「問題の答えをもとにもどってたしかめること」より低いので、問題解決指導の中で強調されるべきであろう。

次に (3),(4) を比較してみよう。難易度、好き嫌いの程度から、よく言われるように、「文章の問題を解くこと」が「方程式の問題を解くこと」よりも、むずかしく嫌いであることがわかる。

※ (6)～(12) について

これらの項目から、極端であるかも知れないが、次のような生徒・教師の数学に対する見方が導かれないだろうか。

生徒は、数学の問題を解くには、きまった方法があって、それに従えば必ず解けるもので、その方法を暗記しておけばうまくいくと大部分の者が考えている。もし、その方法を忘れたり、知らなかったりすると、その問題は解けない。従って、数学を勉強しても筋道を立てて考える力はあまりつかないと考えている。

一方、教師は数学の問題を解くには、いろいろな方法があって、もし１つの方法がダメなら工夫して別の方法を考えてみることが大事であり、きまりきった方法でやるのではないから暗記は、さほど必要ないと考えている。従って、数学の勉強をすれば、筋道を立てて考える力を養うことができるだろうと思っている。

これほど極端ではないにしても、(7),(12) などを見るとかなり差があることがわかる。単に、知識・技能、特定の方法だけを指導していたのでは、上のようなギャップが生まれてくるのである。従って、教師が数学の学習指導に対して考えていることを意識的に指導していくべきであろう。

これまで、我が国の数学教育の現状を IEA による調査の報告書をもとに概観してきたが、ここでまとめてみよう。

・前回に比べ「文章題」の成績が悪くなっている。

・より高次の思考過程を要する問題にうまく対応できない。

・「文章の問題を解くこと」に関し、生徒はむずかしく思い、また、嫌っている。

・「数学の問題は、あるきまったやり方に従えば、必ず解けるもの」と考えている生徒が多く、教師の考えとのギャップがある。

・学習効果のあがらない理由として、生徒の関心・動機と教師の指導法が、主な理由としてあげられる。[52)]

このように、生徒の問題解決能力、教師の指導法など必ずしも満足すべき状態でないことが明らかになった。

(3.2) 問題解決能力の伸びない原因

前節では、我が国の数学教育の現状を明らかにしてきたが、その問題点の原因を探るのが、ここでの目的である。問題として考えられるものが、前述の通り、生徒自身、教師の指導法、さらに、教材、学習環境など数多くさまざまに異なっているので、その原因もさまざまなものが考えられる。ここでは、生徒の問題解決能力を育成する観点から、教師の指導に焦点をあてて、その原因を探りたい。

最も、重大な原因として以下述べるように、"問題解決のプロセスを学ばせる指導をしているかどうか"[53] が、クローズアップされる。問題解決プロセスの分析については、いろいろな提案がなされているが[*]、ここでは、Polya の見解[12]に従い、

Ⅰ　問題の理解

Ⅱ　計画の立案

Ⅲ　計画の実行

Ⅳ　ふり返る

の4段階ととらえる。ここで言う"問題解決のプロセスの指導"とは、教師が意図的に、上の問題解決プロセスに焦点をあて、その中で生徒に問題解決の方略や数学的な考え方を学習させることを目ざした指導のことである。

実際に、問題に直面し困難を感じている生徒は、問題の構造の理解が十分できていないことが多い。IEA の結果から明らかになったように、「文章の問題を解く」ことを、生徒はむずかしいと考えているが、その原因のひとつは、問題の構造を理解することの指導が強調されていないことがあげられよう。また、「数学の問題は、あるきまったやり方に従えば、必ず解けるもの」と考えている生徒が多かったが、このことは解きかたを限定して指導し、それについてしか指導していない、即ち、多様な解きかたがあることを適切に指導していないことが原因として考えられよう。

