平成四年度　学位論文

離散数学の教材化に関する研究

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　　自然系コース
M91559J　　　小　林　伸　行

はじめに

筆者は，中学生や高校生の頃，「なぜ数学を学習するのか」という疑問を抱いていた。そして，様々な矛盾を感じながら，「受験のため」という答えによって自分自身を無理に納得させせようとしていた。現在でも，当時の筆者と同じような気持を抱いている中学生や高校生は少なくないであろう。その後，数学教師になって，ほとんどの生徒にとって，役に立ちにくいであろうと思われる難しい問題に，悪戦苦闘する彼らの姿を目の当たりにし，心を痛めた。そのような姿を見るたび，筆者は「数学教育はよりよい人間の育成に貢献しているどころか，むしろ害を及ぼしているのではないか」と思った。というのは，現在の数学教育は，彼らに学ぶよろこびや充実感を与えているとは言い難く，自ら考えようとしない受動的な人間を形成しているように思える。一方では，コンピュータの普及をはじめとする情報化社会の出現など，教育をとりまく環境は激しく変化し，数学教育に対する期待はますます高まっている。このような中で上述のような数学教育の現状を安易に是認することは，決してできないと思った。

こうした数学教育の現状を改善するためには，既存の教材にとらわれることなく，生徒の主体的な学習活動を引き出すことができるような教材を広い視野から開発することが必要であろう。実際，数学の世界は広い。現行カリキュラムの枠を外すことによって，それまでみえなかったいろいろな分野の数学が教材の対象として考えられる。そんな折，筆者は離散数学に出会う機会に恵まれた。離散数学の魅力をより深く感じていくにつれ，数学教育の改善にとって，離散数学を教材化することは大きな意義を持つと考えた。

以上のことから，本研究の目的は，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した数学カリキュラムの構成を目指して，離散数学の教材化について考察することである。

平成４年12月　　小林伸行

目 次

第1章　数学教育の改善への方向

本章では，教育のあり方を人間と社会の視点から考察し，それをもとに数学の有用性，文化・教養性，陶冶性の面から数学教育の目的を述べる。そして，現在の数学教育の問題点を指摘し，その改善への方向を述べる。

§1　人間と社会と教育

人間は幸福な人生を求める存在である。幸福な人生とは，生き甲斐や充実感によって形づくられている面がある。ほとんどの人間は，他人から強制された行動ではなく，自分の意志に基づいた行動に生き甲斐や充実感を感じるであろう。たとえば，仕事という行動について考えてみたい。他人から強要された仕事をするとき，生き甲斐や充実感を感じることはほとんどないであろう。逆に，自分の意志に基づいて選んだ仕事には，生き甲斐を感じることができ，その活動に対して充実感を味わうことができるであろう。このようなことは，仕事だけに限らず，学習などいろいろな行動にあてはまる。

自分の意志に基づいた行動を取れる人間は，自分の意志を形成するために必要な基礎的知識や技能はもちろん，思考力や物事に対して積極的な姿勢といった能力や態度があると考えられる。そして，行動への意欲が強く，行動の意味をより深く理解し，見通しを持てるといった面も備えているであろう。さらに，こうした人間は，失敗や挫折があっても自らの非を認め，新たな行動に取り組めると考えられる。このような自分の意志に基づいた行動が取れる人間は，主体的な人間と呼ばれている（[1],pp.12-14）。

主体的に活動できるということは，生き甲斐や充実感さらには幸福な人生のためには重要な能力のひとつと考えられる。したがって，主体的な人間を教育の目指す理想像のひとつと考えてもよいであろう。

ところで，人間は様々な欲求を持っているといわれる。Maslowは人間の行動を動機づける欲求には，生理的欲求，安全の欲求，所属と愛の欲求，承認の欲求，自己実現の欲求があり，これらは上記の順に階層をなしているととらえた。そして，自己実現の欲求が現れるには，それより低次元の欲求がある程度満たされなければならないと考えた（[2],pp.89-101）。彼は自己実現について次のように述べている。

《　人間は自分のうちに，人格の統合性，自発的な表現性，完全な個性と統一性，盲目にならず真実を直視すること，創造的になること，善なること，そ

の他多くのことに向う力をもっている。すなわち，人間はさらに完全な存在になろうとするよう作られている。》（[3],p.209）

そして，自己実現者は，《習慣的というよりはかなり自律的で個人的な倫理規定》（[2],p.235）を持っていると考えられる。ここで，「自律的」という表現は，筆者の用いている「主体的」とほぼ同じような意味と考えられる。つまり，主体的な人間は，人間の本来持っている自己実現の欲求にそっていると考えられるので，主体的な人間の育成を目指す教育が，人間の持つ本質的な欲求からみても妥当なことと考えられる。

さらに，主体的な人間の育成は民主的な社会の形成にとって重要であると考えられる。というのは，非主体的な人間，つまり自分の意志を持とうとしない人間は，悪意をもった専制的な人間に盲従することが多く，そのような状態が民主的な社会を危険にさらすと考えられるからである。そのような例は，過去の歴史の中に見いだすことができるであろう。

これまで述べてきたように，主体的な人間の育成を目指す教育が，人間の幸福や潜在的な自己実現の欲求，さらには民主的な社会の形成という面からも重要な教育であるといえよう。

そのような教育は，本人の意志はもちろん，能力や興味・関心などの多様性を認めるという人間性を尊重する精神に基づくとともに，社会の変化に対応して行われるべきである。特に，高度技術社会や情報化社会といった状況の変化と学校教育に対する認識の変化は，教育に大きな影響を与えている。

西欧に始まった産業革命以来，科学技術を発展させる専門的な能力が重視されてきた。このような能力は，将来のより進んだ高度技術社会では一層その重要性を増すであろう。一方，そのような方向への警鐘である環境問題を考えるとき，開発のための科学的能力だけでなく，自然の中での人間のあり方を考えるための科学的能力も求められている。また，コンピュータをはじめとする様々な機器の開発・普及による情報化社会の出現は，それらを活用する能力と情報を効率的に処理したり，創造するために必要な思考力や態度の育成を求めている。

学校教育に対する認識の変化とは，教育は学校で行い，学校を卒業すると教育は終了するという認識から，人間は生涯を通じて教育を必要としているという認識への変化である。もちろん，教育の場は学校だけに限られないし，自分自身をも教育の対象と考えている。このような認識の変化は，従来の知識・技能優先型の学校教育でなく，学習意欲や学習の仕方，さらには生き方の探求までを含む自己教育力の育成を求めている。

このように，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に

対応した教育は，主体的な人間に必要な能力や態度の育成に適した教育内容を用いて，生徒の主体的な学習活動によってなされると考えられる。というのは，自ら考えようとせず，示された内容を安易に受け入れるような受動的な学習や主体的な人間に必要な能力や態度とは関わりの薄いような内容によっては，そのような教育がなされないのは当然であるからである。その点，次節以降で述べるように，主体的な人間を育成し，生徒の主体的な学習活動を引き出し得る内容が，数学に含まれていると考えられる。

これまで述べてきたことをまとめると，現代社会では，教育される人間の能力や興味・関心などの多様性を認めるという人間性を尊重する精神に基づき，社会の変化に対応しながら，主体的な人間を育成する教育が重要である。

§2　数学教育の目的

2.1　数学の有用性

数学を学習する動機で大きな部分を占めているのはその有用性である。数学に限らずどのような分野の学問や技術でも，「役に立つ」とか「必要である」ということは大きな存在意義である。

現代社会では，日常生活での計算や日常の事象に関する数学的知識や技能は言うに及ばず，専門的職業生活でも数学の有用性がみられる。現代の文明社会を支えている工業製品は数学がなければ存在しえないし，企業の経営でも数学が活用されている。また，各種の研究的分野における数学の果たす役割は測り知れないほどである。このように工業的分野で数学が有用であるだけでなく，商業的分野や研究的分野など多様な方面で数学の活用範囲は広がっている。

もちろん，数学の有用性といっても，それを必要とする人間や社会によって，重要視される数学的能力が変わることを考慮しておくべきである。原始時代ならば数をかぞえたり図形を認識する程度で十分であるが，すでに述べたような現代社会では多様な数学的能力が要求されている。また，コンピュータのプログラミング技能は，現時点ではすべての市民に必要であるとはいえないであろう。ところが，コンピュータの果たす役割や限界についての知識はほとんどの市民にとって必要なものである。さらに，学校教育で取り扱える量や質に限界があるので，単に有用であるから教えるというのでなく，本当に必要な数学を精選することこそ，数学教育の大きな課題である。

市民の持つべき常識としての「科学的認識のための数学」について，杉浦は次のように述べている。

《　科学・技術が無条件に善を生み出すのではなく，大きな災害をもたらす可能性のあることは原水爆や公害問題を通じて広く認識されるようになった。それにもかかわらず我々は科学・技術を手離すことはできない。とすれば科学・技術の暴走を市民がコントロールして行かなければならない。このためには一般市民が科学・技術の性格について適確な知識を持つことが必要である。……最低限度の科学およびそのために必要な数学を学ぶことは，科学の成果を利用しつつも，その悪用をコントロールしようとする市民にとっては避けて通ることはできないものである。》（[4],p.59）

社会生活上，このような「科学的認識のための数学」は，数学の有用性の重要

な側面をなしている。人間は自然のなかの一部であるという意識は，経済優先という資本主義の論理のもとに薄れていった。しかし，最近の環境問題に対する国際的意識の高まりは，環境問題を理解するための知識をすべての市民に求めている。また，このような自然科学と関連の深い領域だけでなく，社会科学などあらゆる領域全般の情報に対する「科学的認識のための数学」は，ますます重要視されてきている。特に，情報化社会と呼ばれる現代では，社会生活での多様な情報を考察・処理するための「科学的認識のための数学」は，必須の条件となってきている。

数学のこうした有用性は，主体的な人間に必要な知識や技能の一部である。特に，社会の変化に対応した数学教育という観点からすると，先に述べた「科学的認識のための数学」は重要な数学的能力と考えられる。

2.2 数学の文化・教養性

数学における文化・教養的な活動とは，それを観賞したり，創造したりする楽しさを通じて，心を豊かにしようとすることである。このような活動をする動機は，美への探求心や知的好奇心である。

数学の歴史は，人間の思考活動によって築かれた文化的財産とみなすことができるであろう。我々は人間の思考が発達してきた足跡を楽しんだり，数学の持つ美しさを観賞できるであろう。さらに，自ら数学を創造したり，再発見することもできよう。

しかし，数学は他の文化と異なった状況が存在している。ほとんどの生徒にとって数学は試験の一科目であり，その苦難から逃れたいと思っているであろう。まして数学を文化として楽しもうなどとは思ってもいないであろう。また，大人社会での数学の文化・教養的価値の存在性について，わが国の現状はそれほど楽観できるものではない。実際，学校教育だけでなく，数学の文化・教養的価値を一般に啓蒙する機会が少ないという事実が存在する。大学の公開講座や一般の文化講座のなかに数学の姿はごくわずかしかみられない。大人のなかで数学を文化として楽しんでいる人はごく少数である。このように数学の文化・教養的価値を味わえる状況にはない。それは，数学を一部の天才のみが創造しうる学問ととらえ，数学を固定的にとらえてきた過去の歴史とそのような見方を追認させた数学教育に原因があると考えられる。たとえば，洗練された計算アルゴリズムのみを指導している場合には，計算は教えられたアルゴリズムでしかできないと錯覚してしまう。本来，計算アルゴリズムは多様なものが考えられ，自分なりに工夫できることを生徒は知らないままに過ぎてしまう。このような数学教育は，数学を

自分の外におき，それをただ盲目的に受け入れるという受動的な態度を形成するであろう。このことは，自ら考えて，工夫していこうとする主体的な人間の育成にとってマイナスの効果を及ぼすであろう。

このような現状でも，別の観点からみれば，生徒に数学の文化・教養性を感じさせることができる。イギリスのCockcroft レポートでは，次のように述べている。

《 多くの子供や大人にとっての数学の持っている本来の興味や魅力は，今なお，学校で数学を教えるもう一つの理由を与えている。あらゆる種類の‘パズルコーナー’が非常に多くの新聞や雑誌に載っているという事実は相対的に初歩の問題やパズルの魅力が広まっているという事実を証明している。それらを解こうという試みは楽しみを与え，多くの場合，数学的理解の増加につながっている。》（[5],p.2）

本来数学は，様々な人が自分の知的好奇心や美への探求心のために，それぞれの能力や個性に応じて数学を創造したり，再発見することができる学問である。そのように数学をとらえることこそ，数学の文化・教養的な価値を楽しむことができるであろう。

次の平林の言葉は，数学教育の文化・教養的目的を考える上で意味深いものである。

《 数学を壮厳な知的大建築で，子どもでは手がつけられないものとして提示すれば，子どもをせいぜい感心させるぐらいである。しかし，うさぎの寝床のようなものとして提示すれば，子どもはやる気を出すであろう。子どもの人間性を尊重するとは，その自主的な活動意欲を引き出すことをも意味する。》（[6],p.163）

さらに，数学の文化・教養性を生徒に本当に実感させるには，指導する教師自身が，まずもってその楽しさを体験することから始めるべきであろう。

2.3 数学の陶冶性

数学の陶冶性とは，数学学習によって思考力や積極的な態度などの精神的可能性が伸びることと考えられる。数学による思考力の育成について，Skempは次のように述べている。

《　数学は人間の知的機能の，とりわけ強力で集約的な例である。次に，最も強力で応用のきく精神的道具である。この道具は，人間の知性が必要に応じて，数世紀にわたって協力して作りあげてきたものである。それは，手を使って道具を作るのとよく似ている。物理的世界に対して，直接に手だけを使って，ずいぶん多くのことができる。しかしまた手を使って，ドライバー，クレーン，旋盤などさまざまの道具を作ることができる。そしてこれによって，手の能力はずいぶん広がった。同様に数学は，思考力を大きく増すために，精神を使う方法である。》（[7],pp.31-32）

