

学位論文

いろいろな平面曲線と微分

兵庫教育大学大学院 学校教育研究科
教科・領域教育専攻 自然系コース

M85287C 林 正治

序

本研究では、数学史上研究の対象とされた有名な平面曲線（おおむね、固有の名前をもった曲線で、方程式によらず軌跡として定義されるもの）を取り上げた。

古典的な曲線には、ニコメデスのコンコイドやアルキメデスの螺線のように研究者の名前とともに呼ばれるものがある。これらの多くは、ギリシャ数学の作図問題のうち、立方体倍積と角の三等分と円積に関連して考えられた曲線であり、ある距離関係をもつ点の軌跡として定義される。また、円錐と平面との断面として定義される円錐曲線も古代の曲線に属する。

17世紀に入り、フェルマーやデカルトの解析幾何学が生まれた頃、代数曲線とともに、たくさんの超越曲線が考えられるようになった。新しい曲線の発生には、古典的な曲線についてと同じく次の三つの理由が考えられる。

- ① その曲線自体が研究の対象とされた
- ② ある問題を解く手段として考え出された
- ③ ある問題の解答として生まれた

①の例としては、サイクロイドがある。この曲線についての問題とその研究者には次のようなものがある。

ガリレイ(イタリア) (1564-1642)：サイクロイドと円の面積比
ロベルバール(フランス)(1602-1675)：サイクロイドの弧の長さ
トリチェリ(フランス) (1608-1675)：サイクロイドの正確な面積
ホイヘンス(オランダ) (1629-1695)：サイクロイドの等時性

サイクロイドの伸開線，縮閉線

②の例としては、いわゆるデカルトの放物線がある。

③の例としては、ドボーン(1601～1652)の曲線の解としての、今日の記号で $a e^{-y/a} = a - y + x$ と表される曲線がある。また、最速降下線の問題の解としてサイクロイドがある。それは、ヨハン・ベルヌーイ(スイス)(1667-1748)によって発見された。

研究対象となった曲線の数は増大し、17世紀の数学者に新しい曲線をどのように紹介、説明、あるいは定義すればよいか考えさせた。もし、曲線が研究

の対象として、問題を解く手段として、また一つの解として使われるならば、よく知られてなければならぬし、知られるようにならなければならぬ。それより前の時代では、多くの曲線が知られており、数学者は（コンコイド、螺旋線等）名前で引用することができたので、このことは問題にならなかった。だが、17世紀の数学者は、曲線概念について共通の定義を持っていなかった。

デカルトにより平面座標が導入され、曲線が方程式で与えられると考えるようになるのはニュートン、ライプニッツより後である。

19世紀に入ると、ペアノ曲線や連続であるが至るところ導関数をもたない曲線 $y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos \pi(a^n x)$ ($0 < a < 1$, b は奇数, $a b > 1 + 3\pi/2$) (ワイエルシュトラスの例) が生まれる。連続関数 $y = f(x)$ のグラフが曲線を定義すると考えれば、これらも曲線になる。

時代とともに曲線の表記法が変り、数学の対象とされる曲線の種類も増えてきた。しかし、本論では最初に記したように「関数」の表記でのみ定義される曲線は、直接対象としない。また本論は微分法積分法の出現・展開との関連を一つの主題にしており、代数曲線としての視点での話題は第2章以外では出てこない。いわば解析幾何学としての曲線の探求は取り上げていないことになり、円錐曲線についての内容豊かな諸関係は、微分・積分とかかわる話題も多いとはいえ研究対象としなかったことになる。

謝 辞

本研究を進めるにあたり板垣芳雄教授には、研究の全般にわたり終始有益な示唆や細部にわたる御指導をいただき心から感謝の意を表します。

また、野村泰敏教授，柳原弘志教授，小池敏司助教授には、多くの助言をいただき敬意を表します。最後に、本学院生 田中幸治氏には、コンピューターに関して適切なアドバイスをいただき御礼申し上げます。

目 次

| | | |
|--|------|--------|
| 序 | ．．．． | (1) |
| 謝辞 | ．．．． | (2) |
| 第1章 数学史上の曲線 | ．．．． | (4) |
| §1. 古代の曲線・近代の曲線 | ．．．． | (5) |
| §2. 作図問題と関連する曲線 | ．．．． | (10) |
| 第2章 座標から見た曲線 | ．．．． | (16) |
| §1. 代数曲線と超越曲線 | ．．．． | (17) |
| §2. 極方程式表示 | ．．．． | (23) |
| §3. 媒介変数表示 | ．．．． | (28) |
| 第3章 包絡線 | ．．．． | (30) |
| §1. 直線群の包絡線 | ．．．． | (32) |
| §2. 円群の包絡線 | ．．．． | (35) |
| §3. 火線(反射光線の包絡線) | ．．．． | (40) |
| 第4章 垂足曲線と縮閉線 | ．．．． | (45) |
| §1. 垂足曲線 | ．．．． | (46) |
| §2. 縮閉線(伸開線) | ．．．． | (50) |
| 第5章 サイクロイド系の曲線 詳説 | ．．．． | (54) |
| §1. カージオイドの性質 | ．．．． | (55) |
| §2. デルトイドの性質 | ．．．． | (69) |
| §3. サイクロイドの性質 | ．．．． | (76) |
| §4. 外サイクロイドと内サイクロイドのまとめ | ．．．． | (82) |
| 第6章 微積分学書の「曲線の追跡」 | ．．．． | (89) |
| 補章(付録) | | |
| §1. 曲線の名前一覧表 | ．．．． | (100) |
| §2. いろいろな曲線の長さ、面積、回転体の表面積 回転体の体積等と関連参照図書の紹介 | ．．．． | (106) |
| §3. いろいろな曲線, の研究者 | ．．．． | (120) |
| §4. 曲線研究の略年表 | ．．．． | (122) |
| §5. 「第3章 包絡線」のマイコン用プログラム | ．． | (123) |
| 事項索引 | ．．．． | (129) |
| 参考文献 | ．．．． | (132) |

第 1 章 数学史上の曲線

固有の名称をもった平面曲線のうち、代表的なもの十個を取り上げ、その定義とともに図を示す。定義はある条件を満たす点の軌跡という表現で記し条件はすべて初等幾何の用語で表す。また、方程式による表現も伴記した。十個の曲線のうち四個はいわゆる古典的な曲線であり、ニコメデスのコンコイドのように研究者の名前とともに呼ばれることもある。ギリシャ数学の作図問題のうち、立方体倍積と角の三等分とに関連して作られた曲線が多く、どのように関連するかについてこの章の第 2 節で解説しておいた。

残りの六個の曲線は、考察の対象としていろいろな視点から本論で繰り返しとり上げることになる。たとえば、アステロイドについて、その包絡線としての“作図法”また、その縮閉線などをそれぞれの章で取り上げている。アステロイドは内サイクロイド(hypocycloid)の一種であり、内サイクロイドに共通の性質は第 5 章で議論している。

§ 1. 古代の曲線・近代の曲線

曲線を古代の曲線と近代の曲線に分けて、幾何学的作図によってできた点の軌跡として定義する。従って、 x , y 座標で表した式, 極座標で表した式, 媒介変数で表した式は参考程度で、あまり詳しく述べないことにする。

また、第2章以下の案内として説明をいれておく。

〈古代の曲線〉

クオドラトリックス

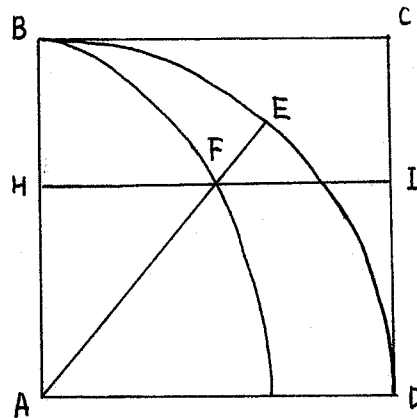
(定義)

点Aを中心とする円の半径 $AB (= a)$ が等角速度で 90° だけ回転してADに達する間に、線分BCが等速度で同じADの位置まで平行移動するとき、両者の交点Fの軌跡

(式) $AH = y$ $HF = x$ とする
 $x = y \tan(\pi(a-y)/2a)$

(曲線) 右図

角の三等分問題→第1章 § 2 p 10~14



アルキメデスの螺線

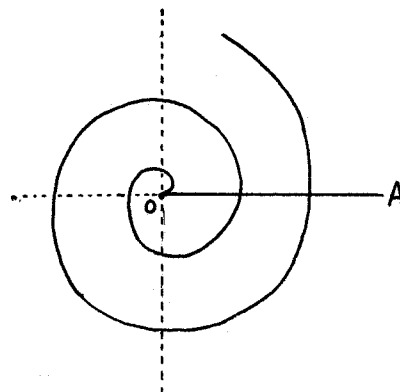
(定義)

回転角を θ として、点Oの周りを等角速度で回転する半直線OA上を、Oから等速度で進む点Pの軌跡

(式) $r = a\theta$

(曲線) 右図

いろいろな螺線→第2章 p 25, 26



コンコイド

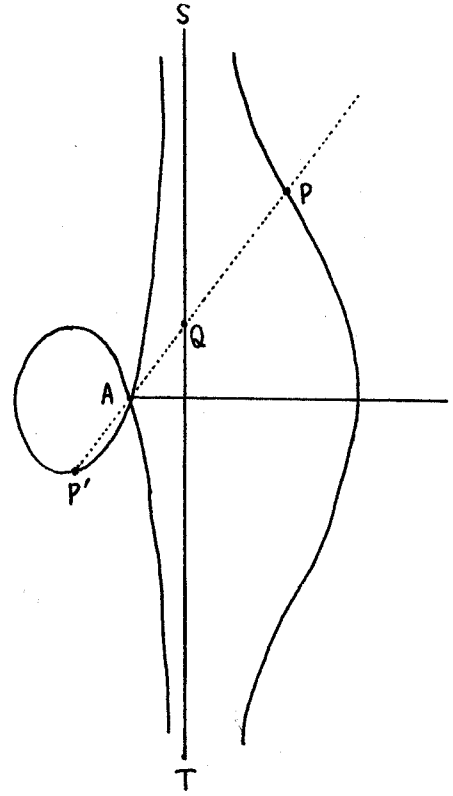
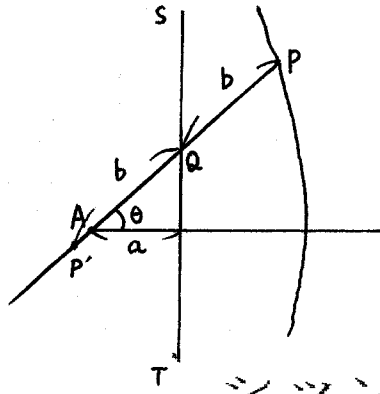
(定義)

定直線 ST 外の定点を A 、 ST 上の任意の点を Q とし、 AQ またはその延長上に点 P 、 P' をとり $QP = QP' = b$ (一定) となるとき、 P および P' の軌跡

(式) ① $b^2 x^2 = (x - a)^2 (x^2 + y^2)$

② $r = a \sec \theta \pm b$ ($a < b$)

(曲線) 右図



シツソイド

(定義)

点 O_1 を中心とし、半径 $a/2$ の円上の両端の 2 点を O 、 A とする。点 A における接線と O を通る直線の交点を T 、 O を通る直線と円との交点を Q とするとき、 $OP = QT$ となるように OT 上に点 P をとる。そのとき、点 P の描く軌跡

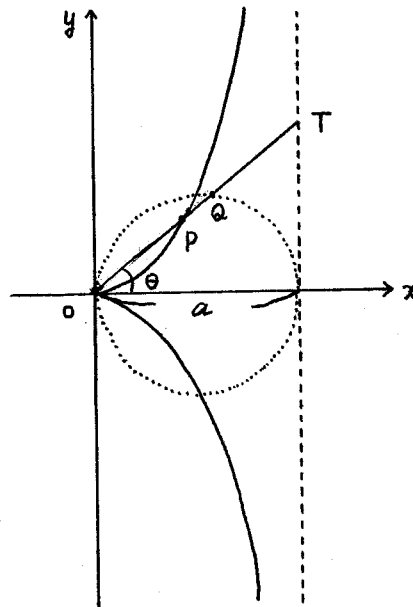
(式) ① $y^2 = x^3 / (a - x)$

② $r = a \sin \theta \cdot \tan \theta$

③ $x = a \sin^2 \theta$

$y = a \sin^3 \theta / \cos \theta$

(曲線) 右図



<近代曲線>

サイクロイド

(定義)

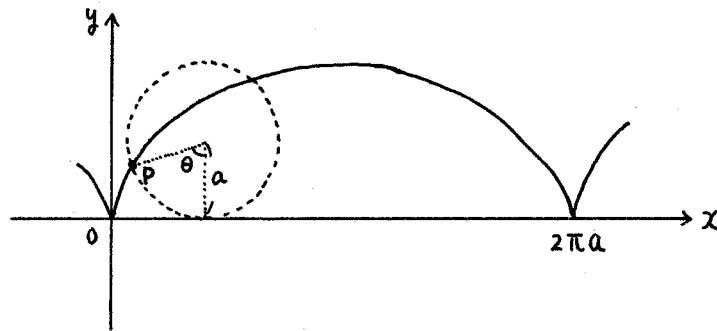
円が直線上を滑らないで転がるとき、円周上の定点Pの描く軌跡

(式) $x = a (\theta - \sin \theta)$

$y = a (1 - \cos \theta)$

サイクロイド→第5章

(曲線) 下図



カージオイド

(定義)

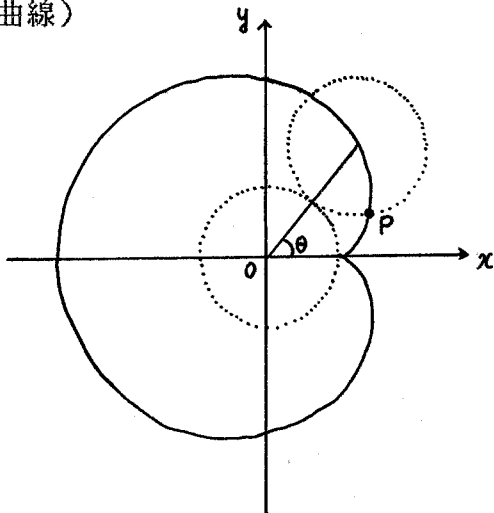
半径 a の円の外を半径 a の円が外接しながら滑ることなく転がるとき
円周上の定点Pの描く軌跡

(式) ① $x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta$ ② $r = a(1 - \cos \theta)$

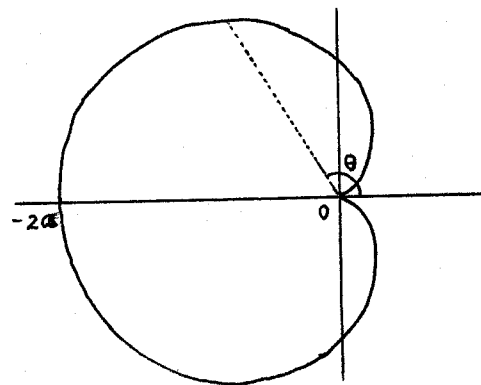
$y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta$

(p 84を参照)

(曲線)



(①の場合)



(②の場合)

アステロイド

(定義)

半径 a の円の中を半径 $1/4 a$ の円が内接しながら滑ることなく転がる時
円周上の定点 P の描く軌跡

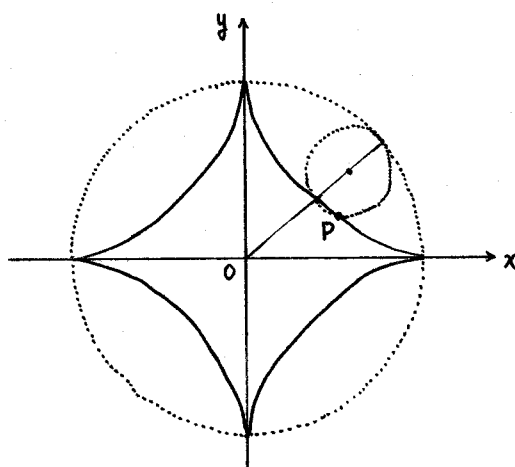
(式) ① $x = a \cos^3 \theta$ ② $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ③ $x = 1/4 \{3a \cos \theta + a \cos 3\theta\}$
 $y = a \sin^3 \theta$ $y = 1/4 \{3a \sin \theta - a \sin 3\theta\}$

(備考. ①, ②, ③はすべて原点を中心の回転角で表された式である。)

一般に、内サイクロイドという→第5章

x, y 軸で切り取られる接線の長さは、一定である→第3章 §1

(曲線) 下図



トラクトリックス

(定義) まっすぐな棒を PT とする。その一端 T を PT に垂直な方向へ直進運動させたとき、他端 P の描く軌跡

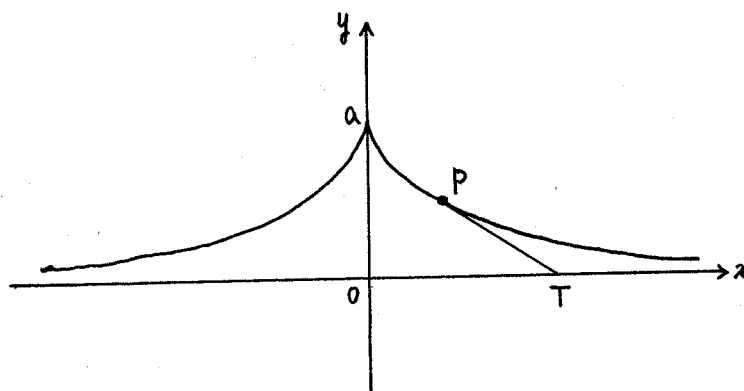
P の座標を点 $P(x, y)$ とすれば、 $dx/dy = \pm \sqrt{a^2 - y^2} / y$ を
みたす点の軌跡

(式) $x = a \cos \theta$

$y = a \log \tan(\theta/2 + \pi/4) - a \sin \theta$

縮閉線はカタナリーである→サイクロイド系の縮閉線は第4章である

(曲線) 下図



リマソン (トリセクトリックス)

(定義) OA を直径とする半径 a の定円周上を動く点 P に対して、直線 OP の上に $PQ = a$ なる点 Q を P の両側にとる。 P が円周上を動いたときの Q の軌跡

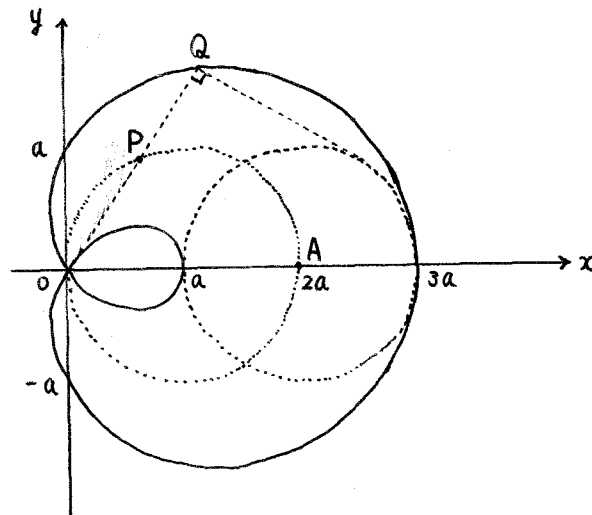
中心 A 、半径 a の円に対し、 $AO = 2a$ なる円 A の外の点 O をとる。円 A の周上の点 P におけるこの円の接線に対し、 O から下ろした垂線の足を Q とする。 P が円周上を動いたときの Q の軌跡

(式) ① $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

② $r = a + 2a \cos \theta$

円と点の垂足曲線は第4章で扱う

(曲線)



レムニスケート

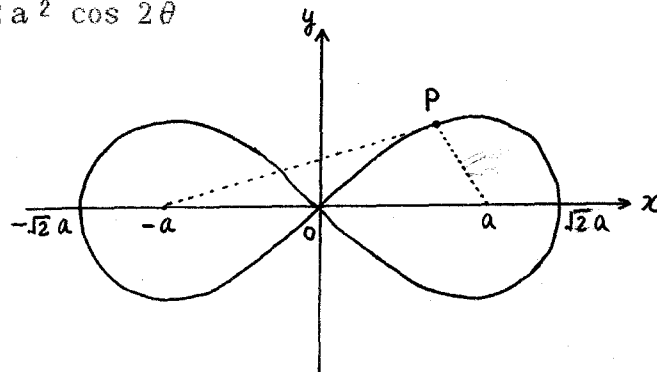
(定義)

平面上の2定点からの距離の積が一定であるような点 P の軌跡

(式) ① $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

② $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

(曲線)



§ 2. 作図問題と関連する曲線

昔、ギリシア人が作図問題に苦心して、解けなかったものに、つぎの有名な三つの問題がある。現在では、これらの作図が、定規とコンパスだけでは不可能なことが証明されている。

- (1) 立方倍積問題 : 与えられた立方体の2倍の体積の立方体を作ること
- (2) 角の3等分問題 : 与えられた角を3等分すること
- (3) 円積問題 : 与えられた円と等しい面積の正方形を作ること

この問題を解く手段として考えられた曲線をまとめてみる。

- ① シッソイド - 倍積問題
- ② クオドラトリックス - 角の3等分問題
- ③ コンコイド - 角の3等分問題
- ④ トリセクトリックス - 角の3等分問題
- ⑤ アルキメデスの螺線 - 角の3等分問題
- ⑥ アルキメデスの螺線 - 円積問題

<備考> (1), (2)の作図不能の証明は1837年Wantzelによりなされた。

(3)に対しては、1882年Lindemann(1852~1930)が π は超越数であることを証明し、作図不能であることを示した。([39])

① シッソイドによる方法

ギリシアのディオクレス(Diocles)が立方倍積問題を解くために発見した曲線である。

$$(式) y^2 = x^3 / (2a - x) \cdots \textcircled{1}$$

円の中心CでOAに垂線を立て $CB = 2a$ となるようにBをとり、ABと曲線との交点をPとする。

PからOAに下した垂線の足をHとすれば

$$\textcircled{1}から \quad x^3 = (2a - x) \cdot y^2$$

$$OH^3 = (2a - OH) \cdot PH^2$$

$$OH^3 = AH \cdot PH^2$$

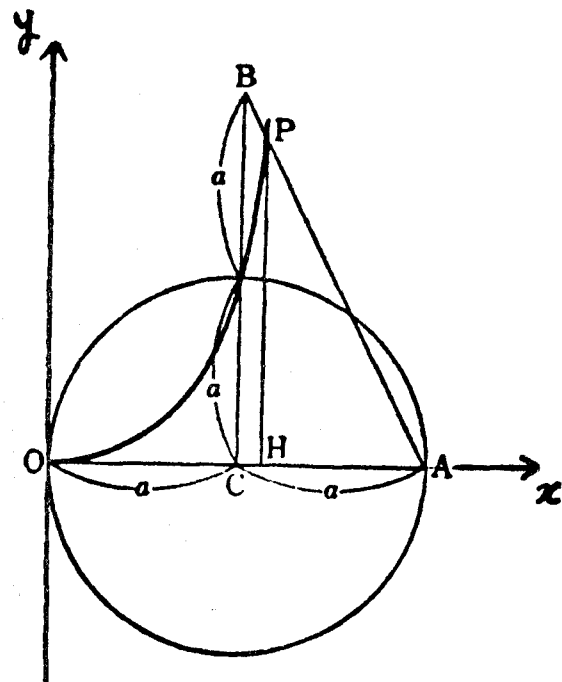
また $\triangle APH \sim \triangle ABC$ より $AH = 1/2 PH$

$$\therefore OH^3 = 1/2 PH^3 \quad \text{故に} \quad PH^3 = 2 OH^3$$

従って OHを一辺とする立方体の体積の2倍の

体積をもつ立方体の一辺は、PHである。([19] p 496)

注：これからは、[]はp 132の引用・参考文献の番号を示すものとする。



②クオドラトリックスによる方法

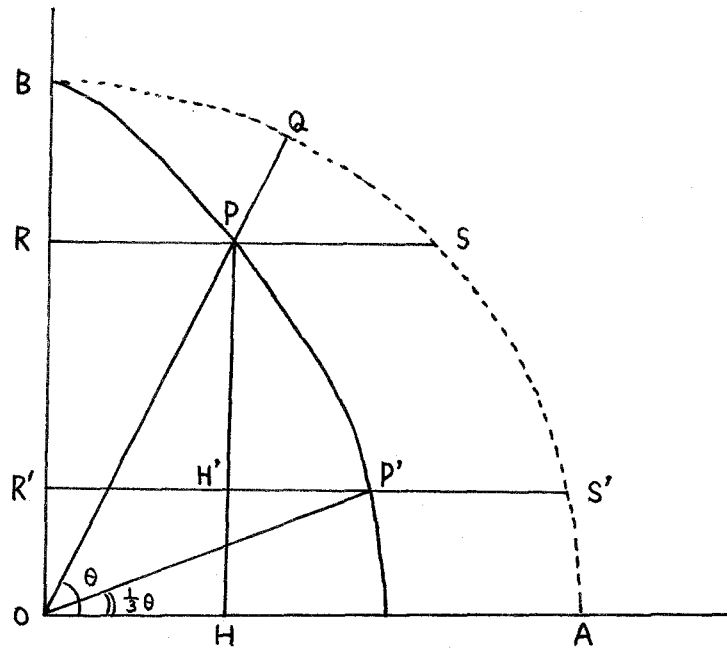
$\angle QOA$ が与えられたとき、クオドラトリックスと線分 OQ の交点を P とする。

点 P を通り OA に平行な直線を引き、図のように両端を R 、 S とする。

RO を $2:1$ に内分する点を R' とすると、 OA に平行で R' を通る直線とこの曲線の交点を P' とする。

クオドラトリックスの定義により、 $\angle POA$ を $2:1$ にわけ線分が OP' である。

よって、 $\angle P'OA = 1/3 \angle QOA$



③ コンコイドによる方法

(式) $r = a \sec \theta + 2b$ (但し、 $a < 2b$)

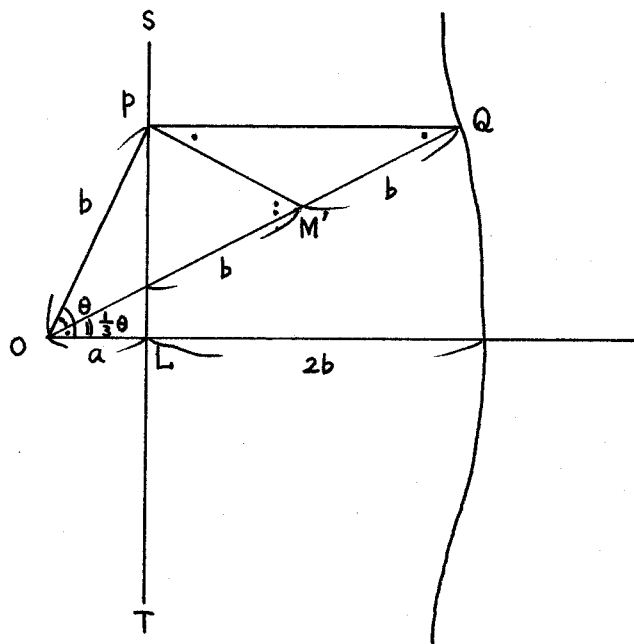
$\angle P O L$ が与えられたとき、この角を 3 等分するには $O L = a$, $O P = b$ とし
てコンコイドを書く。そして P から $O L$ に平行線を引いてこの曲線との交点を
Q とすれば、 $O Q$ は求める 3 等分線である。

(証明) $O Q$ と $M N$ との交点を A, $A Q$ の中点を M' とすれば

$$A M' = M' Q = P M' = b$$

$$\begin{aligned} \therefore O P = P M' = b \quad \therefore \angle P O Q &= \angle P M' O \\ &= 2 \angle M' P Q \\ &= 2 \angle P Q O \\ &= 2 \angle L O Q \end{aligned}$$

故に $\angle L O Q = 3 \angle L O P$



④ トリセクトリックスによる方法

<蝸牛形曲線を用いる角の三等分法>

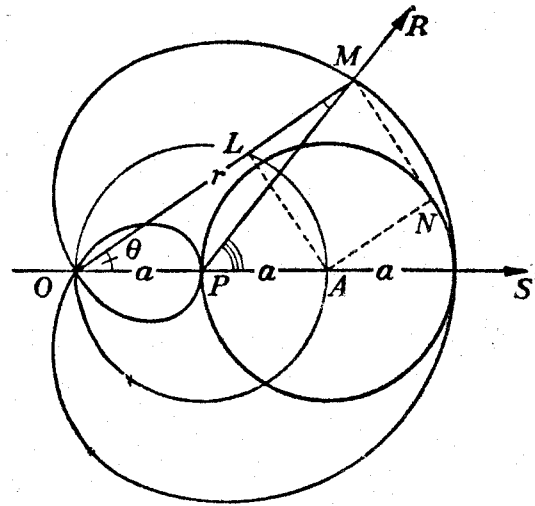
(方法1) <ビーベルバッハ(Bieberbach)の作図法> ([24] p121)

OS上にOからOP=PAなるように2点P, Aをとる。点Oから中心Aで半径OPの円の接線上に引いた垂線の足Mの軌跡はリマソンである。

$\angle POM = \theta$ とし点Mを極座標で表せば、 $r = a + 2a \cos \theta$

OMが中心P, 半径OPの円と交わる点をLとすると

$$\begin{aligned} PL &= OP = PA = AN = LM \\ \therefore \angle LMP &= \angle MPL = 1/2 \angle OLP \\ &= 1/2 \angle POL \\ &= 1/3 \angle SPR \end{aligned}$$



(方法2)

この曲線を使って与えられた $\angle OAP$ を3等分するには、Aを原点とし、

$OA = a$ とおけば、 $r = a(2\cos \theta + 1)$

というトリセクトリックス(リマソン)を書き、OからAPに平行線を引いてトリセクトリックスとの交点をQとすれば、AQは求める3等分線である。

$\therefore AQ = r, \angle OAQ = \theta'$

$\angle PAQ = \theta$ とおけば

$\triangle AOQ$ に正弦定理を使って

$$\frac{r}{\sin(\theta + \theta')} = \frac{a}{\sin \theta}$$

また $r = a(2\cos \theta' + 1)$ より

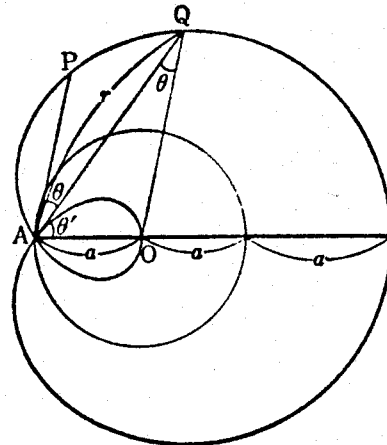
r, a を消去すれば

$$\sin \theta (2\cos \theta' + 1) = \sin(\theta + \theta')$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\theta' - \theta)$$

$$\therefore \theta' = 2\theta$$

([19] p493)



⑤ アルキメデスの螺線による方法

(式) $r = a\theta$

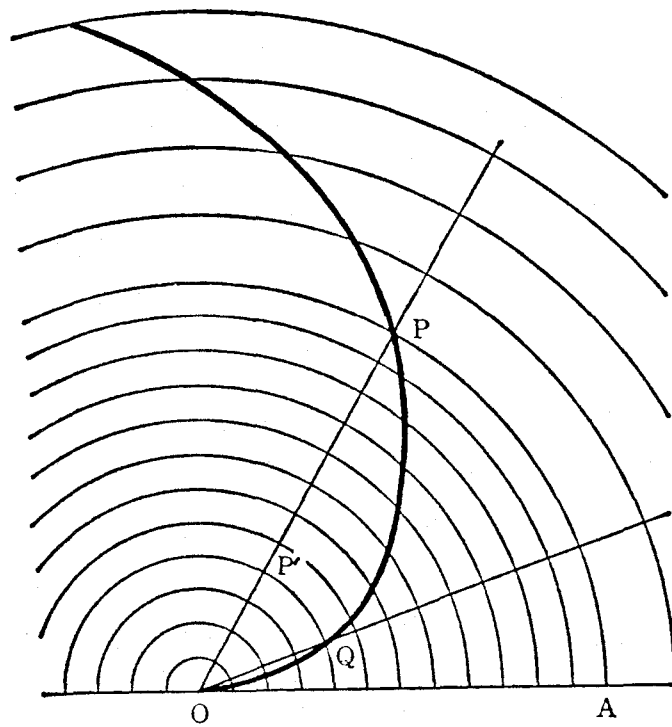
図で、 O が極点であり、 P が曲線上の点であって、 OA が角度を測る基線であるとすれば、 OP は $\angle POA$ に比例している。

ここで $\angle POA$ を三等分するとき、 OP の長さを三等分して

$OP' = (OP)/3$ である点 P' を定め、 O を中心にコンパスで OP' の長さを曲線上の点 Q に移せば、 $OQ = OP'$ であるから、

$\angle QOA$ は $\angle POA$ の3分の1になる。([31] p266)

(図)



⑥ アルキメデスの螺線による方法

この曲線は極座標では

$$r = a\theta \quad (a \text{ は定数})$$

Oを原点として始線と反対の方向と曲線

との交点をPとすれば

$$OP = a\pi$$

またPにおける接線とOで始線に立てた垂線

との交点をAとし、APとOPとのなす角を

α とすれば

$$OA/OP = \tan\alpha = r/r'$$

$$r' = dr/d\theta = a \text{ より}$$

$$OA/OP = \pi$$

よって π が2つの線分の比で表されたから、

円積問題を解くことができる。

(備考) $\tan\alpha = r/r'$ の証明

点P(r, θ)より

$$x = r \cos\theta \quad dx/d\theta = r' \cos\theta - r \sin\theta$$

$$y = r \sin\theta \quad dy/d\theta = r' \sin\theta + r \cos\theta$$

$$\text{今 OPの傾き } m_1 = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\text{PTの傾き } m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r' \sin\theta + r \cos\theta}{r' \cos\theta - r \sin\theta}$$

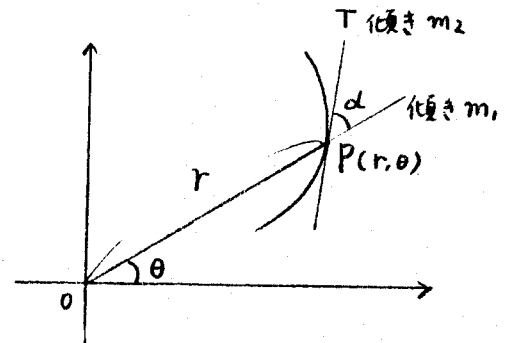
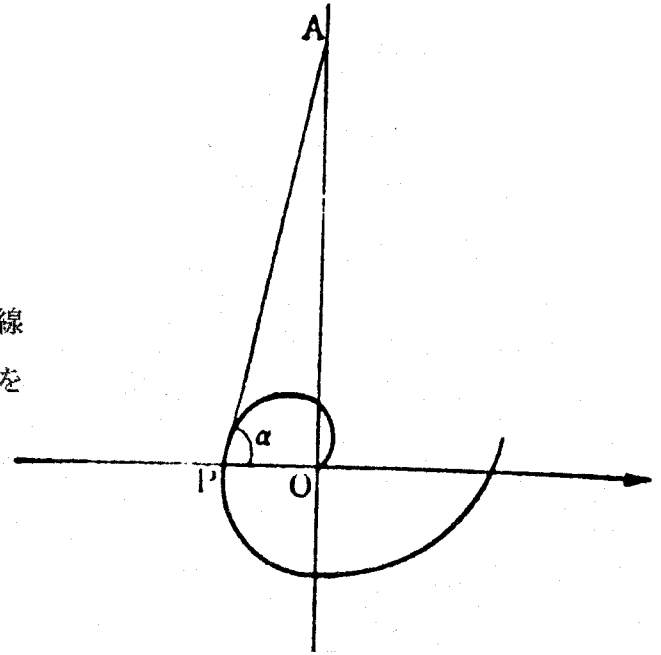
$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\tan(\arctan m_2) - \tan(\arctan m_1)}{1 + \tan(\arctan m_1) \cdot \tan(\arctan m_2)}$$

$$= \frac{\frac{r' \sin\theta + r \cos\theta}{r' \cos\theta - r \sin\theta} - \tan\theta}{1 + \tan\theta \cdot \frac{r' \sin\theta + r \cos\theta}{r' \cos\theta - r \sin\theta}}$$

$$= \frac{\frac{r' \sin\theta + r \cos\theta - \tan\theta (r' \cos\theta - r \sin\theta)}{r' \cos\theta - r \sin\theta}}{\frac{(r' \cos\theta - r \sin\theta) + \tan\theta (r' \sin\theta + r \cos\theta)}{r' \cos\theta - r \sin\theta}}$$

$$= \frac{r(\cos\theta + \sin\theta \tan\theta)}{r'(\cos\theta + \sin\theta \tan\theta)}$$

$$= \frac{r}{r'}$$



第2章 座標から見た曲線

歴史上、研究対象とされた有名な曲線を式表示を分類基準にして網羅することを試みた。大きくは、 x, y 直交座標を用いて x, y についての方程式表示、極座標での極方程式表示、それぞれの座標平面での媒介変数表示、となっている。当然これらの分類は、そこに属する曲線それぞれの性質を反映していることになる。ただし、各曲線の式からすればあくまでも一つの性質であって、例えばコンコイドは定義からただちに極方程式 $r = a \sec \theta + b$ が得られるが、4次の代数曲線でもある。サイクロイド系（輪転曲線）の曲線は媒介変数のみが自然なものもあれば、簡単な極方程式に表されるものもあり、単純な代数方程式で表されるものもある。