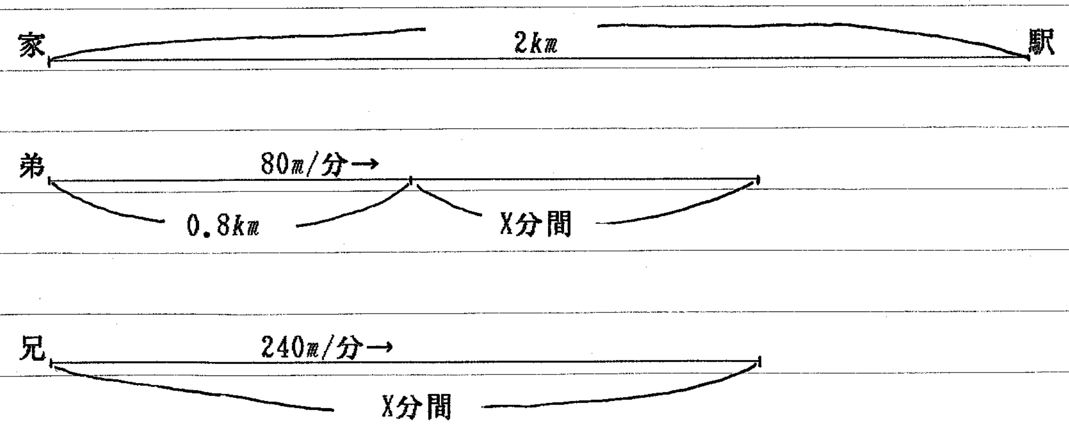
*) 例えば、13)のLester は、問題解決のプロセスを、① 問題に気づく　② 問題の理解　③ 目標の分析　④ 計画の立案　⑤ 計画の実行　⑥ 手続きと解の評価と分析している。

このようなことは、次のようにNAEPの結果報告[15]の中にも見られる。多くの生徒は、問題解決プロセスの４段階のうち、Ⅰ，Ⅱ，Ⅳ の３つの段階を踏まないようである。従って、例えば、未知数の分析に失敗したり、問題文の中の情報が適切かどうかの決定ができない。あるいは、問題を理解するために図をかくことができない。似た問題やもっと簡単な問題を考えることができない。特に、型通りには解けない問題では、計画を立てることができない。答えが適切かどうかを判断するための見積もりができない。答えの検討が行なわれない。多くの生徒にとって、問題を解くとは、機械的にアルゴリズムを適用するだけのことのようである。

今述べたことは、我が国にもあてはまることが多く、今後十分考慮されるべきことである。問題解決の指導に際し、教師は問題解決のプロセスを意識し、各段階で使用される方略や数学的な考え方を意図的に指導する必要がある。このことを具体的な例をあげて説明してみよう。

（問）　弟が、２km 離れた駅に向かって家を出てから、10分たって、兄が自転車で同じ道を追いかけた。弟の歩く速さは毎分80m、兄の自転車の速さは毎分240m であるとすると、兄は出発後何分で弟に追いつくか。

という問題に対し、



上のような図が考えられる。生徒は、図をかけば問題の構造が理解しやすいことは知っていても、うまくそれを図に表現できないことが多い。そんな生徒たちに、図の作りかたの指導はあまりせずに、図は教師が与えて、方程式の立式から生徒に考えさせるような指導

をしていないだろうか。この場合、方程式が解けることを前提にすれば、図がかけることは、問題が解けることと同じとみなせるくらい重要なことと考えられる。今述べたのは、Ⅰ，Ⅱ段階でのことであるが、Ⅲあるいは Ⅳ段階についても、方略や数学的な考え方の指導に関して、それらを意識して指導せずに、単にその問題に関連した知識・技能のみを指導するなど、問題があると思える。そのような指導のみを行なっていたのでは、生徒の問題解決能力は伸びないであろう。これまで述べてきたことから問題解決能力の伸びない原因のひとつに、“問題解決のプロセス指導”を強調していないことがあげられよう。

（3．3） 問題解決の方略と数学的な考え方の関連

数学の学習の大半は、実際に問題を解くことにかかわっている。教師が説明したり生徒と共同で、あるいは、生徒が主体となってと形態は違っても、問題を解くことは数学の学習において不可欠である。その際、生徒に数学的知識・技能を効果的に指導すれば、彼らは基本的な問題はかなりうまく解決できるようになる。しかし、より高次の思考過程を要する問題になると困惑することが多い。それは、彼らが、方略や数学的な考え方を身につけていないこと、また、それらの使いかたを知らないということが大きな原因であろう。最近、数学的な考え方を見直す傾向が見られるが、その見直しの新しい視点を問題解決の方略と関連づけてみたい。そして、それによって、“問題解決のプロセス指導”への示唆が得られればと思う。