人間の頭脳には記憶力や思考力など多様な能力が存在している。それらの能力も適切な内容や方法によって開発されるであろう。様々な道具を用いて手の能力を開発・拡大することと同じように，精神的道具である数学を用いて数学的な思考力を育成することができる。

わが国の数学教育の歴史の中でも，数学的な思考力の育成は，昭和10年の「尋常小学算術」の編さん趣旨に述べられている「数理思想の開発」や昭和30年改訂の高等学校学習指導要領での「中心概念」の育成にみられる。平成元年改訂の学習指導要領では，《数学が構成されていくときの見方や考え方と，数学を基にした見方や考え方》（[8],p.6）という「数学的な見方や考え方」の育成を重視している。

また，数学を活用する態度や数学学習への積極的な態度などの数学に対する積極的な態度は，生徒の主体的な学習活動によって育成されると考えられる。

数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成は，数学教育にとって重要な目的と考えられるが，従来の数学教育では知識や技能を中心に指導がなされることが多かった。それは，変化の少ない社会では，計算技能はかなり長い期間有効であったからである。ところが，多様な情報が大量に行き交う情報化社会での必要な能力や態度は変化してきている。そこでは，コンピュータなどの機器を活用する能力や情報を効率的に処理したり，創造するための数学的な思考力や数学を活用する態度の育成が求められている。それらは計算技能の価値の相対的な変化を引き起こしている。つまり，従来の知識や計算技能の伝達から数学的な思考力や数学を活用する態度の育成へという重点の移動が求められている。

生涯学習の基礎的部分をなす学校教育で，自己教育力の育成は大きな課題である。数学教育での自己教育力の育成について，Perryは1901年の講演で，数学学習の有用性のなかで次のように述べている。

《　手足のように自由に使える知的道具を人々に与える。人々がその生涯を通

じて，自分自身を教育し続け，精神と知力とを発達させることができるようにし，そしてこの目的のために，彼らのすべての経験を利用できるようにする。これはまさしく，人々が読書を好むことによって，自己を教育する能力と同じものである。》（[9],p.17）

さらに，自然現象や社会事象を数学的な思考力で分析することは，それらの本質的な意味を解明するのに有効である。そのようなまわりの世界の理解は，自分自身を見つめ直し人生の意義を考えるための示唆を与えてくれるであろう。このような学習体験は，学習意欲を喚起すると考えられる。したがって，数学的な思考力や数学学習への積極的な態度の育成は，学習意欲や学習の仕方，さらには生き方の探求を含む自己教育力の育成にとって重要である。

これまで述べてきた，数学的な思考力は，主体的な人間の意思決定において欠かすことのできない能力であり，数学に対する積極的な態度は，物事に対する積極的な態度の育成の一部と考えられる。また，これらは，情報化社会で求められている能力や態度であるとともに，自己教育力の育成においても重要である。ところが，次節で述べるような数学教育の問題点の原因によって，こうした能力や態度の育成が十分にはなされてこなかったと考えられる。しかし，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した教育を目指すとき，これらは最も重視されるべき数学教育の目的と考えられる。

§ 3　数学教育の問題点と改善への方向

3.1　数学教育の問題点とその原因

前節までに述べてきた主体的な人間の育成を目指す数学教育に対して，現実は満足できる状況とはいえないであろう。たとえば，最近の中学校・高等学校のほとんどの生徒は，自ら考えようとせず，教師の提示するパターン化した解法を記憶することに時間を費やし，思考力や積極的な態度の育成が果たされてないようである。また，学習している数学は，高度な理工系の専門的職業に必要な分野に偏り，その他の分野での有用性を十分示し得ていないといえよう。さらに，生徒は数学の文化・教養性をほとんど楽しんでいないと考えられる。このような状況は，生徒に数学を学習するよろこびや充実感を与えることなく，数学学習に対する消極的受動的な態度を形成していると考えられる。このような傾向は，第２回国際数学教育調査の報告の中の《第１回調査と今回の調査を比較すると，……計算題の成績はあまり変化がなく，文章題は低くなった》（[10],p.143）とか《わが国の生徒は，数学の勉強を大切であると考えているが，その勉強の内容は中学１年でも難しいと考え，嫌いになってしまっている。それは，高校生にも同じ傾向がみられる》（[10],p.197）とか《数学を根気づよくやり通すか，探求する態度があるか，数学の勉強に不安を感じていないかなどの質問に対するわが国の反応は，すべて否定的である》（[10],p.198）という記述にもみられる。つまり，現在の数学教育は，主体的な人間を育成するという，教育の本質的な目的にほとんど貢献していないどころか，むしろその目的に反し，人間性を疎外しているという問題点が指摘できる。

このような問題点の原因について考えてみたい。第二次大戦までの伝統的な中等教育の対象は，西欧と同様にわが国でも，一部の大学進学希望者であった。戦後，中学校が義務教育化され，前期中等教育はすべての子どもを対象とするようになった。さらに，昭和40年代以降の高度経済成長により高等学校への進学者が激増し，現在では95%を超える状態となった。このことは世界的にみても稀なことであり，教育に対する異常なまでの関心の高さの現れといえよう。このような状況は，能力や適性の多様な生徒が中学校・高等学校に数多く入学することを示している。また，社会は急激に変化しており，すでに述べたような情報化社会への対応や自己教育力の育成といったことが教育に要請されている。このように教育をとりまく環境が大きく変化してきた。

これまでの数学教育改善の努力によって中学校・高等学校の数学カリキュラムは，少しずつ改良されてきてはいるが，それらは，ある一時期を除いてその本質

的な部分は変化していないといえる。つまり，それらは伝統的な中等教育の場合と同様に，大学進学希望者を対象とした，高度で体系的な知識や技能の積み重ねを必要とする内容が中心になっている。わが国の数学教師の指導法にもある程度帰因するであろうが，現在の数学カリキュラムが生徒の多様性や社会の変化に十分対応したカリキュラムになっていないことが，先に述べた問題点の主な原因と考えられる。

3.2 改善への方向

これまで述べてきたように，数学教育の問題点は，現在の数学教育が，主体的な人間を育成するという，教育の本質的な目的にほとんど貢献していないどころか，むしろその目的に反し，人間性を疎外していることである。そして，その主な原因は，生徒の多様性や社会の変化に十分対応したカリキュラムが構成されていないことである。これらのことから，数学教育を改善する方向としては，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した数学カリキュラムを構成することである。このような方向は，教育課程審議会の答申での教育課程の基準の改善のねらいにおける，次のような記述にもみられる。

《 (2) 自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成を重視すること

(3) 国民として必要とされる基礎的・基本的な内容を重視し，個性を生かす教育の充実を図ること》（[11],pp.13-14）

これらのことを数学教育で具体的に考えてみると，情報化社会において必要な能力や態度として，コンピュータなどを用いて，情報を活用したり，創造したりするための数学的な処理能力，思考力や数学を活用する態度の育成が求められている。また，自己教育力の育成では，学習意欲を喚起させることや学習の仕方を習得させることが重要である。以上のことから，基礎的知識や技能の習得を図りながら，生徒の多様性に応じて，数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成を効果的に行えるカリキュラムを構成することが重要である。次章以降で述べる離散数学は，前提となる知識や技能が少なくても問題を考えられ，社会的分野にも応用範囲の広いので，そのようなカリキュラムの構成にとって有効な教材と思われる。

第2章　離散数学の特徴と学習指導要領での扱い

本章では，問題を例示しながら，離散数学の特徴を述べる。そして，わが国の中学校・高等学校の学習指導要領の中で，離散数学に関する教材がどのように扱われてきたかを考察する。

§1　離散数学の特徴

離散数学は離散的で有限な対象を取り扱う分野である。もちろん，離散的で有限な対象を考えることは，ギリシャ時代の幾何的作図における手続きや有限の整数の性質など，従来から行われてきたことである。ところが，近年のコンピュータの驚異的な発展，普及によって，数学はもちろん，あらゆる方面に大きな影響が現れた。優れた記憶能力や計算処理能力を持つコンピュータの出現は，従来では考察の対象となりにくかった問題や解法へのアプローチを可能にした。そのことは，伝統的な数学を見直す機会も与えている。さらに，産業界での離散数学の応用は大きな成果を示しつつある。このように最近では離散数学の重要性がいろいろな分野で認識されるようになってきた。

離散数学の問題について，Dosseyは次のように述べている。

《　離散数学の問題は，３つの大きなカテゴリーに分けることができる。最初のカテゴリーの存在問題は，与えられた問題が解をもつかどうかを扱う。第２のカテゴリーの数えあげ問題は，既知の解をもつ問題に対していくつ解が存在するかを探求する。第３のカテゴリーの最適化問題は，特定の問題に対する最良の解を見つけることに焦点をあてる。》（[12],pp.1-2）

最初に，組合せ論から存在問題を例示する。

問題(1)

４人で行うゲームがある。７人のメンバーで７回このゲームを行うとき，次の条件①，②を満たすような組合せは存在するか。

条件①　すべてのメンバーがそれぞれ４回ずつ出場する

②　どの２人も２回ずつ顔が合う

（解法）７人のメンバーに１から７の番号を付ける。出場回数などをチェックする表を用いて，次のような組合せが得られる。

{1,3,4,5}，{2,4,5,6}，{3,5,6,7}，{1,4,6,7}，
{1,2,5,7}，{1,2,3,6}，{2,3,4,7}

したがって，条件①，②を満たすような組合せは存在する。

次に，数えあげ問題の例を示す。

問題(2)

0より大きい4つの奇数を加えた和が，12となる組合せは何通りあるか。ただし，1+1+1+9と1+1+9+1などは同じものとする。

（解法1）考えられる組合せを，

1+1+1+9，1+1+3+7，1+1+5+5…

というように，組織的に全てを数えあげ，重複したものを取り除くと，5通りとなる。

（解法2）0より大きい4つの奇数を加えることは，0より大きい2つの偶数を加えることである。2つの偶数で和が12になる組合せは，2と10，4と8，6と6である。それぞれをさらに2つの奇数に分割し，重複したものを取り除くと，

1+1+1+9，1+1+3+7，1+1+5+5，1+3+3+5，3+3+3+3

の5通りを得る。

（解法3）各数は1以上なので，まず1+1+1+1という式を考える。この和は4であるので，残り8を4つの項に分配すればよい。このとき奇数という条件を満たすには，2を一つの単位として分配しなければならない。つまり，

(1+2+2+2+2)+1+1+1，(1+2+2+2)+(1+2)+1+1，(1+2+2)+(1+2+2)+1+1，
(1+2+2)+(1+2)+(1+2)+1，(1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+2)

の5通りである。

存在問題は，問題(1)のように条件を満たすような解を実際に構成するか，存在しえないことを証明することが解答となる。18世紀，Eulerが「ケーニヒスベルグの橋の問題」で，図2.1のような図形は一筆がきできないことを証明した有名な問題も，存在問題の一種といえる。

数えあげの問題は，すべてを列挙する解法が考えられる。また，三角数や四角数のように，その規則性に着目し数えあげて解く問題や，順列・組合せの問題のように簡単な公式が利用できる問題もある。

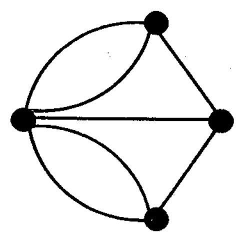


図2.1

次に，最適化問題を例示する。

問題(3)

ある学校の体育祭で，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆという６つの種目が行われる。何人かの生徒は２つ以上の種目に出場する予定である。各種目の説明会を行うのにそれぞれ１時間かかる。出場する生徒が重なっている種目は同時には説明会を行えないとする。下のような種目で生徒が重なっているとき，説明会の予定を組むとしたら説明会を全部行うのに最低何時間かかるか。

［生徒が重なっている種目］

ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＤ，ＣとＥ，ＣとＦ

（解法１）できるだけ多くの種目の説明会を同時に行えば時間が少なくてすむ。まずＡと同時に説明会を行える種目を考える。与えられた条件を一つ一つチェックして，ＥとＦを得る。次にＢについて同様に考えて，Ｃを得る。最後にＤを別の時間に行う。つまり，３時間で行える。ところが，与えられた条件から，Ａ，Ｃ，Ｄは同時に説明会を行えないので，説明会を全部行うには，必ず３時間以上かかる。したがって，最低３時間かかる。

次に「逐次彩色法」（[13],p.42）というアルゴリズムによる解法を示す。

（解法２）各種目を頂点とし，重なった生徒がいるとき２頂点を辺でつなぐと，図2.2のようなグラフになる。次に同じ色の頂点（種目）は同時に説明会を行い，異なる色の頂点は別々の時間に説明会を行うように，各頂点に色を割り当てていく。まずＡに色①をつける。ＢはＡとつながっているので色②をつける。ＣはＡとつながりＢとはつながっていないので色②をつける。ＤはＡとＣにつながっているので色③をつける。このようにある頂点に色をつけるとき，つながっている頂点の中で既に色がついているものと異なる色で最小の番号の色をつけるとＡ①Ｂ②Ｃ②Ｄ③Ｅ①Ｆ①となる。つまり３色必要となる。ここで，このグラフでは互いにつながっている頂点Ａ，Ｃ，Ｄに異なった色をつけなければならないから，３色以上必要である。したがって説明会は最低３時間かかる。