本論は、微分法積分法の出現・展開との関連を一つの主題にしており、代数曲線としての視点での話題はこの後の章にはない。いわば解析幾何学としての曲線の探求は取り上げていないことになり、円錐曲線についての内容豊かな諸関係は、微分・積分とかかわる話題も多いとはいえ対象としなかったことになる。

§ 1. 代数曲線と超越曲線の式表示

この章では、歴史的に有名な曲線を方程式からながめてみることにする。
曲線の方程式を知っていろいろな性質やお互いの関連性などを調べてその概形を書くことにする。

(1) 代数曲線

ここでは、第1章、第3章以降に表れる曲線を分類する。また、1次曲線、2次曲線は省くことにする。

(ア) 3次曲線

①ディオクレスのシツソイド (Diocles cissoid) 別名. 疾走線

$$(式) y^2 = -x^3 / (x - a) \quad (但し \ a > 0)$$

(曲線) p 6 参照

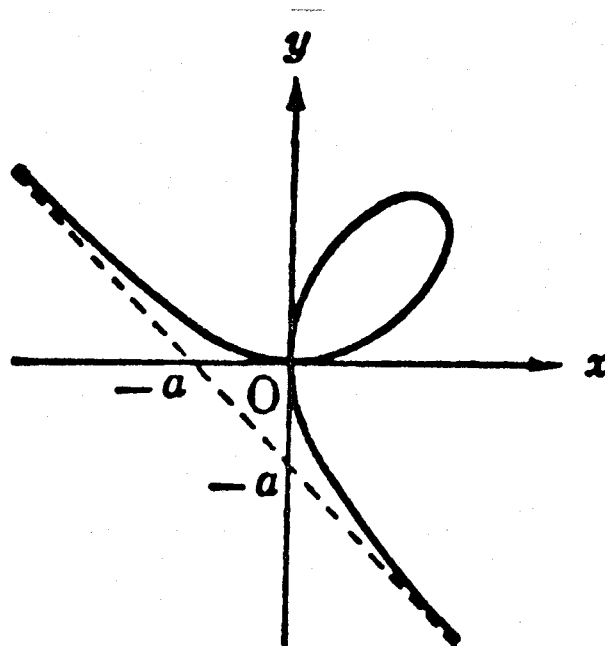
②デカルトの正葉線 (Folium of Descartes)

$$(式) ① \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$② \quad x = 3 \sin \theta \cdot \cos^2 \theta / (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) \quad (但し \ 0 \leq \theta < 2\pi, \\ y = 3 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta / (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) \quad \theta \neq (3/4)\pi, (7/4)\pi)$$

$$③ \quad x = 3t / (1 + t^3) \\ y = 3t^2 / (1 + t^3)$$

(曲線)



③アーネシのウィッチ (Agnesi witch) 別名. 迂弛線

(定義)

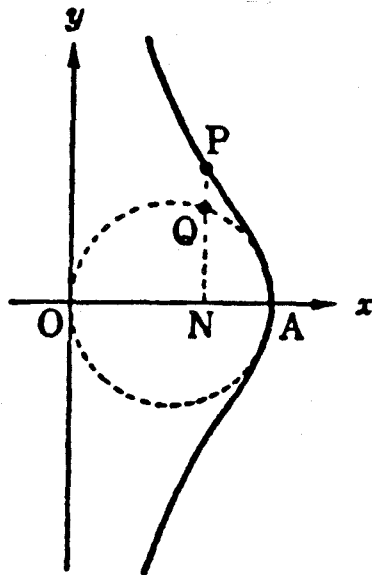
OA上に1点Nをとり、Nを通りy軸に平行な直線の第1象限内にある部分が
曲線およびOAを直径とする円と交わる点をP、Qとすれば

NP : NQ = OA : ONとなる点Pの軌跡

(式) OA = cとする

$$y^2 = c^2(c - x) / x \quad (\text{但し } c > 0)$$

(曲線)

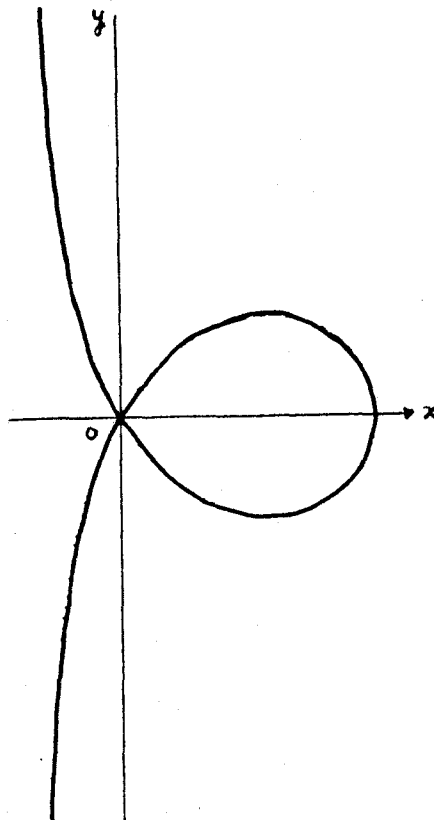


④マクローリンの3等分曲線

(式) ① $(x + a)y^2 = x^2(3a - x)$

② $r = 4a \cos \theta - a \sec \theta$

(曲線) (p48 参照)

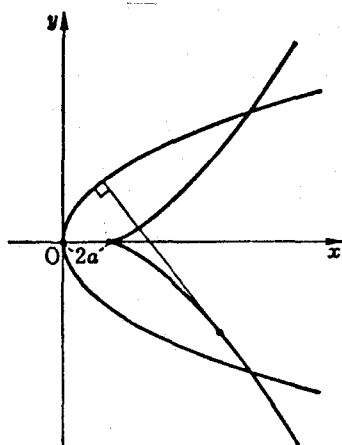


⑤半三次放物線

(式) ① $27 a y^2 = 4(x - 2a)^3$ (備考. $y^2 = 4ax$ の縮閉線) (p 52 参照)

② $x = a(3t^2 + 2)$

$y = -2at^3$



(イ) 4次曲線

①ニコメデスのコンコイド (Nicomedes chonchoid)

(式) ① $b^2 x^2 = (x - a)^2 (x^2 + y^2)$

② $r = a \sec \theta \pm b$

(曲線) p 6 を参照

②リマソン

(式) $r = a + 2a \cos \theta$

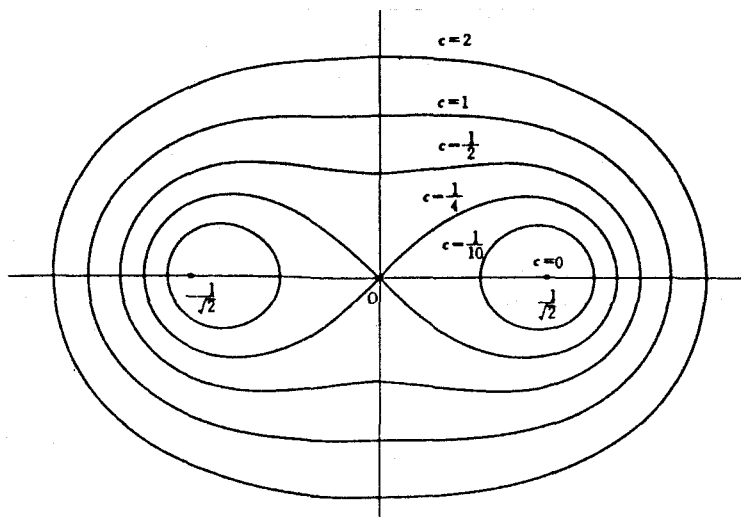
(曲線) p 9 を参照

③カッシニの曲線

(定義) 2 定点からの距離の積が一定であるような点の軌跡

(式) $(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = c^4$ ($c > 0$)

(曲線)



(ウ) その他の4次曲線 ([28] pp 181~182)

① カッパ-曲線 (kappa curve)

(式) $r = a \tan \theta$, $y^2(a^2 - x^2) = x^4$ (図1)

② 双葉形 (bifolium)

(式) $r = a \cos^2 \theta \cdot \tan \theta$, $(x^2 + y^2)^2 = a x^2 y$ (図2)

③ ラ-メの4次曲線 (Lame's special quartic)

(式) $x^4 + y^4 = a^4$ (図3)

④ アーク灯 (arclight curve)

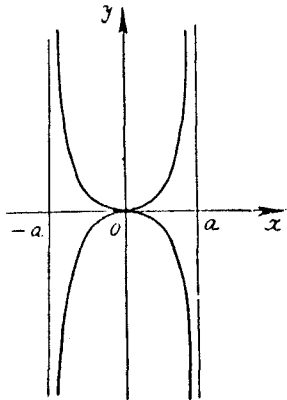
(式) $x^2 y^2 + a^2(x^2 - y) = 0$ (図4)

⑤ 十字形 (cruciform curve)

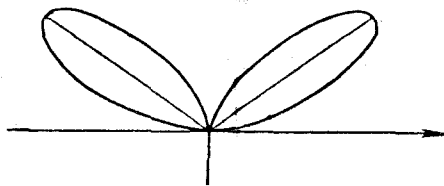
(式) $x^2 y^2 - a^2(x^2 - y^2)^2 = 0$ (図5)

⑥ 乙ま (top)

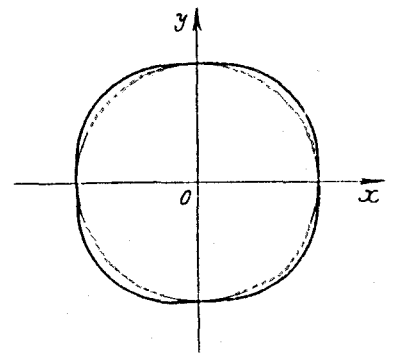
(式) $y^4 - 2a y^3 + a^2 x^2 = 0$ (図6)



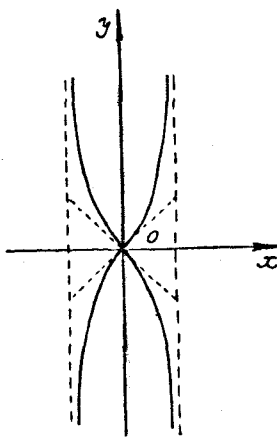
(図1)



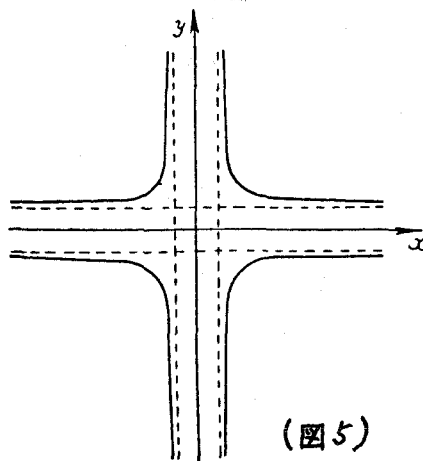
(図2)



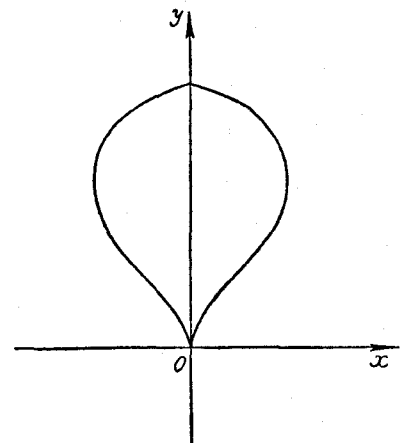
(図3)



(図4)



(図5)



(図6)

(2) 超越曲線

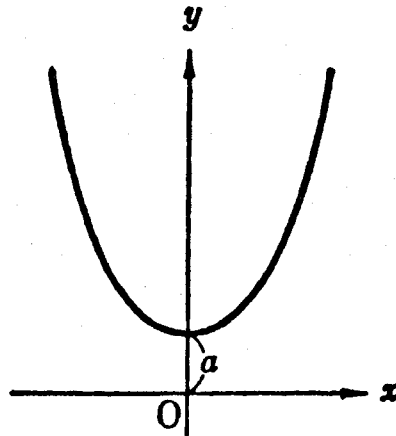
①カテナリー (catenary) 別名. 懸垂線

(式) $y = a/2(e^{x/a} + e^{-x/a})$

(性質) 伸開線はトラクトリックス (追跡線)

放物線の輪転曲線である。

(曲線)



②トラクトリックス (tractrix) 別名. 追跡線 , 犬線

(式) $y = a \log((a \pm \sqrt{a^2 - x^2}) / x) + \sqrt{a^2 - x^2}$

(曲線) p 8 を参照

③クオドラトリックス (quadratrix) 別名. 円積曲線

(式) $x = y \tan(\pi x / 2a)$

(曲線) p 5 を参照

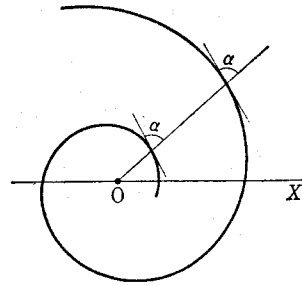
④対数螺線（別名．等角螺線、ベルヌーイの螺線）

(式) $r = k \cdot e^{a\theta}$ (a, k は正の定数)

(性質) 動径と接線のなす角 α は、

$\tan \alpha = 1/a$ だから一定である。

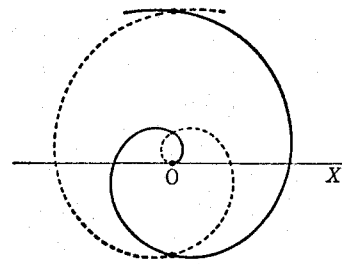
(曲線)



⑤アルキメデスの螺線

(式) $r = a\theta$

(曲線)

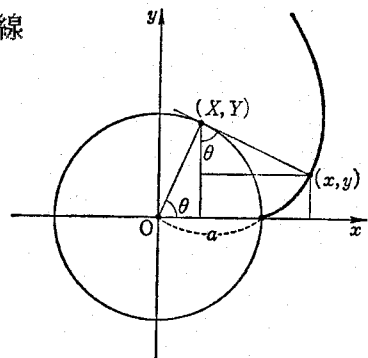


⑥円の伸開線

(定義) 円 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$ に巻いた
糸をピンと張りながら離していった曲線

(式) $\begin{cases} x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$

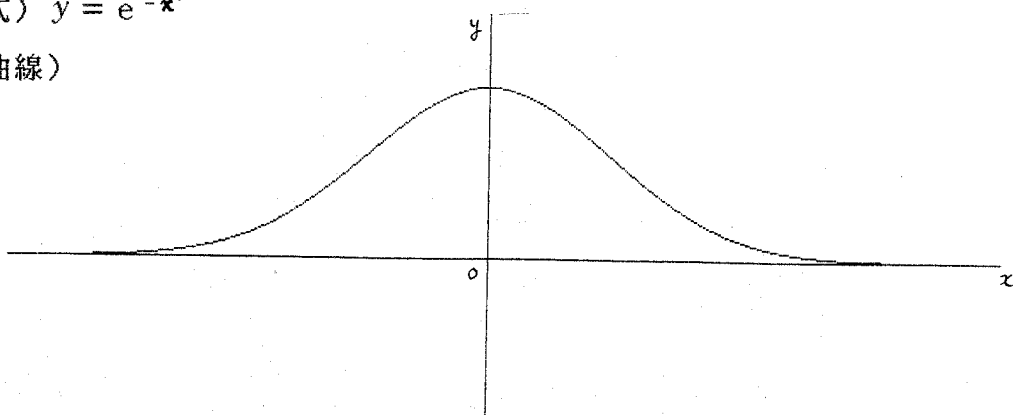
(曲線)



⑦確率曲線（正規曲線）

(式) $y = e^{-x^2}$

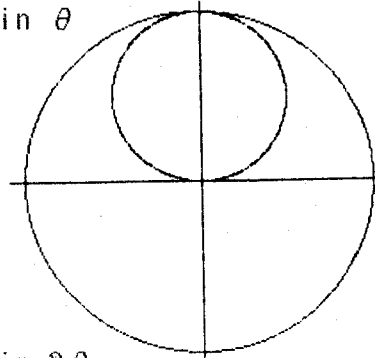
(曲線)



§ 2. 極方程式表示

(1) ばら曲線

① (式) $r = \sin \theta$



一般に $r = \sin n\theta$ のとき

n : 偶数のとき $2n$ 個のloopからなる

n : 奇数のとき n 個のloopからなる

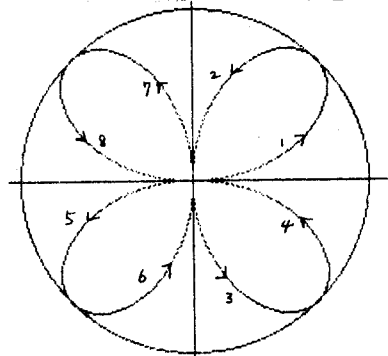
これらの曲線は18世紀の初め頃

Abbe Grandi によって研究された。

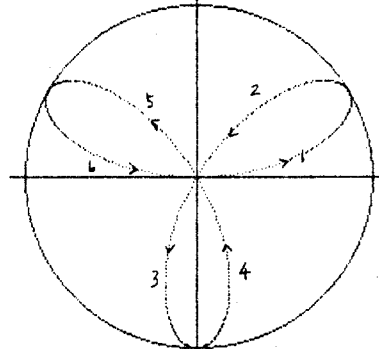
これらをRhodoneae (ばら族)と呼ぶ

② (式) $r = \sin 2\theta$

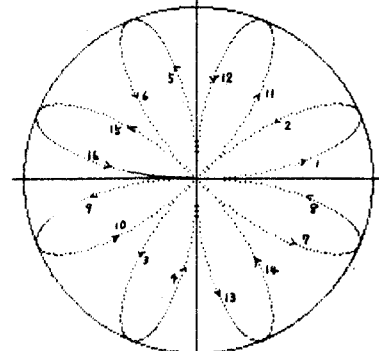
([28] pp175~177)



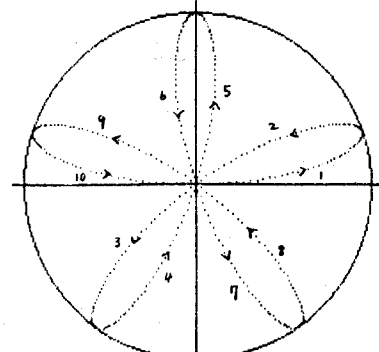
③ (式) $r = \sin 3\theta$



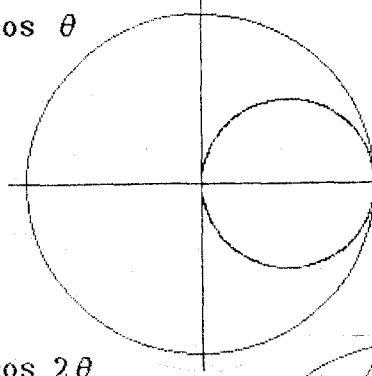
④ (式) $r = \sin 4\theta$



⑤ (式) $r = \sin 5\theta$



⑥ (式) $r = \cos \theta$



一般に $r = \cos n\theta$ のとき

n : 偶数のとき $2n$ 個の loop からなる

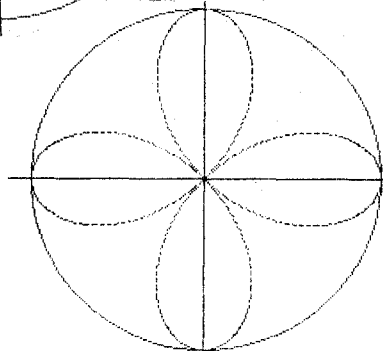
n : 奇数のとき n 個の loop からなる

(注) $r = a \cos n\theta$ のグラフは

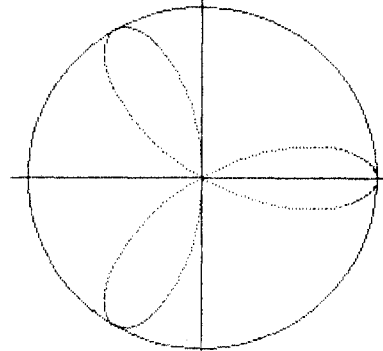
極を中心に $\pi/2n$ だけ回転すれば

$r = a \sin n\theta$ と同じになる

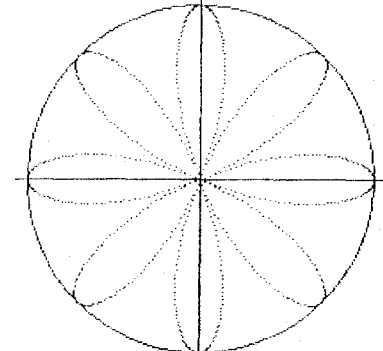
⑦ (式) $r = \cos 2\theta$



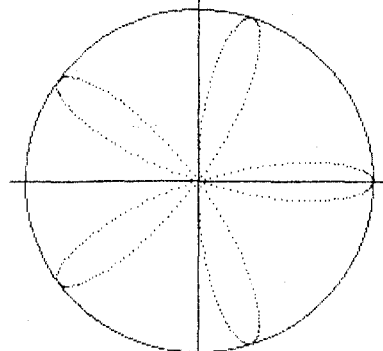
⑧ (式) $r = \cos 3\theta$



⑨ (式) $r = \cos 4\theta$



⑩ (式) $r = \cos 5\theta$

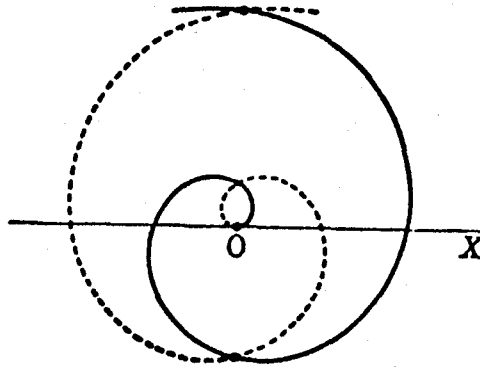


(2) 螺線

① アルキメデスの螺線

(式) $r = a\theta$

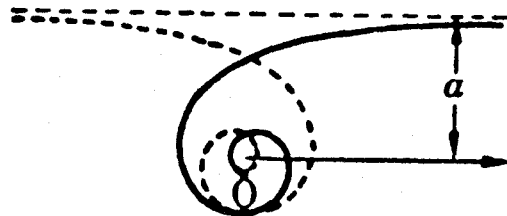
(曲線)



② 双曲螺線 (Reciprocal spiral)

(式) $r = a / \theta$

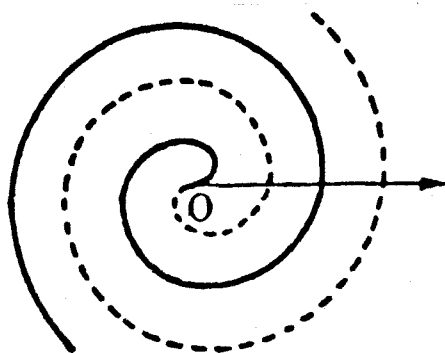
(曲線)



③ フェルマーの螺線 (Parabolic spiral)

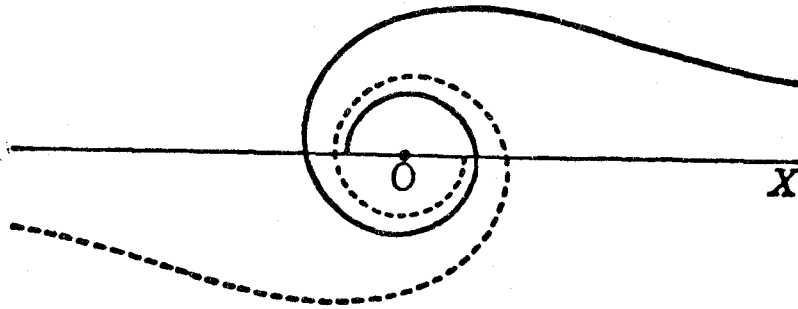
(式) $r^2 = a^2\theta$

(曲線)



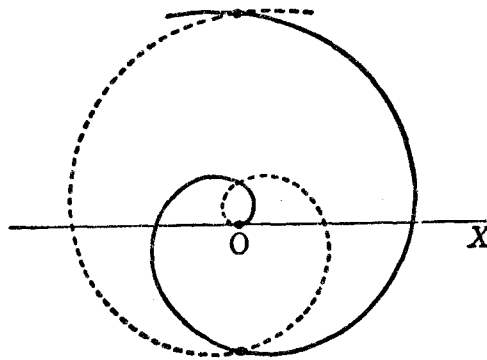
④オイラーの螺線 別名、リトース クロソイド、コルニユーの螺線

(式) $r^2 = a^2 / \theta$



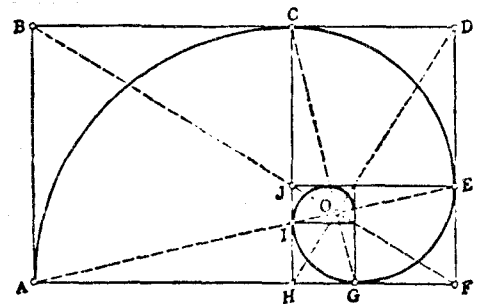
⑤ベルヌーイの対数螺線 別名、等角螺線

(式) $r = k \cdot e^{a\theta}$



⑥黄金螺線

黄金長方形ABOFから正方形ABCHを取り去ると、ふたたび小さい黄金長方形CDFHが残る。この小さい長方形CDFHからまた正方形を取り去ると、さらに小さい黄金長方形が残る。この手続きを無限に続行すると長方形HJEFはもとのABDFと相似の位置にあり、Jは対角線BF上にある。実際4直線AE, BF, CG, DH上には、すべての黄金長方形のあらゆる頂点がついていることがわかる。点J, H, F, D, Bは1つの対数螺線上にある。([7] pp172~173)



(3) その他の曲線

①パスカルのリマソン (limacon) 別名. 蝸牛線

(式) $r = a \cos \theta + b$

(曲線) p 9 を参照

②カージオイド (cardioid) 別名. 心臓形

(備考) この曲線はリマソンの一種

(式) $r = 2b (1 - \cos \theta)$

(曲線) p 7 を参照

③ベルヌーイのレムニスケート (Bernoulli lemniscate) 別名. 連珠形

(備考) カッシニの卵形線 (Cassini's oval) の一種

(式) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

(曲線) p 9 を参照

④ディオクレスのシッソイド (Diocles cissoid) 別名. 疾走線

(式) $r = a \sin \theta \cdot \tan \theta$

(曲線) p 6 を参照

⑤ニコメデスのコンコイド (Nicomedes chochoid)

(式) $r = a \sec \theta \pm b$

(曲線) p 6 を参照

§ 3. 媒介変数表示

(1) 輪転曲線

① サイクロイド

$$(式) x = a (\theta - \sin \theta)$$

$$y = a (1 - \cos \theta)$$

(曲線) p 7 を参照

② カージオイド

$$(式) x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta$$

$$y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta$$

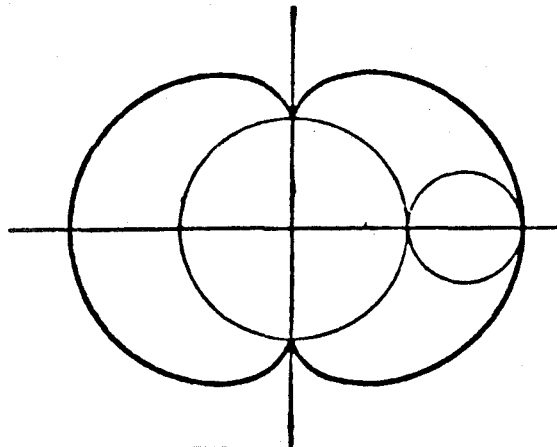
(曲線) p 7 を参照

③ ネフロイド

$$(式) x = 3a \cos \theta - a \cos 3\theta$$

$$y = 3a \sin \theta - a \sin 3\theta$$

(曲線)

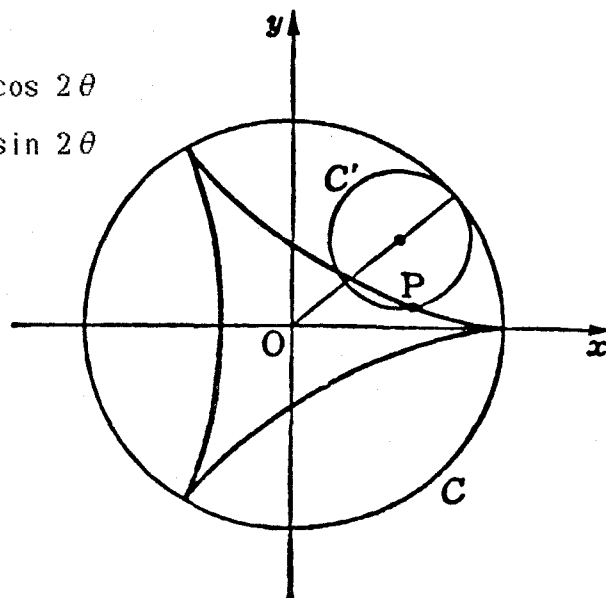


④ デルトイド

$$(式) x = 2a \cos \theta + a \cos 2\theta$$

$$y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta$$

(曲線)



⑤アステロイド

(式) $x = 3a \cos \theta + a \cos 3\theta$

$y = 3a \sin \theta - a \sin 3\theta$

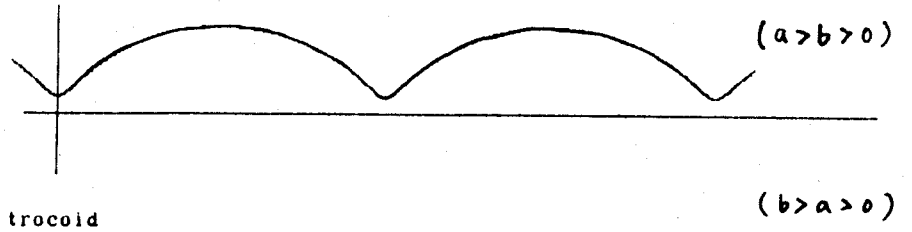
(曲線) p 8 を参照

⑥トロコイド

(1)サイクロイド

$x = a\theta - b \sin \theta$

$y = a - b \cos \theta$

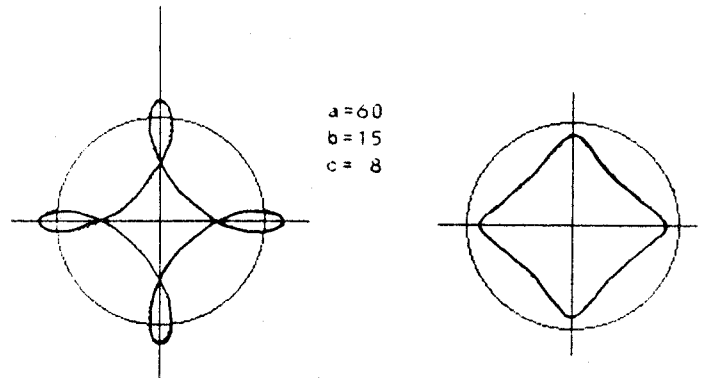


(2)内サイクロイド (hypocycloid)

$x = (a-b)\cos \theta + c\cos((a-b)/b)\theta$

$y = (a-b)\sin \theta - c\sin((a-b)/b)\theta$

a=60
b=15
c=25

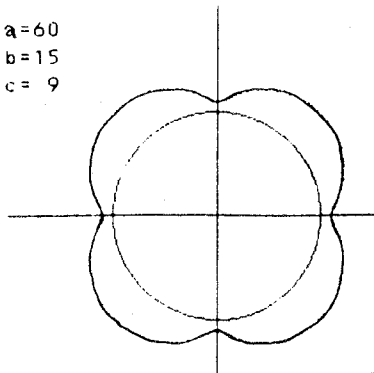


(3)外サイクロイド (epicycloid)

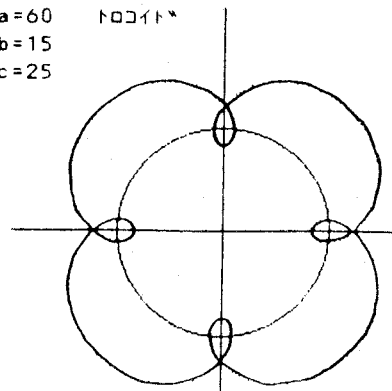
$x = (a+b)\cos \theta - c\cos(a+b/b)\theta$

$y = (a+b)\sin \theta - c\sin(a+b/b)\theta$

a=60
b=15
c=9



a=60
b=15
c=25



第3章 包絡線

直線の包絡線として双曲線のアーチを型取る技術は古くからあったという。この章では、「いろいろな曲線」を直線群の包絡線として「作図する」方法について列記する。後半では、円群の包絡線としての作図法についても記す。もちろんこの場合の作図は定規とコンパスによる作図法とは意味が異なる。この章には、作図法とは違う包絡線に係わることも含めてある。内サイクロイドを作る輪転円の直径の包絡線として半分の大きさの輪転円の内サイクロイドが得られる。このことは第5章で統一的に論ずる。なお、記述は曲線群とその包絡線を曲線名を項目として記し、その図をかかげ、計算による説明や長くなる証明は、それ自身興味あるもの 筆者の工夫点のあるものなどを主にして、章のあとの部分にまとめた。このことは第1章、第5章、第6章を除く他の章についても同じである。

包絡線の一覧表

§ 1 直線群の包絡線 (p 32 ~ p 34)

1. サイクロイド 回転円の直径の包絡線
2. カージオイド 円周上を同じ向きに運動する2点P, QがあってPの角速度がQの角速度の2倍であるときの直線PQの包絡線
3. アステロイド $x y$ 軸に、はさまれる部分の長さが一定な線分の包絡線
4. デルトイド
 - ①定円に内接する半径 $2/3$ の円の直径の包絡線
 - ②円周上を反対向きに運動する2点P, Qが両端にあってPの角速度がQの角速度の2倍であるときの直線PQの包絡線
 - ③定三角形のシムソン線の包絡線

§ 2 円群の包絡線 (p 35 ~ p 39)

1. カージオイド 定円周上の点Pを中心とし、円周上の定点Aを通る円群の包絡線
2. リマソン 定円周上の点Pを中心とし、定点Aを通る円の包絡線
3. ネフロイド 定円周上の点Pを中心とし、その円の中心を通る直線に接する円の包絡線
4. レムニスケート 直角双曲線 $x y = 1$ 上の点Qを中心とし、原点Oを通る円の包絡線
5. 直角ストロフォイド 放物線上の点Pを中心とし、軸と準線の交点Aを通る円群の包絡線