方略と数学的な考え方の関連を考察する前に、それらの概念を今一度述べることにする。

方略 ――― 学習者が、問題を解決する際に、解決過程において、意識して用いる方法

そして、その方略を、管理方略と課題方略に分けてとらえている。 (p.27,28を参照)

数学的な考え方 ――― 問題を解く際に用いたアイデア(着想)を、その問題限りの単なる思いつきに、とどまらせないで、そのアイデアを、さらに一般化し、“ことば”で表わし、法則化し、それを他の問題解決にも利用できるように“考え(方)”としてまとめたもの

その構造を、① 数学的内容に関する数学的な考え方 ② 数学的方法に関する数学的な考え方 ととらえている。 (p.40を参照)

それらの関係については、両方とも概念規定が多様であるので、さまざまなとらえかたがある。例えば、方略と数学的な考え方を同一視する考え方、共通部分があるが異なる部分もあるという考え方、数学的な考え方が方略を含むという考え方などである。

古藤氏は、方略と数学的な考え方を、その内容構成において、ほぼ一致してる概念であるといえようと述べている。[30] しかし、古藤氏の考える方略の概念と筆者のそれとは異なる。

そこで、(1.4)でリストしたさまざまな課題方略と、(2.3)で述べた数学的な考え方と考えられる項目を実際に比較してみよう。その項目を図で示すと次のようになる。

課題方略			数学的な考え方
・試行錯誤	・パターン探す	・一般化	・数や式における考え
・より簡単な問題を解く		・特殊化	・関数の考え
・実験	・リストの体形化	・演えき	・図形の考え
・逆に考える	・シュミレーション	・帰納	・確率、統計の考え
・似た問題を考える		・類推	・集合の考え
・図、表、グラフをかく		・特殊化	・式表示の考え
・推測してチェックする etc.			

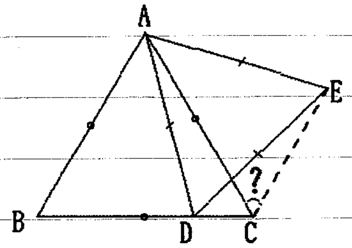
上の図でわかるように、課題方略と数学的な考え方には共通部分があり、それは、方法に関する数学的な考え方にあたる項目である。そこで、それを内容に関する数学的な考え方と切り離して、課題方略のみに含まれるものとして考えたい。

課題方略			内容に関する数学的な考え方
・試行錯誤	・パターン探す	・一般化	・数や式における考え
・より簡単な問題を解く		・特殊化	・関数の考え
・実験	・リストの体形化	・演えき	・図形の考え
・逆に考える	・シュミレーション	・帰納	・確率、統計の考え
・似た問題を考える		・類推	・集合の考え
・図、表、グラフをかく		・特殊化	・式表示の考え
・推測してチェックする etc.			

このように、方法に関する数学的な考え方を課題方略と位置付けることによって、内容に関する数学的な考え方との対比が明確になり、次の例で述べるように、方略と内容に関する数学的な考え方が問題解決プロセスの中で果たす役割がはっきりしてくる。また、そうすることにより、"問題解決のプロセス指導"を通して数学的な考え方も養えると考えられる。

また、管理方略は具体的にはどんなものかわかっていないが、問題解決の経験と反省的思考によって育成されると考えられている。前述の通り、本論文では、それを育成する要因として、“問題の理解”、“解を得るための条件を探求する”、“下位目標の設定”の3つを考えている。ここで、管理方略と課題方略、数学的な考え方を具体的な例を用いて示してみよう。