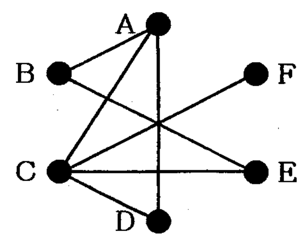


図2.2

これまでの例から分かるように，一般的に離散数学の問題は，体系的な知識がなくても多様な解法を考えることができる問題が多い。つまり，問題解決の前提となる知識や技能をあまり必要とせず，生徒が自分で創意工夫して解決できる問題が多いというのが離散数学の特徴である。また，生徒になじみのある身近な事象から問題設定できるという特徴も持っている。

次にアルゴリズムについて考えてみると，新数学事典ではそれを次のように定義している。

《 アルゴリズムとは，実際に計算できるものの計算の“手順”とか，命題の真偽を判定する実行可能な“手続き”などを意味する言葉である。》

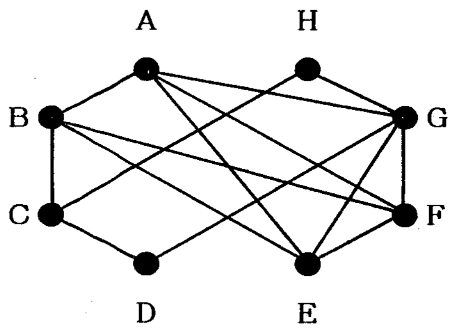
([14],p.110)

この定義にしたがうと，アルゴリズムは，多項式のような単純なものや漸化式表現などの帰納的なものを含んだ数値計算の手順や作図の手順，命題の真偽を判定する手続きなど広い意味での問題解決のための手続きととらえられる。

先に示した例から分かるように，離散数学では，《解法を組み立てるアルゴリズムを明示したり，分析することによって，問題を解く》([15],p.67) アルゴリズム的問題解決が重要な解法と考えられる。従来の中学校・高等学校の教材のいくつかは，アルゴリズム的問題解決といえるが，既知のアルゴリズムをそのまま利用することが中心的である。そのことは，アルゴリズムの分析などによる解法の創造という点は疎かにされてきたことを示している。ここで，問題(3)のアルゴリズムを分析し，新しいアルゴリズムを創造する問題を例示する。

問題(4)

下の図のように，問題(3)の種目数が８になった場合では，最低何時間かかるか。



（解法）各頂点を次数（その頂点でつながっている辺の数）の大きい順に並べるとＧ，Ａ，Ｂ，Ｅ，Ｆ，Ｃ，Ｄ，Ｈとなる（同じ次数を持つ頂点があるので順序づけが一意的とは限らない）。次に上の順序に従って各頂点に色をつけていく。Ｇに色①をつける。Ｇとつながっていないに同じ色①をつける。他に色①はつけられないので，次のＡに色②をつける。Ａとつながっていないに色②をつける。以下同様にして，すべての頂点に色がつけられるまでこの操作を続けると，Ｇ①Ａ②Ｂ①Ｅ③Ｆ④Ｃ②Ｄ③Ｈ③となる。したがって，４色必要となる。このグラフでは，互いにつながっている頂点Ａ，Ｂ，Ｅ，Ｆに異なった色をつけなければならないから４色以上必要である。以上のことから，説明会は最低４時間かかる。

この解法は，「Welch-Powellのアルゴリズム」（[16],p.118）を用いたものである。前述の「逐次彩色法」と異なる点は，頂点の次数の順序づけがなされていることである。これによって，一層洗練された解法とみなされる。実際，この問題(4)を「逐次彩色法」で解くと，５色必要という結果が得られ，最適解にはなっていないことがわかる。このように離散数学は，既知のアルゴリズムを分析し，さらに工夫されたアルゴリズムを創造することができるような発展的な問題を含んでいる。

さらに，アルゴリズム的問題解決を用いて，伝統的分野の問題を考えてみる。Maurerは，剰余定理に関して「存在的」証明と「アルゴリズム的」証明を例示している。以下にその概略を示してみる。

［剰余定理］　多項式$f(x)$を$x-a$で割った剰余は，$f(a)$である。

［存在的証明］　商を$q(x)$，剰余をRとすると，

$$f(x)=(x-a)q(x)+R$$

とかける。xにaを代入すると，

$$f(a)=(a-a)q(a)+R=0\cdot q(a)+R=R$$

［アルゴリズム的証明］　$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$

として，実際に割り算を行うと，

$$\begin{array}{r|l}
 & c_nx^{n-1}+(ac_n+c_{n-1})x^{n-2}+\cdots \\ \hline
x-a & c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \\
 & \underline{c_nx^n-ac_nx^{n-1}} \\
 & (ac_n+c_{n-1})x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2} \\
 & \underline{(ac_n+c_{n-1})x^{n-1}-a(ac_n+c_{n-1})x^{n-2}} \\
 & \{a(ac_n+c_{n-1})+c_{n-2}\}x^{n-2}+\cdots
\end{array}$$

となる。ここで，剰余Rを求めることは，

$$v_0 = c_n,\ v_k = av_{k-1} + c_{n-k}$$

という漸化式での第n項を求めることであるので，

$$R = v_n = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}a^{n-j}$$

と予想される。（数学的帰納法での証明は省略）

したがって，R＝f(a)　（[17],pp.432-433）。

このように，アルゴリズム的問題解決は伝統的な分野に新しい視点を与えている。このことについて，Lovaszは次のように述べている。

《　アルゴリズム的数学（コンピュータによって注目されるようになってきたが，その開発以前に実在した重要な方法）は，定理証明型の伝統的数学の正反対ではない。むしろ，それは新しい視点，新しい種類の問題，それらを解く新しいアプローチをともなって，数学の伝統的分野の多くを豊かにする。そう，アルゴリズム的数学か構造的数学かではなく，アルゴリズム的かつ構造的数学ということである。》（[18],p.67）

今まで述べてきたように，アルゴリズム的問題解決は，離散数学の重要な解法である。また，それは存在的解法と相補的な関係をたもちつつ，数学の様々な分野に新しい視点をあたえている。

以上のことから，離散数学の一般的な特徴は次の４点にまとめられる。

(1)　問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できること
(2)　能力に応じて多様な解法が考えられること
(3)　身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすいこと
(4)　アルゴリズムの開発が中心的な課題であること

§2　学習指導要領での離散数学の扱い

わが国の中学校学習指導要領は，昭和22年に発行され，その後，26年，33年，44年，52年，平成元年に全面改訂されている。高等学校の場合は昭和26年に告示され，30年，35年，45年，53年，平成元年に全面改訂されている。グラフ理論，組合せ論，有限数列，アルゴリズム，行列の分野について，これまでの学習指導要領でどのように取り上げられてきたかを述べていきたい。

2.1　中学校学習指導要領における離散数学

中学校学習指導要領のうち，昭和22年発行，26年，33年改訂の場合は，本論文で考察している離散数学がほとんど扱われていないので，昭和44年改訂以降の場合について述べる。

(1)グラフ理論

昭和44年改訂の学習指導要領では，「数学教育の現代化」によって，現代数学の新しい概念の導入や数学的な考え方が強調された。その中でグラフ理論に関連すると思われる記述がみられる。第３学年の目標では次のように述べられた。

《　図形を位相の考えによって考察することができるようにし，図形や空間についての見方を豊かにする。》（[19],p.66）

そして，内容の項目では次のように述べられている。

《　C　図形

(3)　点，線，面のつながりに着目して図形を考察し，また直線，平面および空間の広がりについての理解を深めて，位相的な見方など図形や空間についての見方を豊かにする。》（[19],p.68）

この場合の具体的な内容としては，一筆書きが考えられる。つまり，グラフ理論の一筆書きという存在問題を，図形に対する位相的な見方から考察するという扱いであった。このような扱いは，前節で述べた離散数学の特徴をある程度生かしていると考えられる。しかし，このような内容は，昭和53年改訂の学習指導要領以降削除されている。その主な理由は，中学校の図形内容の中では発展性や応用性に乏しく，図形指導の系統からはずれていたためであった。さらに，昭和44

年改訂の学習指導要領の内容が過重であったために，示された内容を消化するのに精一杯であったという当時の事情も考えられる（[20],p.184）。

その後，グラフ理論に関した内容は，昭和52年改訂及び平成元年改訂の学習指導要領でごくわずかであるがみることができる。それは，《簡単な場合について確率を求めること》という内容の取り扱いに関する部分で，《樹形図などを利用して起こり得るすべての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げるものとする》([21],p.152）という記述である。これは，グラフを考察の対象とするのではなく，単なる数えあげの道具としての扱いにとどまっている。

⑵組合せ論

組合せ論に関する教材は，昭和44年改訂の学習指導要領の内容の項目で次のように述べられている。

《　D　確率・統計

⑴　多数の観察や多数回の試行によって得られた結果について，頻度の傾向を表すのに，確率が用いられることを理解させる。

ア　確率の意味。　イ　順列と組合せの考え方。　ウ　簡単な場合について，確率を求めること。　エ　期待値の意味。

⑵　次の用語を用いることができるようにする。

確率，順列，組合せ，期待値》（[19],p.65）

組合せ論には，前節の問題⑴や⑶のような組合せの構成という面とそれを基にした問題⑵のような個数の処理という面がある。この記述によると，昭和44年改訂の学習指導要領では，確率の基礎として個数の処理という面が扱われている。しかし，その後の学習指導要領の改訂では，「順列・組合せ」という表現が削除されている。その主な理由は，中学校での確率指導は，多数の観察や多数回の試行に基づいた概念理解を重視すべきで，場合の数の計算に偏った確率指導は適切でないということである（[20],pp.188-189）。このように，現在の中学校の学習指導要領では，個数の処理という面は，上述の樹形図を用いた場合のように，確率の基礎としてごくわずかであるが扱われている。一方，組合せの構成という面は扱われていない。

したがって，先に述べたグラフ理論に関する内容の取り扱いとともに，現在の中学校の学習指導要領では，前節で述べた離散数学の特徴を十分生かすような組合せ論に関する教材は，ほとんど扱われていない。

2.2　高等学校学習指導要領における離散数学

⑴組合せ論

組合せ論に関する教材は，昭和26年改訂の学習指導要領の「一般数学」や「解析II」の中で既に扱われている。「解析II」の指導内容では，《I．確率を理解し用いること》という項目の中で，《順列や組合せの考えを用いて，場合の数をじょうずに計算する能力を伸ばす》という目標が示され，用語として，《順列，組合せ，$_nP_r$，$_nC_r$，階乗，n！，二項定理，二項係数》（[22],pp.157-159）があげられている。また，昭和30年改訂の学習指導要領の「数学III」の内容の説明では次のように述べられている。

《　d　順列と組合せ
具体的な事象において，起こりうる場合の数を整理し，数えやすくする方法を明らかにし，確率計算への準備とする。また，これに関連して，指数が正整数の場合の二項定理を扱う。》（[23],p.40）

これらは，中学校の場合と同様に，組合せ論に関する内容を確率の基礎に利用する扱いにとどまっている。このような傾向はその後も続いた。また，昭和45年改訂の学習指導要領の「数学I」以外，組合せ論に関する内容が，必修科目でなく選択科目で扱われていることは，生徒全員を対象とした指導内容とは考えられていないことを示している。本来，組合せの構成や個数の処理という組合せ論に関する内容は，数学全般において基礎的なことであるので，もっと重視されるべきであろう。これまでの扱いは，離散数学の特徴を十分生かしているとは言い難いであろう。

ところが平成元年改訂の学習指導要領では，組合せ論に関する内容が必修科目の「数学I」で扱われている。その目標は次のように述べられている。

《　具体的な事象の考察を通して，二次関数，図形と計量，個数の処理及び確率について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，それらを的確に活用する能力を伸ばすとともに，数学的な見方や考え方のよさについて認識を深める。》（[24],p.170）

そして，内容の項目では次のような記述がみられる。

《　⑶　個数の処理

ア　数えあげの原則　　イ　自然数の列　　ウ　場合の数　(ｱ)　順列
(ｲ)　組合せ　［用語・記号］$_nP_r$，$_nC_r$，階乗，n！》([24],p.171)

このように組合せ論の個数の処理という面が独立的に扱われている。これは，問題の前提となる知識や技能が少なくて考えられるとか，多様な解法が考えられるなどの離散数学の特徴をかなり生かしているといえるが，組合せの構成という根本的な面が扱われていないので，十分とはいえないであろう。

(2)有限数列

数列は昭和26年改訂の学習指導要領の「一般数学」や「解析II」の中で既に扱われている。昭和35年改訂の学習指導要領の「数学IIB」の内容では次のような記述がみられる。

《　(2)　数列と級数
簡単な数列について，自然数との対応関係を考え，その数列の特徴をとらえさせる。……
ア　等差数列，等比数列
イ　その他の数列
一般項がn^2，n^3の程度とする。
用語と記号
数列，第n項，一般項，等差数列，公差，Σ，等比数列，公比
数学的帰納法》（[25],p.68）

この内容からわかるように，数列は自然数との対応関係に着目して扱われた。また，このような傾向はその後も続いた。しかし，平成元年改訂の学習指導要領では，「数学I」の「個数の処理」という単元で「自然数の列」という項目で有限数列が扱われている。ここでの数列は，《ものの個数や場合の数を数えあげるときなどにできる自然数からなる列》を用いて，《規則に従って数えあげるという考え》([24],p.31）に立った扱いがされている。つまり，離散量の数えあげに数列を用いている。このような扱いは，前節で述べた離散数学の特徴を生かす方向と考えられる。

次に，数学的帰納法と漸化式について述べてみたい。前者は数列と同様に昭和26年改訂の学習指導要領以降，毎回記載されている。後者は昭和45年改訂の学習指導要領の「数学IIB」における「帰納的定義」とか平成元年改訂の「数学A」でみられる。数学的帰納法は，数列の第n項など自然数を含む命題の証明法とし