§ 3 火線 (反射光線の包絡線) (p 40)

1. カージオイド 円周上の一点Aから発しその円周についての反射光線の火線
2. ネフロイド 平行光線の円周についての反射光線の火線

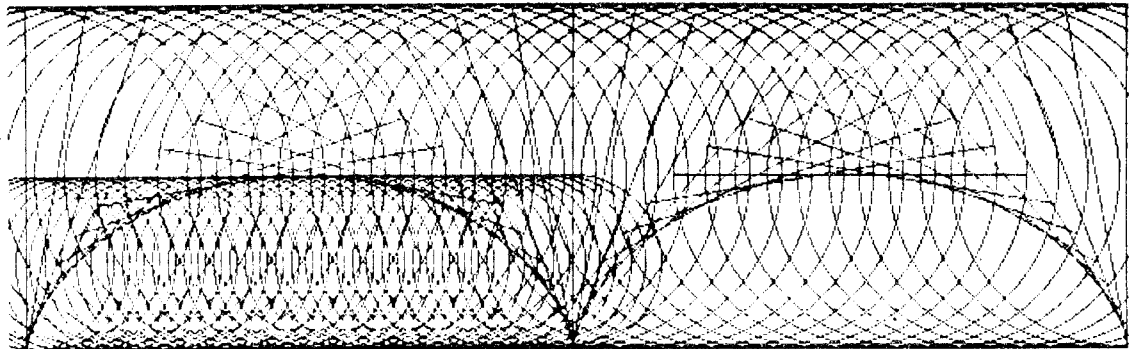
<定義> 方程式 $F(x, y, \alpha) = 0$ があるとき、 α を1つ固定させると平面曲線 C_α がきまる。 α を変化させると曲線の集合 $\{C_\alpha\}$ が得られる。この集合 $\{C_\alpha\}$ を曲線族という。

今 C_α のほかに曲線 E があって E の各点がどれかの C_α 上にあり、その点で E と C_α が互いに接しているとき、この曲線 E を曲線族の包絡線(envelope)という。

§1. 直線群の包絡線

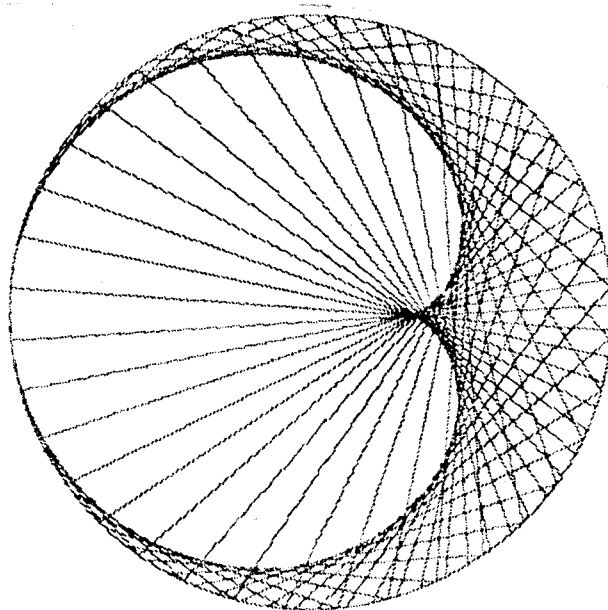
1. サイクロイド

回転円の直径の包絡線



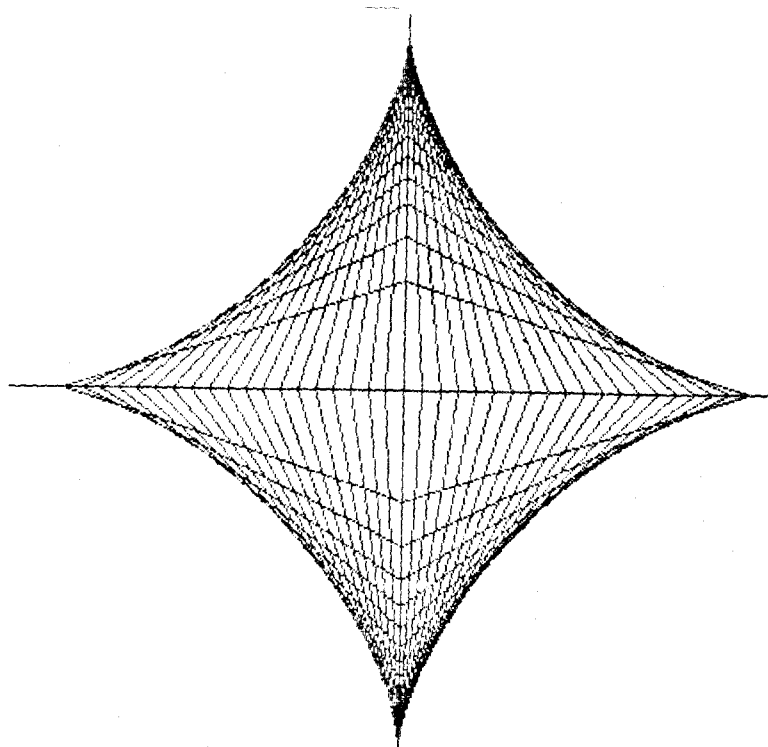
2. カージオイド

円周上を同じ向きに運動する2点P, QがあってPの角速度がQの角速度の2倍であるときの直線PQの包絡線



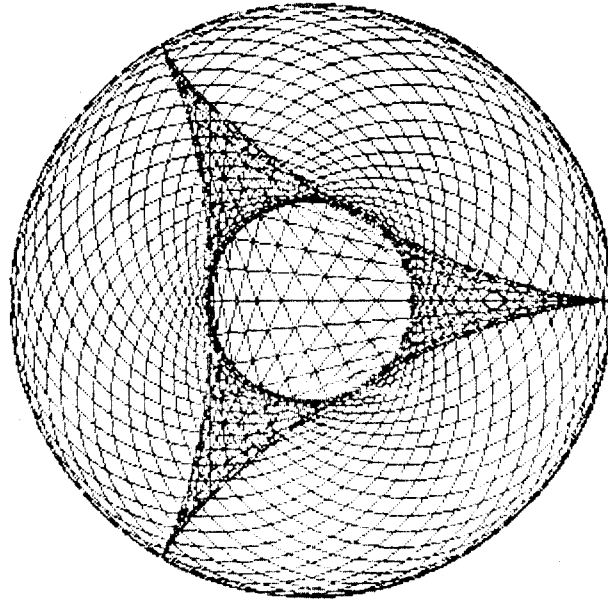
3. アステロイド

x y 軸に、はさまれる部分の長さが一定な直線の包絡線 (p 41参照)



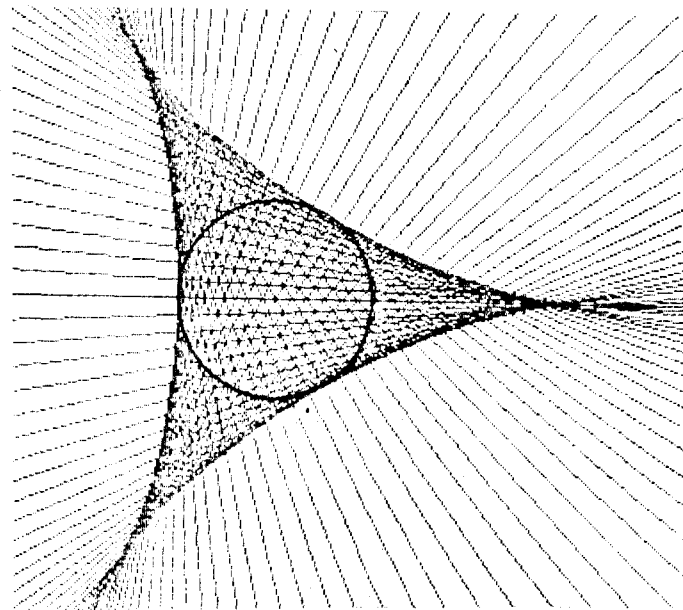
4. デルトイド

①半径 $3a$ に内接する半径 $2a$ の円の直径の包絡線



②円の直径における両端の2点をP, Qとする。

点Pより時計の反対方向に角速度 θ で動くとき、点Qは時計の方向に 2θ で動く。そのときの線分PQの包絡線

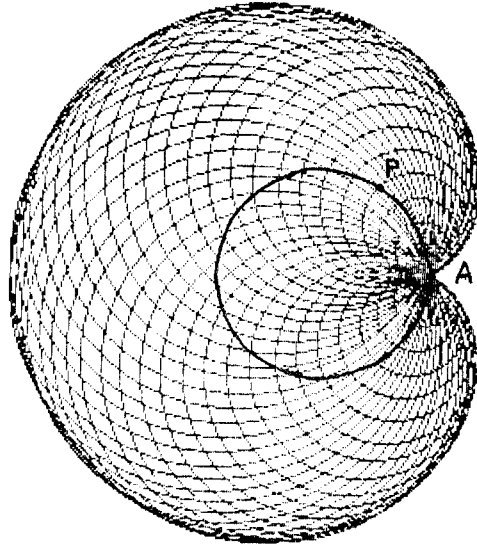


③定三角形のシムソン線の包絡線 (p 42 参照)

§ 2. 円群の包絡線

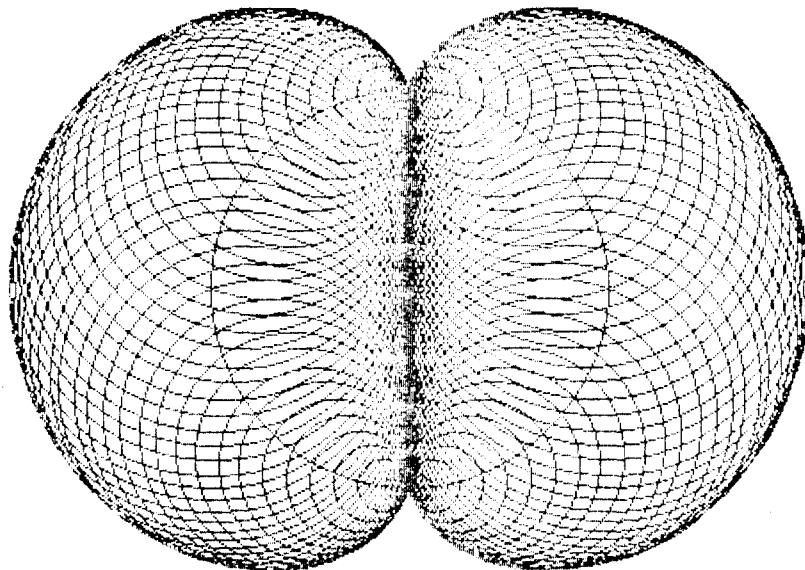
1. カージオイド

定円周上の点Pを中心とし、円周上の定点Aを通る円群の包絡線



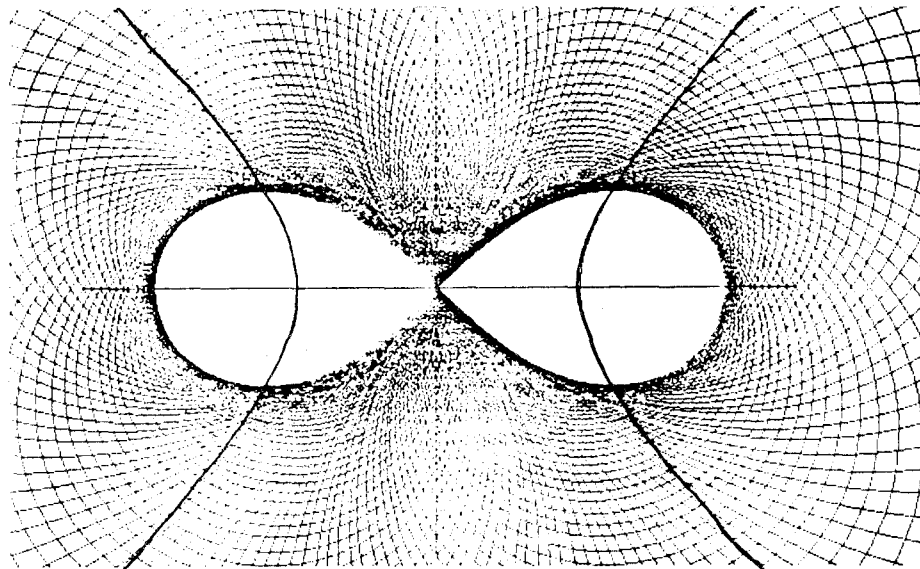
2. ネフロイド

定円周上の点Pを中心とし、その円の中心を通る直線に接する円の包絡線



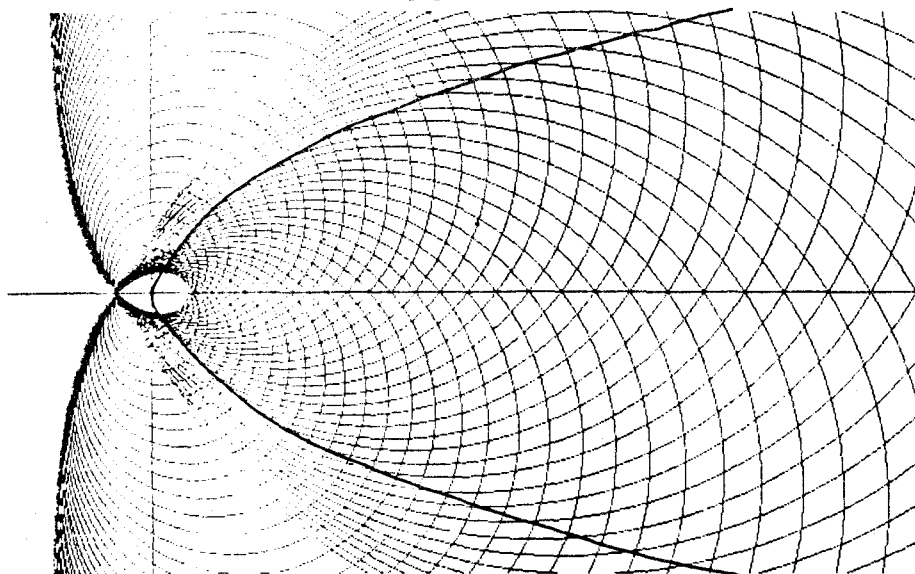
3. レムニスケート

直角双曲線 $xy = 1$ 上の点 Q を中心とし、原点 O を通る円の包絡線



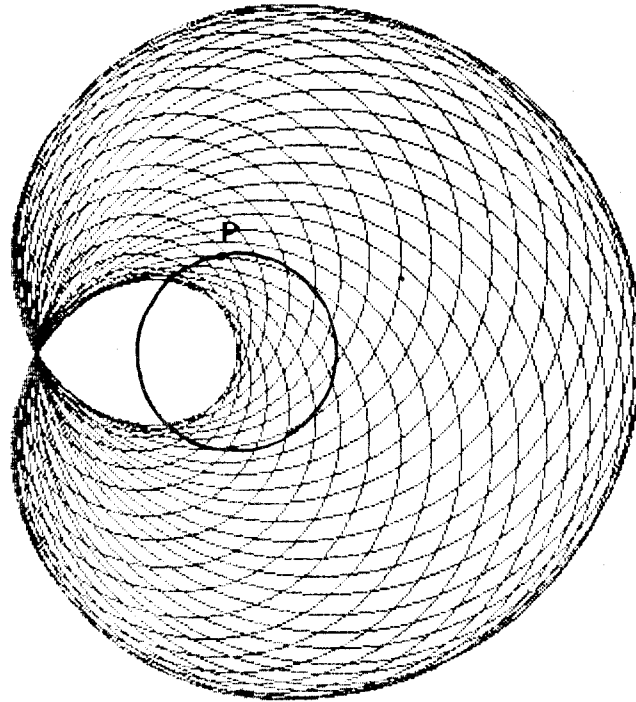
4. 直角ストロフォイド

放物線上の点 P を中心とし、軸と準線の交点 A を通る円群の包絡線



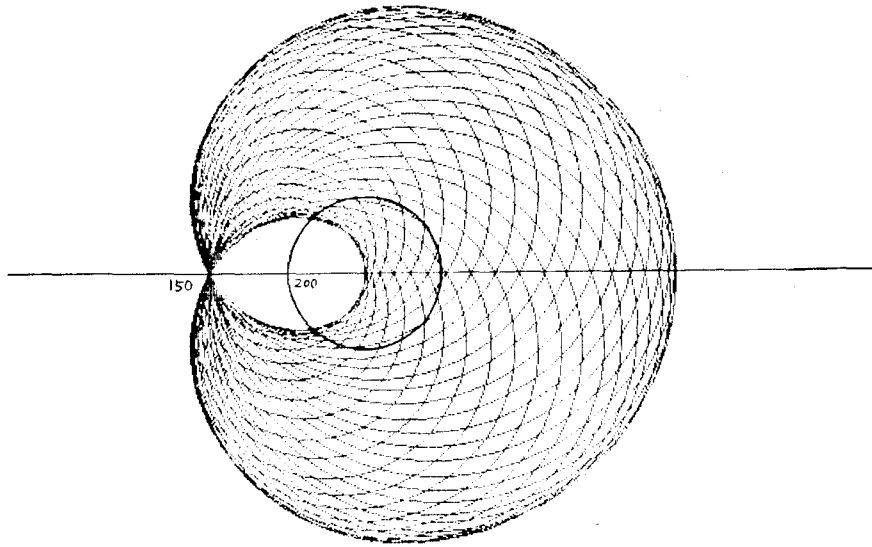
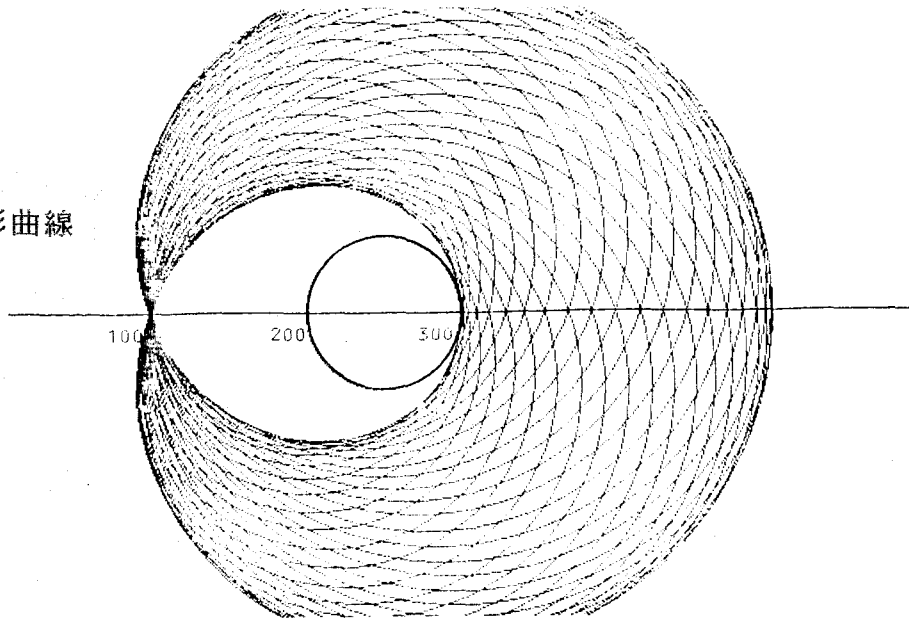
5. リマソン

定円周上の点Pを中心とし、定点Aを通る円の包絡線

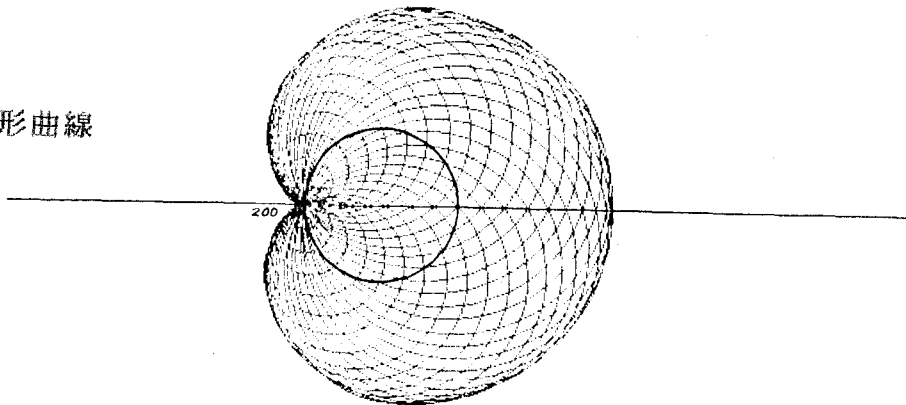


6. 上記の定点Aをいろいろと変化させたとき、定点Aの位置によってリマソンの変化していくようすを考察したものである。

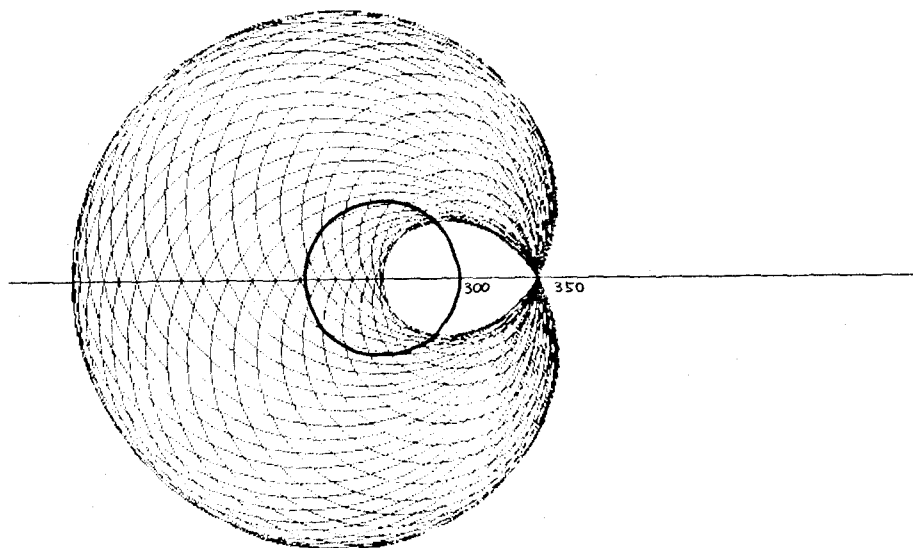
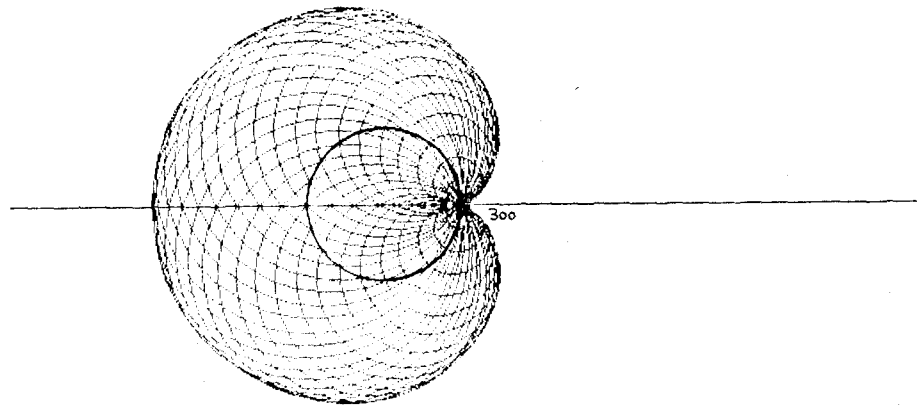
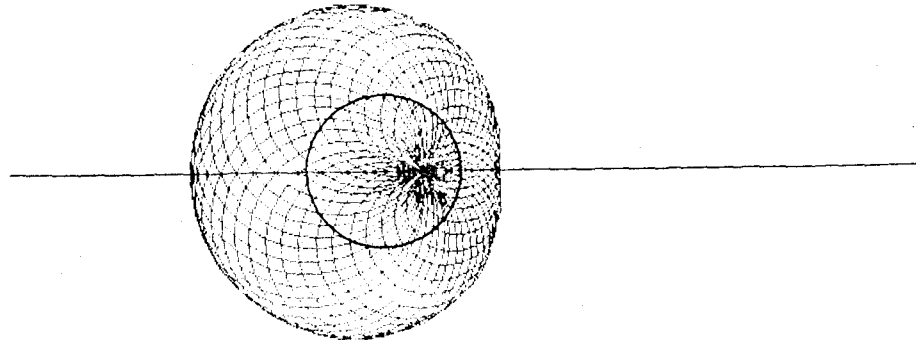
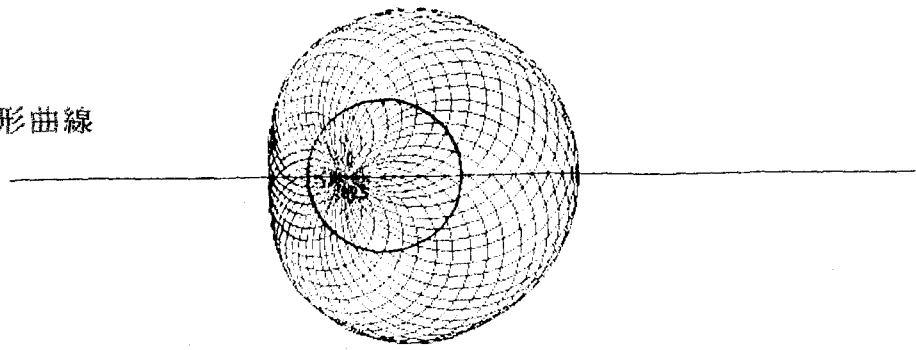
双曲的蝸牛形曲線



心臟形曲線



橢圓的蝸牛形曲線



§ 3. 火線（反射光線の包絡線）

<定義> S を与えられた曲線とし、 F を定点とする。 F から出る光線がこの曲線で反射するとき、反射光線の包絡線は、 S の火線という。

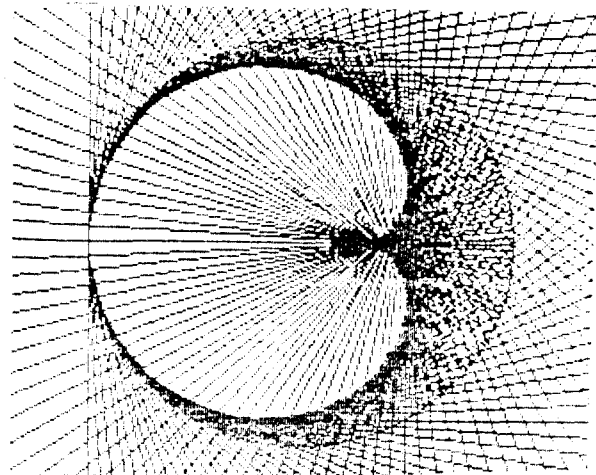
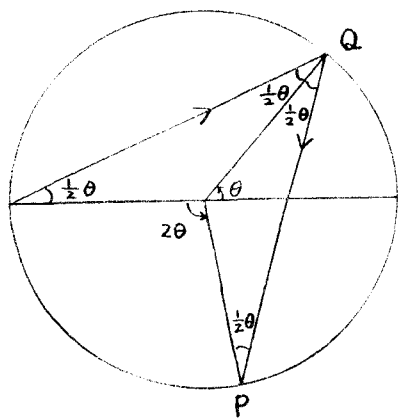
①カージオイド

円周上の一点 A から発しその円周についての反射光線の火線（p 43 説明）

（備考）§ 1. 2 と § 3. 1 のカージオイド

の作り方は、同じである

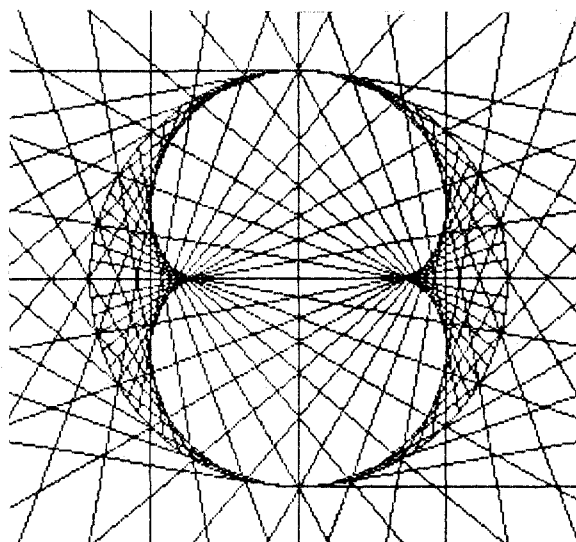
（図より明らか）



②ネフロイド

平行光線の円周についての反射光線の火線（p 44 説明）

（この現象は日常湯を入れた茶碗などで見かけられる）



x 軸とこの直線のなす角を α とすると、

直線は $y = x \tan \alpha + a \sin \alpha \quad \dots \textcircled{1}$

$$\frac{y}{a \sin \alpha} = \frac{x}{a \cos \alpha} + 1$$

$$f(x, y, \alpha) = -\frac{x}{a \cos \alpha} + \frac{y}{a \sin \alpha} - 1$$

α で微分して

$$f_{\alpha}(x, y, \alpha) = -\frac{\sin \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha} - \frac{y \cos \alpha}{a \sin^2 \alpha} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(x, y, \alpha) = f_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{より}$$

$$\textcircled{2} \text{より} \quad \frac{y \cos \alpha}{a \sin^2 \alpha} = -\frac{x \sin \alpha}{a \cos^2 \alpha}$$

$$y = -\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} x \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{を代入} \quad x \tan \alpha + a \sin \alpha = -\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} x$$

$$\left(\tan \alpha + \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} \right) x = -a \sin \alpha$$

$$\therefore x = -a \cos^3 \alpha$$

$$\textcircled{3} \text{より} \quad y = a \sin^3 \alpha$$

$$\alpha \text{を消去すれば} \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad ([33] \text{ p } 19)$$

<シムソン線>

$\triangle ABC$ の外接円上の任意の一点Pから各辺に下した垂線の足は一直線上にある。

(証明)

図のように、 $\triangle ABC$ の外接円上の任意の一点Pから各辺BC, CA, ABに下した垂線の足をD, E, Fとする。

$\triangle BPD$ において $\angle PDB = 90^\circ$

$\triangle BPF$ において $\angle PFB = 90^\circ$ より

BPを直径とする円周上にF, Dがある。

四角形BPDFは同一円周上にあるから

$$\angle BPF = \angle BDF \quad \dots\dots ①$$

$$\angle PEC = \angle PDC \quad \text{より}$$

四角形PECDは同一円周上にあるから

$$\angle EPC = \angle EDC \quad \dots\dots ②$$

$$\angle PEA = \angle PFA \quad \text{より}$$

四角形PEAFは同一円周上にあるから

$$\angle FPE = 180^\circ - \angle A \quad \dots\dots ③$$

四角形PCABは同一円周上にあるから

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle A \quad \dots\dots ④$$

③, ④より

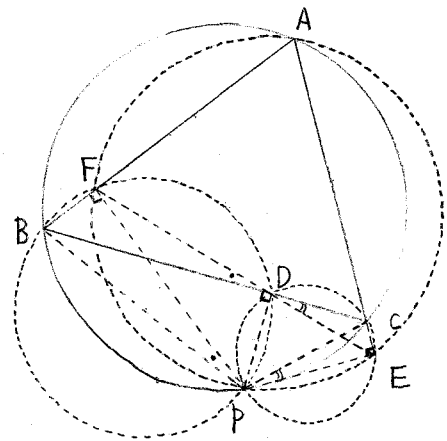
$$\angle FPE = \angle BPC$$

$$\therefore \angle EPC = \angle BPF \quad \dots\dots ⑤$$

ゆえに ①, ②より

$$\angle EDC = \angle BDF \quad \text{から}$$

E, D, Fは一直線上にある。([18] p246)



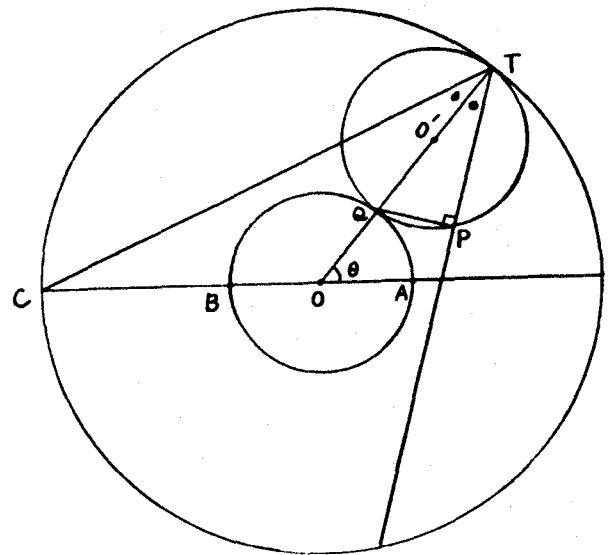
(1)円周上の定点から発する光線が再び円と交わる点で反射するとき、
 反射光線の包絡線はカージオイドである。(図 p 40)

(証明)

図で O' を中心とする円が、同じ大きさの O を中心とする円の外側を接しながら回転し、そのとき点 P は尖点を A とするカージオイド上の点である。

OO' が固定した円と Q 、回転する円と T で交わるとすると、 P は QP と直角に動き、 PT はこのカージオイドの接線になる。

O を中心、 OT を半径とする円をかき、 AB の延長との交点を C とする。このとき、光線 CT がこの円周上の T において TP にそって反射する。(∵ 弧 $AQ =$ 弧 QP)



(2) 平行光線の火線はネフロイドである。(図 p40)

(証明) 円の方程式を $x = a \cos \theta$

$$y = a \sin \theta \text{ とする。}$$

反射光線の方程式

$$y - a \sin \theta = \tan 2\theta (x - a \cos \theta)$$

$$\cos 2\theta (y - a \sin \theta) = \sin 2\theta (x - a \cos \theta)$$

$$x \sin 2\theta - y \cos 2\theta = a \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta - a \cos 2\theta \cdot \sin \theta$$

$$= a \sin(2\theta - \theta)$$

$$= a \sin \theta$$

$$\therefore x \sin 2\theta - y \cos 2\theta = a \sin \theta \dots\dots ①$$

①を θ で偏微分して

$$2x \cos 2\theta + 2y \sin 2\theta = a \cos \theta$$

$$\therefore x \cos 2\theta + y \sin 2\theta = 1/2 \cdot a \cos \theta \dots\dots ②$$

①と②より x 、 y の連立方程式を解くと

$$x = a \sin \theta \sin 2\theta + 1/2 \cdot a \cos \theta \cos 2\theta$$

$$= a/2 \cdot (2 \sin \theta \sin 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta)$$

$$= a/4 \cdot (-2 \cos 3\theta + 2 \cos \theta + \cos 3\theta + \cos \theta)$$

$$= a/4 \cdot (3 \cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$y = a/2 \cdot \sin 2\theta \cos \theta - a \cos 2\theta \sin \theta$$

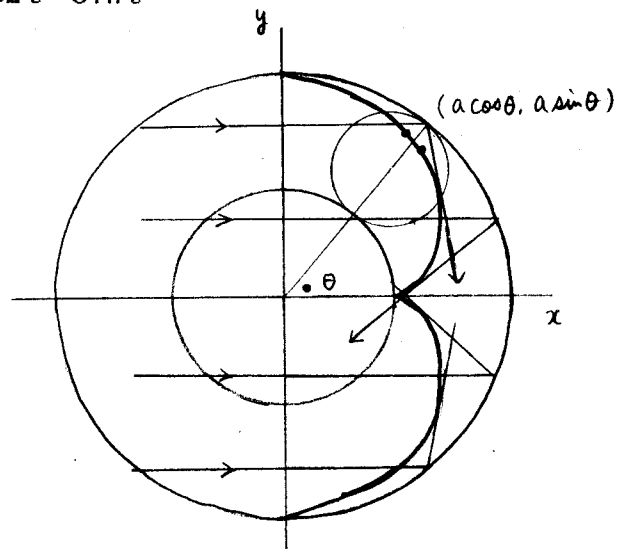
$$= a/2 (\sin 2\theta \cos \theta - 2 \cos 2\theta \sin \theta)$$

$$= a/4 (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$

よって

$$x = a/4 \cdot (3 \cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$y = a/4 \cdot (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$