[例１] 適当な正三角形ABCをかけ。辺BC上に点Dをとり、ADを１辺とする正三角形ADEをCの側に作りさい。そのとき ∠ACEは何度か。

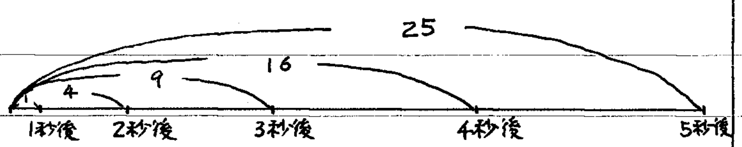


方略		方略の内容	解答
管理方略	課題方略		
問題の理解	試行錯誤	・点Dをいろいろな所にとってみる	△ABDと △ACEについて仮定より AB＝AC……①
	特殊化	・点Dを点C(orB)にとり、∠ACE＝60°を推測する.	AD＝AE……② ∠BAD＝60°－∠DAC ∠CAE＝60°－∠DAC
解を得るための条件を探求する	推測してチェックする	・∠ACEを含む三角形で∠ACEに対応する角が60°の三角形を見つけ、それらが合同であることが言えればよい。 ・４点A,D,C,Eが同一円周上にあることを言えばよい。	だから ∠BAD＝∠CAE……③ ①,②,③より ２つの三角形は、２辺とその間の角が等しいので、△ABD＝△ACE よって ∠ACE＝60°
下位目標の設定		・２つの三角形が合同条件を満たすことを言う。	

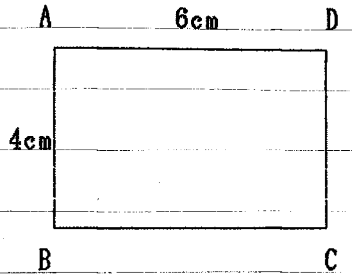
Ⅰ～Ⅳは、問題解決プロセスの４段階

［例２］ 下の図のように、直線lとその上の点 がある。この直線上の点0から出発して右の方へ動く点Pが、動きはじめてからX秒間にYm進むとき、X,Yの関係は、$Y=X^2$という式で表わされる。点Pが動きはじめて、１秒後から５秒後までの平均の速さを求めよ。

0　　　　P →　　　　　　　　　　l

方略		方略の内容	解答
管理方略	課題方略		
問題の理解	表	X | 1 2 3 4 5 Y | 1 4 9 16 25	
	図		
解を得るための条件を探求する		・かかった時間と進んだ距離がわかればよい	出発して1秒間に進む距離1^2m 出発して5秒間に進む距離5^2m よって、1秒後から5秒後の4秒間に $5^2-1^2=25-1=24$
下位目標の設定		・(5秒後の距離)−(1秒後の距離) 5^2-1^2	24m進む。 したがって、平均の速さは 24/4=6 (m/秒)

［例３］ 右の図のような長方形ABCDある。点Pが点Aを出発して、この周上をB,Cと点Cまで動くとき点Pの動いた距離をX、点Pが動くにつれて、DPが通った部分の面積をY㎡として、次の問に答えよ。



① 点Pが辺AB上にあるとき、XとYの関係を求めよ。

② 点Pが辺BC上にあるとき、XとYの関係を求めよ。

方略		方略の内容	解答
管理方略	課題方略		
問題の理解	特殊化	①点PがAB上にあるとき	① Y＝6X/2＝3X
		AP＝1,2,3の場合について	
		考える	
		②点PがBC上にあるとき	② 点Pが辺BC上にあるとき
		BP＝1,2,3の場合について	BP＝X－4
		考える	よって、台形ABPDの
			面積Yは、
解を得るための	一般化	①AP＝X，△APD＝Y	Y＝[6＋(X－4)]×4×1/2
条件を探求する	(変数を導入して)	とし、YをXで表す	＝2(X＋2)
		②4＋BP＝X,台形ABPDの面積	
		＝Yとし,YをXで表す	(別解)
			PC＝(4＋6)－X
下位目標の設定		①三角形の面積を求める公式	＝10－X
		を利用する	よって、台形ABPDの面積
		②BPをXで表し、台形の面積	Yは、
		を求める公式を利用する	Y＝(4＋6)－(10－X)/2×4
		または、PCをXで表し、	＝4＋2X
		長方形全体の面積から	
		△DPCの面積を引く	

［例４］ 連続した３つの整数がある。最も大きい数の２乗は、他の２数の２乗の和に等しいという。この３つの整数を求めよ。

方略		方略の内容	解答
管理方略	課題方略		
問題の理解	試行錯誤	・連続した3つの整数を 1,2,3 → $3^2=1^2+2^2$？ 2,3,4 → $4^2=2^2+3^2$？ 3,4,5 → $5^2=3^2+4^2$？ (表をつくってもよい)	連続した3つの整数を $a, a+1, a+2$ とおくと 条件より $(a+2)^2=a^2+(a+1)^2$
解を得るための条件を探求する	一般化	・連続した3つの整数を $a, a+1, a+2$ (or $a-1, a, +1$)とおいて、aを求めればよい	↓ $(a-3)(a+1)=0$ $\therefore a=3$ or $a=-1$
下位目標の設定		・方程式 $(a+2)^2=a^2+(a+1)^2$ を解く	よって、求める3つの整数は、 3，4，5 or −1，0，1