て扱われている。また，漸化式は数列の二項間の関係式として扱われている。数学的帰納法は，次章で説明するように，図形的な要素を含む場面での証明法としても考えられる。また，漸化式も次章で示すような，数えあげのアルゴリズムとして扱え，コンピュータの活用も期待できるものである。

(3)アルゴリズム

小学校以来，数値計算に関するアルゴリズムの指導が行われている。その場合は，アルゴリズムを実行することが中心であった。ここで考察するアルゴリズムは，それ自体を分析したり，創造する対象ととらえ，流れ図やコンピュータプログラムに表現することが可能である。

昭和45年改訂の学習指導要領での「数学一般」，「数学ⅡＡ」，「応用数学」で「流れ図」という記述がみられるが，「アルゴリズム」とか「算法」という記述がみられるのは，昭和53年改訂の学習指導要領の「数学Ⅱ」や平成元年改訂の「数学Ｂ」においてである。従来はそれほど学校にコンピュータが普及していたわけではないので，流れ図でアルゴリズムを表現することが，主な扱いであったと考えられる。しかし，近年のコンピュータの普及にともなって，情報化社会への対応が重視されるようになり，平成元年改訂の学習指導要領の「数学Ｂ」の内容やその取り扱いでは，次のように述べられている。

《　2　内容

(4)　算法とコンピュータ

ア　コンピュータの機能　　イ　いろいろな算法のプログラム

3　内容の取扱い

(5)　内容の(4)のイについては，ユークリッドの互除法，繰り返しによる平方根の計算などを取り扱う程度とする。》（[24],pp.177-179）

そして，これらの主なねらいは，コンピュータでの体験をともなうアルゴリズム的問題解決の過程を通して，アルゴリズムを中心とした数学的な見方や考え方の育成や生徒の数学への興味や関心を喚起することである。このような扱いは，離散数学の特徴をかなり生かせる方向と考えられる。さらに，数値計算だけでなく，幾何的作図などを含めた広い範囲のアルゴリズムを考察することで，数学的な見方や考え方がより深く理解されるであろう。

(4)行列

行列は昭和45年改訂の学習指導要領以来記載されている。そのときの「数学Ⅱ

Ｂ」では，次のような内容が示されている。

《　Ａ　代数・幾何

(3)　行列

行列とその演算について理解させ，連立一次方程式が一つの方程式として表されることや一次変換と行列との関係について理解させる。

ア　行列の意味　　イ　行列の演算　　加法，減法，実数との乗法，乗法

ウ　連立一次方程式　　エ　一次変換　　平面上で，原点を動かさない一次変換を扱う。

オ　用語および記号　　行列，逆行列，A^{-1}，一次変換，加法定理（三角関数に関するもの）》（[26],p.61）

このように，連立一次方程式や一次変換と関連づけて，行列が扱われてきた。そして，「基礎・基本」を重視した昭和53年改訂時の「代数・幾何」では，一次変換との関連についての記述となった。しかし，平成元年改訂の学習指導要領では，一次変換が姿を消し，それに代わって「数学Ｃ」で，連立一次方程式との関連が取り上げられた。「数学Ｃ」の目標では次のように述べられている。

《　応用数理の観点から，コンピュータを活用して，行列と線形計算，いろいろな曲線，数値計算又は統計処理について理解させ，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数理的に考察し処理する能力を伸ばす。》（[24],p.179）

「数学Ｃ」の選択教科としての性質やその分量から，行列の扱いはかなり縮小されてきている。しかし，次章で述べるようなグラフ理論との関連による行列の扱いも考えられるので，行列の内容を検討すべきであろう。

以上の考察から，これまでの中学校・高等学校の学習指導要領では，前節で述べた離散数学の特徴を十分生かした扱いがなされているとは言い難いであろう。

第3章　離散数学の教材化

本章では，離散数学の教材化の意義を述べ，その教材例を提示するとともに，カリキュラムへの導入について考察する。

§1　離散数学の教材化の意義

離散数学の教材化の意義を，次の５つの点から述べてみたい。

⑴　考える意欲を喚起し，数学的な見方や考え方を育成する
⑵　柔軟な思考力を育成する
⑶　アルゴリズム的問題解決能力を育成する
⑷　数学を活用する能力や態度を育成する
⑸　学習意欲を喚起し，数学に対する積極的な態度を育成する

⑴　考える意欲を喚起し，数学的な見方や考え方を育成する

第１章で述べたように数学的な見方や考え方とは，《数学が構成されていくときの見方や考え方と，数学を基にした見方や考え方》（[8],p.6）といえる。この数学的な見方や考え方の育成について，中島は次のように述べている。

> 《　日常の算数・数学の指導において個々の指導内容について創造的な指導を行い，子どもに創造的な過程の体験を積み重ねることが必要である。》
> （[27],p.69）

また，片桐は次のように述べている。

> 《　これら考え方・態度は知識・技能を推進するエネルギーであり，問題解決の過程を通して養われるものであり，問題解決の推進力として重要な役割をはたしていくものである。》（[28],p.30）

つまり，数学的な見方や考え方を育成するには，生徒が意欲的に考えられる場面を設定し，数学を創造する過程や問題解決の過程を生徒が主体的に体験できるようにする必要がある。このことは，生徒にとって興味深い，数学の創造の過程や問題解決の過程を取り入れた，主体的な学習活動ともいえよう。

生徒が考えてみようという気持を強く持つことから，主体的な思考活動が始まる。こうした生徒の意欲を喚起する問題のもつべき条件として，次の３点が考えられる。

(1) 解決に必要な知識や技能が少ないこと
(2) 生徒にとって身近であったり意外性をもつなど興味や関心を引くこと
(3) 個人差に応じて解決の見通しを立てることができるが，容易には解決できないこと

もちろん数学的な見方や考え方の育成を目的としているので，解くのにそれらを必要とする問題でなければならない。

第２章で例示した問題(3)とこれらの条件との関係を考えてみたい。

問題(3)

ある学校の体育祭で，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆという６つの種目が行われる。何人かの生徒は２つ以上の種目に出場する予定である。各種目の説明会を行うのにそれぞれ１時間かかる。出場する生徒が重なっている種目は同時には説明会を行えないとする。下のような種目で生徒が重なっているとき，説明会の予定を組むとしたら説明会を全部行うのに最低何時間かかるか。

［生徒が重なっている種目］

ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＤ，ＣとＥ，ＣとＦ

この問題は，問題の理解や解決の前提となる知識や技能をあまり必要としないし，問題設定が現実にありそうな状況なので，生徒の興味を引くと思われる。また，解への見通しを生徒それぞれがもつことができるが，安易な公式の利用ができない問題である。したがって，この問題は生徒にとって意欲的に考えられるものといえる。

次に問題解決過程を考えてみると，生徒は試行錯誤の後に条件から適切な組合せを構成し，問題を解くと考えられる。その際，与えられた条件を形式化するために表や樹形図またはグラフを用いる生徒もいるであろう。このように各生徒なりのアプローチをした後，「逐次彩色法」という洗練された解法を示し，それぞれの解法のポイントとなっている「演繹的な考え方」や「図形化の考え方」を意識させられる。つまり，問題(3)は，解決に必要な知識や技能が少なく多様な解法

が考えられるので，生徒に印象的に数学的な見方や考え方を意識させることができ，そのよさを認識させられる。

このように問題(3)のような離散数学教材は，生徒の考える意欲を喚起し，多様な問題解決過程を生徒が主体的に学習できるので，数学的な見方や考え方の育成に適した教材と考えられる。

(2) 柔軟な思考力を育成する

中学校や高等学校の従来の教材は，画一的なパターン化した解法で解けるものが多くみられる。その結果，画一的な思考活動に陥りやすいと考えられる。そこで，柔軟な思考力を育成するには，それを必要とする問題を用いて，生徒の発想を生かすような指導が必要である。第２章で例示した問題(2)を考えてみたい。

問題(2)

0より大きい４つの奇数を加えた和が，12となる組合せは何通りあるか。ただし，1+1+1+9と1+1+9+1などは同じものとする。

（解法１）考えられる組合せを，

1+1+1+9，1+1+3+7，1+1+5+5…

というように，組織的に全てを数えあげ，重複したものを取り除くと，５通りとなる。

（解法２）０より大きい４つの奇数を加えることは，０より大きい２つの偶数を加えることである。２つの偶数で和が12になる組合せは，２と10，４と８，６と６である。それぞれをさらに２つの奇数に分割し，重複したものを取り除くと，

1+1+1+9，1+1+3+7，1+1+5+5，1+3+3+5，3+3+3+3

の５通りを得る。

（解法３）各数は１以上なので，まず1+1+1+1という式を考える。この和は４であるので，残り８を４つの項に分配すればよい。このとき奇数という条件を満たすには，２を一つの単位として分配しなければならない。つまり，

(1+2+2+2+2)+1+1+1，(1+2+2+2)+(1+2)+1+1，(1+2+2)+(1+2+2)+1+1，

(1+2+2)+(1+2)+(1+2)+1，(1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+2)

の５通りである。

この問題は解法１のような方法で考えるのが一般的であろう。しかし，問題の本質を把握し柔軟に考えることで，解法２や３のような効果的なアイデアが生ま

れてくる。このような体験は生徒に柔軟な思考力の重要さを認識させられるといえよう。

さらに次の問題を考えてみる。

問題(5)

3泊4日のキャンプに行くのに，リュックに荷物を詰めたい。下の表は荷物の一覧であるが，それぞれの品目に対して必要の度合いに応じてその価値を5点までの得点で示している。リュックには12kgしか詰めないとすると最も価値の得点が高くなる場合は何点か。

［荷物一覧表］（重さの単位　kg）

品　目	重さ	価値
衣類A	1	5
ラジオ	0.5	2
衣類B	1	4
洗面用具	0.5	3
衣類C	1	3
テント	2	5
食料	2.5	5
調理用具	1.5	4
カメラ	0.5	2
寝袋	2	5
雨具	0.5	3

この問題は，価値の高い順に品目を詰めていくと正解は得られない。正解を得るためには，品目の重さの合計は13kgなので，1kg以上取り除く品目の中で価値の低い組合せを選ぶというように逆向きに考えるとよい。したがって，衣類Cを取り除いて38点になる。ちなみに，価値の高い順に詰めていくと37点となる。

この問題は取り除く組合せが少ないので，この解法が有効であるが，品目が増え，価値の高い組合せを考えても，取り除く組合せを考えても，同じ程度に多くの組合せが現れる場合が考えられる。このようなとき，実際には正確な解を求めることが困難になる。そこで正確な解に近い解を得るための近似アルゴリズムを考えると効果的である。例えば，価値の高い順とか，1kg当りの価値の点を計算してその高い順に詰めるとかの様々なアイデアを目的に応じて考えることは現実的である。このようなアイデアも柔軟な思考から生まれる。

(3) アルゴリズム的問題解決能力を育成する

既に述べたように，アルゴリズム的問題解決とは，《解法を組み立てるアルゴリズムを明示したり，分析することによって，問題を解くこと》（[15],p.67）といえる。この能力の育成には，アルゴリズムを意識的に分析したり構成できるような問題を準備する必要がある。従来の教材のほとんどはアルゴリズム的に解くことができるが，既成のアルゴリズムをあてはめることが中心で，アルゴリズムを分析することによる解法の構成という点は疎かにされてきた。

先に述べた問題(3)～(5)は，試行錯誤的なアプローチはもとより，それ以外の解法のアルゴリズムを生徒自身で構成することができる。このように，離散数学教材はパターン化した解法をあてはめるのではなく，問題ごとに解法を構成していくことが可能であり，そのアルゴリズムの背後にある数学的な見方や考え方を理解しやすい。

さらに次の問題を考えてみる。

問題(6)

高さ１cmの赤いブロックと高さ２cmの青いブロックが十分たくさんある。これら２種類のブロックを重ねて，７cmの高さの塔を作りたい。何通りの異なる作り方があるか。

まず，すべてを数えあげる解法が考えられるが，これはかなり煩雑である。ところが，n cmの塔の作り方をa_n通りとすると，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad (n\geqq 3)$$

という漸化式が成り立つ。アルゴリズム的問題解決では，このような再帰的関係や繰り返しがしばしばみられる。こうしたアルゴリズムはnがかなり大きくてもコンピュータを活用すれば容易に解を導くので，このような解法が見直されてきた。このようにコンピュータを活用することで，一層効果的にアルゴリズム的問題解決能力を育成することができるであろう。

(4) 数学を活用する能力や態度を育成する

数学を活用する能力とは，現実場面の数学化→数学的推論や処理→現実場面への結論の適用という一連の活動を行う能力と考えられる。また，数学を活用する態度とは，《主体的に問題意識を持ち，それをできるだけ自分の力で積極的に解

決していこうとする態度》（[8],p.22）といえる。

こうした能力や態度を育成するには数学の有用性が認識できる教材を用いて，実際にそれを活用する場面を体験させることが大切である。Freudenthalが，《人間が学ばなければいけないのは，閉じた体系としての数学でなく，活動としての数学，つまり現実を数学化する過程》（[29],p.7）と述べているように，数学化の過程は特に重要であると考えられる。というのは従来の数学教育は数学の中での推論や処理の指導に重点をおいていた。さらに，数学の活用といえば，学習した内容が現実に当てはまる場面を考えていたといえる。本来は，現実場面に遭遇したとき，まず問題の本質をとらえ，数学化することが最初に行われるはずである。そして，既に獲得している能力を活用したり，さもなければ状況に合わせて概念を創造したり，アルゴリズムを自分なりに工夫するという数学の創造的活動を行うことが重要である。その際，数学的な見方や考え方，柔軟な思考力などの数学的な思考力が大切になってくる。