これは、半径 $a/2$ の円の上を半径 $a/4$ の円が転がってできる外サイクロイドである。([28] p213, [25] p79)

第4章 垂足曲線と縮閉線

いくつかの曲線について、その法線群の包絡線すなわち縮閉線及びある点に関する垂足曲線を記した。この中のかかりのものは、微分積分学のテキストに演習問題として記されている。サイクロイドの縮閉線はそれと合同なサイクロイドである。一般に内（外）サイクロイドの縮閉線はそれと相似な内（外）サイクロイドになる。これは、媒介変数表示の式について計算して簡単に得られる。ただし、これを演習問題とした微分積分学のテキストはあまりないように思われる。その理由は、今日の解析学が、個々の曲線の軌跡としての定義などは、あまり問題としていないから、と考えられる。また、第5章の§1で、外サイクロイドのカージオイドとネフロイドの縮閉線を式での方法と初等幾何的な方法で比較してみた。

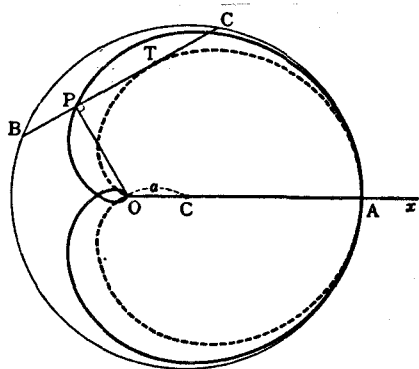
§ 1. 垂足曲線 (pedal curve)

<定義> 定点Oから定曲線Cの各点での接線へ下した垂線の足の軌跡をCのOに関する垂足曲線という

1. カージオイドの尖点に関する垂足曲線はCayleyの6次曲線 (p 59 参照)

$$x = 2a(1 + \cos\theta)\cos\theta \quad \text{-----} \rightarrow \quad r = 4a\cos^3(\theta/3)$$

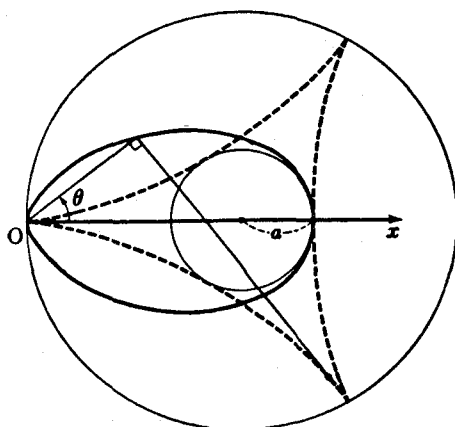
$$y = 2a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$



2. デルトイドの尖点に関する垂足曲線は $r = 4a\cos^3\theta$

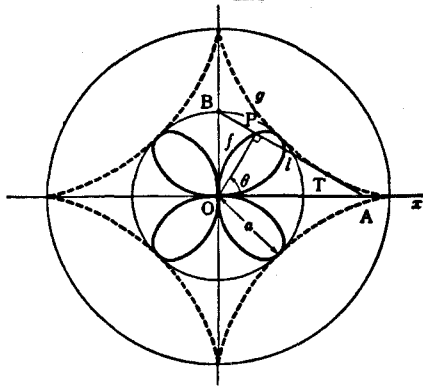
$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta \quad \text{-----} \rightarrow \quad r = 4a\cos^3\theta$$

$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$



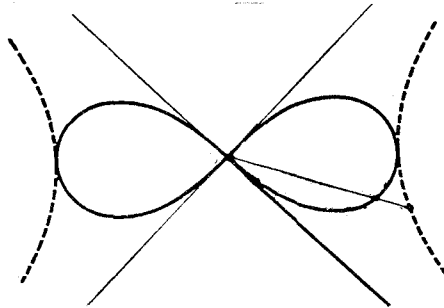
3. アステロイドの原点に関する垂足曲線は、ばら曲線である

(式) $x = a \cos^3 \theta$ \dashrightarrow $r = 1/2 a \sin 2\theta$
 $y = a \sin^3 \theta$

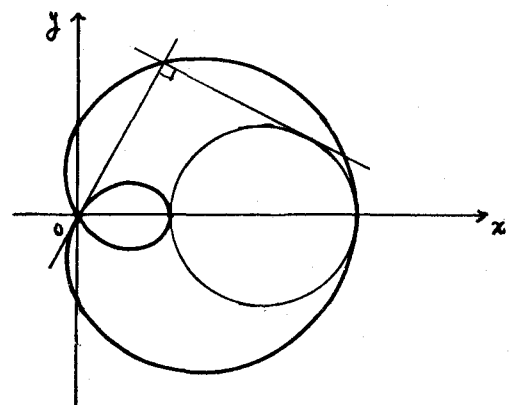
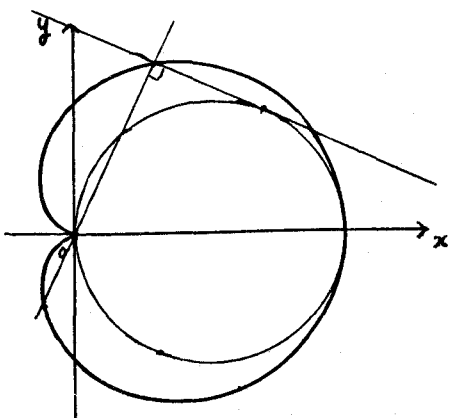


4. 直角双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ の原点 O に関する垂足曲線はレムニスケートである

(式) $x^2 - y^2 = a^2$ \dashrightarrow $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$



5. 円 $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ ($a, b > 0$) の原点に関する垂足曲線はリマソンである。特に円周上の点 A に関する垂足曲線はカージオイドである (p 66 参照)



6. 放物線 $y^2 = 4a(x - b)$ の原点 O に関する垂足曲線

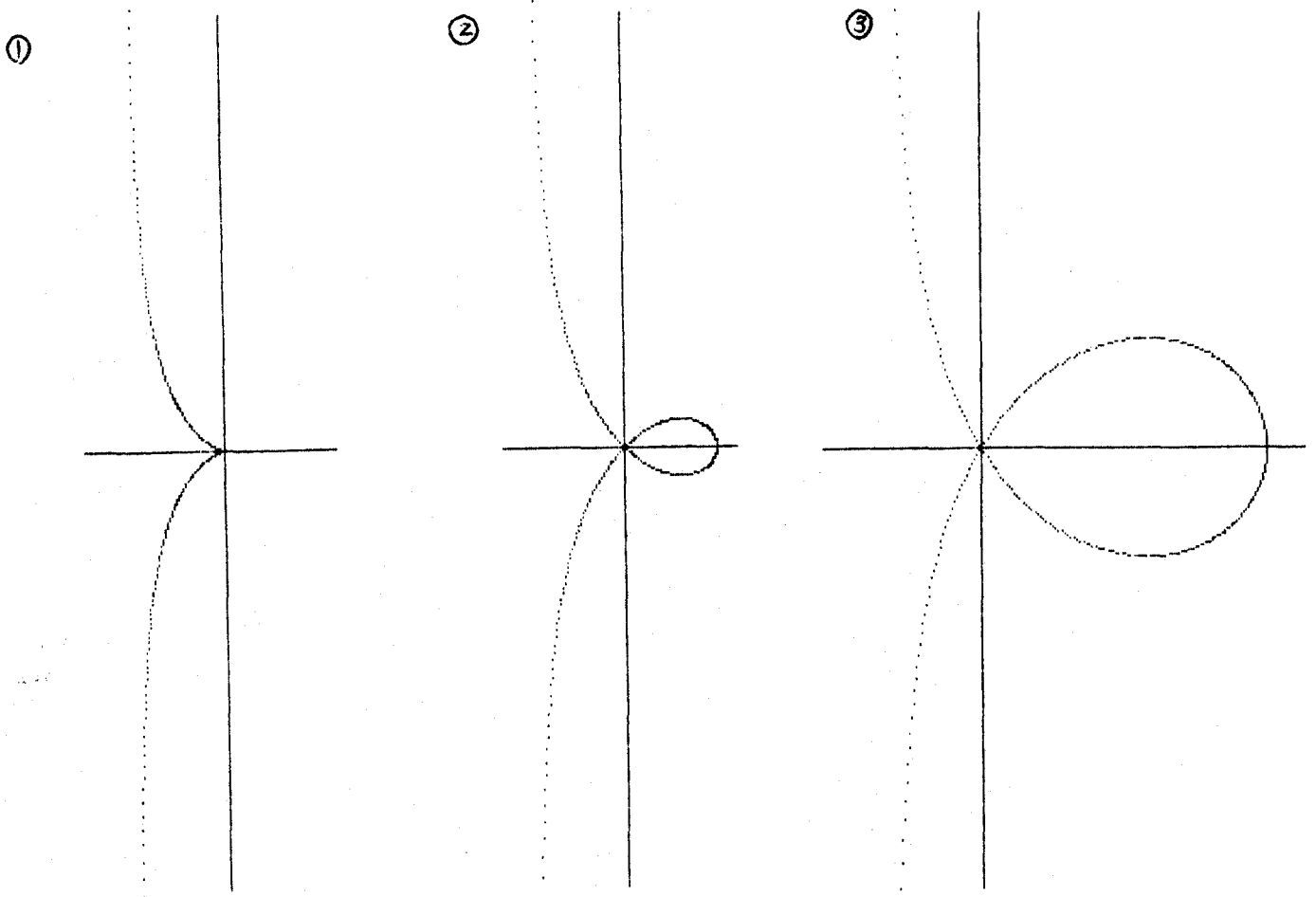
垂線の足 P の極座標を (r, θ) とし、直線 $l: x \cos \theta + y \sin \theta = r$ が g に接する条件から f の極方程式として

$$\begin{aligned} r &= b \cos \theta - a \sin \theta \cdot \tan \theta \\ &= b \cos \theta - a \sin^2 \theta / \cos \theta \\ &= b \cos \theta - a \cdot (1 - \cos^2 \theta) / \cos \theta \\ &= b \cos \theta - a \sec \theta + a \cos \theta \\ &= (a + b) \cos \theta - a \sec \theta \end{aligned}$$

① $b = 0$ のとき $r = a \cos \theta - a \sec \theta$ シュソイド曲線
 $= a(\cos \theta - \sec \theta)$

② $b = a$ のとき $r = 2a \cos \theta - a \sec \theta$ ストロフォイド曲線

③ $b = 3a$ のとき $r = 4a \cos \theta - a \sec \theta$ Maclaurin の 3 等分曲線



7. 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の原点に関する垂足曲線は、

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$$

(証明)

楕円 $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1 \dots \textcircled{1}$ 上の点 $P(x, y)$ とする。

微分すると、 $y' = -b^2 x / a^2 y$

$$Y - y = \{-b^2 x / a^2 y\} (X - x) \dots \textcircled{2}$$

②に垂直で原点を通る直線の方程式は $Y = (a^2 y / b^2 x) X \dots \textcircled{3}$

$$\textcircled{3} \text{より } x = a^2 y X / b^2 Y \dots \textcircled{4}$$

④を②に代入して

$$Y - y = - \frac{X}{Y} \left(X - \frac{a^2 y X}{b^2 Y} \right)$$

$$\frac{X^2 + Y^2}{Y} = \frac{b^2 Y + a^2 X}{b^2 Y} \quad y$$

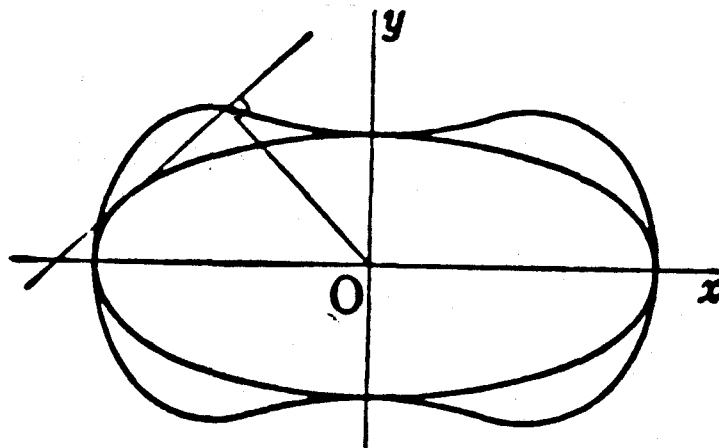
$$y = \frac{b^2 Y (X^2 + Y^2)}{b^2 Y^2 + a^2 X^2} \dots \textcircled{5}$$

$$x = \frac{a^2 X (X^2 + Y^2)}{b^2 Y^2 + a^2 X^2} \dots \textcircled{6}$$

①より $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ に⑤、⑥を代入して

$$a^2 X^2 (X^2 + Y^2)^2 + b^2 Y^2 (X^2 + Y^2)^2 = (a^2 X^2 + b^2 Y^2)^2$$

$$\therefore (X^2 + Y^2)^2 = a^2 X^2 + b^2 Y^2$$



§ 2. 縮閉線 (evolute) (伸開線 (involute))

<定義> 縮閉線は、与えられた曲線 C の曲率中心の軌跡である。

言い換えれば曲線 E が曲線 C の縮閉線であるとは、C 上の点 P における法線が E の接線になっているとき、この法線族の包絡線をいう
また、縮閉線に対してもとの曲線を伸開線という

<式> ① 媒介変数表示

$$\begin{aligned} \text{曲線 C の方程式} \quad x &= f(t) \\ y &= g(t) \quad \text{とする} \end{aligned}$$

その上の点 P (x, y) での法線の方程式は

$$\dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) = 0 \quad \dots (1)$$

これを t で微分して

$$\begin{aligned} \ddot{x}(X-x) + \dot{x} \cdot (-\dot{x}) + \ddot{y}(Y-y) + \dot{y} \cdot (-\dot{y}) &= 0 \\ \ddot{x}(X-x) + \ddot{y}(Y-y) &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(1), (2) より X - x, Y - y について解くと

$$(1) \times \ddot{y} - (2) \times \dot{y}$$

$$(\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y})(X-x) = -\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\therefore X = x - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)y / (\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y})$$

$$\text{同様にして} \quad Y = y + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)x / (\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y})$$

② 陽関数表示

$$y = f(x) \text{ のとき} \quad x = x, \quad y = f(x) \text{ として}$$

$$\text{① より} \quad X = x - (1 + y'^2)y' / y''$$

$$Y = y + (1 + y'^2) / y''$$

注意: \dot{x}, \dot{y} は x', y' と同じ意味

\ddot{x}, \ddot{y} は x'', y'' と同じ意味

$\dot{x} = \dot{y} = 0$ のとき [34] p 15~17 を参照

1. サイクロイドの縮閉線は、サイクロイドである

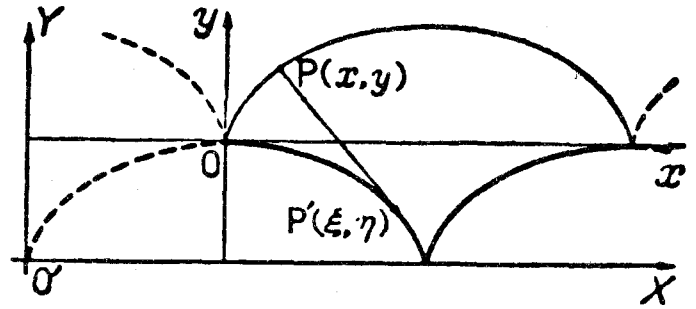
$$(式) x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

(縮閉線の式)

$$x = a \{ \theta + \pi - \sin(\theta + \pi) \} - \pi a$$

$$y = a \{ 1 - \cos(\theta + \pi) \} - 2a$$



2. カージオイドの縮閉線は、カージオイドである

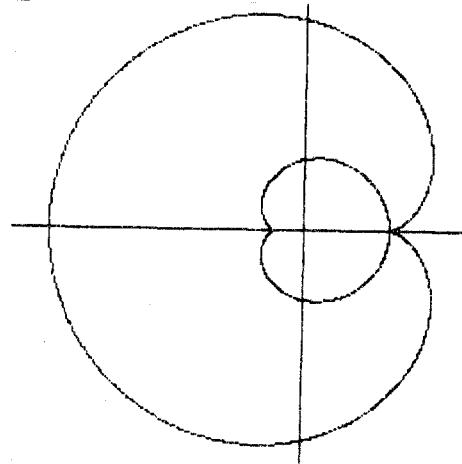
$$(式) x = a(2\cos\theta - \cos2\theta)$$

$$y = a(2\sin\theta - \sin2\theta)$$

(縮閉線の式)

$$x = 1/3 \cdot a(2\cos\theta + \cos2\theta)$$

$$y = 1/3 \cdot a(2\sin\theta + \sin2\theta)$$



3. ネフロイドの縮閉線は、ネフロイドである

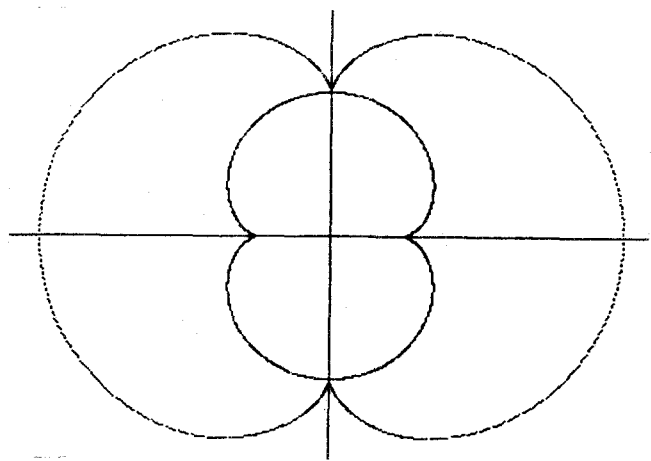
$$(式) x = 3a\cos\theta - a\cos3\theta$$

$$y = 3a\sin\theta - a\sin3\theta$$

(縮閉線の式)

$$x = 1/4 \cdot a(3a\cos\theta + a\cos3\theta)$$

$$y = 1/4 \cdot a(3a\sin\theta + a\sin3\theta)$$



4. アステロイドの縮閉線は、アステロイドである

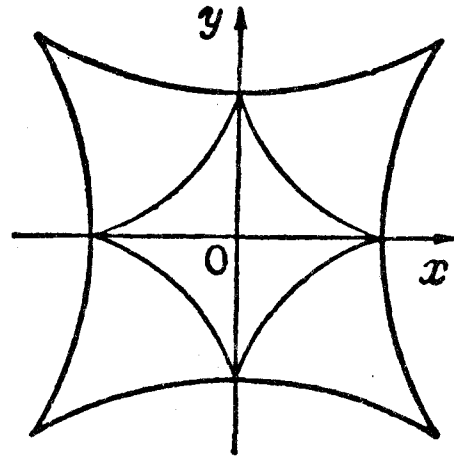
$$(式) \quad x = 3/4 \cdot a \cos \theta + 1/4 \cdot a \cos 3 \theta$$

$$y = 3/4 \cdot a \sin \theta - 1/4 \cdot a \sin 3 \theta$$

(縮閉線の式)

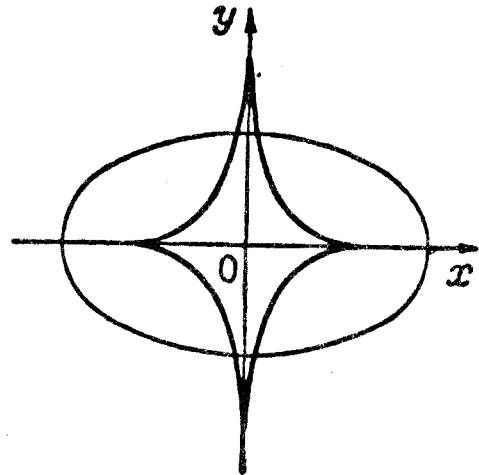
$$x = 3/2 \cdot a \cos \theta - 1/2 \cdot a \cos 3 \theta$$

$$y = 3/2 \cdot a \sin \theta + 1/2 \cdot a \sin 3 \theta$$



5. 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の縮閉線は、

$$(a x)^{2/3} + (b y)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$



6. 放物線の縮閉線は、半立方放物線である

$$(式) \quad ① \quad y^2 = 4 a x \quad (a > 0)$$

$$② \quad x = a t^2$$

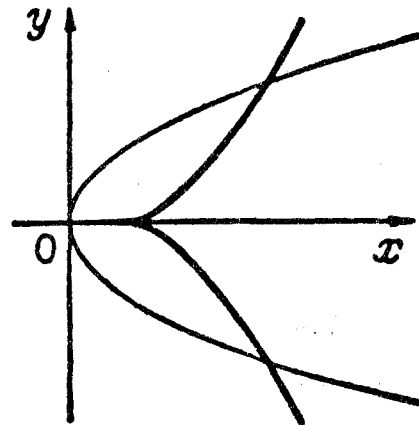
$$y = 2 a t$$

(縮閉線の式)

$$① \quad y^2 = 4/27 a \cdot (x - 2 a)^3$$

$$② \quad x = a (3 t^2 + 2)$$

$$y = -2 a t^3$$



<定理>

外サイクロイドの縮閉線は、外サイクロイドである

(証明) 外サイクロイドの媒介変数で表した式

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos((a+b)/b) \theta \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin((a+b)/b) \theta \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(a+b)^2(1 - \cos(a/b)\theta)$$

$$\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y} = (a+b)^2(\sin^2 \theta - (a+2b)/b \cdot \sin \theta \sin(a+b/b)\theta + (a+b)/b \cdot \sin^2(a+b/b) \cdot \theta)$$

$$\ddot{x} \dot{y} - (a+b)^2(\cos^2 \theta - (a+2b)/b \cdot \cos \theta \cos(a+b/b)\theta + (a+b)/b \cdot \cos^2(a+b/b) \cdot \theta)$$

$$\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y} = (a+b)^2 \cdot (a+2b/b) \cdot (1 - \cos(a/b)\theta)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \dot{y} = 2(a+b)^3(1 - \cos(a/b)\theta)(\cos \theta - \cos(a+b/b)\theta)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 / \dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y}) \cdot \dot{y} = \{2b(a+b)/a+2b\} (\cos \theta - \cos(a+b/b)\theta)$$

$$\therefore X = \{a/(a+2b)\} \{(a+b) \cos \theta + b \cos(a+b/b)\theta\}$$

$$Y = \{a/(a+2b)\} \{(a+b) \sin \theta + b \sin(a+b/b)\theta\}$$

<定理>

内サイクロイドの縮閉線は、内サイクロイドである

(証明)

内サイクロイドの媒介変数で表した式

$$\begin{cases} x = (a-b) \cos \theta + b \cos((a-b)/b) \theta \\ y = (a-b) \sin \theta - b \sin((a-b)/b) \theta \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(a-b)^2(1 - \cos(a/b)\theta)$$

$$\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y} = -(a-b)^2 \cdot (a-2b/b) \cdot (1 - \cos(a/b)\theta)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \dot{y} = 2(a-b)^3(1 - \cos(a/b)\theta)(\cos \theta - \cos(a-b/b)\theta)$$

$$((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) / (\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y})) \cdot \dot{y} = -2b (\cos \theta - \cos(a-b/b)\theta)$$

$$\therefore X = \{a/(a-2b)\} \{(a-b) \cos \theta - b \cos(a-b/b)\theta\}$$

$$Y = \{a/(a-2b)\} \{(a-b) \sin \theta + b \sin(a-b/b)\theta\}$$

第5章 サイクロイド系の曲線

サイクロイド系の曲線について、第3章で、その包絡線としての“作図法”、輪転円に固定された直径の包絡線について記した。また第4章では、サイクロイド系の曲線の縮閉線が、相似な曲線になることを示した。これら3つのことを、座標平面によらずに、初等幾何的に証明する。いずれも、サイクロイド系の曲線の接線の特徴づける事実が、原理とされる。ただし、この原理は、動点の速度という力学的な思考で得られることで、円や直線、代数曲線の研究では生まれなかったことである。証明の1つ1つには、わかりよいように図を描いた。また、初等幾何的な証明と、座標平面の方程式表示をもとに、微分計算で示す方式との比較対照も試みた。

§ 1. カージオイド（外サイクロイド）の性質

<定義>

半径 a の円に外接する半径 a の動円の周上の定点の軌跡

$$\text{(式)} \quad x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta$$

$$y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta$$

(1) 半径 a の底円で、カージオイドの直交する 2 接線の交点の軌跡は半径 $3a$ の円である。またカージオイドの直交する 2 法線の交点の軌跡はもとの半径 a の円である。

(p 57 参照)

(2) カージオイドの尖点に関する垂足曲線は、Cayley の 6 次曲線である。

(p 59 参照)

(3) カージオイドの平行な接線の 3 つの接点の重心は定点である。

(ネフロイドの平行な接線の 4 つの接点の重心は定点である。)

(p 60~64 参照)

(4) カージオイドの法線は、その点に対応する回転円が底円と接する点を通る。

(p 57 参照)

(5) 定円周上の定点から、その円の接線に下ろした垂線の足の軌跡は、もとの半分の大きさのカージオイドである。(垂足曲線)

(p 58, 66 参照)

(6) 定円周上の定点を光源とする光線のその円周上についての反射光線群の包絡線は、もとの $1/3$ のカージオイドである。(火線)

(p 43 参照)

(7) 底円の2倍の半径をもつ円の直径の包絡線が、カージオイドである。

(p 57 参照)

(8) 定円周上を直径ABの両端からそれぞれ出発し、同じ向きに運動する2点P, Qがある。Pの角速度がQの角速度の2倍で、Pが一周するとき直線PQの包絡線はカージオイドである。(直線群)

(p 86 参照)

(9) 定円周上の点を中心とし、その円周上の定点を通る円群の包絡線はもとと同じ大きさのカージオイドである。(円群)

(p 35 参照)

(10) 定円に内接するように、その円の2倍の大きさの円がころがるとき、その回転円上の定点の軌跡はカージオイドである。

(p 58 参照)

(11) カージオイドの縮閉線はまたカージオイドで、大きさは、もとの1/3である。

$$\begin{aligned} \text{(式)} \quad x &= 2a \cos \theta - a \cos 2\theta & \rightarrow & \quad x = 1/3(2a \cos \theta - a \cos 2\theta) \\ y &= 2a \sin \theta - a \sin 2\theta & & \quad y = 1/3(2a \sin \theta - a \sin 2\theta) \end{aligned}$$

(p 67 参照)

図のように半径 a の底円 O で、円周上の定点を A 、任意の点を Q とすると、点 Q における接線に関して点 A と対称な点を P とし、 AP と接線との交点を T 、 AP と円との交点を M とする。カージオイドの定義より、点 P はカージオイド上にある。また QQ' が円 O の直径となるように点 Q' をとり、 Q' における接線に関して点 A と対称な点を P' 、 AP' と接線の交点を T' とすると次のことがわかる。

① $PP' = 4a$

(証明)

$\triangle PQA$ と $\triangle AQP'$ は二等辺三角形で
 TQ 、 $T'Q'$ は垂直二等分線だから
 $PT = AT$ 、 $AT' = P'T'$

$$\begin{aligned} \therefore PP' &= 2TT' & \left(\begin{array}{l} \because \angle TQQ' = \angle QTA \\ = \angle AT'Q' \\ = \angle T'Q'Q \\ = 90^\circ \end{array} \right) \\ &= 2QQ' \\ &= 4a \end{aligned}$$

② PQ と $P'Q'$ の延長上の交点 R は
 底円周上にあり、 $\angle PRP' = 90^\circ$

(証明) $\triangle APQ$ と $\triangle AQP'$ は二等辺三角形より

$$\angle QAP = \angle QPA$$

$$\angle Q'AP' = \angle Q'P'A$$

一方 $\angle QAQ' = 90^\circ$ より

$$\angle QAP + \angle Q'AP' = 90^\circ$$

よって $\angle QPA + \angle Q'P'A = 90^\circ$ $\angle PRP' = 90^\circ$

また、 QQ' は直径だから $\angle QRQ' = 90^\circ$ より

点 R は、底円周上にある。

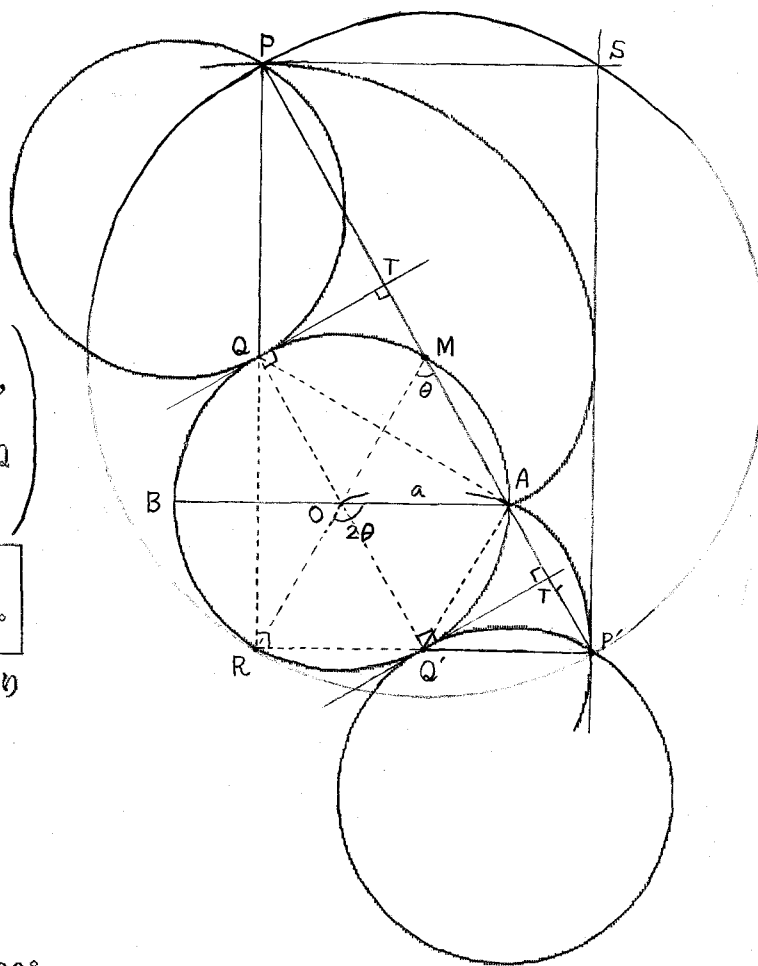
③ PP' の中点は点 M である。

(証明) $\square TT'Q'Q$ は長方形だから対称性より

$$MT = AT' \quad \text{また、} \quad AT' = T'P'$$

よって $P'M = T'T = Q'Q = 2a$

ゆえに、点 M を中心に半径 $2a$ の円の直径の包絡線が、カージオイドである。



④点Pおよび点P'においてカージオイドに引いた接線は直角に交わりその交点の軌跡は円になる。また点PおよびP'の法線の交点は底円周上にある。

(証明) 点Pにおいてカージオイドに引いた接線は、QPに垂直である。

同様に点P'に引いた接線はQ'P'に垂直である。

QPに垂直な直線とQ'P'に垂直な直線の交点をSとすると $\angle P S P'$ は、直角になる。(∵ 四角形R P S P'は長方形だから)

点Sの軌跡は、点Oを中心として半径OS(半径3a)の円になる。

また、点PおよびP'の法線の交点は点R(底円周上の点)となる

以上より、次の性質が示されたことになる。(下記の図を参照)

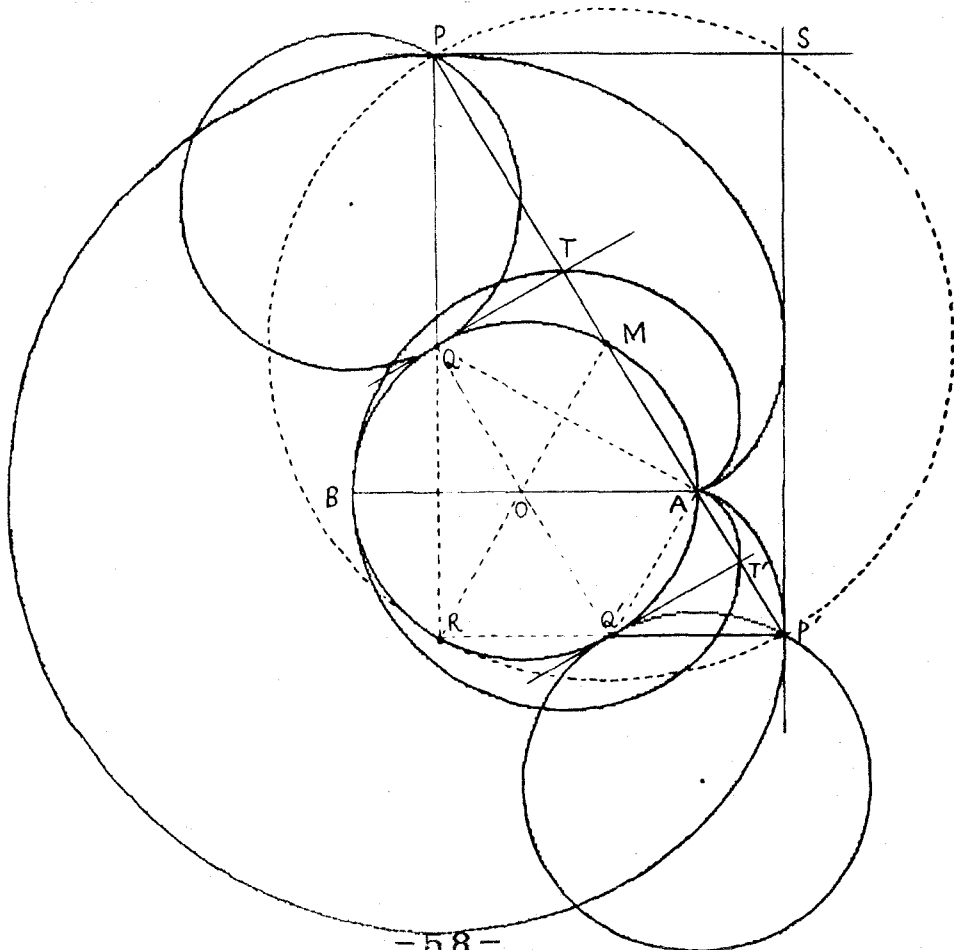
(I)底円周上の定点Aに関するその円の垂足曲線は、点Tの軌跡すなわち点Pを通るカージオイドを1/2に縮小したカージオイドができる。

(II)点Mを中心に、直径PP'(半径2a)の円をかくと $\angle AMR = 1/2 \angle AOR$ より弧 $\widehat{AR} = \widehat{P'R}$ (∵ $\angle AMR = \theta$ で半径aと中心角 2θ と半径2aと中心角 θ の関係)

これより点Mを中心に半径2aの円が、底円Oのまわりを回転すれば

P'はAに達する。(Pも半回転後にAに達する)

ゆえに点Mを中心に半径2aの円が、半径aの底円Oに内接しながらころがるとき、その円上の定点の軌跡はカージオイドである。



カージオイドの尖点における垂足曲線は Cayley の 6 次曲線である。

(証明)

尖点を原点とするカージオイドを極座標で表すと

$$r = 2a \cos \theta + 2a$$

$$x = 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$y = 2a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$dy/dx = (dy/d\theta) / (dx/d\theta)$$

$$= (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) / -\sin \theta (1 + 2\cos \theta)$$

よって 接線の方程式は

$$Y - 2a(1 + \cos \theta) \sin \theta = -(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) / \sin \theta (1 + 2\cos \theta) \cdot \{X - 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta\} \dots \textcircled{1}$$

この接線に対して尖点からの垂直な方程式は

$$Y = \left\{ \sin \theta (1 + 2\cos \theta) / (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \right\} \cdot X \dots \textcircled{2}$$