上の例で方略と内容に関する数学的な考え方の関連を考えてみよう。内容に関する数学的な考え方は、方略の内容、解答の部分に密接に関連していると考えられる。従来の指導では、その部分に指導の重点が置かれ、方略という概念があまり意識されてこなかった。そこで、筆者は、生徒の問題解決能力をよりいっそう育成するために方略を意識的に指導すべきであると提唱したい。方法に関する数学的な考え方を課題方略と位置づけているので、方略を指導することにより、数学的な考え方も育成されるのである。次に方略の内容について述べよう。

管理方略は、どんな問題に対してもかわることなく、いつも使用可能な方略である。それに対し、課題方略は、その問題特定の方略であり、[例１]の場合は、問題を理解するために、<試行錯誤>、<特殊化>の課題方略が有効に働いている。[例２]では、そのために<表>、<図>が用いられている。また、解を得るための条件を探求するために、[例３]、[例４]では、<一般化>が用いられている。さらに、下位目標を設定するためにも、いろいろな課題方略が用いられる。使用されている課題方略を、どのように名付けるかについては観点の相異などでいくらか違ってくるが、今はそれほど重要なことではない。次節で述べるように、方略を意識的に強調して指導することが重要なことである。

(3.4) 問題解決のプロセス指導

(3.2)で、問題解決の伸びない原因のひとつに、問題解決のプロセス指導を強調していないことをあげたが、ここでは、問題解決のプロセスを、前述の通り Polya の4段階ととらえ、その指導について管理方略・課題方略を中心に考察する。

I ―――― 問題の理解 ――――

教師や教科書、あるいは、生徒自ら作った問題が対象となるわけだが、まず、“問題”が問題として生徒に受け入れられるかどうかが数学の学習指導の前提として重要なことである。このことは、生徒の能力、熱意、内発的動機づけ、問題の難易などに関連することであり、本論からそれるので、ここでは深入りしないことにする。

この段階では、生徒に問題の意味、構造を理解させることが大切である。そのために、教師はいくつかの質問をしてもよい(例えば、問題を生徒自身の言葉で言わせること)。そして、<試行錯誤>、<図・表・グラフ>、<パターンを探す>などの課題方略が使えないかどうかを生徒に考えさせることが重要であろう。

II ―――― 計画の立案 ――――

問題を理解した上で、問題を解決するためにはどうしたらよいかを探求する段階である。この段階では、多くの課題方略、例えば、<逆に考える>、<演えき>、<帰納>、<類比>、<推測してチェックする>などが使えることを、日常の指導の中で強調し、生徒がそれらを問題解決の文脈の中で使えるようにすべきである。

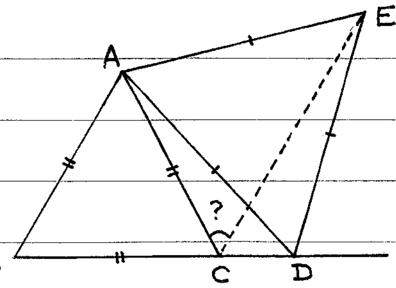
III ―――― 計画の実行 ――――

IIで選んだ計画を確実に実行するための知識・技能が必要であろう。また、内容に関する数学的な考え方が重要な役割を演じる段階である。立てた計画がうまく実行できなければ、IIにもどって考え直すように奨励してやることは大切なことである。

IV ―――― ふり返る ――――

問題が解決した後、ふり返らせる段階である。ふり返るとは、「得られた解が問題に適しているかどうか」、「別解、あるいは、もっと簡単な解法がないか」、「その問題の条件な

どを変えて発展的な問題が作れないか」などのプロセスを意味する。例えば、[例１]の問題の発展として、次のような問題を生徒と共に作り出すことは価値があろう。



(点Dの位置の変更)
点Dを直線BC上にとった場合

もうひとつ、この段階で強調すべきことがある。課題方略をいくら多く知っていても、実際には問題がうまく解けないことがある。したがって、(１．４)で述べた管理方略を育成するために、反省的思考をさせることが、特に重要であろう。即ち、その問題に固有の知識・技能や解法にのみ着目するのでなく、問題の解決過程を一般化してふり返り、他の問題解決にも役立つように指導することが大切なことである。