離散数学は自然現象だけでなく社会事象でも多くの活用場面をみいだせる。前述の問題(3)もその一つの例であるが，投票理論から問題を例示してみる。

問題(7)

ある会社に３人の株主がいて，それぞれ４，３，２票持っているとする。これは各人の票の重みである。過半数を求める多数決の場合，この重みが正確に各人の票の本当の力を反映しているか。

（解法）多数決で勝つには５票必要であるので２人以上で連合をつくらなければならない。勝てる連合は，[４，３]，[４，２]，[３，２]，[４，３，２]である。各人の票の力を，その票が欠けると勝てる連合が負けに変わるような連合の数で測る（この数は，Banzhaf Power Index と呼ばれている）。４票の株主の場合，[４，３]と[４，２]から４を除くとこの連合は負けるから，この数は２である。同様に他の株主のこの数を計算すると全て２になる。したがって，３人の株主の票の重みは異なるが，票の力は皆同じであるので，票の重みが正確に各人の票の本当の力を反映しているとはいえない（[15],pp.73-74）。

一見この問題では票の重みがそのまま票の力になっていそうであるが，Banzhaf Power Index という数学的概念を用いれば，意外ではあるが現実に合致した結論が得られる。問題(3)，(5)及びこの問題のように，離散数学は，現実場面にそった数学化の過程を生徒が主体的に体験できるので，数学を活用する能力や態度の育成に適していると考えられる。

(5) 学習意欲を喚起し，数学に対する積極的な態度を育成する

生徒の数学学習の意欲を損なっている主な原因は，体系的な知識や技能の積み重ねが求められており，数学の有用性や楽しさが実感しにくいことであろう。

先に例示した問題(6)をさらに発展させ，次のようなゲームの問題を生徒に提示することで，より主体的な学習活動が引き出せるであろう。

問題(8)

高さ１cmの赤いブロックと高さ２cmの青いブロックが十分たくさんある。これら２種類のブロックのうちの１つずつを２人で交互に重ねて，７cmの高さの塔を作る。このとき，最後にブロックを置いたほうが勝ちとする。このゲームで必勝法は存在するか。

この問題では，樹形図を用いて２人がブロックを置いていく全ての手順を考えると，問題(6)の解が導かれる。そして，その樹形図を分析することで，このゲームは先手必勝のゲームであり，次のような手順で置いていくと先手が必ず勝てることが理解できるであろう。

［必勝手順］

(1) 先手は赤いブロックを置く。

(2) 後手が赤いブロックを置いたら，先手は青いブロックを置く。逆に，後手が青いブロックならば，先手は赤いブロックを置く。
（この段階で塔の高さは４cmである）

(3) 手順の(2)を繰り返す。

これまでに述べてきたように，離散数学は有用性を示しやすく，数学的な見方や考え方などのよさを認識させ，数学の楽しさを味わわせることができよう。また，学習の前提となる知識や技能を多く必要としないので，様々な能力の生徒もそれぞれに学習に取り組むことができよう。したがって，生徒の学習意欲を喚起できると考えられる。

生徒の数学に対するイメージや態度は否定的，消極的なものが少なくない。数学は出来上がったもので，自分たちには考える余地は残っていないと思い，ただ提示されるものを理解していけばよいという受動的な生徒は多いであろう。ところが，問題(5)の品目が多くなった場合の一般的な解法がみつかってないという事

実とかそのために近似アルゴリズムという考え方が有効であるとかを生徒に示すことができる。また，問題(8)のようなゲームの場合，樹形図を用いて解けることを生徒に示すことができる。こうした事実を理解させることによって，数学に対する固定的なイメージを改善することができ，それが数学に対する積極的な態度の育成につながるであろう。

最後に，これまで述べてきた，離散数学の教材化の意義をまとめて考察してみたい。

数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成は，従来から重要な課題であったが，従来の問題は，問題解決の前提となる知識や技能がかなり必要であるということや数学の有用性や楽しさを示しにくかったことが，その育成にとって最大の障害であったと考えられる。いいかえると，数学の系統性を重視し，生徒の能力や興味・関心の多様性に配慮することが少なかったので，数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成がなされにくかったのである。このような現状をふまえて，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した教育の実現を目指すとき，本章で述べた離散数学の教材化の意義の中でも(1)，(2)，(5)が，きわめて重要となろう。また，教材化の意義の(3)や(4)は，離散数学を用いることで，アルゴリズム的問題解決能力，数学を活用する能力や態度の育成をより効果的に行えることを示している。さらに，これら全ての意義は，現在の数学カリキュラムを見直す重要な視点とも考えられる。

§ 2　離散数学の教材例

前節までに述べた離散数学の特徴や教材化の意義を生かした教材例を，グラフ理論，有限数列，アルゴリズム，行列の各分野おいて例示する。なお，組合せ論に関する教材例としては問題(1)，(2)，(3)，(5)，(6)を既に例示した。

2.1　グラフ理論に関する教材例

グラフ理論に関する教材例としては，既に例示した問題(3)，(4)の彩色問題がある。これら以外に次の教材を例示する。

問題(9)

① 現在Ａ市にいる。Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの各都市を訪れて，再びＡ市に戻ってくるコースを考えたい。各都市間を移動するための所要時間が，下の表のようなとき，最も短い所要時間とそのコースを求めよ。ただし，各都市を必ず一度だけ訪れることとし，訪れる都市の順番が異なるコースは別のコースとする。

② 訪れる都市が多い場合は，問題解決に非常に多くの時間がかかる。所要時間の最も短いコースを見積るには，どのようなアイデアが考えられか。また，そのアイデアを実際に①の設問に適用せよ。

5都市間の所要時間　（単位　分）

A	100	90	60	70
	B	50	30	10
		C	20	40
			D	80
				E

（解法）①樹形図を用いてすべてのコースを列挙すると24種類考えられるが，各コースには順序が逆になっているコースが存在するので，12種類のコースだけ計算すればよい。その結果，Ａ⇒Ｄ⇒Ｃ⇒Ｂ⇒Ｅ⇒ＡとＡ⇒Ｅ⇒Ｂ⇒Ｃ⇒Ｄ⇒Ａが最短のコースである。また，所要時間は210分である。

②各都市を頂点とし所要時間を重みとするグラフを示すと図3.1のようになる。

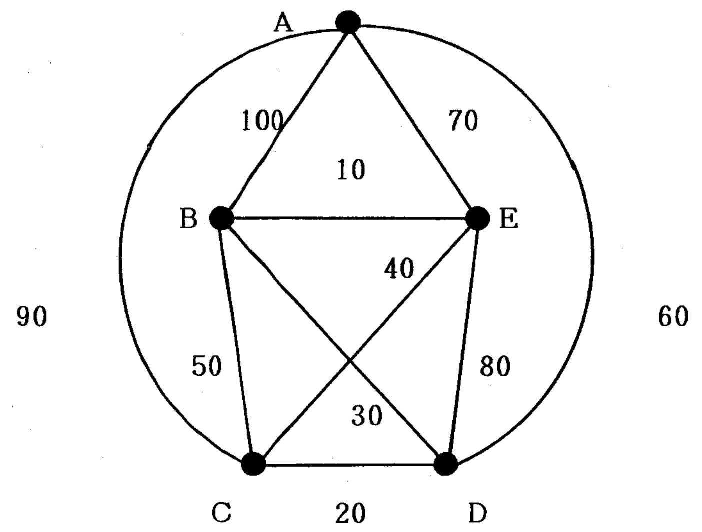


図3.1

（アイデアⅠ）Ａから最も近い頂点を選び，次にその頂点から最も近い頂点を選んでいってコースを構成する。この場合は，Ａ⇒Ｄ⇒Ｃ⇒Ｅ⇒Ｂ⇒Ａというコースが得られ，所要時間は230分となる。
（アイデアⅡ）すべての辺の中で短い辺から選んでいってコースを構成する。もちろんアイデアⅠと同様に，必ず一度だけ各都市を訪れるという条件を満たすようにコースを構成していく。この場合は，Ａ⇒Ｃ⇒Ｄ⇒Ｂ⇒Ｅ⇒Ａというコースが得られ，所要時間は220分となる。

この問題は巡回セールスマン問題と呼ばれている。設問①の解法は，考えられるコースをすべて列挙した後，各コースの所要時間を計算して，所要時間が最短のコースを得ている。設問②では，都市の個数が増加した場合の対応策として，近似アルゴリズムのもとになるアイデアを求めている。上述のアイデアの他にも，アイデアⅠを５つの都市から適用し，最も短いコースを見積るというアイデアも考えられる。特に，この問題は，「図形化の考え方」や「演繹的な考え方」という数学的な見方や考え方とともに，近似アルゴリズムを生み出す柔軟な思考力を育成することを目指している。

2.2　有限数列に関する教材例

有限数列に関する教材例として，数の並び方の規則性に着目して数えあげを効果的に行う，三角数や四角数を用いた問題がしばしばあげらえる。ここでは，幾何的な場面での問題例を提示する。

問題(10)

平面を５本の直線で分割したとき，分けられる領域の数の最大値を求めよ。

（解法）分けられる領域の数を最大にするのは，それぞれの直線が平行でなく，同一点で３本以上が交わらない場合である。ｎ本の直線による領域の最大数を，r_nとおくと，ｎ番目の直線はｎ－１本の直線と交わり，新たにｎ個の領域をつくるので，

$$r_0 = 1, \quad r_n = r_{n-1} + n \qquad (n \geqq 1)$$

となる。したがって，求める最大値は16である。

この問題は実際に図をかいて解を求めることもできる。しかし，上述のように直線の数と領域の最大値の関係を表す漸化式を考えれば，容易に解決できる。その際，具体的な場合から帰納的に推論する機会を与えることで，一層理解が深まろう。つまり，この問題では「帰納的な考え方」という数学的な見方や考え方が育成できると考えられる。

次に数列の一般項の証明などで用いられる数学的帰納法の図形領域での適用例を述べてみたい。

問題(11)

図１のように，大きさ$2^n \times 2^n$の正方形の盤から一つの正方形のます目（斜線部分）が除かれた残りの部分を，大きさ$2^n \times 2^n$の不完全な盤とよぶこととする。もちろんます目はどこを除いてもよい。このとき，大きさ$2^n \times 2^n$の任意の不完全な盤が，図２のようなＬ字形片で張りつめられることを証明せよ。ただし，不完全な盤を張りつめるとは，Ｌ字形片の一部が斜線部分を覆ったり，盤の外にでることのないように，斜線部分以外の各ます目を一度だけ覆うことである。

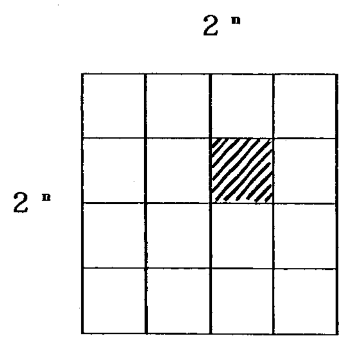


図１

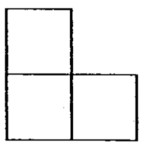


図２

（解法）大きさ$2^1\times 2^1$の不完全な盤は，Ｌ字形片で張りつめることができる。次に，大きさ$2^k\times 2^k$の不完全な盤が，Ｌ字形片で張りつめられると仮定する。図3.2のように大きさ$2^{k+1}\times 2^{k+1}$の不完全な盤を，大きさ$2^k\times 2^k$の盤からなる４つの区画に分ける。その中の一つは，大きさ$2^k\times 2^k$の不完全な盤である。

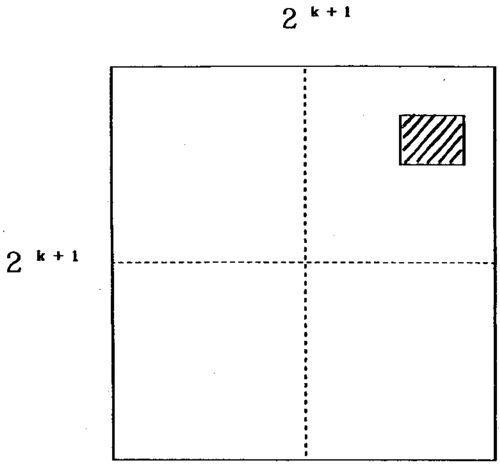


図3.2

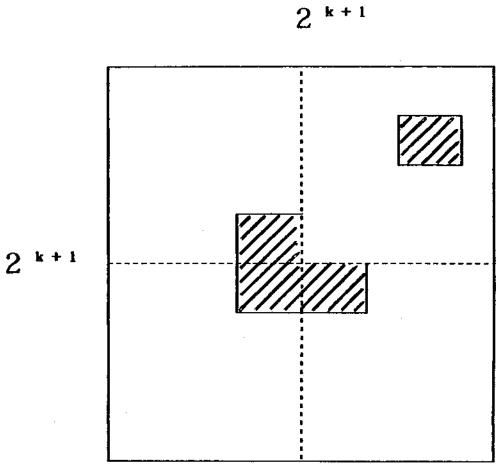


図3.3

ここで，中心に一つのＬ字形片を図3.3のように置くことによって，それぞれの区画を全て大きさ$2^k\times 2^k$の不完全な盤とすることができる。大きさ$2^k\times 2^k$の不完全な盤はＬ字形片で張りつめられると仮定しているので，この４つの区画はすべて張りつめることができることとなり，大きさ$2^{k+1}\times 2^{k+1}$の不完全な盤もＬ字形片で張りつめられる。したがって，大きさ$2^n\times 2^n$の任意の不完全な盤はＬ字形片で張りつめられる（[30],pp.17-20）。