①、②より X 、 Y について連立方程式を解くと

$$X = a(1 + \cos \theta)(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

$$Y = a(1 + \cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot (2\cos \theta + 1)$$

$$\therefore r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= a(1 + \cos \theta) \sqrt{(2\cos \theta - 1)^2(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta (2\cos \theta + 1)^2}$$

$$= a(1 + \cos \theta) \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$\cos^2(\theta/2) = (1 + \cos \theta) / 2 \text{ より } 1 + \cos \theta = 2\cos^2(\theta/2)$$

$$r = 2a \cos^2(\theta/2) \cdot 2\cos(\theta/2)$$

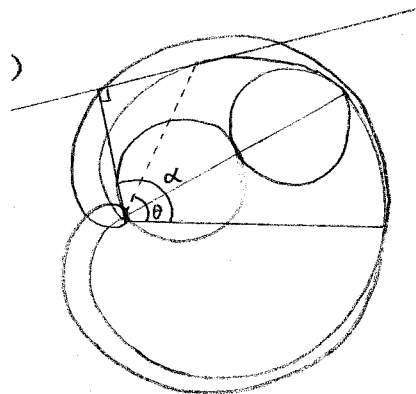
$$= 4a \cos^3(\theta/2)$$

図のように θ 、 α をおくと

$$\alpha = 3\theta/2 \quad (\because \tan(\alpha - \theta) = \tan(\theta/2))$$

よって

$$r = 4a \cos^3(\alpha/3)$$



カージオイドの平行な接線の三つの接点の重心は原点である。

<幾何学的な説明>

① カージオイドの平行な接線は、三つである

(理由)

図のように、底円Oと同じ半径の外側の輪転円の定点Pが点Aから出発する。輪転円を時計の反対方向に回転させるとき、カージオイドの法線の回転角を考える。

最初はOAに垂直で下向きの方である。

次にOAを始線とし、動径を 60° ずつとった点B, C, D, E, Fに輪転円が位置するときのカージオイドの点を P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とすれば

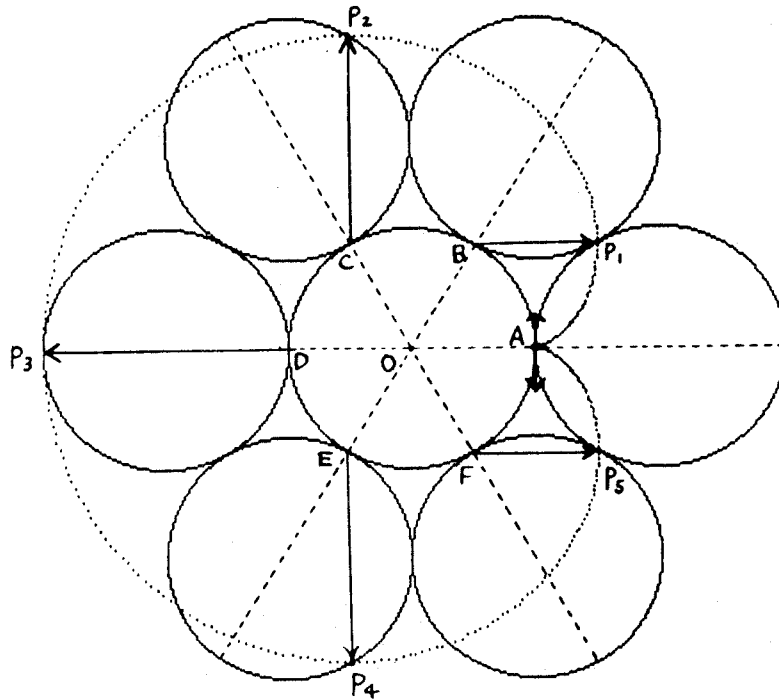
$\angle AOB = 60^\circ$ となる底円周上の点Bを考えると BP_1 の方である。

同様に、 CP_2, DP_3, EP_4, FP_5 の方がわかる。

最後に、もとの点Aに戻ってきたときOAに垂直で上向きの方である。

従ってカージオイドの法線の回転角は、 $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ である。

ゆえに、カージオイドの平行な接線は、三つであることがわかる。



② 三つの接点の重心は原点である

(理由)

底円Oと同じ半径の外側の輪転円の定点Pが、点Aから出発する。

$\angle AOB = \beta$, $\angle AOC = \beta + 120^\circ$, $\angle AOD = \beta + 240^\circ$ となる底円上の点B, C, Dに輪転円が位置するとき、輪転円を O_1, O_2, O_3 とし、点Pを P_1, P_2, P_3 とする。BO₁の延長上と輪転円との交点をQとすると、P₁Qはカージオイドの接線である。

だからBP₁, CP₂, DP₃は、いずれもカージオイドの法線である。

BP₁, CP₂, DP₃とOAのなす角が $90^\circ - 3/2 \cdot \beta$ であることが図よりわかるので、BP₁, CP₂, DP₃は平行である。

$\triangle P_1O_1B, \triangle P_2O_2C, \triangle P_3O_3D$ で余弦定理を用いて、長さBP₁, CP₂, DP₃を求めると (輪転円の半径をaとする)

$$\begin{aligned} (BP_1)^2 &= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \beta \\ &= 2a^2(1 - \cos \beta) \\ &= 2a^2 \cdot 2\sin^2(\beta/2) \\ &= 4a^2\sin^2(\beta/2) \end{aligned}$$

$$\therefore BP_1 = 2a \sin(\beta/2)$$

同様にして

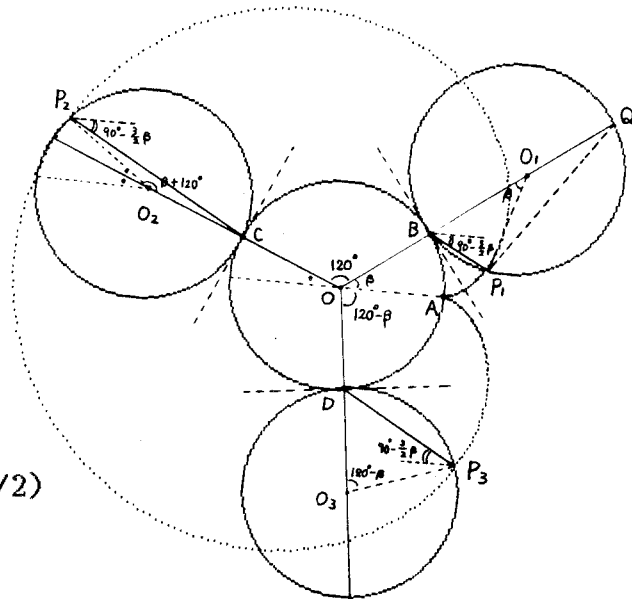
$$CP_2 = 2a \sin(\beta/2 + 60^\circ)$$

$$DP_3 = 2a \sin(60^\circ - \beta/2)$$

$$\begin{aligned} BP_1 + DP_3 &= 2a \sin(\beta/2) + 2a \sin(60^\circ - \beta/2) \\ &= 2a \cdot 2\sin 30^\circ \cdot \cos(\beta/2 - 30^\circ) \\ &= 2a \sin(90^\circ + \beta/2 - 30^\circ) \\ &= 2a \sin(60^\circ + \beta/2) \\ &= CP_2 \end{aligned}$$

よって 向きを考慮すると

$$\vec{BP_1} + \vec{DP_3} = \vec{CP_2} \text{ となり重心は原点Oである。}$$



カージオイドの平行な接線の三つの接点の重心は定点である。

(証明) カージオイドの媒介変数表示

$$x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta$$

$$y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta$$

$$\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2a(\cos \theta - \cos 2\theta)}{-2a(\sin \theta - \sin 2\theta)} = \frac{-2\sin(3/2 \cdot \theta)\sin(\theta/2)}{2\cos(3/2 \cdot \theta)\sin(\theta/2)} = \tan(3/2 \cdot \theta)$$

$\tan(3/2 \cdot \theta) = \alpha$ とすると

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } 0 \leq 3/2 \cdot \theta < 3\pi$$

$$3/2 \cdot \theta = \beta, \beta + \pi, \beta + 2\pi \quad (0 \leq \beta < \pi)$$

$$\therefore \theta = 2/3 \cdot \beta, 2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi, 2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi$$

よって、与えられた任意の方向に、常に3本の平行線が引ける。

これらの接点における θ の値の差は、 120° の倍数になる。

$\theta = 2/3 \cdot \beta, 2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi, 2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi$ のときのそれぞれの x 座標を求めると

$$x_1 = 2a \cos(2/3 \cdot \beta) - a \cos(4/3 \cdot \beta)$$

$$x_2 = 2a \cos(2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi) - a \cos(4/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi)$$

$$x_3 = 2a \cos(2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi) - a \cos(4/3 \cdot \beta + 8/3 \cdot \pi)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2a \{ \cos(2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi) + \cos(2/3 \cdot \beta) \} \\ &\quad - a \{ \cos(4/3 \cdot \beta + 8/3 \cdot \pi) + \cos(4/3 \cdot \beta) \} \\ &= 2a \cdot 2\cos(2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi) \cdot \cos(2/3 \cdot \pi) \\ &\quad - a \cdot 2\cos(4/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi) \cdot \cos(4/3 \cdot \pi) \\ &= -2a \cos(2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi) + a \cos(4/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi) \\ &= -x_2 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

同様にして $\theta = 2/3 \cdot \beta, 2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi, 2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi$ のときのそれぞれの y 座標を求めると

$$y_1 = 2a \sin(2/3 \cdot \beta) - a \sin(4/3 \cdot \beta)$$

$$y_2 = 2a \sin(2/3 \cdot \beta + 2/3 \cdot \pi) - a \sin(4/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi)$$

$$y_3 = 2a \sin(2/3 \cdot \beta + 4/3 \cdot \pi) - a \sin(4/3 \cdot \beta + 8/3 \cdot \pi)$$

$$y_1 + y_3 = -y_2$$

$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

ゆえに 平行な接線の三つの接点の重心は原点である。

ネフロイドの平行な接線の四つの接点の重心は定点である。

<幾何学的な説明>

①ネフロイドの平行な接線は、四つである。

(理由) ネフロイドの法線の回転角を考えると 720° であるので、ネフロイドの平行な接線は、四つである。(図を参照)

②四つの接点の重心は、原点である。

(理由)

底円 O の半分の半径の外側の輪転円の定点 P が、点 A から出発する。

$\angle A O Q_1 = \beta$, $\angle A O Q_2 = \beta + 90^\circ$, $\angle A O Q_3 = \beta + 180^\circ$

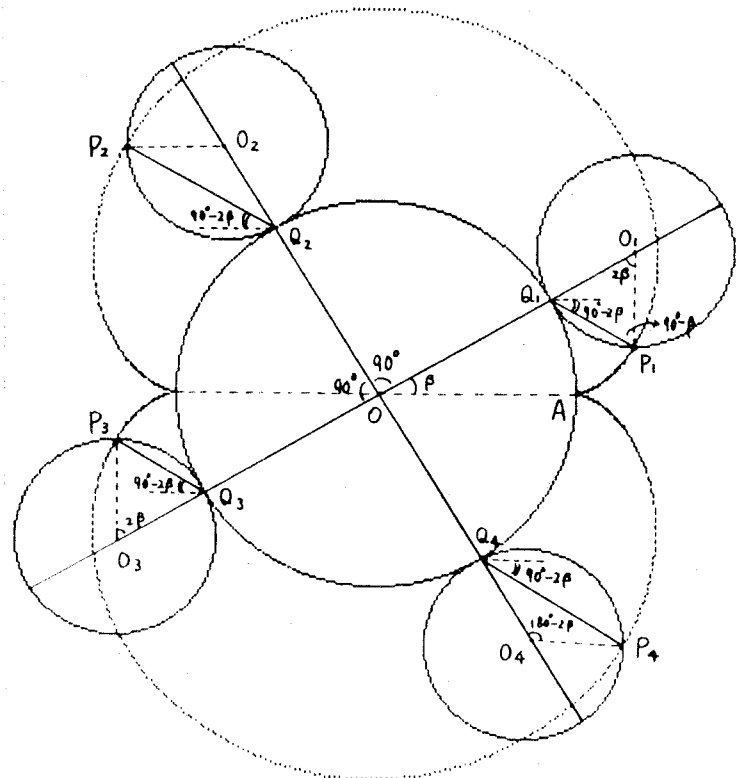
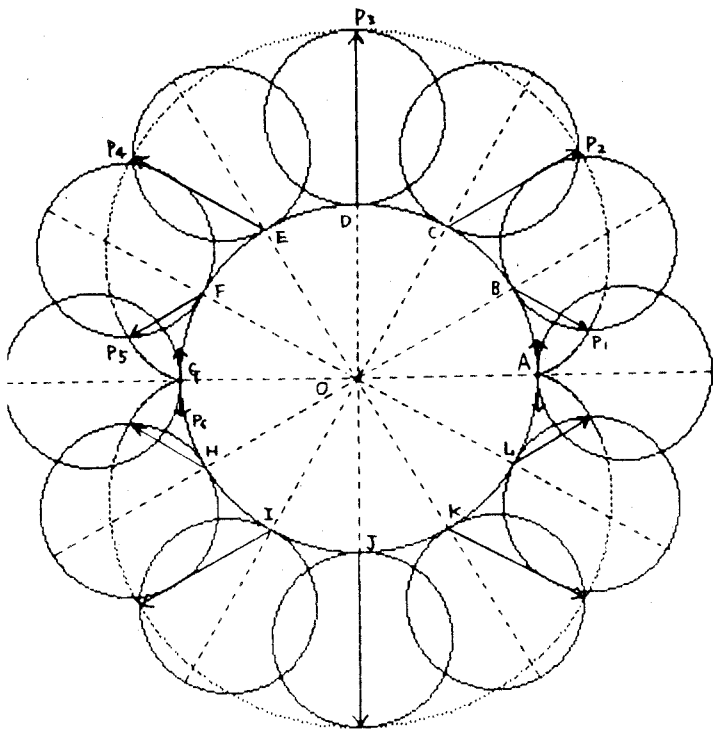
$\angle A O Q_4 = \beta + 270^\circ$ となる底円上の点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 に輪転円が位置するとき、輪転円を O_1, O_2, O_3, O_4 とし点 P を P_1, P_2, P_3, P_4 とする。

$Q_1 P_1, Q_2 P_2, Q_3 P_3, Q_4 P_4$ は、いずれもネフロイドの法線である。

$Q_1 P_1, Q_2 P_2, Q_3 P_3, Q_4 P_4$ と $O A$ のなす角が $90^\circ - 2\beta$ であることが図よりわかるので、 $Q_1 P_1, Q_2 P_2, Q_3 P_3, Q_4 P_4$ は平行である。

明らかに、 $Q_1 P_1, Q_2 P_2, Q_3 P_3, Q_4 P_4$ の長さも等しいから、

向きも考えて $\vec{Q_1 P_1} + \vec{Q_4 P_4} = \vec{Q_2 P_2} + \vec{Q_3 P_3}$ となり、重心は原点である。



ネフロイドの平行な接線の四つの接点の重心は定点である。

(証明) ネフロイドの媒介変数表示

$$x = 3a \cos \theta - a \cos 3\theta$$

$$y = 3a \sin \theta - a \sin 3\theta$$

$$\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3a(\cos \theta - \cos 3\theta)}{-3a(\sin \theta - \sin 3\theta)} = \frac{-2\sin 2\theta \sin \theta}{2\cos 2\theta \sin \theta} = \tan 2\theta$$

$\tan 2\theta = \alpha$ とすると

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } 0 \leq 2\theta < 4\pi$$

$$2\theta = \beta, \beta + \pi, \beta + 2\pi, \beta + 3\pi$$

$$\therefore \theta = 1/2 \cdot \beta, 1/2 \cdot \beta + 1/2 \cdot \pi, 1/2 \cdot \beta + \pi, 1/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi$$

よって、与えられた任意の方向に、常に4本の平行線が引ける。

これらの接点における θ の値の差は、 90° の倍数になる。

$\theta = 1/2 \cdot \beta, 1/2 \cdot \beta + 1/2 \cdot \pi, 1/2 \cdot \beta + \pi, 1/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi$ のときのそれぞれの x 座標を求めると

$$x_1 = 3a \cos(1/2 \cdot \beta) - a \cos(3/2 \cdot \beta)$$

$$x_2 = 3a \cos(1/2 \cdot \beta + 1/2 \cdot \pi) - a \cos(3/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi)$$

$$x_3 = 3a \cos(1/2 \cdot \beta + \pi) - a \cos(3/2 \cdot \beta + 3\pi)$$

$$x_4 = 3a \cos(1/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi) - a \cos(3/2 \cdot \beta + 9/2 \cdot \pi)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3a \{ \cos(1/2 \cdot \beta + \pi) + \cos(1/2 \cdot \beta) \} \\ &\quad - a \{ \cos(3/2 \cdot \beta + 3\pi) + \cos(3/2 \cdot \beta) \} \\ &= 3a \cdot 2\cos(1/2 \cdot \beta + 1/2 \cdot \pi) \cdot \cos(1/2 \cdot \pi) \\ &\quad - a \cdot 2\cos(3/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi) \cdot \cos(3/2 \cdot \pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 3a \{ \cos(1/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi) + \cos(1/2 \cdot \beta + 1/2 \cdot \pi) \} \\ &\quad - a \{ \cos(3/2 \cdot \beta + 9/2 \cdot \pi) + \cos(3/2 \cdot \beta + 3/2 \cdot \pi) \} \\ &= 3a \cdot 2\cos(1/2 \cdot \beta + \pi) \cdot \cos(1/2 \cdot \pi) \\ &\quad - a \cdot 2\cos(3/2 \cdot \beta + 3\pi) \cdot \cos(3/2 \cdot \pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

同様にして $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$

ゆえに

与えられた任意の方向に、常に4本の平行線が引ける。

これらの接線における θ の値の差は 90° の倍数になる。

< n 個の尖点をもつ外サイクロイドの性質 >

媒介変数表示 $x = (n+1)a \cos \theta - a \cos(n+1)\theta$

$$y = (n+1)a \sin \theta - a \sin(n+1)\theta$$

接線の傾きは、

$$\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{(n+1)a \cos \theta - (n+1)a \cos(n+1)\theta}{-(n+1)a \sin \theta + (n+1)a \sin(n+1)\theta}$$

$$= - \frac{\cos(n+1)\theta - \cos \theta}{\sin(n+1)\theta - \sin \theta}$$

$$= \tan \frac{n+2}{2} \theta$$

$\tan \{(n+2)/2\} \theta = \alpha$ とおくと

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } 0 \leq \{(n+2)/2\} \theta < (n+2) \pi$$

$$\{(n+2)/2\} \theta = \beta, \beta + \pi, \beta + 2\pi, \dots, \beta + (n+1)\pi$$

$$\theta = \{2/(n+2)\} \beta, \{2/(n+2)\} \beta + \{2/(n+2)\} \pi,$$

$$\dots, \{2/(n+2)\} \beta + \{2(n+1)/(n+2)\} \pi$$

よって

与えられた任意の方向に、常に $(n+2)$ 本の平行線が引ける。

これらの接線における θ の値の差は、 $\{2/(n+2)\} \pi$ の倍数である。

円 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 上の点 $A(0, 0)$ をとる。

円周上任意の点 $Q(x, y)$ における接線をつくり、点 A から接線に下した足を P とする。点 P の描く曲線はカージオイドである。

(証明)

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots ①$$

点 Q の接線の方程式を求めると

$$① \text{ を } x \text{ で微分して } 2(x - a) + 2y y' = 0 \quad y' = -(x - a) / y$$

$$Y - y = -(x - a) / y \cdot (X - x)$$

$$(x - a)(X - x) + y(Y - y) = 0$$

$$(x - a)X - (x - a)x + yY = y^2$$

$$(x - a)X + yY = ax \quad \dots\dots ②$$

$$② \text{ に点 } A \text{ から垂線の方程式は } Y = y / (x - a) \cdot X \quad \dots\dots ③$$

$$③ \text{ より } y = Y(x - a) / X$$

② に代入して

$$(x - a)X + (x - a) / x \cdot Y^2 = ax$$

$$x = a(X^2 + Y^2) / (X^2 - ax + Y^2) \quad \dots\dots ④$$

$$y = Y / X \cdot a^2 Y / (X^2 - ax + Y^2)$$

$$y = a^2 Y / (X^2 - ax + Y^2) \quad \dots\dots ⑤$$

④, ⑤ を① に代入して

$$\{ a(X^2 + Y^2) / (X^2 - ax + Y^2) - a \}^2$$

$$+ \{ a^2 Y / (X^2 - ax + Y^2) \}^2 = a^2$$

$$a^2 X^2 + a^2 Y^2 = (X^2 - aX + Y^2)^2$$

$$\therefore (X^2 + Y^2 - ax)^2 = a^2(X^2 + Y^2) \quad \dots\dots ⑥$$

これを極座標に直すと

$$X = r \cos \theta, \quad Y = r \sin \theta \text{ とおけば}$$

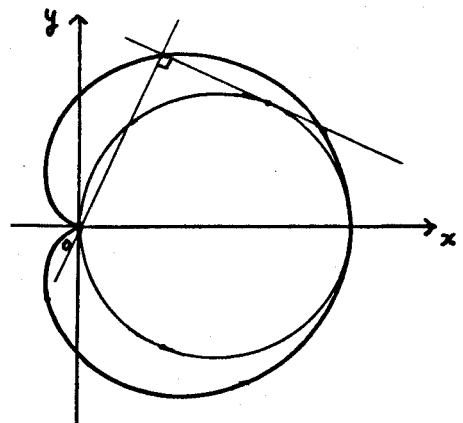
$$⑥ \text{ に代入して } (r^2 - ar \cos \theta)^2 = a^2 r^2$$

$$r^2 - 2ar \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta - a^2 = 0$$

$$r^2 - 2ar \cos \theta - a^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$r = a \cos \theta \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

$$r = a \cos \theta \pm a \quad \text{となる (p68 参照)}$$



カージオイドの縮閉線は、そのカージオイドの底円と中心を同じくし、半径は1/3の底円をもったカージオイドで、尖点の位置は元のものとは逆になる。

<カージオイドの縮閉線の幾何学的意味>

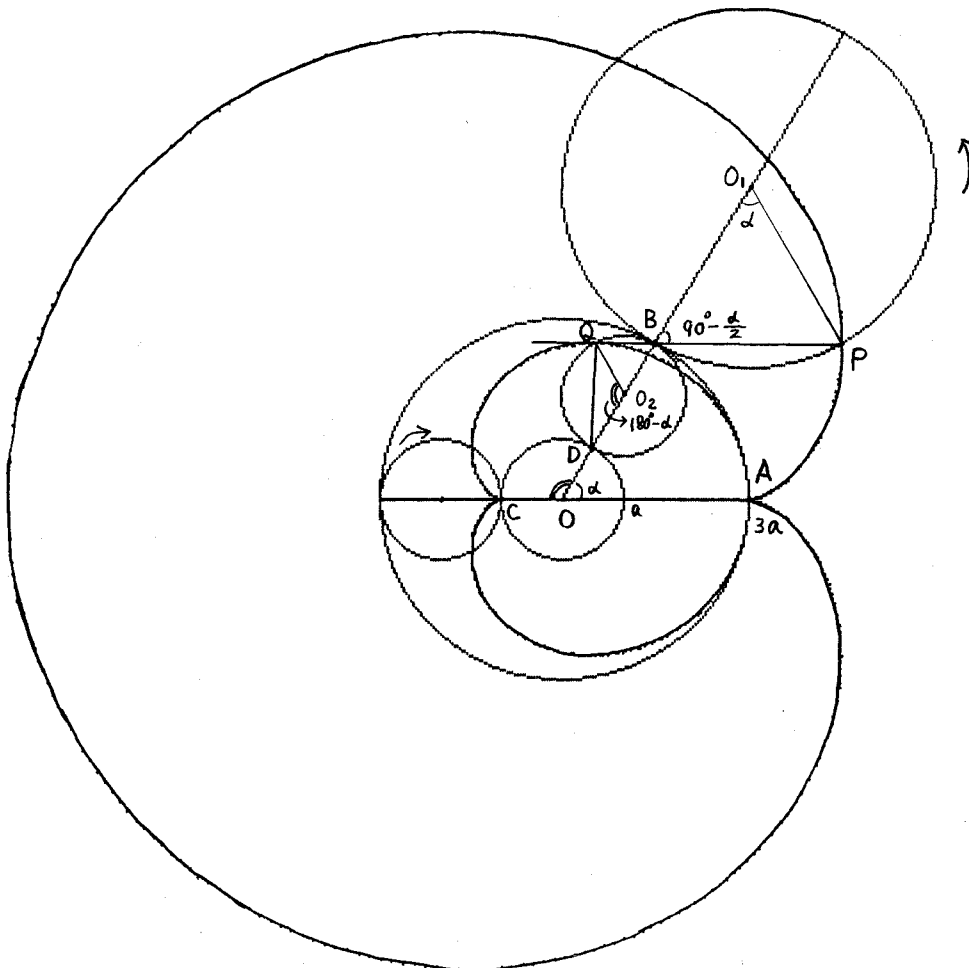
図のように、半径 $3a$ の円 O を底円とし、点 A を始点とする外回りの円 O_1 の定点 P がある。 $\angle AOB = \alpha$ となる点 B に円 O_1 が位置するとき、 PB はカージオイドの法線である。

また、元のカージオイドの底円と中心を同じくし、半径 a の円を底円とし、 O に対して A と反対側の点 C を始点とする外回りの半径 a の円 O_2 がある。直線 PB と円 O_2 との交点を Q とする。円 O_2 が OB と交わる点を D とすると $\angle COD = \angle DO_2Q$ であることを示せば、点 Q は半径 a の底円のカージオイド上にあることがわかる。

(理由) $\angle AOB = \alpha$ とする。

$$\angle BO_1P = \alpha \text{ より } \angle O_1BP = \angle O_2BQ = 90^\circ - \alpha/2$$

$$\therefore \angle QO_2D = 180^\circ - \alpha = \angle COD$$



ネフロイドの縮閉線は、そのネフロイドの底円と中心を同じくし、半径は1/2の底円をもったネフロイドで、縮閉線の二つの尖点を結ぶ直線は元のネフロイドの二つの尖点を結ぶ直線と垂直である。

<幾何学的意味>

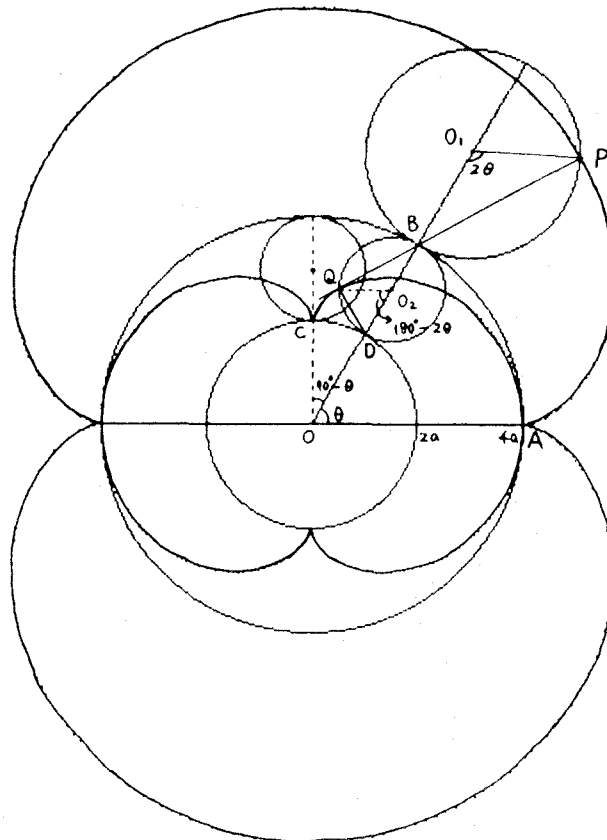
図のように、半径 $4a$ の円 O を底円とし、点 A を始点とし 時計の反対方向に外回りの円 O_1 の定点 P がある。 $\angle AOB = \theta$ となる点 B に円 O_1 が位置するとき、 PB はネフロイドの法線である。

また、元のネフロイドの底円と中心を同じくし、半径 $2a$ の円を底円とし、 O に対して A と垂直な点 C を始点とし 時計の方向に外回りの半径 a の円 O_2 がある。直線 PB と円 O_2 との交点を Q とする。円 O_2 が OB と交わる点を D とすると、弧 CD と弧 DQ の長さが等しい すなわち $2\angle COD = \angle QO_2D$ であることを示せば、点 Q は 半径 $2a$ の底円のネフロイド上にあることがわかる。

(理由) $\angle AOB = \theta$ とする。

$$\angle BO_1P = 2\theta \text{ より } \angle O_1BP = \angle O_2BQ = 90^\circ - \theta$$

$$\therefore \angle QO_2D = 180^\circ - 2\theta = 2(90^\circ - \theta) = 2\angle COD$$



§ 2. デルトイド (内サイクロイド) の性質

<定義>

半径 a の円に内接する半径 $1/3 a$ の動円の周上の定点の軌跡

$$(式) \quad x = 1/3 \cdot a (2\cos \theta + \cos 2\theta)$$

$$y = 1/3 \cdot a (2\sin \theta - \sin 2\theta)$$

(1) デルトイド上の点 P における接線がこの曲線と交わる他の 2 点を Q, R とすると、 Q, R における接線は互いに直交する。

また、 P, Q, R における法線は曲線の外接円上で交わる。

(p 70 参照)

(2) デルトイドの接線が再びこの曲線と交わる 2 点の間の距離は一定の長さ $4a$ である。

(p 71~72 参照)

(3) デルトイドは定円の半径の $1/3$, または $2/3$ の半径の回転円をかくことにより 2 通りの内サイクロイドとして作られる。

(半径 $2a/3$ の円では、3 回転で描け、半径 $a/3$ の円では、1 回転で描ける)

(p 70 参照)

(4) 底円の 2 倍の半径をもつ直径の包絡線が、デルトイドである。

(p 70 参照)

(5) 三角形のシムソン線の包絡線はデルトイドである。

(p 42 参照)

(6) 定円周上を直径 AB の両端からそれぞれ出発し、反対の向きに運動する 2 点 P, Q がある。 P の角速度が Q の角速度の 2 倍で、 P が一周するとき、直線 PQ の包絡線はデルトイドである。

(p 74, 75, 85 参照)

(7) デルトイドの縮閉線はまたデルトイドで、大きさは、もとの 3 倍である。

$$(式) \quad x = 1/3 \cdot a (2\cos \theta + \cos 2\theta) \quad \rightarrow \quad x = a (2\cos \theta - \cos 2\theta)$$

$$y = 1/3 \cdot a (2\sin \theta - \sin 2\theta) \quad y = a (2\sin \theta + \sin 2\theta)$$

(p 53 参照)

(幾何学的な証明)

デルトイドの定義

定円の1/3の半径をもつ内サイクロイドであることより

図より $OA=3a$, $OD=a$ とする.

IQ を直径とする円を考える。この円は P を通り、その弧 IP (半径 a の円において、 $3t$ の中心角に対する)は弧 IA (半径 a の円において、 t の中心角に対する)に等しい。それゆえ、 IQ を直径とする円が外側の定円の内側を回転するとき、 P は A に達する。

さて、 IP の延長と外側の円との交点を I' とする。そのとき、 $I'OQ$ は直線になる。(∵ $\angle OII' = 90^\circ - 3t/2$ より $\angle I'OI = 3t$ 故に $\angle I'OA = 2t$)

それゆえ、 $I'Q$ を直径とする円の半径は一定で $2a$ になり、 P を通る。

さらに、弧 $I'P$ (中心角は $3t$, 半径は $2a$)は、定円の弧 $I'A$ (中心角は $2t$, 半径は $3a$)に等しい。したがって、 P の軌跡は、半径 $3a$ の定円の内側を回転する、半径 $2a$ の円の円周になる。

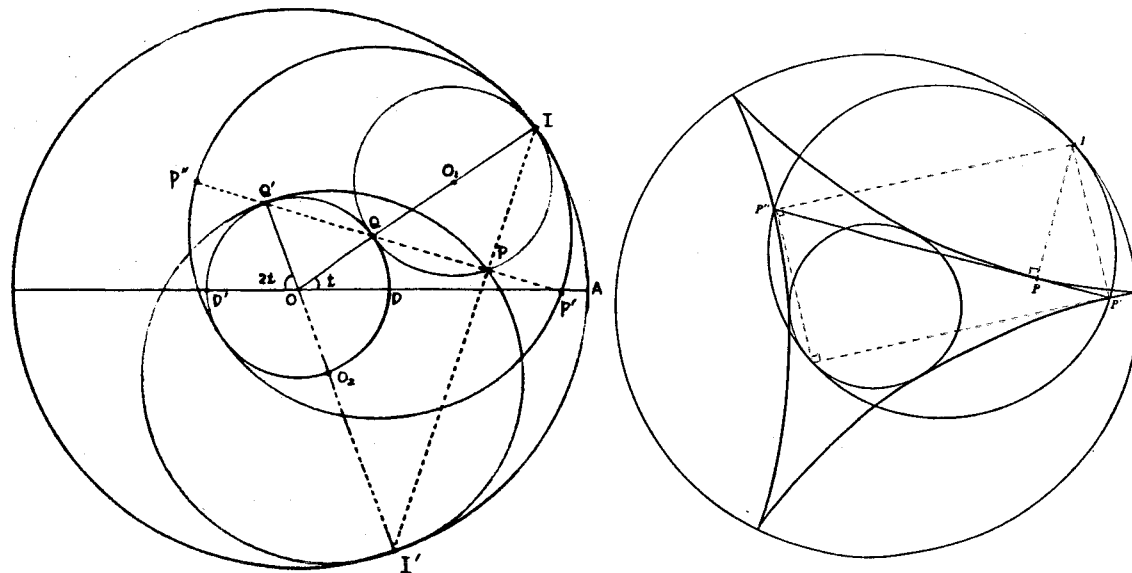
また P' は、定円の2/3の半径をもつ回転円の円周上にある定点である。

それゆえ、 P' の軌跡はデルトイドになり、 P' は定円上の A に達するから、このデルトイドの尖点は P の軌跡すなわち、直径 $P''P'$ の包絡線の尖点に一致する。同様なことは、直径の他の一端 P'' にも適用し、半円の弧 $P'P''$ は定円の円周の長さの1/3であるから、 P'' の軌跡の尖点は上と同じ位置にある。

(円が一回転すれば、 P' と P'' の位置は交換される。)