これまで、"問題解決のプロセス指導"について述べてきたが、その指導をする教師はどんな点に留意すればよいのであろうか。

生徒は、教師の影響を受けたり、あるいは、まねをするものだから、まず、教師が"うまい問題解決者"になるように努力すべきであろう。ここで言う"うまい問題解決者"というのは、問題解決にあたり、方略の概念やその役割を理解し、それを問題に適用できる問題解決者のことである。実際の授業の中で留意すべきこととして、次のようなことがあげられよう。正しい答えを得るという結果だけでなく、そのプロセスを、より強調すべきであるし、ひとつの問題をできるだけ多くの方法を用いて解くようにすることも必要であろう。　また、生徒の中には答えさえあっていればよいという考えを持っている者がいるし、それに、間違った解法でたまたま答えがあっている場合、自分はその問題ができたと思っていることがある。だから、例えば、テストの際、答えだけを書かせるのでなく、その解法プロセスがよくわかるように記入させたり、いろいろな解法で解かせたりすることが必要であろう。また、採点をする際も、答えが不十分であっても、部分点を与えるなどして解決プロセスを重視していることを示すべきであろう。これらのことは、問題解決のプロセス評価に関することであり、今後研究の余地があるところである。

方略指導の実証的研究として、A.H.Schoenfeld の研究[54]を取り上げてみる。彼は、大学生を被験者として５つの方略を用いて実験を行ない、方略指導を受けた学生と、そうで

ない学生の問題解決プロセスを分析している。その結果、次の３点が明らかになった。

① 方略の指導を受けた学生は、それを受けなかった学生よりも問題解決の成績が優れている。

② 問題解決に有効な方略を、学生が独力で自分の学習経験から学びとることは困難である。

③ 方略そのものの意味を教えられるだけでなく、どんな問題場面には、どんな方略が適切なのかを具体例を用いて教えられる必要がある。

Schoenfeld の研究は、大学生を対象としたものであるから、その研究結果をすぐに中学生に対して当てはめることは無理があるかも知れない。しかし、方略指導を考える際、重要な示唆をあたえてくれるものであろう。例えば、課題方略・管理方略を育成するために、いろいろな課題方略が考えられる問題(パズル問題など)を取り入れ、その方略の育成のみを意識して指導することも実践してみる価値がありそうである。

これまで述べてきたように、生徒の問題解決能力を伸ばすためには、"問題解決のプロセス指導"の中で課題方略を意識的に指導し、さらに、反省的思考をすることにより管理方略を育成していくことが、非常に重要なことである。

まとめと今後の課題

第一章では、問題解決について考察した。問題解決は考察の視点によって、さまざまなとらえ方をされているが、心理学の問題解決研究を概観し、数学教育で論じられている問題解決を考える発端とした。そして、本論文では、それを、

「教科書や教師から与えられた、あるいは、生徒自ら作った問題を、主体的に既習の数学的知識・技能を活用したり、それらをもとに新しいものを生み出すことによって解決する学習活動である。」

ととらえた。次に、生徒の問題解決能力を育成するために、米国で重要視されている方略に焦点をあてて考察した。方略とは、学習者が問題を解決する際に解決過程で意識して用いる方法のことであるが、さまざまな視点から、それが提案されている。それらを考察した上で、Gagné の提唱する管理方略と課題方略ととらえることにした。課題方略は、概念、内容を明らかにすることができたが、管理方略は、Gagné によると、問題解決の経験と反省的思考によって育成されるとされ、具体的な内容については明らかにされていない。本論文でも、その内容を明確に規定することはできなかったが、それらを育成する要因として、“問題の理解”、“解を得るための条件を探求する”、“下位目標の設定”を仮説として設定し考察した。

第二章では、わが国の数学教育の目標として“数学的な考え方”の育成が、従来から議論され強調されているが、それについて考察した。まず、昭和33年の学習指導要領の改訂で、初めてその目標の中に“数学的な考え方”という言葉が登場して以来、どのように取り扱われてきたかを、改訂のねらいと目標にそって考察した。そして、さまざまな視点から提案されている“数学的な考え方”のとらえ方、構造を概観し、それを