この問題を生徒に提示する前に，ｎ＝１，２，…の具体的な場合を図などで考えさせる。こうした活動は，生徒に問題解決への意欲を持たせるとともに，注意深い観察力と柔軟な思考力によって解決のカギとなるアイデアを発見する機会を提供するであろう。このような問題を提示することは，「帰納的な考え方」という数学的な見方や考え方を育成するとともに，数学的帰納法をより深く理解させるであろう。

2.3　アルゴリズムに関する教材例

問題(12)

多項式$P(x)=2x^4-7x^3-5x^2+4x+1$において，xの値が与えられたと

き，式の値を求めるのに計算回数が少なくなるようなアルゴリズムを工夫せよ。

（解法）与えられた多項式は，

$$P(x)=[\{(2x-7)x-5\}x+4]x+1$$

という式に変形できるので，次のアルゴリズムが考えられる（[8],p.130）。

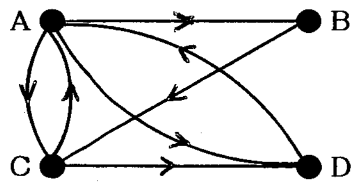
① xの値を入力する。
② P＝２とする。
③ Q＝－７とする。
④ P＊x＋Qを求める。
⑤ P＝P＊x＋Qとする。
⑥ Q＝－５，４，１として④⑤を繰り返す。
⑦ 計算結果P(x)を出力する。

この問題では，P＊x＋Qを求め再びそれをPとおきかえるという再帰的な関係を利用している。この場合の計算回数は８であり，従来の場合は14であるので計算回数が少ない効率的なアルゴリズムといえる。このような再帰的な関係は，問題(6)で用いたような漸化式の形にも表現でき，数列の第n項やn項までの和を求める場合に利用できる。この場合，コンピュータや電卓を活用した体験的な授業展開で，再帰的な関係を活用するよさを実感させることによって，数学に興味や関心を持たせることができるであろう。また，既知のアルゴリズムを見直す機会を与えることで，そのアルゴリズムの幅広い理解を促進すると考えられる。

2.4 行列に関する教材例

問題(13)

下の図のように，４つの地点A，B，C，Dの間には，それぞれ長さ１の一方通行路がある。このとき，長さ３以下でAからDに行く方法は何通りあるか。



（解法１）Aから行ける地点を樹形図を用いて列挙すると５通りとなる。

（解法２）行列の各要素を，ＡからＢへの一方通行路が１本存在しているので１行２列の要素は１とし，ＢからＡへの一方通行路が存在してないので２行１列の要素は０というようにするとグラフは次のような行列で表現できる。

$$M=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

ここで，次のように$M+M^2+M^3$を計算するとその行列の１行４列の要素がＡからＤへの長さ３以下の一方通行路の本数を表現している。

$$M+M^2+M^3=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2&2&3\\1&1&1&1\\2&1&2&2\\2&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&4&5\\2&1&2&2\\4&2&3&4\\3&1&2&2\end{bmatrix}$$

したがって，５通りである。

この問題は地点の数が少ない場合は解法１のようにすべてを列挙する方法で十分であるが，地点の数が多くなると解法２の方が有効である。このようにグラフを行列で表現することによって，離散数学が飛躍的に進歩した面がある。このような問題解決場面を生徒が体験することは，行列の一層の理解を図るとともに，数学とコンピュータの関連に対する興味や関心を引き出すのに有効であると考えられる。

§３　離散数学のカリキュラムへの導入

離散数学のカリキュラムへの導入として，平成元年改訂の学習指導要領での扱いと将来のカリキュラムでの扱いについて考察してみたい。

平成元年改訂の中学校学習指導要領では「課題学習」について次のように記載されている。

《　第２学年及び第３学年においては，生徒の主体的な学習を促し数学的な見方や考え方の育成を図るため，各領域の内容を総合したり日常の事象に関連付けたりした適切な課題を設けて行う課題学習を，指導計画に適切に位置付け実施するものとする。》（[21],pp.152-153）

さらに，選択教科としての「数学」については次のような記述がみられる。

《　第３学年における選択教科としての「数学」においては，生徒の特性等に応じ多様な学習活動が展開できるよう，第２の内容について，課題学習，作業，実験，調査などの学習活動を学校において適切に工夫して取り扱うものとする。》（[21],p.153）

これらの記述と第３章で述べてきた教材化の意義を考えてみると，離散数学の中学校への導入として，「課題学習」や選択教科としての「数学」で扱うことは妥当であると考えられる。

また，第２章で述べたように平成元年改訂の高等学校学習指導要領では，数学Ｉの「個数の処理」，数学Ａの「数列」，数学Ｂの「算法とコンピュータ」という単元で，これまで述べたような離散数学の一部を扱うことができると考えられる。

さらに，将来の数学カリキュラムにおける離散数学の導入について考えてみたい。

高等学校の数学カリキュラムは理工系大学進学を目指す生徒を中心に構成されており，それらを薄めたようなカリキュラムが文科系生徒や職業科の生徒に用いられている。そのことは，文科系生徒や職業科の生徒の興味・関心，将来の有用性などを考慮したとき，彼らにとって必ずしも適切なカリキュラムであるとは言い難い面がある。今まで述べた離散数学の教材化の意義を考えてみれば，文科系生徒や職業科の生徒のカリキュラムに，「数学Ｉ」の「個数の処理」を履修した後の教材として，これまで例示したような離散数学教材を導入することは妥当な

ことと考えられる。また，コンピュータの発展などによる社会的要請の変化を考慮して，理工系生徒の内容にも，離散数学教材を導入することが必要であろう。

現在の理工系中心の高等学校数学カリキュラムが，中学校のカリキュラムにも影響を与えている。中学校が義務教育であり，前期中等教育であることを考えれば，より一層数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成を重視すべきである。したがって，「課題学習」のようなトピック的な扱いだけでなく，中学校にも離散数学の新しい単元を設けることが必要と思われる。

第4章　離散数学教材の実践

本章では，離散数学教材の指導可能性を，中学校の「課題学習」を想定した実験授業の結果から考察し，それらをふまえた指導上の留意点について述べる。

§1　離散数学教材の実験授業

1.1　実験授業の概要

(1)実験授業の目的，課題設定，実施方法

実験授業の目的は，離散数学教材は「課題学習」の課題として理解や関心などの観点から指導可能かどうかを検証することである。

実験授業の課題は次の問(1)，(2)である。問(1)は第３章で例示した問題(5)であり問題解決において「逆向きに考える」や「演繹的な考え方」という数学的な見方や考え方をが要求される。問(2)は第２章で例示した問題(3)であり問題解決において「図形化の考え方」や「演繹的な考え方」が要求される。これらの課題は，学習意欲の喚起とともに大量の情報を取り扱う際の重要な見方や考え方を育成するよう配慮した。

実験授業は，広島市内のある中学校で，1992年の２月に第３学年，３月に第２学年の生徒に実施した。各学年２クラスずつの実験群には「組合せ問題の効率的な解法」という２時間の授業とテスト及びアンケート（資料参照）１時間の合計３時間の実験授業を３日間で行い，各学年２クラスずつの統制群にはテストのみを行った。もちろん，両群の生徒の実験前の数学の成績には有意な差はみられなかった。

問(1)

３泊４日のキャンプに行くのに，リュックに荷物を詰めたい。下の表は荷物の一覧であるが，それぞれの品目に対して必要の度合いに応じてその価値を５点までの得点で示している。リュックには12kgしか詰めないとすると最も価値の得点が高くなる場合は何点か。

［荷物一覧表］（重さの単位　kg）

品　目	重さ	価値
衣類A	1	5
ラジオ	0.5	2
衣類B	1	4

洗面用具	0.5	3
衣類Ｃ	1	3
テント	2	5
食料	2.5	5
調理用具	1.5	4
カメラ	0.5	2
寝袋	2	5
雨具	0.5	3

問(2)

ある学校の体育祭で，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆという６つの種目が行われる。何人かの生徒は２つ以上の種目に出場する予定である。各種目の説明会を行うのにそれぞれ１時間かかる。出場する生徒が重なっている種目は同時には説明会を行えないとする。下のような種目で生徒が重なっているとき，説明会の予定を組むとしたら説明会を全部行うのに最低何時間かかるか。

［生徒が重なっている種目］

ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＤ，ＣとＥ，ＣとＦ

(2)授業の流れ

［第１時間目］

授業のはじめにこれから学習する組合せ問題について　レストランのメニューの組合せなど簡単な例をあげて説明した。そして，問(1)のプリントを配布し，生徒にそれぞれ考えさせた。机間巡視の際，各生徒の解法の特徴を把握するよう留意するとともに，生徒には自分の解法の手順について箇条書きにするよう指示した。

異なる解法の生徒４名を指名し，その解法を板書させ，前で説明させた。ほとんどの生徒は適切に説明できた。その際，それぞれの解法に対して適宜補足を加え，その特徴を解説した。

この問題の正解を示し，その解法のポイントになっている数学的な見方や考え方である「逆向きに考える」について説明した。この場合では，「逆向きに考える」が有効な方法であるが，条件が変わると他の解法の方が有効になることを説明した。

［第２時間目］

授業のはじめに第１時間目の授業内容を思い出させた。その後問(2)のプリント

を配布し，問題の意味を簡単に説明してから生徒に各自考えさせた。前の時間と同様に机間巡視の際，各生徒の解法の特徴を把握するよう留意するとともに，生徒には自分の解法の手順について箇条書きにするよう指示した。

異なる解法の生徒４名を指名し，その解法を板書させ，前で説明させた。それぞれの解法に対して適宜補足を加え，その特徴を解説した。

工夫された解法としての「逐次彩色法」とそのポイントとなる数学的な見方や考え方である「図形化の考え方」を説明した後，地図の色分けの例を示して，その課題に関連した話をした。最後に，２時間の授業のまとめとして，事象を様々な視点から柔軟に考えることの大切さと学習内容を他の場面で活用することについて説明し，授業を締めくくった。

1.2　実験授業の結果と考察

実験授業の結果を，問⑴・⑵の解法，テスト結果，アンケートをもとに分析した。なお，生徒のデータは，今までの数学の成績との関連をみるため，Ａ，Ｂ，Ｃの段階別に集計した。段階の分類は表4.1のように10段階相対評価をもとに，各段階ともほぼ同じような人数になるようにした。ただし，１日でも授業を欠席した被検者は分析から除外した。

表4.1　段階別生徒数（人）

	３年		２年	
	実験群	統制群	実験群	統制群
Ａ（評定10～７）	２２	２６	２５	２９
Ｂ（評定６～５）	２８	２４	３１	２４
Ｃ（評定４～１）	２１	２４	１９	２１
全体	７１	７４	７５	７４

⑴課題に対する理解

①解法の多様性と数学の成績との関連

問⑴・⑵の解法を次のように分類し，それぞれの解法で解答した生徒の数を表にまとめると，表4.2及び表4.3のようになった。

［問⑴の解法］

・試行錯誤…価値５の品目を詰め重さの合計をする。次に価値４で同様に行う。
　　　　　　まだ余りがあるので詰められるものを考える。

・価値………各品目を価値の高い順に並び替えて，上から詰める。

・比率………単位重さ当りの価値を計算し，その比率が高い順に詰める。

・逆向き……品目全部の重さを合計し，取り除く品目の中で最低の価値の組合せを選ぶ。

［問(2)の解法］

・試行錯誤……同時に開催できる種目の組合せを適当に考える。

・表…………表を用いて考える。

・樹形図………樹形図を用いて考える。

・有限グラフ…有限グラフを用いて考える。

表4.2　3年実験群の解法の分類（括弧内は全体に対する比率）

		試行錯誤	価値	比率	逆向き	無答など
問(1)	A	5(7.0%)	5(7.0%)	2(2.8%)	9(12.7%)	1(1.4%)
	B	9(12.7%)	9(12.7%)	3(4.2%)	7(9.9%)	0(0.0%)
	C	3(4.2%)	12(16.9%)	1(1.4%)	3(4.2%)	2(2.8%)
	全	17(23.9%)	26(36.6%)	6(8.5%)	19(26.8%)	3(4.2%)
		試行錯誤	表	樹形図	有限グラフ	無答など
問(2)	A	11(15.5%)	4(5.6%)	3(4.2%)	0(0.0%)	4(5.6%)
	B	12(16.9%)	5(7.0%)	11(15.5%)	0(0.0%)	0(0.0%)
	C	10(14.1%)	1(1.4%)	7(9.9%)	0(0.0%)	3(4.2%)
	全	33(46.5%)	10(14.1%)	21(29.6%)	0(0.0%)	7(9.9%)

表4.3　2年実験群の解法の分類（括弧内は全体に対する比率）

		試行錯誤	価値	比率	逆向き	無答など
問(1)	A	2(2.7%)	10(13.3%)	2(2.7%)	11(14.7%)	0(0.0%)
	B	4(5.3%)	13(17.3%)	1(1.3%)	13(17.3%)	0(0.0%)
	C	4(5.3%)	12(16.0%)	0(0.0%)	3(4.0%)	0(0.0%)
	全	10(13.3%)	35(46.7%)	3(4.0%)	27(36.0%)	0(0.0%)
		試行錯誤	表	樹形図	有限グラフ	無答など
問(2)	A	14(18.7%)	2(2.7%)	5(6.7%)	3(4.0%)	1(1.3%)
	B	15(20.0%)	4(5.3%)	2(2.7%)	9(12.0%)	1(1.3%)
	C	10(13.3%)	3(4.0%)	0(0.0%)	5(6.7%)	1(1.3%)
	全	39(52.0%)	9(12.0%)	7(9.3%)	17(22.7%)	3(4.0%)