それゆえ、 P, P' および P'' の軌跡はすべて同一で、直径 $P''P'$ の包絡線である。

したがって、 $P''P' = 4a$



デルトイドの接線が再びこの曲線と交わる二つの間の距離は一定の長さ $4a$ である。

(微分を使った証明)

$$\text{式) } x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta) \quad \dots\dots\text{①}$$

$$y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \quad \dots\dots\text{②}$$

$$dy/d\theta = a(2\cos\theta - 2\cos 2\theta)$$

$$dx/d\theta = a(-2\sin\theta - 2\sin 2\theta)$$

$$\therefore dy/dx = -(\cos\theta - \cos 2\theta)/(\sin\theta + \sin 2\theta)$$

$\theta = \omega$ に対する点 $P(x, y)$ における接線は

$$Y - a(2\sin\omega - \sin 2\omega) = -\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\sin\omega + \sin 2\omega} \{X - a(2\cos\omega + \cos 2\omega)\}$$

$$\cos\omega - \cos 2\omega = 2\sin(3/2)\omega \cdot \sin(1/2)\omega$$

$$\sin\omega + \sin 2\omega = 2\sin(3/2)\omega \cdot \cos(1/2)\omega \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \cos(1/2)\omega \{Y - a(2\sin\omega - \sin 2\omega)\} \\ = -\sin(1/2)\omega \{X - a(2\cos\omega + \cos 2\omega)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\sin(\omega/2) + Y\cos(\omega/2) - 2a\cos(\omega/2) \cdot \sin\omega \cdot (1 - \cos\omega) \\ - a\sin(\omega/2)(2\cos\omega + \cos 2\omega) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2a\cos(\omega/2) \cdot \sin\omega \cdot (1 - \cos\omega) \\ & = -2a\cos(\omega/2) \cdot 2\sin(\omega/2)\cos(\omega/2) \cdot 2\sin^2(\omega/2) \\ & = -8a\sin^3(\omega/2) \cdot \{1 - \sin^2(\omega/2)\} \\ & = -8a\sin^3(\omega/2) + 8a\sin^5(\omega/2) \\ & \quad - a\sin(\omega/2)(2\cos\omega + \cos 2\omega) \\ & = -2a\sin(\omega/2) \cdot \{1 - 2\sin^2(\omega/2)\} - a\sin(\omega/2) \cdot (1 - 2\sin^2\omega) \\ & = -2a\sin(\omega/2) + 4a\sin^3(\omega/2) \\ & \quad - a\sin(\omega/2) \cdot [1 - \{8\sin^2(\omega/2) - 8\sin^4(\omega/2)\}] \\ & = -2a\sin(\omega/2) + 4a\sin^3(\omega/2) - a\sin(\omega/2) \\ & \quad + 8a\sin^3(\omega/2) - 8a\sin^5(\omega/2) \\ & = -3a\sin(\omega/2) + 12a\sin^3(\omega/2) - 8a\sin^5(\omega/2) \end{aligned}$$

$$\therefore X \sin(\omega/2) + Y \cos(\omega/2) - 3a \sin(\omega/2) + 4a \sin^3(\omega/2) = 0$$

$$X \sin(\omega/2) + Y \cos(\omega/2) - a \sin(3\omega/2) = 0$$

これが曲線と交わる点を Q, R とすれば、それらに対する θ は

①と②を代入して

$$a(2\cos\theta + \cos 2\theta) \cdot \sin(\omega/2) + a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \cdot \cos(\omega/2) - a \sin(3\omega/2) = 0$$

$$(2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1) \cdot \sin(\omega/2) + 2\sin\theta \cdot (1 - \cos\theta) \cdot \cos(\omega/2) - \sin(3\omega/2) = 0$$

$$2\{\sin(\omega/2) \cdot \cos\theta + \cos(\omega/2) \cdot \sin\theta\} + \{\sin(\omega/2) \cdot \cos 2\theta - \cos(\omega/2) \cdot \sin 2\theta\} - \sin(3\omega/2) = 0$$

$$2\sin(\omega/2 + \theta) + \sin(\omega/2 - 2\theta) - \sin(3\omega/2) = 0$$

$$2\sin(\omega/2 + \theta) - 2\cos(\omega - \theta) \cdot \sin(\omega/2 + \theta) = 0$$

$$2\sin(\omega/2 + \theta) \{1 - \cos(\omega - \theta)\} = 0$$

$$2\sin(\omega/2 + \theta) \cdot 2\sin^2(\omega - \theta/2) = 0$$

$$4\sin(\omega/2 + \theta) \cdot \sin^2(\omega - \theta/2) = 0$$

$$\omega/2 + \theta = \pi \quad \text{or} \quad \omega/2 + \theta = 2\pi$$

故に $\theta_1 = \pi - \omega/2$ or $\theta_2 = 2\pi - \omega/2$

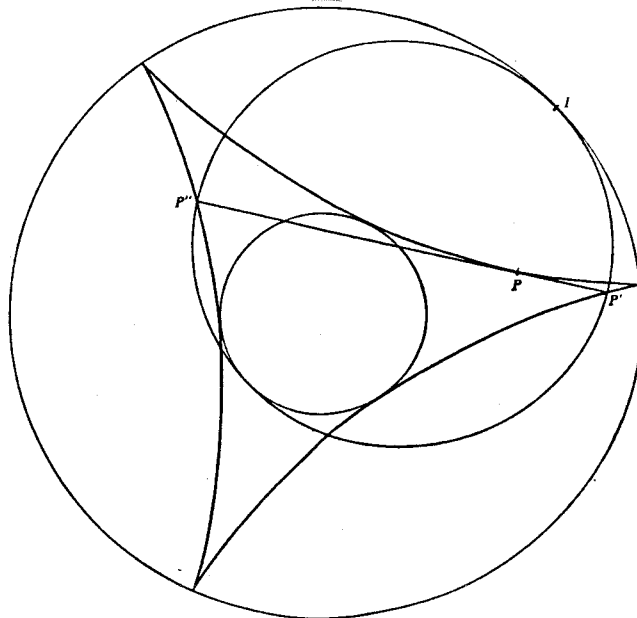
Q, R の座標を $Q(x_1, y_1)$ $R(x_2, y_2)$ とすれば、

$$x_1 = a \{-2\cos(\omega/2) + \cos\omega\} \quad y_1 = a \{2\sin(\omega/2) + \sin\omega\}$$

$$x_2 = a \{2\cos(\omega/2) + \cos\omega\} \quad y_2 = a \{-2\sin(\omega/2) + \sin\omega\}$$

従って QR の長さは、

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$$



図形から見た媒介変数表示

点P'の座標 (x_1, y_1) とおく

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'} \\ &= (a \cos t, a \sin t) + (QP' \cos(t/2), -QP' \sin(t/2)) \\ &= (a \cos t + 2a \cos(t/2), a \sin t - 2a \sin(t/2)) \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 = a \cos t + 2a \cos(t/2)$$

$$y_1 = a \sin t - 2a \sin(t/2)$$

点Pの座標 (x_2, y_2) とおく

$$\begin{aligned} (x_2, y_2) &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= (a \cos t, a \sin t) + (QP \cos(t/2), -QP \sin(t/2)) \\ &= (a \cos t, a \sin t) \\ &\quad + (QI \cos(3t/2) \cdot \cos(t/2), -QI \sin(3t/2) \cdot \sin(t/2)) \end{aligned}$$

$$\therefore x_2 = a \cos t + 2a \cos(3t/2) \cdot \cos(t/2)$$

$$= a \cos t + 2a \cdot 1/2(\cos 2t + \cos t)$$

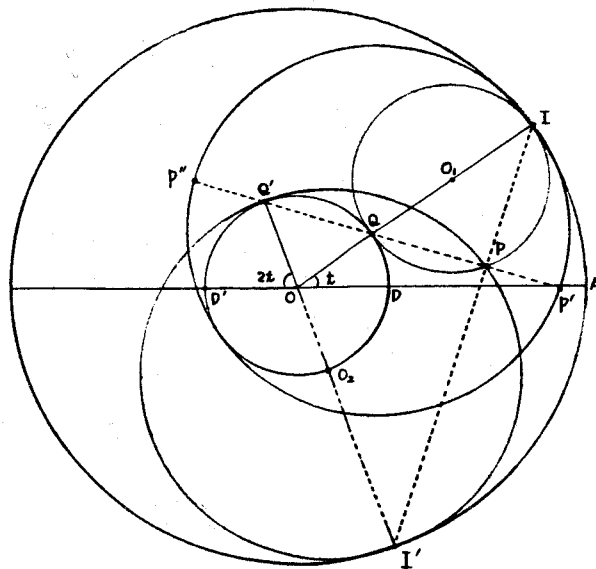
$$= a \cos 2t + 2a \cos t$$

$$y_2 = a \sin t - 2a \sin(3t/2) \cdot \sin(t/2)$$

$$= a \sin t - 2a \cdot 1/2(\sin 2t - \sin t)$$

$$= -a \sin 2t + 2a \sin t$$

Pの方程式はP'の方程式において $t = -2t$ を代入すれば得られる。
このことは、回転円がAから出発して前と反対の方向に二回転すれば
P'はPの位置にくることを意味する。



定円周上を運動する2点P, Qが両端にあって、Pが角速度 θ でQが角速度 -2θ であるとき、直線PQの包絡線はデルトイドである。

(証明)

直線PQの方程式は

$$y - a \sin 2\theta = (a \sin \theta - a \sin 2\theta) / (a \cos \theta + a \cos 2\theta) \cdot (x + a \cos 2\theta) \\ = -(\sin 2\theta - \sin \theta) / (\cos 2\theta + \cos \theta) \cdot (x + a \cos 2\theta) \quad \text{である}$$

$$(y - a \sin 2\theta) / \sin(\theta/2) = -(x + a \cos 2\theta) / \cos(\theta/2)$$

$$F(x, y, \theta) = (y - a \sin 2\theta) / \sin(\theta/2) + (x + a \cos 2\theta) / \cos(\theta/2)$$

$$\text{とおくと} \quad -2a \sin(\theta/2) \cos 2\theta - 1/2 \cdot \cos(\theta/2) (y - a \sin 2\theta)$$

$$F_{\theta}(x, y, \theta) = \frac{-2a \sin(\theta/2) \cos 2\theta - 1/2 \cdot \cos(\theta/2) (y - a \sin 2\theta)}{\sin^2(\theta/2)} \\ + \frac{-2a \sin 2\theta \cdot \cos(\theta/2) + 1/2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot (x + a \cos 2\theta)}{\cos^2(\theta/2)}$$

$$F(x, y, \theta) = 0 \text{ より}$$

$$y - a \sin 2\theta = -\sin(\theta/2) / \cos(\theta/2) \cdot (x + a \cos 2\theta)$$

$$F_{\theta}(x, y, \theta) = 0 \text{ より}$$

$$-2a \sin(\theta/2) \cdot \cos 2\theta - 1/2 \cdot \cos(\theta/2) (y - a \sin 2\theta) \\ = \sin^2(\theta/2) / \cos^2(\theta/2) \cdot \{ 2a \sin 2\theta \cos(\theta/2) - 1/2 \cdot \sin(\theta/2) \\ \cdot (x + a \cos 2\theta) \}$$

だから

$$-2a \sin(\theta/2) \cdot \cos 2\theta + 1/2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot (x + a \cos 2\theta) \\ = 2a \sin^2(\theta/2) \sin 2\theta / \cos(\theta/2) - \sin^3(\theta/2) / 2 \cos^2(\theta/2) \cdot (x + a \cos 2\theta)$$

よって

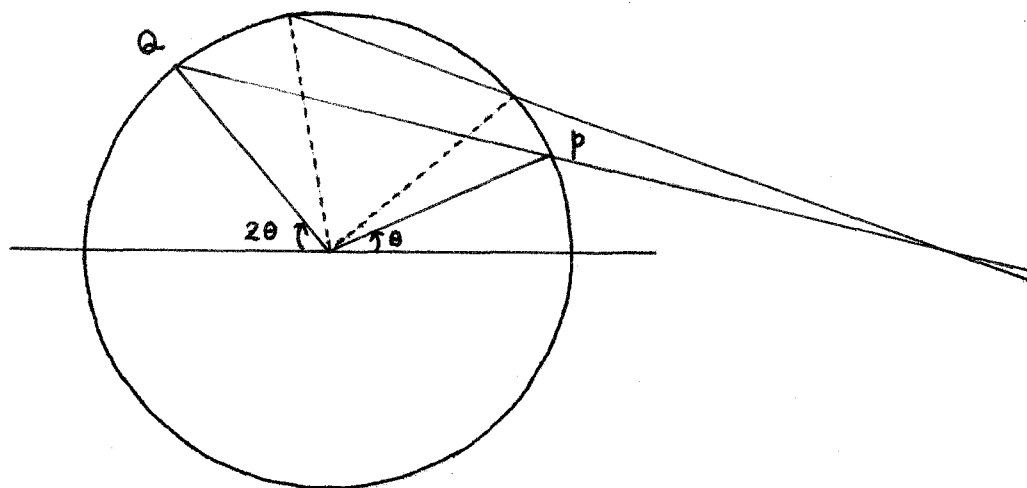
$$x + a \cos 2\theta = 4a \cos^2(\theta/2) (\tan(\theta/2) \cdot \sin 2\theta + \cos 2\theta)$$

$$x = 4a \cos^2(\theta/2) \cdot \tan(\theta/2) \cdot \sin 2\theta + 4a \cos^2(\theta/2) \cdot \cos 2\theta - a \cos 2\theta \\ = 4a \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 2a (1 + \cos \theta) (2 \cos^2 \theta - 1) - a (2 \cos^2 \theta - 1) \\ = 2a \cos^2 \theta + 2a \cos \theta - a \\ = a (2 \cos \theta + \cos 2\theta)$$

$$\begin{aligned}
y &= -2a \tan(\theta/2)(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) + a \sin 2\theta \\
&= -2a \sin(\theta/2)(8\cos^3(\theta/2) - 6\cos^2(\theta/2)) + a \sin 2\theta \\
&= -16a \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos^2(\theta/2) + 12a \sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\
&\hspace{15em} + a \sin 2\theta \\
&= -8a \sin\theta \cdot (1 + \cos\theta/2) + 6a \sin\theta + a \sin 2\theta \\
&= -4a(\sin\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) + 6a \sin\theta + a \sin 2\theta \\
&= -4a \sin\theta - 2a \sin 2\theta + 6a \sin\theta + a \sin 2\theta \\
&= a(2\sin\theta - \sin 2\theta)
\end{aligned}$$

ゆえに

| |
|---|
| $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$ $y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$ |
|---|



§ 3. サイクロイドの性質

<定義>

定直線に接しながら転がる半径 a の円の周上の定点の軌跡

$$\text{(式)} \quad x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

(1) サイクロイドの接線は、円の接線と水平線からなる角を 2 等分する。

(p 77 参照)

(2) サイクロイドが 1 直線上を転がれば、接点の曲率中心は半径 $4a$ の 1 つの円を描く。

(p 80 参照)

(3) 転がる円の 2 倍の半径をもつ円の直径の包絡線は、もとの円で作られたサイクロイドである。

(p 32 参照)

(4) 大きさの異なる動円が底線上の 1 点(それを原点とする)から出発するサイクロイドを描くとき、原点を通る任意の直線とこれらのサイクロイドとの交点における接線は常に平行である。

(p 79 参照)

(5) サイクロイドの縮閉線は、またサイクロイドで、大きさは、もと同じである。

$$\text{(式)} \quad x = a(\theta - \sin\theta) \quad \rightarrow \quad x = a \{(\theta + \pi) - \sin(\theta + \pi)\}$$

$$y = a(1 - \cos\theta) \quad y = a \{1 - \cos(\theta + \pi)\}$$

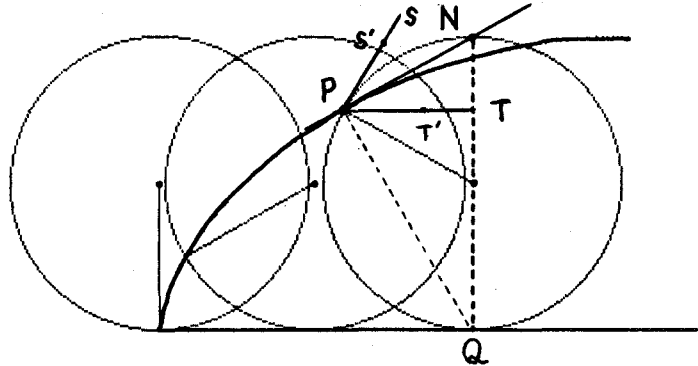
(p 81 参照)

サイクロイドの接線の作図法

①サイクロイド上の点Pにおける速度ベクトルは、線分QPに垂直である。

②点Pにおける接線は点Nを通る。

③接線PNは円の接線PSと水平な直線PTのなす角 $\angle SPT$ を二等分する。



<初等幾何の証明>

①,②: QOの延長上の円との交点をNとする。

NQは直径だから $\triangle NPQ$ は直角三角形

$\therefore \angle QPN = 90^\circ$

③: 接線と弦のつくる角より

$$\angle SPN = \angle PQN \quad \dots(1)$$

$$\triangle PTN \text{において} \angle NPT + \angle PNT = 90^\circ$$

$$\triangle PQN \text{において} \angle PQN + \angle PNT = 90^\circ \text{ より}$$

$$\angle NPT = \angle PQN \quad \dots(2)$$

(1),(2)より

$$\angle SPN = \angle NPT$$

<式による証明>

- ① 点Q (aθ, 0)、点P (a(θ-sinθ), a(1-cosθ)) とすると
サイクロイド上の点Pにおける接線の傾きは

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta) \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a \sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \dots (1)$$

$$\text{また、直線PQの傾きは } \frac{a(1 - \cos\theta)}{a(\theta - \sin\theta) - a\theta} = -\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \dots (2)$$

よって (1)、(2)より サイクロイド上の点Pにおける接線と線分PQは直交する。

- ② 点Pにおける接線の方程式は、

$$Y - a(1 - \cos\theta) = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \{X - a(\theta - \sin\theta)\}$$

$$Y = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} X + \frac{a(2 - 2\cos\theta - \theta \sin\theta)}{1 - \cos\theta}$$

$$X = a\theta \text{ のとき } Y = 2a$$

よって 点Pにおける接線は点N (aθ, 2a) を通る。

- ③ PNの傾きは $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$

PS=1とする点をS'とし、Pから水平な直線PTにおいて
PT=1とする点をT'とする。

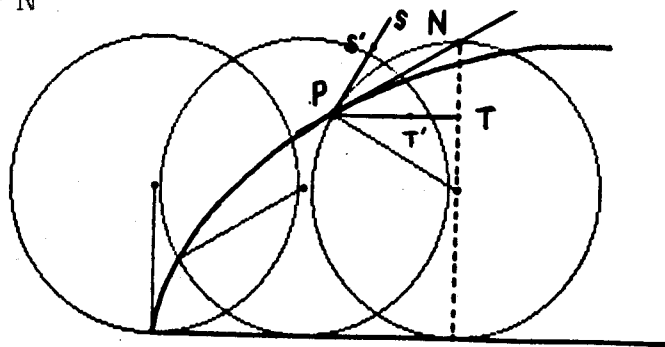
$$\begin{aligned} S' &= (a(\theta - \sin\theta) + a\cos(\pi - \theta), a(1 - \cos\theta) + a\sin(\pi - \theta)) \\ &= (a(\theta - \sin\theta - \cos\theta), a(1 - \cos\theta + \sin\theta)) \end{aligned}$$

$$T' = (a(\theta - \sin\theta + 1), a(1 - \cos\theta))$$

$$\begin{aligned} S'T' \text{ の傾き } &= \frac{a(1 - \cos\theta) - a(1 - \cos\theta + \sin\theta)}{a(\theta - \sin\theta + 1) - a(\theta - \sin\theta - \cos\theta)} \\ &= -\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \end{aligned}$$

$$(S'P' \text{ の傾き}) \times (PN \text{ の傾き}) = -\frac{\sin^2\theta}{1 - \cos^2\theta} = -1$$

∴ S'T' ⊥ PN



大ききの異なる転動円が底線上の1点（それを原点とする）から出発するサイクロイドを描くとき、原点を通る勝手な直線とこれらのサイクロイドとの交点における接線は常に平行である。

(証明)

図において点 A_2, B_2, C_2 における接線と A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 はそれぞれ直交する。

また、 A_1 と A_2, B_1 と B_2, C_1 と C_2 にそれぞれ接する円を O_1, O_2, O_3 とすると

$$OA_1 = OA_2$$

$$OB_1 = OB_2$$

$$OC_1 = OC_2 \quad \text{だから}$$

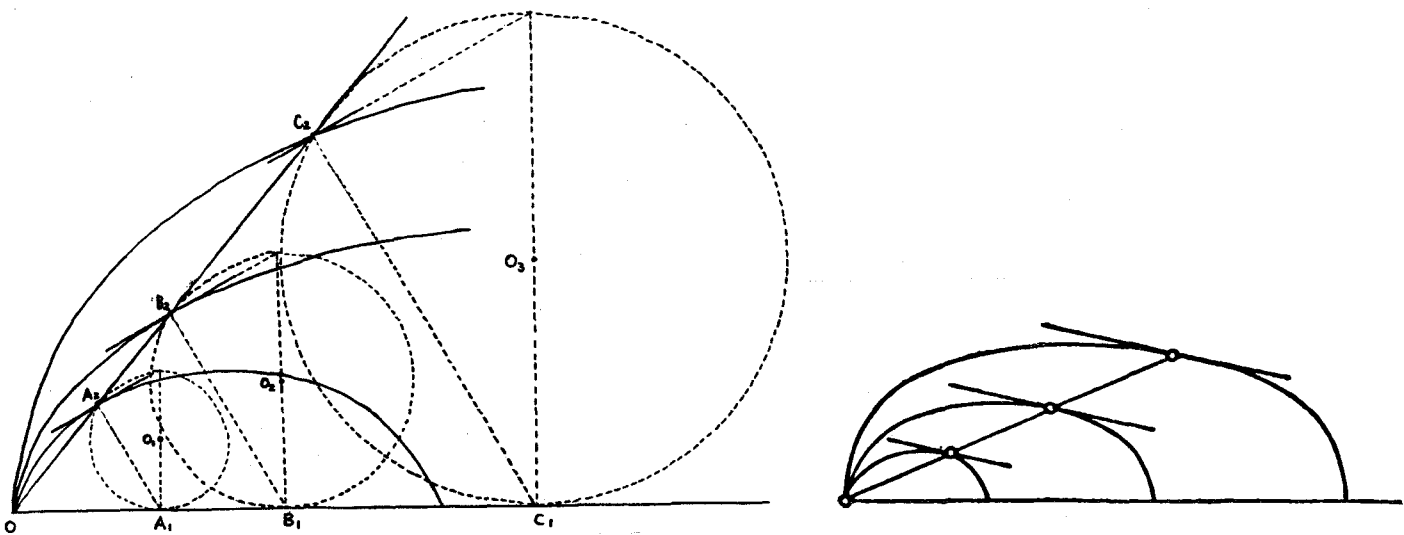
$$\angle OA_2A_1 = \angle OB_2B_1 = \angle OC_2C_1 \quad \text{となる。}$$

よって

$$A_2A_1 // B_2B_1 // C_2C_1$$

ゆえに

点 A_2, B_2, C_2 における接線は、平行である。



サイクロイドの曲率半径

サイクロイドの式 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

微分して $x' = a(1 - \cos t)$

$y' = a \sin t$

さらに微分して $x'' = a \sin t$

$y'' = a \cos t$

曲率の半径 $\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x' y'' - x'' y'|}$

$$= \frac{\{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t\}^{3/2}}{|a^2(1 - \cos t) \cdot \cos t - a^2 \sin^2 t|}$$

$$= \frac{a^3 \cdot 2^{3/2} \cdot (1 - \cos t)^{3/2}}{a^2(1 - \cos t)}$$

$$= a \cdot 2^{3/2} \sqrt{1 - \cos t}$$

$$= 2\sqrt{2} a \cdot \sqrt{2} \sin(t/2)$$

$$= 4a \sin(t/2)$$

よって

半径 a の転円で作られたサイクロイドの接点の曲率中心は半径 $4a$ の1つの円をかく。

「下図において上側サイクロイドの縮閉線は下側サイクロイドである」
 (ホイヘンスの発見)

(幾何学的な証明)

図において

$$OQ = \widehat{QP}$$

$$OB = \widehat{QA} \text{ (回転円 } O_1 \text{ の半円周)}$$

$$\therefore QB = \widehat{PA}$$

$$\text{また } A'B' = \widehat{A'P'}$$

QP' は下サイクロイドの接線

($A'P'$ は下サイクロイドの法線)

「サイクロイドの弧長の算術」

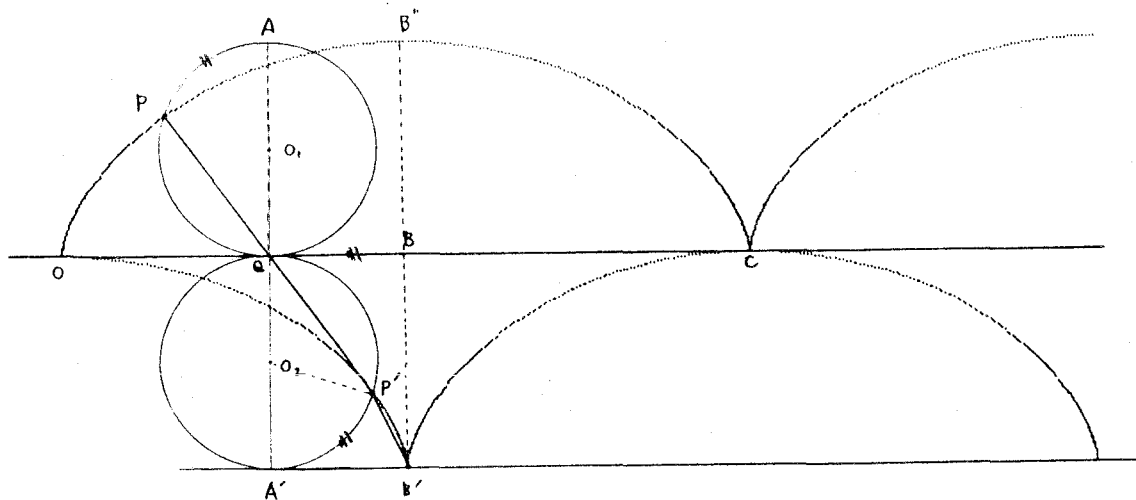
図において、下サイクロイド上の点 P' が O から B' まで動くとき、
 P は O から B'' まで上サイクロイド上を動く。

線分 $B''B'$ の長さは回転円の半径 a の4倍、 $4a$ である

(弧 $OB' = B''B' = 4a$)

よって サイクロイドの1つの弧の長さは、 $8a$ である

上記のことから、上サイクロイドは下サイクロイドの伸開線である。



§ 4. 内サイクロイドと外サイクロイドのまとめ

- (1) 内サイクロイドの媒介変数表示 (初等幾何とベクトル)
- (2) 外サイクロイドの媒介変数表示 (初等幾何とベクトル)
- (3) 内サイクロイドの作図法 (直線の包絡線)
- (4) 外サイクロイドの作図法 (直線の包絡線)
- (5) 外サイクロイドの垂足曲線
- (6) 外サイクロイドの作り方
- (7) 内サイクロイドの作り方

(1) 内サイクロイド (hypocycloid) の表し方

<初等幾何>

半径 a の固定円に対して半径 b の輪転円がある。

今点 A から転がすとき輪転円の定点を $P(x, y)$ とする。

$\angle TOA = t$, $\angle TCP = \alpha$, $\angle CPR = \beta$ とおく。

$$\widehat{TP} = \widehat{TA} \text{ より } b\alpha = at \quad \therefore \alpha = at/b$$

$$RP = b \cos \beta$$

$$RC = b \sin \beta$$

$$\alpha = \beta + t \text{ より}$$

$$\beta = \alpha - t$$

$$= (at/b) - t$$

$$= (a-b)t/b$$

$$x = OH + RP$$

$$= (a-b)\cos t + b \cos \beta$$

$$= (a-b)\cos t + b \cos \{(a-b)t/b\}$$

$$y = HC - RC$$

$$= (a-b)\sin t - b \sin \beta$$

$$= (a-b)\sin t - b \sin \{(a-b)t/b\}$$

<ベクトルを用いて>

$$\vec{op} = \vec{oc} + \vec{cp}$$

$$= (a-b)(\cos t, \sin t) + b(\cos(\alpha-t), -\sin(\alpha-t))$$

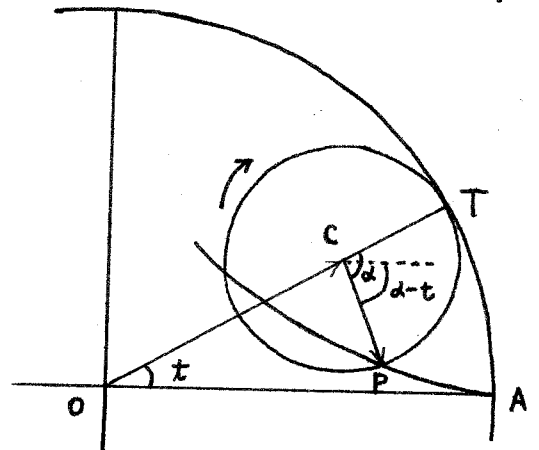
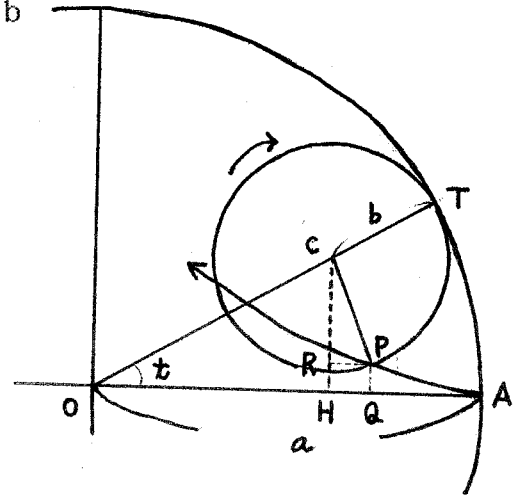
$$= ((a-b)\cos t + b \cos(\alpha-t), (a-b)\sin t - b \sin(\alpha-t))$$

$$TP = TA \text{ より } b\beta = at \quad \therefore \alpha = at/b$$

$$\alpha - t = (a-b)t/b \quad \text{だから}$$

$$x = (a-b)\cos t + b \cos \{(a-b)t/b\}$$

$$y = (a-b)\sin t - b \sin \{(a-b)t/b\}$$



(2) 外サイクロイド(epicycloid)の表し方

<初等幾何>

半径 a の固定円に対して半径 b の輪転円がある。

今点 A から転がすとき輪転円の定点を $P(x, y)$ とする。

$\angle TOA = t$, $\angle TCP = \alpha$, $\angle PCR = \beta$ とおく。

$$\widehat{TP} = \widehat{TA} \text{ より } b\alpha = at \quad \therefore \alpha = at/b$$

$$RP = b \sin \beta$$

$$RC = b \cos \beta \quad \alpha - \beta + t = \pi/2$$

$$\therefore \beta = \alpha + t - \pi/2$$

$$= (a/b + 1)t - \pi/2$$

$$= \{(a+b)t/b - \pi/2\}$$

$$x = OH + RP$$

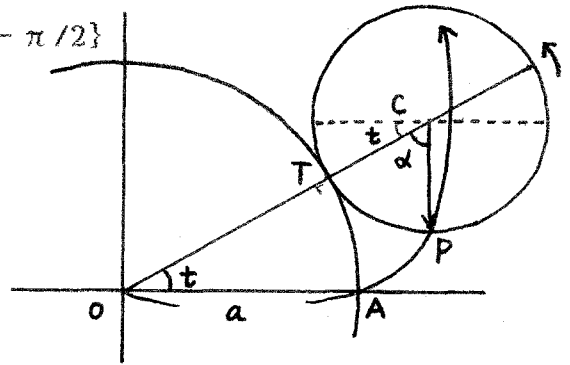
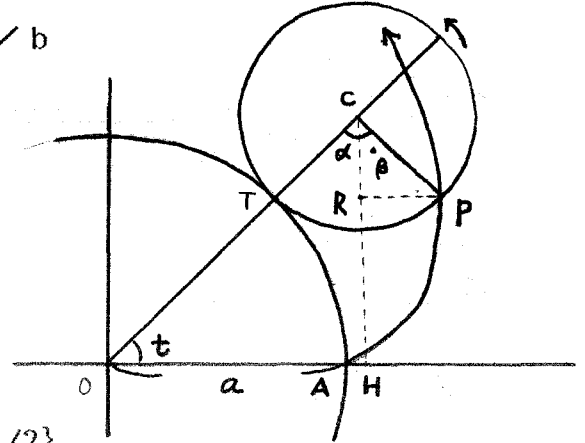
$$= (a+b)\cos t + b \sin \{(a+b)t/b - \pi/2\}$$

$$= (a+b)\cos t - b \cos \{(a+b)t/b\}$$

$$y = HC - RC$$

$$= (a+b)\sin t - b \cos \{(a+b)t/b - \pi/2\}$$

$$= (a+b)\sin t - b \sin \{(a+b)t/b\}$$



<ベクトルを用いて>

$$\widehat{TP} = \widehat{TA} \text{ より } at = b\alpha$$

$$\therefore \alpha = at/b$$

また $t + \alpha = (a+b)t/b$

$$\vec{op} = \vec{oc} + \vec{cp}$$

$$= (a+b)(\cos t, \sin t) + b(\cos(\pi + t + \alpha), \sin(\pi + t + \alpha))$$

$$= (a+b)(\cos t, \sin t) +$$

$$b \{-\cos((a+b)t/b), -\sin((a+b)t/b)\}$$

$$= \{(a+b)\cos t - b \cos((a+b)t/b),$$

$$(a+b)\sin t - b \sin((a+b)t/b)\}$$

よって

$$\begin{aligned} x &= (a+b)\cos t - b \cos((a+b)t/b) \\ y &= (a+b)\sin t - b \sin((a+b)t/b) \end{aligned}$$

(3) 内サイクロイドの作図法

定円周上を直径ABの両端からそれぞれ出発し、反対方向に運動する2点Q, Rがある。Qの角速度が θ のとき、Rの角速度が $n\theta$ ($n > 0$)であるとき点Qと点Rを通る直線群は $(n+1)$ の尖点をもつ内サイクロイドである。半径 a の円OにおいてQRの包絡線は、中心O, 半径 $(1+2/(n-1))a$ の円の内サイクロイドで回転円の半径 $a/(n-1)$ である。

例えば、 $n = 2$ のとき デルトイド

$n = 3$ のとき アステロイド

(証明)

図のように中心O, 半径 $(n-1)a$ と半径 $(n+1)a$ の2つの円をかく。

点Qを中心, 半径 $2a$ の円が、点Oを中心, 半径 $(n+1)a$ の円の内側のまわりを回転するとき、接点をIとし、RQの延長上の交点をPとする。

またOAの延長上と点Oを中心, 半径 $(n+1)a$ の円との交点をCとする。

$$\begin{aligned} \text{弧 } \widehat{IC} &= (n+1)a\theta \\ &= 2a \cdot (n+1)\theta/2 \\ &= (n+1)a\theta \\ &= \text{弧 } \widehat{IP} \end{aligned}$$

またIQを直径とする円をかき、RQの延長上の交点をP'とする。

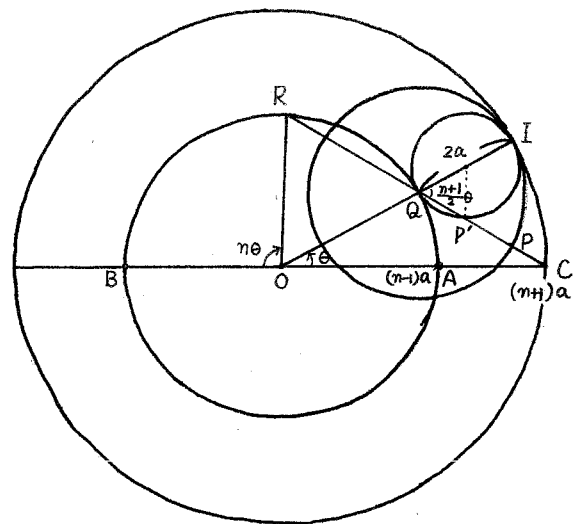
$$\text{弧 } \widehat{IP} = \text{弧 } \widehat{IP}'$$

よって $\text{弧 } \widehat{IC} = \text{弧 } \widehat{IP}'$

点P'はCに達する。

つまり半径 $(n+1)a$ の円の内側を半径 a の円が回転することになる。

これが、 $(n+1)$ の尖点をもつ内サイクロイドの作図法である。



(4) 外サイクロイドの作図法

定円周上を直径ABの両端からそれぞれ出発し、同じ方向に運動する2点Q, Rがある。Qの角速度が θ のとき、Rの角速度が $n\theta$ ($n > 0$)であるとき点Qと点Rを通る直線群は $(n-1)$ の尖点をもつ外サイクロイドである。半径 a の円OにおいてQRの包絡線は、中心O, 半径 $(1+2/(n-1))a$ の円の内サイクロイドで回転円の半径 $a/(n-1)$ である。

例えば、 $n = 2$ のとき カージオイド
 $n = 3$ のとき ネフロイド

<証明>

図のように中心O, 半径 $(n-1)a$ と半径 $(n+1)a$ の2つの円をかく。点Qを中心、半径 $2a$ の円が、点Oを中心、半径 $(n-1)a$ の円の外側のまわりを回転するとき、接点をIとし、RQの交点をPとする。

$$\begin{aligned} \widehat{IA} &= (n-1)a\theta & OA' &= (n-1)a \\ &= 2a \cdot (n-1)\theta/2 & OA &= (n+1)a \\ &= (n-1)a\theta & \angle IQP &= (n-1)\theta/2 \\ &= \widehat{IP} \end{aligned}$$