「問題を解く際に用いたアイデア(着想)を、その問題限りの単なる思いつきにとどまらせないで、そのアイデアを、さらに一般化し、“ことば”で表わし、法則化し、それを他の問題解決にも利用できるように“考え(方)”としてまとめたもの」

ととらえ、内容に関する数学的な考え方、方法に関する数学的な考え方と分けて考察することにした。

第三章では、わが国の中学生の問題解決能力、教師の指導法などの現状を、明らかにし、それらを改善するための方策を探求した。IEA の調査報告により、生徒は、より高次の思考を要する問題にうまく対応できない、数学の問題はあるきまった解き方に従えば必ず解

けると思っているなどの現状が明らかになった。問題解決能力を育成するためには、単に数学的知識・技能や特定のやり方のみを指導するのではなく、方略や数学的な考え方を教師が意識的に強調して指導する必要がある。そこで、方略と数学的な考え方の関係について考察し、方法に関する数学的な考え方を課題方略と位置づけ、内容に関する数学的な考え方との対比を明確にした。従来指導の重点が、内容に関する数学的な考え方に置かれていたが、教師が方略(管理方略と課題方略)の概念・役割を理解し、それらを意識的に生徒に学習させること(問題解決のプロセス指導)の重要性を述べ、その指導法を例証した。

次に、今後の研究課題について述べよう。いままで管理方略の概念は、あまり意識されていないが、問題解決能力育成を目ざす場合、重要な概念であると述べた。しかし、その具体的な内容は明確にできなかった。それらを育成する要因として3つの方略を上げているが、それらの方略と、それらを指導すれば、うまく課題方略を選択し実行できるようになることとの間には、かなりギャップがあるように思える。そのギャップを埋め、管理方略の内容を明らかにするために、認知心理学の分野からのアプローチを考えている。また、問題解決のプロセス指導の中で用いる適切な問題の収集、開発が必要であろうし、課題方略をどのように評価し生徒に還元すべきかなどの課題が残っている。今後、問題解決のプロセス指導を実践しながら、それらの課題を実証的に検討し解決していきたいと考えている。

最後に、本論文の作成にあたり、終始一貫して熱心な指導・助言をして下さった崎谷眞也先生には、心から感謝の意を表します。また、本論文全般にわたって適切な御指導をいただいた佐々木元太郎先生にも感謝の意を表します。

引用・参考文献

1) S.Krulik "Problems,Problem Solving and Strategy Games"
The Mathematics Teacher,1977,Vol.70,No.1,pp.649−652

2) E.Robinson "On the Uniqueness of Problems in Mathematics"
The Arithmetic teacher Vol.25,1977,p.22−26

3) S.Krurik,J.A.Rudnick"Teaching Problem Solving to Preservice Teacher"
The Arithmetic Teacher Vol.29,No.6,1982,pp.42−45

4) F.Lester "Problem Solving : Is It a Problem?" NCTM,Selected Issues in
Mathematics Education,1980,pp.29−45

5) 小高俊夫『算数・数学授業の原理』東洋館,1978,p12

6) 阿部浩一「いま,なぜ問題解決か」大阪書籍,算数・数学指導,1982,1月号

7) 島田茂編著『算数・数学科のオープンエンド・アプローチ』みずうみ書房,1980

8) 山内光哉編著『記憶と思考の発達心理学』金子書房,1983,pp.96−97

9) R.M.Gagné,金子敏・平野朝久訳『学習の条件』第3版,学芸図書,1982,p.179

10) 波多野誼余夫編『認知心理学講座4 学習と発達』東京大学出版会,1982,p.629

11) NCSM "Position Paper on Basic Skills"
The Arithmetic Teacher Vol.25,No.1,1977,pp.19−22

12) G.Polya,柿内賢信訳『いかにして問題を解くか』第11版,丸善,1981

13) F.Lester "Problem Solving : Is It a Problem?" NCTM,Selected Issues in
Mathematics Education,1980,pp.29−45

14) 平林一栄「一般陶冶としての数学教育」日数教論文発表会,1982,11月

15) T.P.Carpenter et al "NAEP NOTE : Problem Solving"
The Mathematics Teacher,Vol.73,No.6,1980.pp.427−433

16) NCTM『Priorites in School Mathematics (PRISM)』1980

17) S.A.Hill "President Address,58th Annual Meeting"
The Arithmetic Teacher,Vol.28,No.1,1980,pp.49−54