問(1)では両学年とも各解法がほぼ同じような割合でみられる。Ｃ段階の生徒には「逆向き」の解法は難しいようで，Ａ，Ｂ段階に比べると若干少ない。問(2)では３年の３学期に確率の単元で樹形図を学習していたため，それを用いた生徒が３年に多くみられる。一方，２年では有限グラフを使った解法がいくつかみられるが，３年ではそれを使った生徒は皆無である。しかし，どちらの問題においても，生徒は様々な解法を工夫し，問題の解決に取り組んでいたことが分かる。

②テスト問題による課題の理解度

授業内容にそったテストを20分で実施し，次の表4.4のように集計した。

テスト(1)

旅行にいくのにカバンに荷物を詰めたい。下の表は荷物の一覧であるが，それぞれの品目に対して，必要の度合いに応じてその価値を５点までの得点で示している。カバンには13kgしか詰めないとすると，最も価値の得点が高くなる場合は何点か。

［荷物一覧表］（重さの単位　kg）

品　目	重さ	価値
衣類Ａ	2.5	5
洗面用具等	2	5
水筒	1	2
ﾋﾞﾃﾞｵｶﾒﾗのｾｯﾄ	3	5
雨具	0.5	3
衣類Ｂ	2.5	5
予備のくつ	1	2
ｶﾞｲﾄﾞﾌﾞｯｸ	0.5	2
衣類Ｃ	2	5

テスト(2)

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅという５つの行事が行われる。何人かの人は２つ以上の行事に参加する予定である。参加する人が重なっている行事は，同時には行事を行えないとする。各行事を行うにはそれぞれ１日必要である。下のように参加する人が重なっているとき，全部の行事を終えるのに最低何日必要か。

［参加する人が重なっている行事］…ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＥ

表4.4　テスト正解者数（括弧内は段階内での正解率）

問題	分類	3年 実験群	3年 統制群	2年 実験群	2年 統制群
テスト(1)	A	21(95.5%)	16(61.5%)	24(96.0%)	17(58.6%)
	B	25(89.3%)	15(62.5%)	25(80.6%)	13(54.2%)
	C	15(71.4%)	14(58.3%)	15(78.9%)	6(28.6%)
	全	61(85.9%)	45(60.8%)	64(85.3%)	36(48.6%)
テスト(2)	A	20(90.9%)	5(19.2%)	25(100.0%)	8(27.6%)
	B	28(100.0%)	4(16.7%)	21(67.7%)	2(8.3%)
	C	14(66.7%)	1(4.2%)	11(57.9%)	3(14.3%)
	全	62(87.3%)	10(13.5%)	57(76.0%)	13(17.6%)

両テスト問題ともいずれの学年においても，実験群の方が統制群よりも高い正解率を示している。また，実験群の各段階の正解率を比較しても，それ程大きな差はみられない。このことは，テストと授業との間隔が短いことを考慮しても，離散数学は今までの数学の成績にそれ程大きく左右されずに，どのような生徒にも理解し得る教材と考えられる。特に，実験群のC段階の生徒の正解率が比較的高いことは注目に値する。また，実験群と統制群の正解率にかなりの差がみられるので，教材の指導効果が大きいことが認められる。したがって，これらの教材は，指導に値するとともに，ほとんどの生徒が理解できるので，難易度の面からも十分指導可能であると考えられる。

③課題理解に関する生徒の意識

課題理解に関する生徒の意識は，アンケート設問(3)，(4)からうかがえる。それらを集計すると，次の図4.1～4.4のようになった。

アンケート設問(3)，(4)

(3)　1時間目の授業はわかりましたか。

［1.わかった　2.だいたいわかった　3.あまりわからない　4.わからない］

(4)　2時間目の授業はわかりましたか。

［1.わかった　2.だいたいわかった　3.あまりわからない　4.わからない］

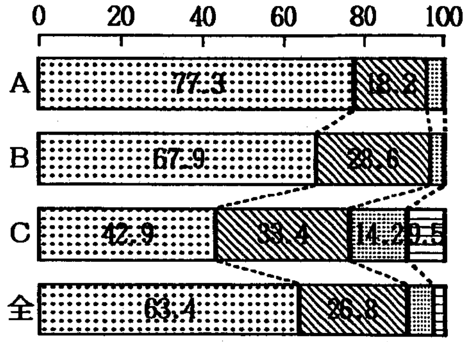


図4.1　3年1時間目の理解度(%)

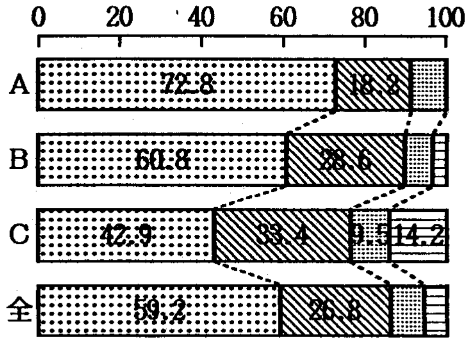


図4.2　3年2時間目の理解度(%)

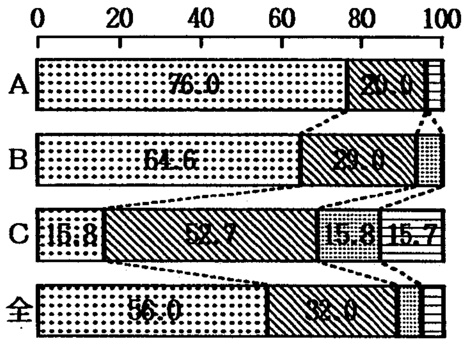


図4.3　2年1時間目の理解度(%)

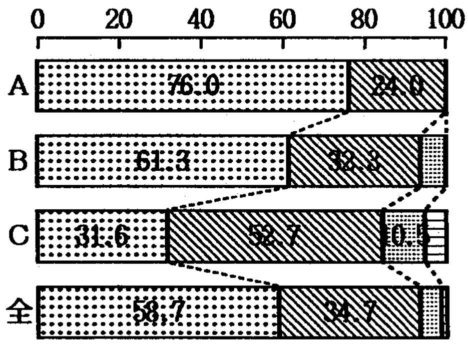
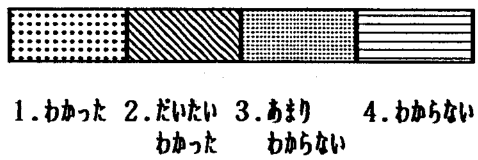


図4.4　2年2時間目の理解度(%)



両学年とも85%程度の生徒が，１，２時間目の課題がわかった，またはだいたいわかったと答えており，２，３年の生徒にとってこの課題はほぼ理解できる内容と考えられる。また，理解度に対する生徒のこうした自己認識と先に述べたテストの結果とはほとんど一致している。

(2)課題に対する興味や関心

①授業内容に対する関心度

アンケート設問(1)，(2)は，授業内容に対する生徒の関心を問うものである。結果を集計すると，次の図4.5～4.8のようになった。

アンケート設問(1)，(2)

(1)　1時間目の授業はおもしろかったですか。

　　［1.おもしろい　2.どちらかというとおもしろい　3.どちらかというとおもしろくない　4.おもしろくない］

(2)　2時間目の授業はおもしろかったですか。

　　［1.おもしろい　2.どちらかというとおもしろい　3.どちらかというとおもしろくない　4.おもしろくない］

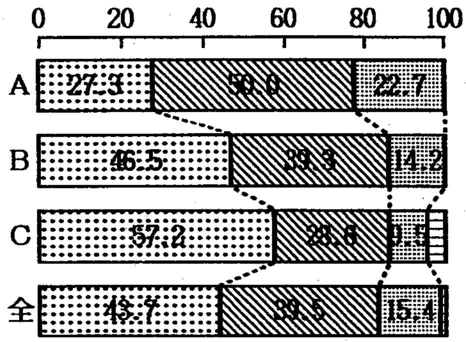


図4.5　3年1時間目の関心度(%)

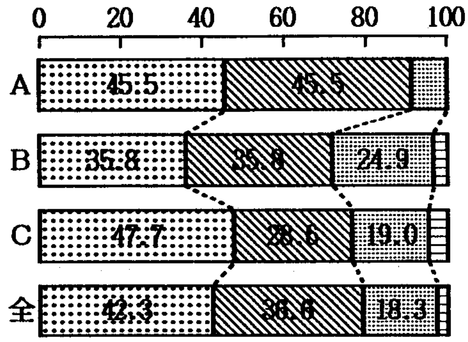


図4.6　3年2時間目の関心度(%)

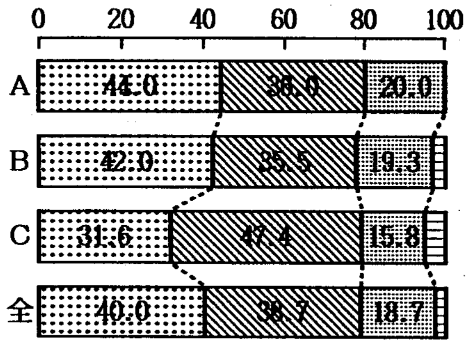


図4.7　2年1時間目の関心度(%)

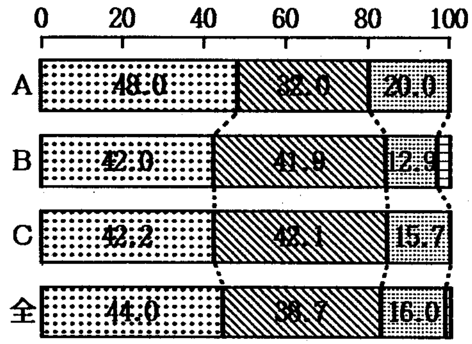
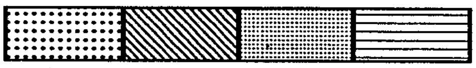


図4.8　2年2時間目の関心度(%)



1.おもしろい　2.どちらかというとおもしろい　3.どちらかというとおもしろくない　4.おもしろくない

1，2時間目とも80%程度の生徒がおもしろい，またはどちらかというとおもしろいと答えており，こうした課題に対する関心の高さがみられる。特に3年のC段階の生徒の1時間目への関心度はかなり高いもので，今まで数学に関心をもちにくかったであろうと考えられるだけに，この課題の魅力が感じられる。

②今までの数学との比較

アンケート設問(5)，(8)から離散数学と今までの数学との相違に対する生徒の意識をうかがい知ることができる。

アンケート設問(5)，(8)

(5) 今までに習った数学とくらべて，どこが違うと思いますか。

(8) 授業や問題の内容について感想を書いてください。

以下はこれらの設問に対する代表的な回答である。

- 今回の内容は，いろいろな解き方がある。（３年26名，２年25名）
- 今回の内容は，頭をつかってよく考えた。（３年20名，２年21名）
- 今回の内容は決まった計算や公式を当てはめるようなものではない。（３年16名，２年18名）
- 今回の内容は，クイズやゲームのようなものだ。(３年13名，２年1名)

生徒にとって，従来の数学は，型にはまった計算や考え方を使って解いていくものであるという印象があったようだが，この課題は数学の考え方の多様性を感じさせることができると思われる。さらに，数学をクイズのように楽しんでいる生徒の様子がみられる。このことは生徒がもつ数学のイメージを変えるような一因になると考えられる。

③離散数学の有用性に関する生徒の意識

離散数学の有用性に関する生徒の意識は，アンケート設問(6)に対する回答にみられる。それらを集計すると，次の図4.9～4.10のようになった。

アンケート設問(6)

(6) 今までに習った数学の内容とくらべて，どちらが役に立つと予想しますか。

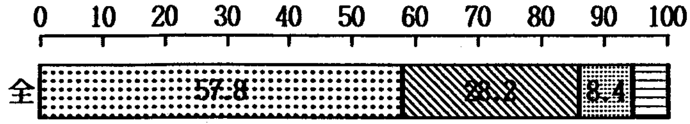


図4.9　3年離散数学の有用性に関する意識(%)

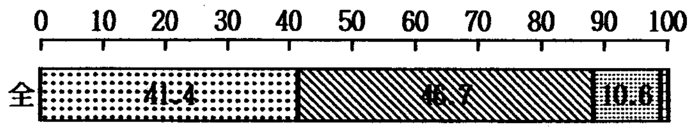
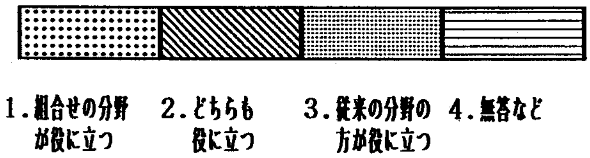


図4.10　2年離散数学の有用性に関する意識(%)



両学年とも，組合せの数学が役に立つ，またどちらも役に立つと答えた生徒は86～88%にのぼっている。この課題は数学の有用性を生徒にアピールできるものと考えられる。

④授業や問題に対する感想

授業や問題に対する代表的な感想として，次のような内容がみられた。

- それぞれの問題の答え方は自分では“これしかないっ！”と思っていたのに，様々な考え方があることにとても驚いた。数学に限らずあらゆる面からものをみて考えることは大切だと感じ，いい体験をさせてくださったと思った。（３年）
- 問題をやる前はたいぎいなぁ～とか思っていたけど，やっていくうちに楽しくなっていって，必死で考えていくようになってよかったと思う。（２年）
- 最初はいままでの数学のように問題を解いていたけど，この授業をうけて，いろいろな角度から物事を考えないといけないと思った。問題はほんとうに単純な感じがしたけど，答えがでても自分がどうやって，その答えを考えたかが難しかった。（３年）

これらの感想から分かるように，生徒はこうした課題に魅力を感じているといえよう。それは，身近で自然な問題設定，生徒の能力に応じた様々な解法，さらに洗練された考え方や解法を探求する数学の知的楽しさといったことがその要因