またIQを直径とする円をかき、RQの交点をP'とする。

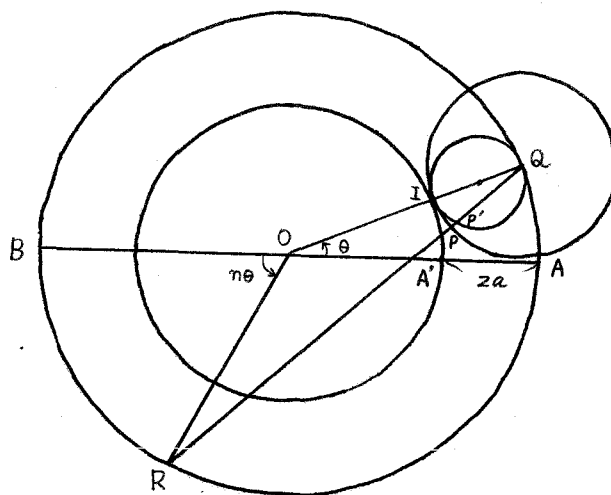
$$\widehat{IP} = \widehat{IP}'$$

よって $\widehat{IA} = \widehat{IP}'$

点P'はAに達する。

つまり半径 $(n+1)a$ の円の内側を半径 a の円が回転することになる。

これが、 $(n-1)$ の尖点をもつ外サイクロイドの作図法である。

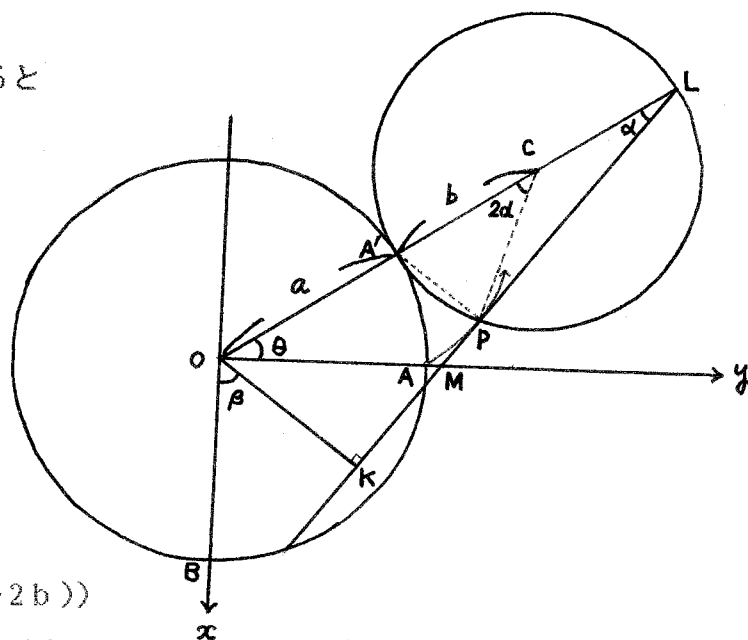


(5) 外サイクロイド(epicycloid)の垂足曲線

<垂足曲線の方程式>

図のように円O(半径a)上の点Aを始点とし、外側を回転する円C(半径b)がある。半径cの円の両端をA' Lとし、外サイクロイドと円の交点をP、LPの延長にOから垂直に引いた垂線の足をKとする。

$\angle PLO = \alpha$ $\angle BOK = \beta$
 $\angle AOA' = \theta$ $OK = p$ とすると
 弧 $\widehat{AA'}$ = 弧 $\widehat{PA'}$ より
 $a\theta = 2b\alpha$ $\therefore \theta = 2b\alpha / a$
 また、 $\beta = 90^\circ - \angle AOK$
 $= \angle OMK$
 $= \theta + \alpha$
 $= (2b/a + 1)\alpha$
 $\therefore \alpha = a\beta / (a + 2b)$
 $OK = OL \sin \alpha$ より
 $p = (a + 2b) \sin(a\beta / (a + 2b))$
 OB, OAをそれぞれx軸、y軸にとると



$$x \cos \beta + y \sin \beta = (a + 2b) \sin(a\beta / (a + 2b))$$

とかける。([28] p 212)

(6) 外サイクロイドの作り方

外サイクロイドとは、定円に接しながらその外側を転がる周上の点が描く軌跡なのであって、2円が互いに外接している必要はない。つまり定円より大きい円が内接しながら回転するとき動円の周上の点は外サイクロイドを描く。

(証明)

定円を O 、それより大きい円を O_1 とする。定円 O と動円との接点を C とし、跡点 P と C を結ぶ直線が円 O と交わる点を C' とする。2円の直径 $COED$ を引き、 OC' と DP が延長において D' で交わるとする。円 $C'PD'$ は明らかに円 O に外接する。

CP 、 $C'P$ 、 CC' は互いに相似 (\because 円周角が等しい)

$$CP = CC' + C'P \text{ より } CP = CC' + C'P$$

今 $C'P = C'A$ となる点 A を考える。

点 P は、円 O のまわりを外側に転がる円 O_2 と考えても、円 O のまわりを内接しながら転がる円 O_1 と考えても、点 P が円 O の点 A から出発限り同じ道すじを描く。(備考 O_1 の半径 $=O$ の半径 $+O_2$ の半径) (図1を参照)

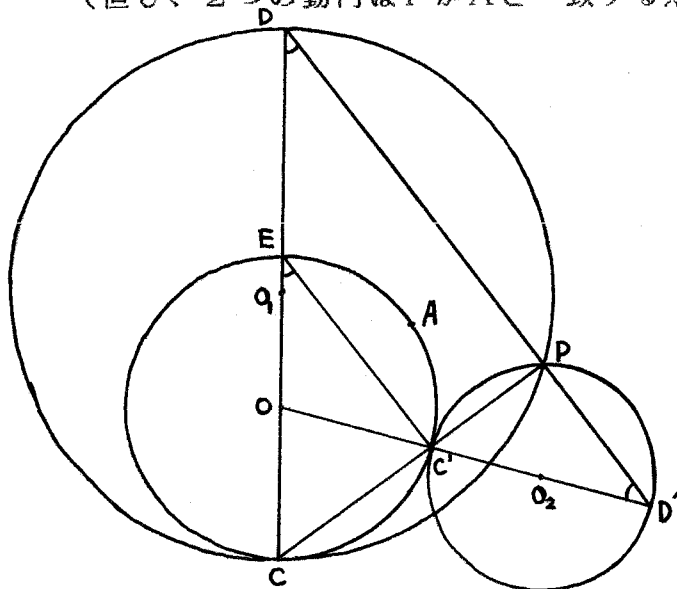
(7) 内サイクロイドの作り方

半径 a の固定円 C 、半径 b の動円 O_1 とする。図2のように OP の延長が固定円と交わる点 O' 、 CO' と PD の交点を D' とおく。

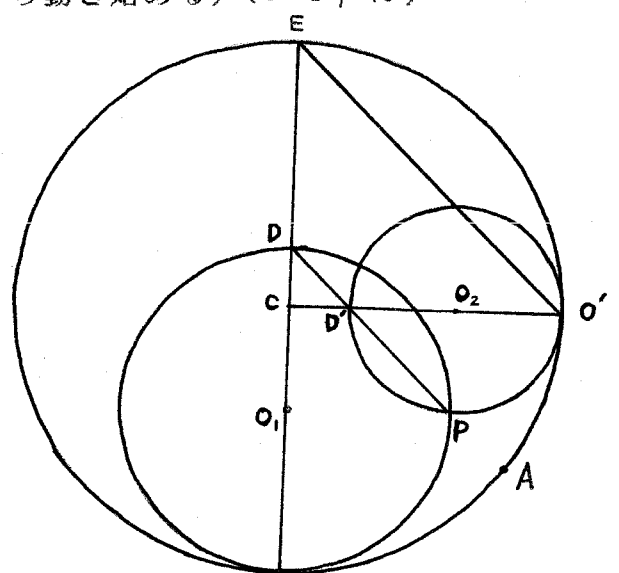
$PD'O'$ は円 C に内接し、半径は $a-b$

$OO' = OP + O'P$ より $O'P = O'A$ となる点 A をとれば、点 P は内側の2円のいずれの周上にあると考えても同じ内サイクロイドを描く。

(但し、2つの動円は P が A と一致する点から動き始める) ([28] p215)



(図1)



第 6 章 微積分学書の「曲線の追跡」

微積分の著書、テキスト（微分幾何その他の書）が、どのような曲線をどのように取り上げているかについて調べた結果を記す。

代表的な邦書としては

藤原松三郎著「微積分学（第二巻）」 1939年

高木 貞治著「解析概論（改定第三版）」1938年

穂刈四三二著「微分幾何」 1965年

洋書としては、

HOWARD ANTON 「CALCULUS」 1984年

Sherman K.Stein 「CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY」1982年

Stanley I.Grossman 「CALCULUS PART 1」 1981年

曲線のこと、その長さ、それが囲む面積等は積分に関する内容になるが、本論文を整理する段階でほとんど積分のことが出てこない内容になったことに気づき、予定の題名から「積分」をとることにした。ただし、長さや面積は歴史上は曲線に関連して曲線の微分による性質とともに研究されていることでもあり、結果のみ付録としてのせた。

ここでは、微分積分学，微分幾何学などの日本とアメリカの書物等が曲線をどのように取り扱っているかをみる。

① 藤原 松三郎：数学解析第一編「微分学」第二巻 1939年第1版発行

具体的曲線については、第六章「曲線と曲面」で取り扱っている。この章の最初に藤原は次のように記している。

「幾何学上の問題は微積分学発生の素因をなし、またその発展をうながしたものである。ただし微積分学の応用によって、曲線および曲面の性質を組織的に論ずることは、今日にとっては微分幾何学の領分に属するから本節では唯基本的な事項にのみ とめる」

次にこの章でどんな曲線を取り扱っているかを記す。

| | | |
|-------------------|------------------------|------------|
| 第一種尖点の例 | <デルトイド> | p126, p138 |
| | <アステロイド> | p127 |
| 漸近線の例 | <デカルトの正葉曲線> | p140 |
| 包絡線 円の火線(caustic) | <カージオイド> | p146~147 |
| 曲率 | <アステロイド> | p168 |
| 極座標による曲線の表示 | | |
| | <レムニスケート> | p179 |
| | <定幅曲線> | |
| | <ルーロー(Reuleaux)の円弧三角形> | |
| 演習問題 (54題) | | p223~228 |
| | <デルトイド> <サイクロイド> | <カージオイド> |
| | <レムニスケート> <リマソン> | <シッソイド> |
| | <半三次方程式> | |

演習問題で取り扱っているいろいろな曲線に関する問題を曲線ごとに分けて問題数の多い方から列挙する。

<デルトイドに関する問題>

1. $x = a(2\cos t + \cos 2t)$ の $t = \tau_1, \tau_2, \tau_3$ に対する三点における
 $y = a(2\sin t - \sin 2t)$
接線が一点で出会うためには、 $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\pi$ になることが
必要十分条件であることを示せ
2. デルトイドの三接線が正三角形を作る場合は無数に存在することを証明せよ
3. デルトイド上の一点Pにおける接線が曲線と交わる他の二点をQ, Rとすれば、Q, Rにおける接線は互いに直交すること、およびP, Q, Rにおける法線は曲線の外接円上で交わることを示せ
4. 三角形に外接する双曲線の漸近線の包絡線は、デルトイドになることを証明せよ
5. 三角形のシムソン線の包絡線は、デルトイドになることを証明せよ
6. デルトイドの平行曲線を求めて、その尖点を定めよ
7. デルトイドの直交する二接線の接点の連結線は、また一つの接線になることを証明せよ

<サイクロイドに関する問題>

1. サイクロイドの方程式は、 $x = a(\theta - \sin \theta)$ になることを示せ
 $y = a(1 - \cos \theta)$
この場合に、ころがる円の1つの直径の包絡線もまたサイクロイドになる
2. サイクロイドの縮閉線は、原曲線と合同で、相似の位置にあることを示せ
3. サイクロイド上の1点Pにおける曲率半径を ρ とし、 $\theta = 0$ に対する
O点から測った弧OPの長さをsとすれば、 $\rho^2 + s^2$ は一定となることを示せ ($\rho^2 + s^2 = 16a^2$)
4. サイクロイドが一直線上を転がれば、接線の曲率中心は半径4rの1つの円を書く

<カージオイドに関する問題>

1. カージオイド $x = a(1 - \cos \theta)\cos \theta$ の尖点から発した光線が、曲線
 $y = a(1 - \cos \theta)\sin \theta$

上で反射した場合に、反射光線の包絡線を求めよ

2. 円周上の1点Aに対するこの円の垂足曲線は、Aを尖点とするカージオイドになることを示せ

カージオイドの尖点Aから発する光線がこの曲線上の1点Pで反射してX軸をQで切れば $\angle PAQ = \angle APQ$ になることを証明せよ

3. シツソイド $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$ の $(8a, 0)$ に対する垂足曲線は、1つのカージオイドになることを示せ

4. 円の接線へ1定点Aより下した垂線の足をPとすれば、Pの軌跡（即ちAに関する円の垂足曲線）を求めよ（この曲線をパスカルの蝸牛線という、Aが円周上にある場合にはカージオイドとなる）（p 47 参照）

<レムニスケートに関する問題>

1. 二定点からの距離の乗積が一定になる点の軌跡を求め、その特異点を定めよ

<リマソンに関する問題>

1. 円の接線へ1定点Aより下した垂線の足をPとすれば、Pの軌跡（即ちAに関する円の垂足曲線）を求めよ（この曲線をパスカルの蝸牛線という）（p 47 参照）

<シツソイドに関する問題>

1. 放物線の頂点に関する垂足曲線を求めよ（p 48 参照）
（これをシツソイドという）

<半三次方程式に関する問題>

1. 放物線 $y^2 = 2px$ の縮閉線を求めよ（p 52 参照）

② 「解析概論」 高木 貞治著 1961年第3版発行

具体的曲線を扱っているのは、主に第2章 微分法 「27.接線および曲率」と第7章 微分法の続き（陰伏関数）「86.曲線の方程式」の2箇所である。本論で扱った曲線でこの著に取り上げられているものを次に列記する。

| | | |
|----------------------|-----------|----------|
| 楕円の縮閉線の例 | <アステロイド> | p83 |
| 双曲線関数 $\cosh x$ のグラフ | <懸垂線> | p195 |
| 伸開線・縮閉線の例（媒介変数） | | |
| | <サイクロイド> | p82 |
| Jordan曲線 | | p32 |
| Peanoの曲線 | | p468 |
| 曲線の長さ | <レムニスケート> | p136,193 |
| 伸開線の例 | <円の伸開線> | p83 |
| 曲線の追跡の例 | <デカルトの葉線> | p311 |
| 特異点で尖点をもつ例 | <半立方放物線> | p313 |

③ 「微分幾何」 穂刈四三二著：至文堂 1965年第1版発行

具体例として出ている曲線は次のようにわずかしかない。

第2章 曲線の幾何

| | |
|-----------------|--------------|
| §1.曲線の表わし方 | <サイクロイド> |
| §3.曲線の長さ | <アステロイド> |
| §9.平面曲線の性質 | <サイクロイド、懸垂線> |
| §10.平面曲線の大域的な性質 | <対数螺線> |

④ calculus with analytic geometry :HOWARD ANTON, WILEY 1984

アメリカの大学で広く使用されているテキストで、この本は18の各章から成り全部で1108ページにもおよぶ厚いものである。カラー（青色）塗りでもた図も多い。その中で、第13章「極座標」で多く曲線を主に練習問題でとり上げている。

以下、それを列記する。

| | |
|---------------|--------------|
| <ばら曲線> | グラフ（例題） |
| <双曲らせん> | グラフ（練習） |
| <対数らせん> | グラフ（練習） |
| <カッパ曲線> | グラフ（練習） |
| <放物らせん> | グラフ（練習） |
| <リマソン> | 極座標と媒介変数の方程式 |
| <カージオイド> | 極座標と媒介変数の方程式 |
| <レムニスケート> | 極座標と媒介変数の方程式 |
| <アルキメデスのらせん> | 極座標と媒介変数の方程式 |
| <シッソイド> | グラフ（練習） |
| <ニコメデスのコンコイド> | グラフ（練習） |
| <サイクロイド> | 最速降下線 |
| <内サイクロイド> | 媒介変数の方程式の説明 |

⑤ 「CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY」 (Third Edition)

Sherman K. Stein 1982 Mc Graw-Hill Book Company

この本では、第9章（全部で11章で1026ページ）から成り立っている。

9章 平面曲線と極座標

§9.1 極座標

<カージオイド> , <三葉線> <四葉線> (<ばら曲線>)

§9.2 極座標の面積

$$r = \cos 4\theta$$

§9.3 媒介変数表示

<サイクロイド>

練習問題 - <内サイクロイドの式>

<アステロイド>

<外サイクロイドの式>

§ 9.4 曲線の弧長と速度

§ 9.5 回転の表面積

§ 9.6 直線となす角

§ 9.7 二次導関数と曲率

⑥ calculus part 1 (The calculus of one variable)

Stanley I. Grossman Academic Press 1981

この本は、第14章(全部で667ページ)と付録6つと練習問題の解答(全部で116ページ)から成り立っている。

その中でいろいろな曲線は、第11章にある。構成は下記の通りである。

§ 11.1 極座標系

§ 11.2 極座標のグラフ

§ 11.3 極方程式のグラフの交点

§ 11.4 導関数と接線

§ 11.5 極座標での面積

取り扱われている曲線名だけ挙げておく。

<カージオイド>

<シッソイド>

<コンコイド>

<アルキメデスのらせん>

<ばら曲線>

<レムニスケート>

<リマソン>

以上のことより次のことに気づく。

- (i)日本の書物では、接線や曲線の長さの計算例としてわずかに上記のような曲線を取り扱っているにすぎない。また、極座標は章としては設定していない。
- (ii)一般的に日本の微積分に関する書物は、曲線についての章は考えないが、藤原松三郎の「微分学」のようにいくつかの曲線の性質をもとにした問題を演習として挙げているのもある。
- (iii)アメリカの書物では、「平面曲線と極座標」の章でいろいろな曲線を取り上げている。他のところでは殆んど出てこない。

微積分学書を考察中、曲線の“定義”が、時代により違っているように思えた。以下、時代と共に曲線の定義についてどのように変化したかを調べてみた。

(ア) 古代ギリシャ

曲線を幾何学的作図によってできた点の軌跡と定義した。

(イ) 近世(17世紀頃)

曲線概念について共通の定義を持っていなかった。(そのような定義の必要性も感じていない。)なぜなら曲線をはっきりという方法がたくさんあったから。たとえば、曲線上の各々の点が、どのように構成されるか指示することができたし、曲線を描くことができる機械を記述することができたし、座標導入によって曲線の方程式をあたえることができた。

その頃フェルマやデカルトの新しい解析幾何学によって代数的演算だけを含むような代数曲線とそれ以外の超越曲線に分類されるようになった。

([4] 参照)

(ウ)19世紀頃

フロリアン・カジョリ：「数学史」に“曲線の定義”を引用する。
カントルの創意になる点集合論は曲線論や容量の意識の上に新しい考えを生じた。曲線とは何か？ カミュ・ジョルダンが彼の著 Cours d'analyse（解析学講義）の中で試案として「連続曲線」を定義した。

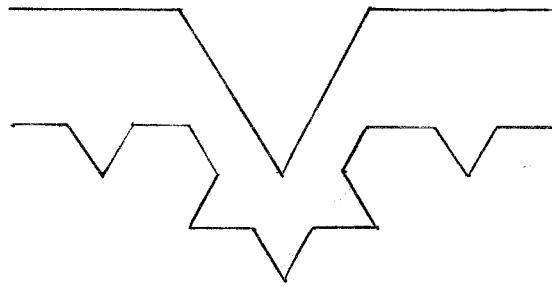
W. H. ヤングとグレイス・チスホーム・ヤングはその著 Theory of Sets of Points 1906, p222（点集合論）の中で「ジョルダン曲線」を1つの直線の閉線分の点 (a, z) と連続な $(1, 1)$ 対応をもたらす平面点集合と定義している。円は、1つのジョルダン曲線である。ジョルダンは1つの曲線は1つの空間をことごとく充たすことができるかという疑問を発した。

ペアノ(Peano)はこれに対して「連続曲線」ならそれはできると答え、Math, Annals. Vol.36, 1890 に彼の主張を確認するため、いわゆる「空間を充たす曲線」（「ペアノ曲線」）を作図して見せた。彼の作図法は以来いろいろなやり方で修正された。これらのうち最も有名なのはE. H. ムアとD. ヒルベルトの創意にかかる。1916年ペンシルベニア大学のR. L. ムアは連続曲線上のすべての2点は、どんなに波状になってもその曲線と全く合致する単一の弧で結ばれることはできない。曲線という用語を1つの範囲に適用されることを認めようとする限り、われわれの経験的概念から逸脱することが望ましくないように思われる故、曲線の一層限定された定義が必要になってくる。C. ジョルダンは曲線 $x = \psi(t)$ および $y = \phi(t)$ は変域 $a \leq t \leq b$ において2重点を持たないことを要求した。シェーンフリースは曲線を領域の限界と見なした。

O. ヴェブレンはこれを位数と線型連続という用語でこれを定義している。W. H. ヤングとグレイス・C・ヤングはその著 Theory of Sets of Points（点集合論）において、平面上いたるところ稠密(dense)でなくそれ以外の制限をもたないが、しかしそれはジョルダン曲線の弧の網目から成っているような平面点集合のような曲線を定義している。

別の前代未聞の曲線は、関数概念の一般化の成果として創造された。次式によって表された連続関数は曲線上の何れの点でも接線をもたないこ

とがワイヤシュトラウスによって示された： $y = \sum b^n \cos \pi(a^n x)$
 ここに a は偶数で > 1 ， b は実正数で < 1 ，同時に $a b$ はある限界以上である。われわれはここで連続関数であって全然導関数をもたないという驚くべき現象に直面したのである。1881年クリスチャン・ウィーナーが説明したように，この曲線はどの有限変域を取ってもこの中で無数の振動をする。直観的により簡単な曲線を考案したのは、1904年ストックホルム大学のフォン・コッホ(v.Koch)で (Acta Math., Vol.30,1906, p.145)



これは初等幾何学で作図される曲線であって，連続ではあるが何れの点でも接線をもたない。その点のうち何れか2点の間の弧の長さは無限大である。この曲線は解析的には表示されていたが、ウィーン大学のルヴィツヒ・ボルツマン(1844~1906)のいわゆるH曲線に対して，かような表現はまだ発見されていなかった(Math. Annalen Vol.50,1898)

これは連続ではあるが接線はない。上の図はその作図法を示している。ボルツマンは気体論の諸定理をまのあたりに見えるようにするためにこれを用いた。

引用：A HISTORY OF MATHEMATICS：FLORIAN CAJORI, CHELSEA p 325-326

補章 付録

本論を書くのに常に参照した書は、

ロックウッド 「カーブ」, 松井政太郎訳

佐藤伊助 「いろいろな曲線と曲面」

である。もちろん これらの書は、本論で取り上げてない曲線も含むが、一方本論文が第5章、第6章で考察したようなことはこれらの書にはない。

全体を通じ、曲線名は、標準的なものを探し、漢字でのなじみが薄ければ、カタカナ書きにした。英語名は「曲線の名前一覧」に併記した。この一覧は本論文の「索引」(付録の最後に記す)を兼ねる。また、各々の曲線について参考になるような事項が書いてある文献もここに記しておいた。このような作業は、第6章の対照作業などと共にかなり時間のかかったところで、それ故に筆者にとっていろいろと勉強になった。他に、本文にくみ込め難かったこともあって、その一部を参考資料として、「曲線研究の略年表」に、古い方から曲線名を掲げて、記した。これらは、いわば2次資料によるものでいろいろ不備なものであろうが、これからの勉強、調査によって内容を増やし、より完全なものを作りたいと考えている。

§ 1 . 曲線の名前一覧表

〔注. ☆, *, ◇, ★, ●, ◎は p 105の参照文献を示す〕

1. アステロイド (asteroid or astroid) 別名. 星芒形 (p 8 を参照)

4個の尖点 (cusp) をもつ内サイクロイド (hypocycloid) 曲線

ヨハン・ベルヌーイ (1667-1748) が、考察する。

◇1838年に、アステロイドという名称はようやくウィーンで発行された本にのっている程度であった。その後も、”キューボサイクロイド” ”パラサイクロイド”, ”四つの尖点をもつ曲線” などといろいろな名称が用いられた。

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ という方程式は、早くも1715年にライプニッツの手紙に書かれた。([18])

2. アーネシのウィッチ (witch of Agnesi) (p 18 参照)

☆アーネシ (1718-1799) はイタリア Bologna の女流数学者

*その図形が魔女の帽子に似ているところから名づけられる。

1748年 Milanoの M.G.Agnesiによって発見された。([21] p123)

3. アルキメデスの螺線 (Archimedes) アルキメデス (287-212 B.C.) (p 5)

●別名. 正匝線. 螺線は、半直線がその端点のまわりに等角速度をもって回転するとき、その直線上を端点から出発して等速度で進む点の軌跡として考えられたもので、アルキメデス (紀元前287頃-212) によって深い研究がおこなわれた。

4. オイラーの螺線 (spiral of Euler) オイラー (1707-1783) (p 26参照)

別名. クロソイド (clothoid), コルニュー (Cornu) の螺線

5. カージオイド (cardioid) 別名. 心臓形 リマソンの一種 (p 7 参照)

☆語源はギリシア語. $\kappa \alpha \rho \delta \iota \alpha$ (生命の座心臓)

◇カージオイド (心臓形) という名前は、ド・カステロンが1741年の王立協会会報で初めて使う。

この曲線の長さは、1708年 ラ・イールが発見した。

6. カッシニの卵形線 (Oval of Cassini) (p 19 を参照)

☆カッシニ (1625-1712) フランスの天文学者

カッシニの法則 (1693年) -月の自転について-

特別なものにレムニスケートがある。

7. カテナリー (catenary) 別名. 懸垂線, 懸鎖線, 垂曲線 (p 20 を参照)

◎Jacob Bernoulli によって発見された(1690年)トラクトリックスの縮閉線

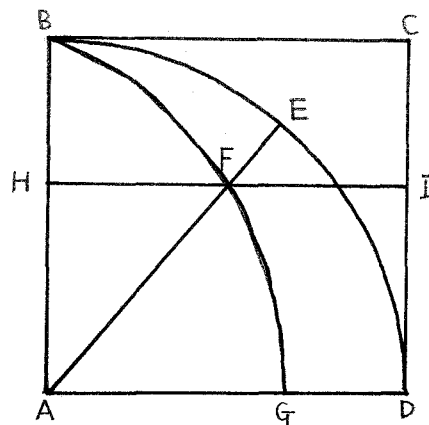
8. クオドラトリックス (quadratrix) 別名. 円積曲線 (p 5 を参照)

Hippias of Elis. 460.B.C.頃

- 円積線 <Quadratrice> は、ヒッピアス (紀元前4世紀) が最初に考えたと言われるもので、円の半径 AB が等角速度をもって1直角だけ回転して AD の位置に達する間に、線分 BC が等角度をもって同じ AD の位置まで平行移動するとき、両者の交点によって作られる曲線 BFG である。

$AG = 2AB/\pi$ となることから、円の求積を可能にするものと見られて tetragonizousa(求積線)と呼ばれ、ラテン語では quadratrix と訳された。

(図)



9. ケーリーの6次曲線 (Cayley) (p 46 を参照)

ケーリー (1821-1891)

カージオイドの尖点における垂足曲線

10. サイクロイド (cycloid) 別名. 擺線 (p 7 を参照)

☆語源はギリシア語. $\kappa\iota\sigma\sigma\omicron\varsigma$ (蔦)

cissoid は「蔦のような」、「蔦状のもの」の意でこの曲線の特異点の近傍の形が、蔦の葉の切れ込みに似ているところからきている。

古い邦訳名は「蔓葉線」

◇ガリレオは、サイクロイドと回転円との面積の比が $\pi : 1$ になると予想。

正確な面積は、ガリレオの弟子、トリチェリが発見。

その後、フェルマー (Fermat.1601-1665)、ロベルバール (Roberval.

1602-1675)、デカルト (Descartes.1596-1650)も別個に、この面積を

計算した。ロベルバールとクリストファ・レンは弧の長さを計算した。

1658年、パスカルがルーレット (フランスでの名称) (ガリレオは多分サイクロイドと呼んだであろう) に関する数種の問題の解法に賞金を提出した。

また、サイクロイドの等時性はホイヘンス (Huygens.1629-1695)により

発見され、1697年に最速降下線 (ブラッキストクローン) はヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli.1667-1748) により発見された。

ホイヘンスにより案出された振り時計は、曲線の縮閉線を使って

サイクロイドの弧を描かせることにより、振子に等時性をもたすことができるという考え方がもとになっている。だが、時計を作るさいの機械的な困難さにより、その精度は良くなかった。歯車に使うサイクロイド状の歯車は、すでに17世紀の初期にデザルグ (Desargues.1593-1662) により提案されている。

- サイクロイドの求積は、すでに1636年以前にロベルヴァルによっておこなわれたと見られているのであるが、デカルトは、1638年5月27日頃および7月27日にメルセンヌにあてた手紙において、彼自身の解法を述べている。やや複雑ではあるが、興味深い幾何学的解法である。

11. ストロフォイド (strophoid) (p 36 を参照)
 ☆語源はギリシア語. $\sigma \tau \rho \phi \omicron \varsigma$ (刀帯などの編みひも)
 strophoid は、「編みひも状の線」の意味
 一般のストロフォイド
 斜角のストロフォイド
 直角のストロフォイド：放物線の原点に関する垂足曲線
12. 双曲螺旋線 (hyperbolic spiral) (p 26 を参照)
13. ディオクレスのシツソイド (Diocles cissoid) ディオクレス(100 B.C.)
 ☆別名. 「疾走線」は音を伝えたもの (p 6 を参照)
14. デカルトの正葉線 (Folium of Descartes(1596-1650)) (p 17 を参照)
 葉線 $y^2 = -x^2 \cdot x / 3 - a$ の形で与えられる曲線
 ◎1638年デカルトがメンセンヌにあてた手紙に始めて見られる曲線
15. ディノストラトスのクオドラトリックス (Deinostratos, 360.B.C.)
 → クオドラトリックス (p 5 を参照)
16. デルトイド (deltoid) 別名. 三尖点内擺線(3-cusped hypocycloid)
 ギリシア語 (deltoeid, delta-shaped) (p 28 を参照)
 ◇三角形のシムソン線の包絡線が、三つの尖点をもった対称的な曲線である
 ということは、1856年にスタイナーにより発見された。しばしば、
 ”スタイナーの内サイクロイド”といわれる。デルトイド(ギリシア文字
 Δ に似た形)という名称は一般的なものではない。
 ◎ F.Morley が Deltoid と名づける。
17. トロコイド (trochoid) 別名. 余擺線 (p 29 を参照)
 ギリシア語 (trokhoeid, round like a wheel)
18. トラクトリックス (tractrix) 追跡線の意味. 別名. 犬線 (p 8 を参照)
 カテナリーの伸開線

19. ニコメデスのコンコイド (Nicomedes conchoid) 別名. 螺獅線

ニコメデス(180 B.C.)