18) 石田忠男「"問題解決"指導のキーポイント」東洋館,新しい算数研究,1981年8月号

19) NCTM『An Agenda for Action —— Recommendations for School Mathematics
of the 1980s』1980

20) NCTM『Problem Solving in School Mathematics』1980Yearbook

21) NCTM『The Agenda in Action』1983Yearbook

22) J.Worth "Problem Solving in the Intermediate Grades: Helping Your Students Learn to Solve" The Arithmetic Teacher,Vol.29,No.6,1982,pp.16－19

23) G.L.Musser,J.M.Shaughnessy "Problem Solving Strategies in School Mathematics" NCTM,1980Yearbook,pp.136－145

24) A.H.Schoenfeld "Teaching Problem Solving Skill" American Mathematical Monthly,Vol.87,No.10,1980,pp.794－805

25) S.Krulik,J.A.Rudnick "Teaching Problem Solving to Preservice Teachers" The Arithmetic Teacher,Vol.29,No.6,1982,pp.42－45

26) S.Krulik,J.A.Rudnick『Problem Solving : A Handbook for Teachers』 Allyn and Bacon,Inc.,1980

27) R.G.Marcucci "Problem Solving for Prospective Elementary Teachers" NCTM,1983Yearbook,pp.213－217

28) J.F.LeBlanc "You Can Teach Problem Solving" The Arithmetic Teacher Vol.25,No.3,1977,pp.16－20

29) R.I.Charles,F.K.Lester『Teaching Problem Solving;What,Why&How』 Dale Seymour Publication ,1982,pp.17－18 (中島健三訳『算数の問題解決指導』金子書房,1983)

30) 古藤怜「Problem Solvingと数学的な考え方」筑波数学教育研究,No.2,1983,pp.1－8

31) W.A.Wickelgren,矢野健太郎訳『問題をどう解くか』秀潤社,1980

32) R.M.Gagné "Learnable Aspects of Problem Solving " Educational Pschologist,Vol.15,No.2,1980,pp.84－92

33) 佐伯胖『教育学大全集16 学力と思考』第一法規,1982,pp.24－38を参照.

34) J.Rafteryも,方略を情報処理論の観点から,Gagneと同じように2つに分けている. "Strategies in Trade Mathematics ; An Information Proceeding Approach" Reseach in Mathematics Education in Australia,MERGA,1981

35) A.H.Schoenfeld "Can Heurstic Be Taught ? " Cognitive Process Instruction F.I.P.,1980,p.315

36) 文部省『昭和33年中学校学習指導要領』

37) 福森信夫『中学校新教育課程の解説』第一法規,1977,p.25

38) 文部省『昭和44年中学校学習指導要領』

39) 文部省『昭和52年中学校学習指導要領』

40)中島健三『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房,1980,pp.50−51

41) 栗田稔『数学教育における教材研究』明治図書,1971,p.71

42) 植松茂暢他「数学的な考え方の評価について」日数教会誌,Vol.63,No.10,
1981,pp.2−8

43) 片桐重男『新しい算数・数学指導法の創造』学研,1981,p.10

44) 大野清四郎「数学的な考え方と数学教育の現代化」『指導と評価』Vol.20,No.12,
1974,pp.8−11

45) 古藤怜他『新しい算数授業の創造』近代新書,1972,p.74

46) 秋月康夫『数学的な考え方』明治図書,1968,p.1

47) 秋月康夫「数学的な考え方とその指導」『教育研究』Vol.21,1966,p.9

48) 赤攝也編『教育学講座11 算数・数学教育の理論と構造』学研,1980,p.71

49) 片桐重男『算数・数学授業の基本』第一法規,1981,pp.40−46

50) 国立教育研究所『中学・高校生の数学の成績』第一法規,1981

51) 国立教育研究所『中学・高校生の数学成績と諸条件』第一法規,1982

52) 国立教育研究所『中学生の数学成績と教師の指導法』第一法規,1983,p.88

53) 石田淳一「算数教育と問題解決」『愛知教育大学研究報告』1983,pp.277−299

54) A.H.Schoenfeld “Explict Heuristic Training as a Variable in Problem Solving
Performance” Journal for Research in Mathematics Education,
Vol.10,No.5,1979,pp.173−187