(p 6 を参照)

☆ギリシア語. $\kappa\omicron\gamma\chi\eta$

むらさきいがい(二枚貝の一種)で conchoid はそれのような線の意味

●コンコイド <Conchoide> はニコメデス(紀元前3世紀)が最初に考えたといわれるもので、パップスは4種のコンコイドをあげている。

20. ネフロイド(nephroid)別名.腎臓形. (p 28 を参照)

二尖点外擺線(2-cusped epicycloid)

◇1878年、プロクターによって、二つの先点をもつ外サイクロイドを呼ぶのに使われた。一年後、フリース(T.J.Freeth)は、同じ名称を、もっと手の込んだ曲線と呼ぶのに使った。

21. ばら曲線(rose curve) (3葉線, 4葉線・・・) (p 24 を参照)

22. 半3次放物線 (Semicubical parabola) (p 19 を参照)

放物線の縮閉線を半3次放物線という 別名. 半立方放物線

23. フェルマーの螺線 (spiral of Fermat)

フェルマー(1601-1665)

24. ベルヌーイの螺線 (spiral of Bernoulli) ヤコブ・ベルヌーイ(1654)

ヤコブ・ベルヌーイ(1654-1705) (p 21 を参照)

★この曲線を最初に認識したのはデカルトで、彼はこれをメルセンヌあての1638年の手紙に論じている。ヤコブ・ベルヌーイは、この曲線にぞっこん惚れ込み、自分の墓石(スイスのバーゼルにある大寺院にある)に、
Eadem mutata resurgo と彫らせるまでになった。

この言葉(E. T. ベルはこれを「いくら変っても、同じように立ち上がる」と訳している。)は、対数螺線が回転拡大によって自分自身に移るさまをまざまざと表している。いいかえると、どんな拡大に対してもそれと同じ効果をもつ回転があり、逆に任意の回転と同じ効果をもつ拡大がある。
別名. 等角螺線, 対数螺線 注) 螺線を渦線ともいう

25. ベルヌーイのレムニスケート (lemniscate) 別名. 連珠形(p 9 を参照)
26. マクローリンの3等分曲線 (Maclaurin's trisectrix) (p 18 を参照)
マクローリン (1698-1746) 偉人の数学者
27. リチュウス (Lituus) 別名. オイラーの螺線 (p 27 を参照)
語源. 曲がった柄のついたつえ
28. リマソン (limacon) 別名. 蝸牛線, 原義 snail(かたつむり) (p9 を参照)
◇ロバールバールは、1630年から1640年にかけて、二つ以上の同時におこる運動の終結式によってできる曲線を考えることによって、切線を引く方法を発展させた。彼が、”パスカル氏 (Pascal, 1623-1662) のリマソン”とよんだ、円のコンコイドがある。この曲線は、デューラーによってかかれたが、この曲線に名前はつけなかった。これは、1525年に出版された”Underweysung der Messung”にのっている。
◎円の内部に一点Mのこの円に関する垂足曲線を楕円的蝸牛形曲線 (Elliptic limacon)といい、Mが円外にあるときは、双曲的蝸牛形曲線 (Hyperbolic limacon)といい、Mが円周上にあるときは心臓形 (Cardioid) と名づける。

- 参照文献 ☆ 坂井 忠次：グラフと追跡，培風館，1975
* 新英和大辞典，研究社 第5版，1980
◇ ロックウッド，松井政太郎訳：カーブ，みすず書房，1964
★ コクセター，銀林 浩訳：幾何学入門，明治図書，1965
● Decarte，原 亨吉訳：デカルト著作集1，白水社，1973
◎ 小林 幹雄：複素数の幾何学，共立出版，1966

§ 2. いろいろな曲線の長さ, 面積, 表面積, 体積

(1) いろいろな曲線の長さ

1. サイクロイド
2. カージオイド
3. アステロイド
4. 外サイクロイド (外擺線)
5. 円の伸開線
6. カテナリー (懸垂線)
7. トラクトリックス (追跡線)
8. レムニスケート (連珠形)
9. アルキメデスの螺線
10. 対数螺線
11. ばら曲線
12. Cayleyの6次曲線
13. 楕円
14. 楕円の縮閉線
15. 放物線

(2) いろいろな曲線の面積

1. サイクロイド
2. カージオイド
3. リマソン
4. アステロイド
5. Epicycloidと円
6. レムニスケート
7. デカルトの正葉線
8. ばら曲線
9. 楕円
10. 楕円と垂足曲線
11. 放物線と縮閉線(半3次放物線)

(3) いろいろな曲線の回転体の表面積 (4) いろいろな曲線の回転体の体積

- | | |
|-------------|-------------|
| 1. サイクロイド | 1. サイクロイド |
| 2. カージオイド | 2. カージオイド |
| 3. デルトイド | 3. アステロイド |
| 4. アステロイド | 4. カテナリー |
| 5. カテナリー | 5. トラクトリックス |
| 6. トラクトリックス | 6. レムニスケート |
| 7. レムニスケート | |

(1) いろいろな曲線の長さ

① サイクロイド

$$x = a(\theta - \sin\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき}$$

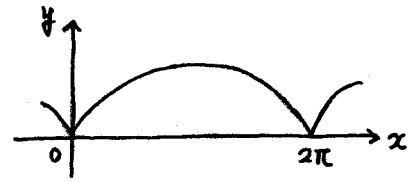
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos\theta)} d\theta$$

$$= 8a$$

([17] p121 参照)



② カージオイド

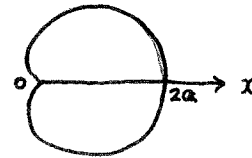
$$r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき}$$

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)} d\theta$$

$$= 8a$$

([17] p122 参照)



③ アステロイド

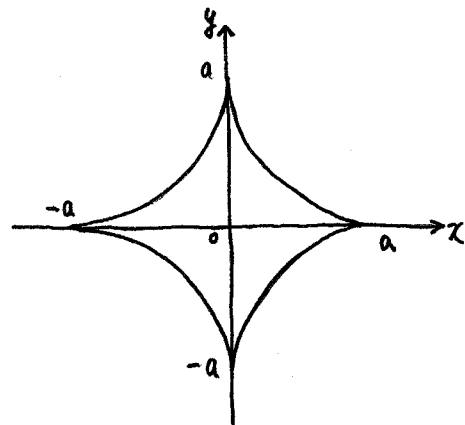
$$x = a \cos^3\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき}$$

$$y = a \sin^3\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} d\theta$$

$$= 6a$$

([17] p122 参照)



④ 外サイクロイド (外擺線)

$$x = (a + b)\cos\theta - b\cos(a + b/b)\theta$$

$$y = (a + b)\sin\theta - b\sin(a + b/b)\theta$$

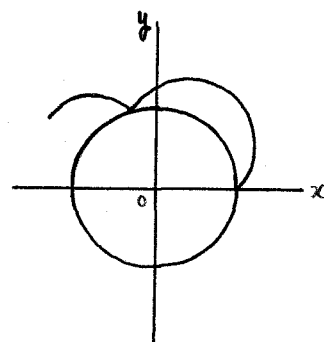
の $t = 0$ から $t = 2\pi b/a$ までの長さ

$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 4(a + b)^2 \sin^2(a\theta/2b)$$

$$s = 2(a + b) \int_0^{2\pi b/a} \sin(a\theta/2b) d\theta$$

$$= 8b(a + b)/a$$

([12] p 347 参照)



⑤ 円の伸開線

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき}$$

$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

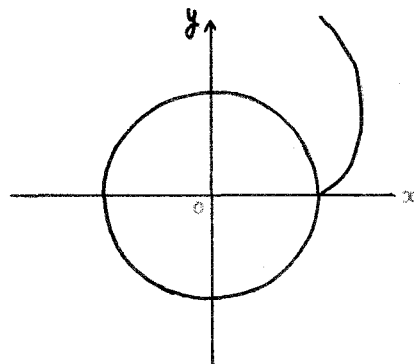
$$dx/d\theta = a\theta\cos\theta$$

$$dy/d\theta = a\theta\sin\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} a\theta d\theta$$

$$= 2a\pi$$

([17] p 124 参照)



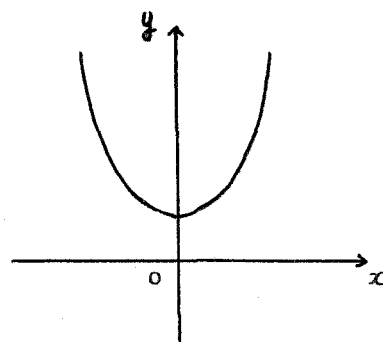
⑥ 懸垂線 (カテナリー)

$$y = a/2 \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (a > 0, 0 \leq x \leq b)$$

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^b 1/2 \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx$$

$$= a/2 \cdot (e^{b/a} - e^{-b/a})$$



⑦ 追跡線 (トラクトリックス)

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \log \{(a + \sqrt{a^2 - y^2}) / y\}$$

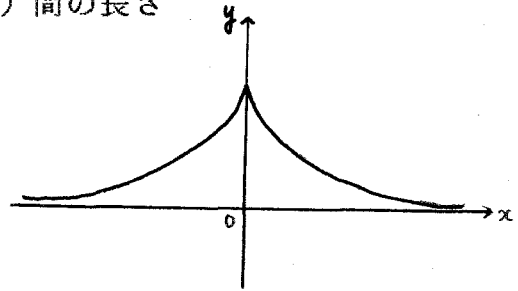
の二点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ (但し $y_1 < y_2$) 間の長さ

$$dx/dy = -\sqrt{a^2 - y^2} / y$$

$$1 + (dx/dy)^2 = a^2 / y^2$$

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{a^2 / y^2} dy$$

$$= a \log(y_2 / y_1)$$



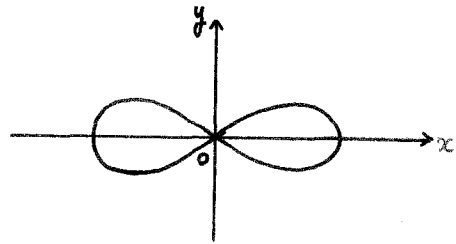
⑧ レムニスケート (連珠形)

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$s = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \{\sqrt{2}a / \sqrt{\cos 2\theta}\} d\theta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/4} 1 / \sqrt{1 - (\sin^2 \theta / 2)} d\theta$$



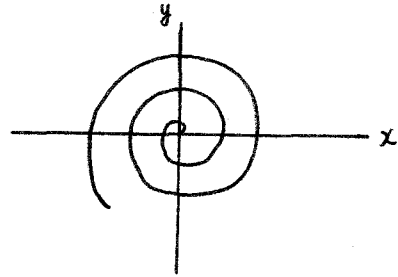
⑨ アルキメデスの螺線

$$r = a\theta \quad (0 \leq \theta \leq \alpha)$$

$$s = \int_0^\alpha \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} d\theta$$

$$= 1/2 \cdot a \alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} + 1/2 \cdot a \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})$$

([17] p 122 参照)



⑩ 対数螺線

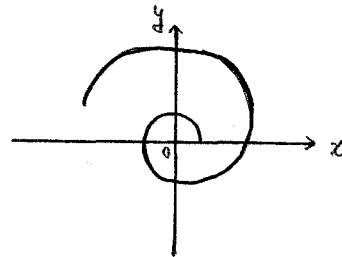
$$r = a^\theta \quad (a > 1, -\infty < \theta \leq 0)$$

$$r' = a^\theta \log a$$

$$s = \int_{-\infty}^0 \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

$$= \sqrt{1 + (\log a)^2} / \log a$$

([17] p 122 参照)



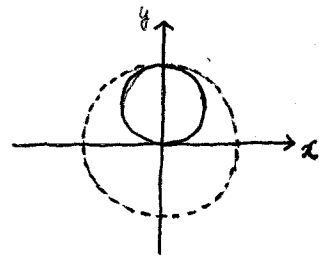
⑪ ばら曲線

$$r = a \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$s = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= a \pi$$

([17] p 124 参照)



⑫ Cayleyの6次曲線

$$r = a \cos^3(\theta/3)$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = a \cos^2(\theta/3)$$

(i) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$s_1 = a \int_0^{\pi} \cos^2(\theta/3) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\pi + 3\sqrt{3}/4)a$$

(ii) $\pi \leq \theta \leq 3/2 \cdot \pi$ のとき

$$s_2 = a \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(\theta/3) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\pi/2 - 3\sqrt{3}/4)a$$

$$\text{よって } 2(s_1 + s_2) = (3\pi/2)a$$

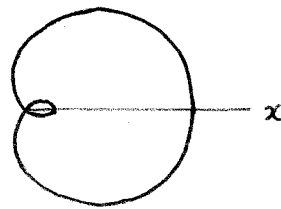
$$\text{また、} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ のとき } s_3 = 1/2(\pi/2 + 3\sqrt{3}/4)a$$

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } s_4 = (\pi/4)a$$

$$\pi \leq \theta \leq 3/2 \cdot \pi \text{ のとき } s_5 = 1/2(\pi/2 - 3\sqrt{3}/4)a$$

s_3, s_4, s_5 は、等差数列をなす。

([12] p 347 参照)

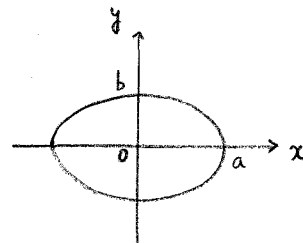


⑬ 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > 0)$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ と表せる。} \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

離心率 $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ とすれば

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta$$



⑭ 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の

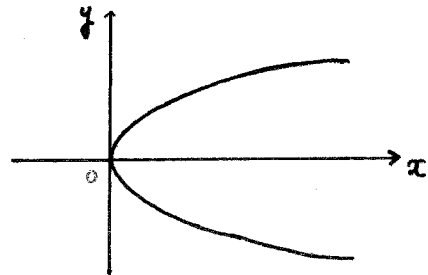
縮閉線 $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ ($a > b > 0$)

$$s = 4(a^3 - b^3)/ab$$

([15] p115 参照)

⑮ 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の頂点から点 $(p, 2p)$ までの長さ

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2p} \sqrt{1 + (y/2p)^2} dy \\ &= \{ \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \} p \end{aligned}$$



(2) いろいろな曲線の面積

① サイクロイドと x 軸で囲まれた面積

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) a(1 - \cos\theta) d\theta \\ &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$

([17] p 118 参照)

② カージオイド

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 1/2 \int_0^\pi r^2 d\theta \\ &= 3/2 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 334 参照)

③ リマソン

$$r = a(1 + 2\cos\theta)$$

外側の loop の面積

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \times 1/2 \int_0^{3\pi} a^2(1 + 2\cos\theta)^2 d\theta \\ &= (2\pi + 3\sqrt{3}/2) a^2 \end{aligned}$$

内側の loop の面積

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \times 1/2 \int a^2(1 + 2\cos\theta)^2 d\theta \\ &= (\pi - 3\sqrt{3}/2) a^2 \end{aligned}$$

([12] p 334 参照)

④ アステロイド

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 \theta \cdot 3a \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 3/8 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 330 参照)

⑤ Epicycloidの1弧と定円の周とで囲まれる部分

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos(a+b/b)\theta \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin(a+b/b)\theta \end{cases}$$

O A B C O の面積

$$\begin{aligned} S_1 &= 1/2 \int_0^{2\pi} (x \cdot dy/d\theta - y \cdot dx/d\theta) d\theta \\ &= \pi b(a^2 + 3ab + 2b^2) / a \end{aligned}$$

扇形 O A D C O の面積

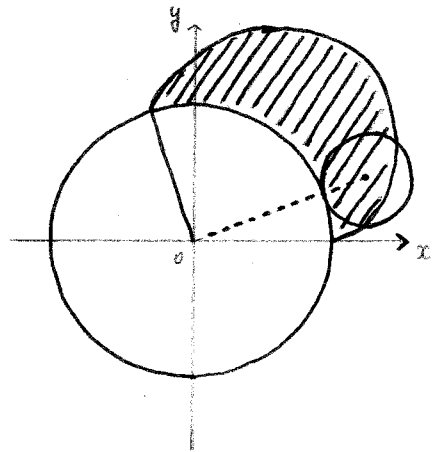
$$S_2 = \pi a b$$

求める面積は

$$S = S_1 - S_2 = \pi b^2(3a + 2b) / a$$

Hypocycloid の場合は、bの代りに -b とおいて得られる。

([12] p 340 参照)



⑥ レムニスケート

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\begin{aligned} S &= 4 \times 1/2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \\ &= a^2 \end{aligned}$$

([17] p 118 参照)

⑦ デカルトの正葉線

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

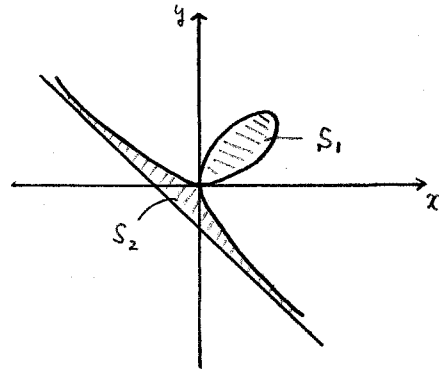
(i) 自閉線の面積

$$\begin{aligned} S_1 &= 1/2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \\ &= 3/2 \cdot a^2 \end{aligned}$$

(ii) 漸近線との間の面積

$$S_2 = 3/2 \cdot a^2$$

([17] p 118 参照)



⑧ ばら曲線

$r = a \sin n\theta$ の1つの自閉線

$$\begin{aligned} S &= 1/2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{n}} r^2 d\theta \\ &= \pi a^2 / 4n \end{aligned}$$

([12] p 334 参照)

⑨ 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a b/a \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= ab\pi \end{aligned}$$

([17] p 117 参照)

⑩ 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の中心に関する垂足曲線

垂足曲線の方程式は

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$$

極座標で表すと

$$r^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

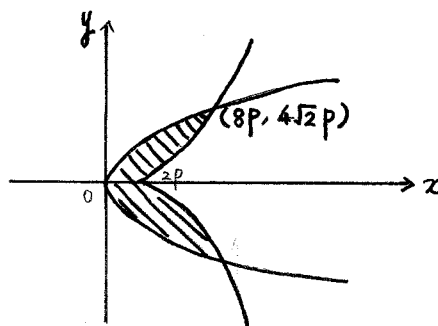
$$\begin{aligned} S &= 4 \times 1/2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \\ &= \pi(a^2 + b^2)/2 \end{aligned}$$

([12] p 336 参照)

① 放物線 $y^2 = 4px$ とその縮閉線 $27py^2 = 4(x - 2p)^3$ との間の部分

$$S = 352 \sqrt{2} / 15 \cdot p^2$$

([12] p 336 参照)



(3) いろいろな曲線の回転体の表面積

- ① サイクロイドが、X軸の回りに回転してできる曲面の表面積

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2a\pi} y \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) 2a \sin(\theta/2) d\theta \\ &= 64/3 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 361 参照)

- ② カージオイドを原線の回りに回転してできる曲面の表面積

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \cos\theta) \\ S &= 2\pi \int y ds \\ &= 2\pi \int_0^\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta \\ &= 32/5 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 363 参照)

- ③ デルトイドが、X軸の回りに回転してできる曲面の表面積

$$\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases}$$
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-3a}^{\frac{3}{2}a} y \sqrt{1+y'^2} dx + 2\pi \int_a^{\frac{3}{2}a} y \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= 128/5 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 362 参照)

- ④ アステロイドが、X軸の回りに回転してできる曲面の表面積

$$\begin{cases} x = a \cos^3\theta & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a \sin^3\theta \end{cases}$$
$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3\theta \cdot 3a \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= 12/5 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([12] p 359 参照)

- ⑤ カテナリーが、X軸の回りに回転してできる曲面の表面積

$$y = 1/2(e^x + e^{-x}) \quad (0 \leq x \leq x_1)$$

$$S = 2\pi \int_0^{x_1} y \cdot y \, dx$$

$$= \pi \{x_1 + 1/4(e^{2x_1} - e^{-2x_1})\}$$

([12] p 359 参照)

- ⑥ トラクトリックスが、X軸の回りに回転してできる曲面の表面積

$$x = a \log \{ (a + \sqrt{a^2 - y^2}) / y \} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (a > 0)$$

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + (dx/dy)^2} \, dy$$

$$= 4\pi a^2$$

([17] p 126 参照)

- ⑦ レムニスケートを原線の回りに回転してできる曲面の表面積

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

$$S = 4\pi a^2 (1 - 1/\sqrt{2})$$

([12] p 363 参照)

(4) いろいろな曲線の回転体の体積

- ① サイクロイドをX軸の回りに回転してできる立体の体積

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx \\ &= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \\ &= 5\pi^2 a^3 \end{aligned}$$

([12] p 356 参照)

- ② カージオイドを原線の回りに回転してできる立体の体積

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \cos\theta) \\ V &= \pi \int_{\pi}^0 y^2 \cdot (dx/d\theta) \cdot d\theta \\ &= 8/3 \cdot \pi a^3 \end{aligned}$$

([12] p 357 参照)

- ③ アステロイドをX軸の回りに回転してできる立体の体積

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ のとき} \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a y^2 dx \\ &= 32/105 \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

([17] p 125 参照)

- ④ カテナリーをX軸の回りに回転してできる立体の体積

$$y = a/2(e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (a > 0, -a \leq x \leq a)$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a y^2 dx \\ &= \pi a^3/4 \cdot (e^2 - e^{-2} + 4) \end{aligned}$$

([17] p 127 参照)

- ⑤ トラクトリックスが、X軸の回りに回転してできる立体の体積

$$x = a \log \left\{ (a + \sqrt{a^2 - y^2}) / y \right\} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (a > 0)$$

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx$$

$$= 2/3 \cdot \pi a^3$$

([17] p 126 参照)

- ⑥ レムニスケートを原線の回りに回転してできる立体の体積

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

直交座標に直すと

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$V = 2\pi \int y^2 dx$$

$$= \pi a^3 \left\{ 1/2 \sqrt{2} \cdot \log(\sqrt{2} + 1) - 1/6 \right\}$$

([12] p 357 参照)

§ 3. いろいろな曲線の研究者

<古代>

| | | | | |
|-------|----------|--------------|----------------|----------------|
| (ギリヤ) | ヒピアス | Hippias | (460 B.C.) | 角の三等分, 円積問題 |
| (ギリヤ) | ディノストラトス | Deinostratos | (360 B.C.) | クアドラトリックス |
| (ギリヤ) | アルキメデス | Archimedes | (287-212 B.C.) | らせん, 放物線の面積 |
| (ギリヤ) | アポロニウス | Apollonius | (260-200 B.C.) | 円錐曲線論 |
| (ギリヤ) | ニコメデス | Nicomedes | (180 B.C.) | コンコイド(B.C.240) |
| (ギリヤ) | ディオクレス | Diocles | (100 B.C.) | シッソイド |

<近代>

| | | | | |
|--------|--------|------------|-------------|---|
| (イタ) | ガリレイ | Galilei | (1564-1642) | サイクロイドと円の面積比 |
| (ドイ) | ケプラー | Kepler | (1571-1630) | 惑星 |
| (フランス) | デザルグ | Desargues | (1593-1662) | 内・外サイクロイド |
| (フランス) | デカルト | Descartes | (1596-1650) | 葉線 (1638) 対数らせん(1638) |
| (フランス) | フェルマー | Fermat | (1601-1665) | らせん |
| (フランス) | ロベルバール | Roberval | (1602-1675) | サイクロイドの弧の長さ 平面曲線の接線 |
| (フランス) | トリチェリ | Torricelli | (1608-1647) | サイクロイドの正確な面積 平面曲線の接線 |
| (フランス) | パスカル | Pascal | (1623-1662) | リマソン |
| (イタ) | カッシニ | Cassini | (1625-1712) | 卵形線(1680) |
| (オランダ) | ホイエンス | Huygens | (1629-1695) | 半三次方程式 サイクロイドの等時性 サイクロイドの伸開線, 縮閉線 円の伸開線 懸垂線(1651) |
| (イギリス) | ニュートン | Newton | (1642-1727) | 三次方程式の一般形 内・外サイクロイド |
| (ドイ) | ライプニッツ | Leibniz | (1642-1716) | $Y = a X^3$ 内・外サイクロイド |

§ 4 . 曲線研究の略年表

<古代の曲線>

| | | |
|---------|------------|------------|
| B.C 330 | *クオドラトリックス | (ディノストラトス) |
| B.C 250 | *アルキメデスの螺線 | (アルキメデス) |
| B.C 240 | *コンコイド | (ニコメデス) |
| B.C 100 | *シツソイド | (ディオクレス) |

<近代の曲線>

| | | |
|------|------------------------|---|
| 1590 | *サイクロイド | (ガリレイ)(ロベルバール)(トリチェリ) (ホイヘンス)(ヨハン・ベルヌーイ) |
| 1630 | フェルマーの螺線 | (フェルマー) |
| 1638 | 対数螺線 | |
| 1638 | 正葉線 | (デカルト) |
| 1640 | *リマソン | (パスカル) |
| 1660 | 円の伸開線 | (ホイヘンス) |
| 1660 | 半3次放物線 | (ホイヘンス) |
| 1680 | *レムニスケート (カッシニの卵形線) | (ヤコブ・ベルヌーイ) |
| 1690 | *カテナリー | (ヤコブ・ベルヌーイ) |
| 1690 | トラクトリックス | (ヤコブ・ベルヌーイ) |
| 1708 | *カージオイド | (ド・カステロンが長さを発見) |
| 1715 | *アステロイド | (ヨハン・ベルヌーイ) |
| 1728 | マクローリンの3等分曲線 | (マクローリン) |
| 1730 | オイラーの螺線 | (オイラー) |
| 1733 | 正規曲線(確率曲線) | (ド・モアブル) |
| 1750 | ウィッチ | (アーネシー) |
| 1819 | ストロフォイド | (ケトレー) |
| 1850 | ケーリーの6次曲線 | (ケーリー) |
| 1856 | デルトイド | (スタイナー) |
| 1878 | ネフロイド | (プロクター) |

(注. * は、第1章の§2で取り上げた曲線)

§ 5 . 包絡線のプログラム

1 . サイクロイド (直線群) (図 p 32)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 FOR K=0 TO 36
120 PI=3.14159
130 CIRCLE(1/36* 2 * PI * 100 * K+10,150),100
140 B=1/36*2* PI * 100 * K
150 LINE(10+B+100*SIN(1/18* PI* K),150-100*COS(1/18 * PI * K))
    -(10+B-100*SIN(1/18 * PI * K),150+100*COS(1/18 * PI * K))
160 NEXT K
170 FOR I=0 TO 36
180 CIRCLE(1/36* 2 * PI * 50 * I+10,200),50
190 A=1/36* 2 * PI * 50 * I
200 LINE(10+A+50*SIN(1/18* PI* I),200-50*COS(1/18 * PI * I))
    -(10+A-50*SIN(1/18 * PI * I),200+50*COS(1/18 * PI * I))
210 NEXT I
220 FOR Y=0 TO 360
230 Y1=PI/180*Y
240 X2=50*(Y1-SIN(Y1))
250 Y2=50*(1-COS(Y1))
260 PSET(X2+10,250-Y2),2
270 NEXT Y
280 END
```

2 . カージオイド (直線群) (図 p 33)

```
100 CLS 3:CONSOLE 0,25,0,1:SCREEN 3
110 CIRCLE(300,200),150,6
120 FOR T=0 TO 360 STEP 5
130 P=3.14159
140 T0=3.14159/180*T
150 LINE(300+150*COS(T0),200-150*SIN(T0))
    -(300-150*COS(P+2*(T0)),200+150*SIN(P+2*(T0)))
160 NEXT T
170 END
```

3. アステロイド (直線群) (図 p 33)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(10,200)-(600,200)
120 LINE(300,10)-(300,380)
130 FOR X=180 TO 0 STEP -3
140 Y=SQR(180*180-X*X)
150 LINE(300+X,200)-(300,200-Y)
160 NEXT X
170 FOR X=0 TO 180 STEP 3
180 Y=SQR(180*180-X*X)
190 LINE(300-X,200)-(300,200-Y)
200 NEXT X
210 FOR X=180 TO 0 STEP -3
220 Y=SQR(180*180-X*X)
230 LINE(300-X,200)-(300,200+Y)
240 NEXT X
250 FOR X=0 TO 180 STEP 3
260 Y=SQR(180*180-X*X)
270 LINE(300+X,200)-(300,200+Y)
280 NEXT X
```

4. デルトイド (直線群) (図 p 34)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 CIRCLE(300,200),150
120 FOR Y=0 TO 720 STEP 10
130 T=3.14159/180*Y
140 LINE(300+50*COS(T),200-50*SIN(T))
    -(300+50*COS(T)+2*50*COS(1/2*T),200-50*SIN(T)+2*50*SIN(1/2*T))
150 CIRCLE(300+50*COS(T),200-50*SIN(T)),2*50
160 NEXT Y
170 END
```

5. デルトイド (直線群) (図 p 34)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 PI=3.14159
120 DEF FNFY(C)=COS((1-2*C/180)*PI)*50
130 DEF FNFY(C)=SIN((1-2*C/180)*PI)*50
140 DEF FNNX(C)=COS(C/180*PI)*50
150 DEF FNNY(C)=SIN(C/180*PI)*50
160 DEF FNX(C)=COS(C/360*PI)*1000
170 DEF FNY(C)=SIN(C/360*PI)*1000
180 CIRCLE(300,200),50
190 FOR C=0 TO 360 STEP 5
200 LINE(300+FNFX(C),200-FNFY(C))-(300+FNNX(C),200-FNNY(C))
210 NEXT C
220 CIRCLE(300,200),50
230 FOR C=0 TO 360 STEP 5
240 X1=300+FNNX(C)+FNX(C)
250 Y1=200-FNNY(C)+FNY(C)
260 X2=300+FNNX(C)-FNX(C)
270 Y2=200-FNNY(C)-FNY(C)
280 LINE(X1,Y1)-(X2,Y2)
290 NEXT C
300 END
```

1. カージオイド (円群) (図 p 35)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(200,200)-(500,200)
120 LINE(400,10)-(400,380)
130 CIRCLE(400,200),50
140 PI=3.14159
150 FOR C=0 TO 100 STEP 2
160 X=50*COS(C/50*PI)+400
170 Y=-50*SIN(C/50*PI)+200
180 R=SQR((X-450)^2+(Y-200)^2)
190 CIRCLE(X,Y),R
200 NEXT C
210 END
```

2. ネフロイド (円群) (図 p 35)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(300,100)-(300,300)
120 CIRCLE(300,200),100
130 PI=3.14159
140 FOR C=0 TO 200 STEP 3
150 X= 100*COS(C/100*PI)+300
160 Y= -100*SIN(C/100*PI)+200
170 CIRCLE(X,Y),ABS(X-300)
180 NEXT C
190 END
```

3. レムニスケート (円群) (図 p 36)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(50,200)-(550,200)
120 LINE(300,10)-(300,390)
130 FOR Y=-158 TO 158 STEP 2
140   Y0=3.14159/320*Y
150   X1=100/COS(Y0)
160   Y1=100*TAN(Y0)
170   PSET(300+X1,200-Y1)
180   CIRCLE(300+X1,200-Y1),SQR(X1*X1+Y1*Y1)
190 NEXT Y
200 FOR Y=478 TO 162 STEP -2
210   Y0=3.14159/320*Y
220   X1=100/COS(Y0)
230   Y1=100*TAN(Y0)
240   PSET(300+X1,200-Y1)
250   CIRCLE(300+X1,200-Y1),SQR(X1*X1+Y1*Y1)
260 NEXT Y
270 END
```

4. 直角ストロフォイド (円群) (図 p 36)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(0,200)-(639,200)
120 LINE(100,0)-(100,399)
130 FOR T=20 TO 0 STEP -.5
140   X=T*T
150   Y=10*T
160   PSET(100+X,200-Y)
170   CIRCLE(100+X,200-Y),SQR((25+X)^2+Y^2)
180 NEXT T
190 FOR T=0 TO 20 STEP .5
200   X=T*T
210   Y=10*T
220   PSET(100+X,200+Y)
170   CIRCLE(100+X,200+Y),SQR((25+X)^2+Y^2)
180 NEXT T
190 END
```

5. リマソン (円群)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 CIRCLE(250,200),50
120 PI=3.14159
130 FOR C=0 TO 40
140   X= 50*COS(C/20*PI)+250
150   Y=-50*SIN(C/20*PI)+200
160   R=SQR((X-150)^2+(Y-200)^2)
170   CIRCLE(X,Y),R
180 NEXT C
190 END
```


1. カージオイド (火線) (図 p 40)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 CIRCLE(300,200),100
120 FOR T=-90 TO 90
130   C=3.14159/180*T
140   A=100*(1+COS(2*C))
150   B=100*SIN(2*C)
160   D=1000*COS(3*C)
170   E=1000*SIN(3*C)
180   LINE(200+A,200-B)-(200+A-D,200-B+E)
190 NEXT T
200 END
```

2. ネフロイド (火線) (図 p 40)

```
100 SCREEN 3:CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
110 LINE(100,200)-(500,200)
120 LINE(300,50)-(300,350)
130 CIRCLE(300,200),100
140 FOR C=0 TO 360 STEP 5
150   T=3.14159/180*C
160   X1=300-100*COS(T)
170   Y1=200-100*SIN(T)
180   X2=300-100*COS(T)+1000*COS(2*T)*SGN(COS(T))
190   Y2=200-100*SIN(T)+1000*SIN(2*T)*SGN(COS(T))
200   LINE(X1,Y1)-(X2,Y2)
210 NEXT C
220 END
```

事 項 索 引

-ア-

| | | |
|--------------|----------|---------------------|
| アステロイド (星芒形) | asteroid | 8,29,33,41,47,52ページ |
| ウィッチ (迂弛線) | witch | 18 |

-カ-

| | | |
|--------------------|---------------------|---------------------------------------|
| 外サイクロイド (外擺線) | epicycloid | 55 |
| 外トロコイド | epitrochoid | 29 |
| カージオイド (心臓形) | cardioid | 7,27,28,33,35,40,43,46,51 55~67,92 |
| 角の三等分 | trisection of angle | 10 |
| 火線 | caustic curve | 40 |
| 曲率 | curvature | 80 |
| クオドラトリックス (円積線) | quadratrices | 5,11,21 |
| クロソイド曲線 (→オイラーの螺線) | | 27 |
| ケーリーの6次曲線 | Cayley's sextic | 46,59 |
| カテナリー (懸垂線) | catenary | 21 |
| コンコイド | conchoid | 6,12,19,27 |

-サ-

| | | |
|-------------|-----------------|---------------------|
| サイクロイド (擺線) | cycloid | 7,28,32,51,76~81,91 |
| 最速降下線 | brachistochrone | 102 |
| 三次曲線 | cubic | 17 |
| 三等分曲線 | trisectrix | 13 |
| マクローリンの | of Maclaurin | 18,48 |
| 三葉線 | trifolium | 23 |
| シッソイド (疾走線) | cissoid | 6,10,17,27,48 |
| シムソン線 | Simson's line | 34,42 |
| 縮閉線 | evolute | 50 |
| 四葉線 | quadrifolium | 23 |

| | | |
|---------|--------------|-------|
| 伸開線 | involute | 50ページ |
| 円のー | of circle | 22 |
| ストロフォイド | strophoid | 36,48 |
| 直角ー | right | 36 |
| 垂足曲線 | pedal curves | 46 |
| 正葉線 | folium | 17 |

ーター

| | | |
|----------------|-----------------------|-------------------|
| 対数螺旋線 | logarithmic spiral | 21 |
| 代数曲線 | algebraic curves | 17 |
| 楕円 | ellipse | 49 |
| 超越曲線 | transcendental curves | 20 |
| 直角双曲線 | rectangular hyperbola | 47 |
| トラクトリックス (追跡線) | tractrix | 8,21 |
| デルトイド | deltoid | 28,34,46,69~75,91 |
| 等角螺旋線 (→対数螺旋線) | equiangular spiral | 21 |
| トロコイド (余擺線) | trochoid | 29 |

ーナー

| | | |
|---------|--------------|----------------------|
| 内サイクロイド | hypocycloid | 69 |
| 内トロコイド | hypotrochoid | 29 |
| ネフロイド | nephroid | 28,35,40,44,51,63,64 |

ーハー

| | | |
|---------------|-------------------------|----------|
| バラ曲線 | rose-curves | 23,24,47 |
| 半三次放物線 | semi-cubic parabola | 19,52,92 |
| ベルヌーイのレムニスケート | lemniscate of Bernoulli | 9 |
| 法線 | normal | 50 |
| 放物線 | parabola | 48 |
| 包絡線 | envelope | 31 |

ーラー

| | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|
| 螺線 | spirals | 25ページ |
| アルキメデスのー | of Archimedes | 5,14,15,22,25 |
| 黄金ー (→対数螺線) | | 26 |
| 対数螺線 | logarithmic spiral | 22,26 |
| 等角ー (→対数螺線) | equiangular | 27 |
| フェルマーのー | of Fermat | 25 |
| 卵形線 | ovals | 19 |
| カッシニのー | of Cassini | 19 |
| 立方体倍積問題 | duplication of cube | 10 |
| リトース (→オイラーの螺線) | lituus | 26 |
| リマソン (蝸牛線) | limacon | 9,13,19,27,37~39,47 |
| レムニスケート | lemniscate | 9,19,27,36,47,92 |

- [1] 秋山武太郎：わかる微分学，日新出版，1978，pp279～336
- [2] HOWARD ANTON：Calculus with Analytic Geometry, wiley, 1984
- [3] V.G.BOLTVANSKII：Envelopes, pergamon, 1964, pp32～76
- [4] Bos, H.J.M.: On the Representation of Curves in Descartes' Geometrie, Archive History of Exact Sciences 24, 1981
- [5] Boyer, 加賀美鐵雄訳：数学の歴史 2, 3, 朝倉書店, 1984
- [6] F.CAJORI: A History of Mathematics, macmillan London, 1919
pp325～326 (邦訳 石井省吾訳：数学史, 津軽書房, 1970, pp64～66)
- [7] H.S.M.Coxeter, 銀林浩訳：幾何学入門, 明治図書, 1965
- [8] H.M.Cundy and A.P.Rollet: Mathematical Models, Oxford University Press, London, 1951, pp31～52
- [9] Descarte, 原亨吉訳：デカルト著作集 1 (幾何学), 白水社, 1973,
pp16～121
- [10] Heinrich Dorrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, 1965, pp222～231
- [11] 藤原松三郎：微分積分学 (第二卷), 内田老鶴圃新社, 1939
- [12] 福田安蔵：微積分演習 I, 共立出版, 1972
- [13] Stanley I. Grossman: calculus PART 1, Academic, 1981
- [14] D.Hibert and S.Cohn-Vossen: Geometry and The Imagination, Chelsea New York, 1952, pp275～283 (邦訳 芹沢正三訳：直観幾何学, みすず書房, 1984, pp298～306)
- [15] 平野幸太郎：積分学の演習, 森北出版, 1977
- [16] 穂刈四三二：微分幾何, 至文堂, 1980
- [17] 本多良助：微積分学演習, 共立出版, 1983
- [18] 岩田至康：幾何学大辞典 1, 槇書店, 1983, pp531～593
- [19] 岩田至康：幾何学大辞典 5, 槇書店, 1983, pp477～516
- [20] DONOVAN A. JOHNSON: Curves, john murray, London, 1966, pp49～62
- [21] 小林幹雄：複素数の幾何学, 共立出版, 1966, pp121～142

- [22] 小林幹雄：初等幾何学，共立出版，1967，pp168～190
- [23] 小林幹雄：解析幾何学演習，共立出版，1958，pp129～140
- [24] 窪田忠彦：初等幾何学作図問題，内田老鶴圃新社，1974，pp119～121
- [25] 栗田稔：いろいろな曲線，共立出版，1980，pp51～100
- [26] E.H.Lockwood，松井政太郎訳：カーブ，みすず書房，1964
- [27] マルケシビチ，須斎由太郎訳：おもしろい曲線，東京図書，1962
- [28] 中森寛二，内藤淳：曲線の科学，コロナ社，1962，pp139～181
- [29] 小倉金之助：基礎数学ハンドブック，森北出版，1983，pp90～102
pp224～231
- [30] 大槻富之助：微分積分学，朝倉書店，1978
- [31] ダン・ペドウ，磯田浩訳：図形と文化，法政大学，1985，pp209～308
- [32] 坂井忠次：グラフと追跡，培風館，1975
- [33] 笹部邦雄編：曲線・グラフ総覧，聖文社，1979
- [34] 佐藤伊助：いろいろな曲線と曲面，裳華房，1979，pp1～52
- [35] スミルノフ，福原満州雄訳：高等数学教程 1，共立出版，1961
pp159～185
- [36] Sherman K.Stein：Calculus and Analytic Geometry，McGraw-Hill1982
- [37] 高木貞治：解析概論，岩波書店，1938
- [38] 矢野健太郎：数学小辞典，共立出版，1973，pp759～764
- [39] 黒沢義己：無理数の定義法をめぐって（1982年修士論文） p 88～91