であろう。このように生徒を引きつけることができる課題は価値が高いといえよう。

(3)離散数学教材の「課題学習」としての指導可能性

中学校指導書数学編によると「課題学習」の指導の在り方は，《総合的課題による場合》と《問題解決的課題による場合》（[21],pp.122-123）がある。実験授業で扱った教材は，後者の《問題解決的課題による場合》である。そして，指導書には，「課題学習」で用いる課題は次のような要件を満たすべきであると述べられている。

《　ア　一人一人の生徒が様々な思考や創意工夫を行うことができ，意欲的な追求を継続することができる課題であること。

イ　一人一人の生徒がそれぞれの方法で結果を見通すことのできる課題であること。

ウ　解決のために多様な数学的な考え方が発揮される課題であること。

エ　その課題の解決だけにとどまらず，更に一般化が可能な課題であること。

オ　その評価の観点を数学的な見方や考え方とそれを活用する能力及びよさを感得する態度におくことができ，また，それにふさわしい課題であること。》（[21],p.125）

今回の実験で用いた課題について，これらの要件を満たしているかどうかを，前述の実験結果を基に考察してみたい。

まず，これらの課題は，各生徒が見通しを持って様々な解法を工夫し，さらに数学的な見方や考え方，アイデアによって洗練された解法ができるという，数学のよさや知的楽しさを生徒に感じとらせることができる。また，数学的な見方や考え方，アイデアを活用して現実にありそうな問題を解決することから生徒に数学の有用性を感じさせられたと思う。さらに，生徒の感想やアンケート，授業中の様子から，実験授業で扱ったような課題は，生徒にとって興味深いものであり積極的に学習に取り組めるものであるといえる。一方，こうした課題は，一般化が可能であるともいえる。そして，数学的な見方や考え方とそれらのよさを感じる態度なども評価できるであろう。したがって，こうした課題は上述の課題の要件を満たしているとともに，生徒の理解や関心の面からも「課題学習」の課題として指導可能であるといえる。

§2　離散数学教材の指導上の留意点

離散数学教材を扱う主な意義は，数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成が効果的に行えることである。実験授業の結果をふまえて，こうした意義を生かすような，離散数学教材の指導上の留意点について述べてみたい。

［留意点①］多様な思考活動の保障

従来の教材では，問題条件を式で表現し，その式を計算することで解を得るようなパターン化した解法がよくみられる。そして，そのような特定の問題解決過程に生徒の思考をはめ込んでしまうような設問が多い。こうしたやり方は，まさに注入主義的な指導観に立った数学教育である。しかし，離散数学の問題は，各生徒に応じた多様な解法が考えられるものが多いので，時間を十分にとって，思考活動を保障することが大切である。また，考える意欲を喚起する問題設定がしやすいので，考えていこうとする生徒の姿勢を持続させやすい。このことは，多様な思考活動を引き出す下地になると考えられる。このように，離散数学は生徒の内側から数学を構成していくような指導観に立った扱いができよう。多様な思考活動を保障する具体策として，考える意欲を喚起する問題設定を工夫し，説明を必要最小限にして問題を提示し，時間を十分とって自由に考えさせることが重要である。いくつかの小問を用意し，その流れに沿って最終的な解に導くような提示方法は適さない。

［留意点②］アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化

従来の教材は，問題解決に必要な知識や技能が多いので，まず計算技能などのアルゴリズムを実行できるようにすることが指導の中心であった。教師にとって問題の解法を生徒にある程度理解させることが精一杯で，思考力の育成にまで手がまわりにくかった。しかし，離散数学教材は問題解決において，前提となる知識や技能が少なくても生徒が考えられ，自分なりにアルゴリズムを創造するというアルゴリズム的問題解決ができるとともに，多様な解法が存在するので，アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアを意識させられる。このときに重要なことは，流れ図やプログラムなどのアルゴリズムの形式化に力点を置くことではなく，表現形式は箇条書きや口頭によるものでもよいから，アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアを特定し，生徒の理解を図ることである。なお，生徒は多様な思考活動によって，いろいろな考え方やアイデアを用いた解法を思いつくで

あろう。教師は事前の十分な準備によって，それらの本質を把握し，それらの価値を認識し，生徒に理解させるべきである。また，多様な考え方やアイデアを受け入れるようなクラスの雰囲気作りも心がけておくべきであろう。

おわりに

本研究では，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した数学カリキュラムの構成を目指して，離散数学の教材化について考察した。本研究の結果は，次のようにまとめられる。

人間の幸福や自己実現などの観点から，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した教育が重要であることを述べた。そのような教育は，主体的な人間に必要な能力や態度の育成に適した教育内容を用いて，生徒の主体的な学習活動によって実現するであろう。そして，数学の有用性，文化・教養性，陶冶性によって，数学教育がそのような教育に貢献できることを明らかにした。ところが，現在の中学校・高等学校の数学教育では，主体的な人間を育成するという教育の本質的な目的にほとんど貢献していないどころか，むしろその目的に反し，人間性を疎外しているという問題点を指摘した。それはわが国の数学教師の指導法にもある程度帰因するであろうが，その主たる原因は，現在の数学カリキュラムにあるのではないかと思われる。つまり，いままでの数学教育改善の努力によって数学カリキュラムが少しずつ改良されてきてはいるが，その本質的な部分は，明治時代の中等教育の伝統を受け継ぎ，大学進学希望者を対象とした，高度で体系的な知識や技能の積み重ねを必要とする内容を中心に構成されている。こうした数学教育を改善する方向としては，生徒の能力や興味・関心などの多様性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した数学カリキュラムを構成すべきであろう。そのためには，数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成を効果的に行えるカリキュラムを構成すべきであると述べた。

次に，離散数学の問題が，存在問題，数えあげ問題，最適化問題に分類されることを具体的な例を用いて示すとともに，離散数学の一般的な特徴を，

(1) 問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できること
(2) 能力に応じて多様な解法が考えられること
(3) 身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすいこと
(4) アルゴリズムの開発が中心的な課題であること

の４点にまとめた。そして，いままでの学習指導要領における離散数学に関する教材は，上述の特徴を十分生かした扱いになっていなかったことを指摘した。

そして，離散数学の教材化の意義を，次の５つの観点からとらえてみた。

(1) 考える意欲を喚起し，数学的な見方や考え方を育成する
(2) 柔軟な思考力を育成する

(3)　アルゴリズム的問題解決能力を育成する

(4)　数学を活用する能力や態度を育成する

(5)　学習意欲を喚起し，数学に対する積極的な態度を育成する

これらの教材化の意義は現在の数学カリキュラムを見直す視点とも考えられる。

また，具体的な教材例を提示するとともに，離散数学のカリキュラムへの導入として，平成元年改訂の学習指導要領における中学校の「課題学習」や選択教科としての「数学」や高等学校の数学Ⅰの「個数の処理」，数学Aの「数列」及び数学Bの「算法とコンピュータ」について述べた。さらに，中学校・高等学校の数学カリキュラムに，離散数学の新たな単元を設けることを提案した。特に，高等学校の文科系生徒，職業科の生徒を対象とした単元の新設について述べた。

さらに，これまで述べてきた離散数学の教材化の理論的枠組を実験的に検証するため，「課題学習」を想定した実験授業について考察した。実験授業の課題に対する生徒の理解度や関心度から，離散数学教材は指導可能であることが分かった。また，離散数学教材の指導上の留意点として，

(1)　多様な思考活動の保障

(2)　アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化

を指摘した。

本研究は，離散数学の教材化が，人間性を尊重し主体的な人間を育成するとともに，社会の変化に対応した数学カリキュラムの構成にとって意義深いことを示した。離散数学の教材化の意義は，現在の数学カリキュラムを見直す視点ととらえることもできる。しかし，本研究では，離散数学教材による数学的な思考力や数学に対する積極的な態度の育成に関する詳しい理論的な考察や，長期的な実験に基づく考察までには及んでいない。したがって，今後の課題としては，そのような考察とともに，それらをふまえた教材の開発やその指導原理を確立し，主体的な人間を育成するのに効果的なカリキュラムを実現することである。

本研究を通して，数学教育の意義を教師自身がより深く理解することの重要性を，筆者自身が再認識することができた。本論文が，数学教育をよりよくしたいと願う数学教育者に有意義な示唆を与えることができれば幸いである。

最後に，本研究を進めるにあたり，懇切丁寧なご指導を賜った崎谷眞也先生に深く感謝申し上げたい。また，論文全体にわたり，貴重な助言をいただいた福森信夫先生，國岡高宏先生をはじめ数学科の諸先生方にもお礼のことばを申し上げたい。さらに，実験授業の実施に協力していただいた先生方や生徒の皆さん，本大学院での研究の機会を与えていただいた方々に感謝の意を表したい。

引用・参考文献

[1]　片岡徳雄，村田昇編『教育学』，有信堂高文社，1982

[2]　A.H.Maslow著，小口忠彦監訳，『人間性の心理学』，産業能率短期大学出版部，1976

[3]　A.H.Maslow著，上田吉一訳，『完全なる人間－魂のめざすもの－』，誠信書房，1980

[4]　杉浦光夫，「なぜ数学を教えるか」，『シンポジウム数学　1　数学と教育』，日本評論社，1980

[5]　W.H.Cockcroft, Mathematics counts, London:Her Majesty's Stationary Office, 1982

[6]　平林一榮,広島大学教科教育学研究会編『教科教育学II－教科課程論－』，建帛社，1986

[7]　R.R.Skemp著，平林一榮監訳，『新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－』，東洋館出版社，1992

[8]　文部省，『高等学校数学指導資料　指導計画の作成と学習指導の工夫』，学校図書，1992

[9]　J.Perry，「数学の教育」，丸山哲郎訳『数学教育改革論』，明治図書出版，1976

[10]　国立教育研究所，『数学教育の国際比較－第２回国際数学教育調査最終報告－』，第一法規出版，1991

[11]　教育課程審議会，「幼稚園，小学校，中学校及び高等学校の教育課程の基準の改善について（答申）」，文部省『中等教育資料』，大日本図書，1988

[12]　J.A.Dossey, "Discrete Mathematics:The Math for Our Time"in M.J.Kenney C.R.Hirsch(Eds.) Discrete Mathematics across the Curriculum,K-12, NCTM, 1991

[13]　谷口健一，「最適化問題とその近似解法」，『数理科学』No.339, 1991

[14]　一松信・竹之内脩編，『新数学事典』，大阪書籍，1991

[15]　E.W.Hart,"Discrete Mathematics:An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum"in M.J.Kenney C.R.Hirsch(Eds.) Discrete Mathematics across the Curriculum,K-12, NCTM, 1991

[16]　S.Lipschutz著，成嶋弘監訳，『離散数学』，マグロウヒル出版，1991

[17]　S.B.Maurer, "Two Meanings of Algorithmic Mathematics", Mathematics Teacher, No.77, 1984

[18] L.Lovasz, "ALGORITHMIC MATHEMATICS:AN OLD ASPECT WITH A NEW EMPHASIS"in A.Hirst K.Hirst(Eds) Proceedings of ICMI 6, Janos Bolyai Mathematical Society, 1988

[19] 文部省,『中学校学習指導要領』,大蔵省印刷局,1969

[20] 福森信夫,『新旧学習指導要領の対比と考察　中学校数学科』,明治図書出版,1989

[21] 文部省,『中学校指導書　数学編』,大阪書籍,1989

[22] 文部省,『中学校高等学校学習指導要領　数学科編(試案)』,中部図書,1951

[23] 文部省,『高等学校学習指導要領　数学科編』,好学社,1955

[24] 文部省,『高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編』,ぎょうせい,1989

[25] 文部省,『高等学校学習指導要領』,大蔵省印刷局,1965

[26] 文部省,『高等学校学習指導要領』,大蔵省印刷局,1971

[27] 中島健三,『算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察』,金子書房,1981

[28] 片桐重男,『数学的な考え方・態度とその指導1　数学的な考え方の具体化』,明治図書出版,1988

[29] H.Freudenthal, "WHY TO TEACH MATHEMATICS SO AS TO BE USEFUL", Educational Studies in Mathematics, 1968

[30] C.L.Liu著,成嶋弘/秋山仁訳,『離散数学入門』,マグロウヒル出版,1990

資料

組合せ問題学習プリント①

年　　組　　番 氏名

問(1)　３泊４日のキャンプに行くのに，リュックに荷物を詰めたい。下の表は荷物の一覧であるが，それぞれの品目に対して，必要の度合いに応じてその価値を５点までの得点で示している。リュックには12kgしか詰めないとすると最も価値の得点が高くなる場合は何点か。

［荷物一覧表］（重さの単位　kg）

品　目	重さ	価値
衣類Ａ	1	5
ラジオ	0.5	2
衣類Ｂ	1	4
洗面用具	0.5	3
衣類Ｃ	1	3
テント	2	5
食料	2.5	5
調理用具	1.5	4
カメラ	0.5	2
寝袋	2	5
雨具	0.5	3

［学習内容メモ欄］

組合せ問題学習プリント②

年　組　番 氏名

問(2)　ある学校の体育祭で，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ という６つの種目が行われる。何人かの生徒は２つ以上の種目に出場する予定である。各種目の説明会を行うのにそれぞれ１時間かかる。出場する生徒が重なっている種目は，同時には説明会を行えないとする。下のような種目で生徒が重なっているとき，説明会の予定を組むとしたら，説明会を全部行うのに最低何時間かかるか。

［生徒が重なっている種目］…ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＤ，ＣとＥ，ＣとＦ

［学習内容メモ欄］

組合せ問題テスト

年　組　番 氏名

(1)　旅行にいくのにカバンに荷物を詰めたい。下の表は荷物の一覧であるが，それぞれの品目に対して，必要の度合いに応じてその価値を５点までの得点で示している。カバンには13kgしか詰めないとすると，最も価値の得点が高くなる場合は何点か。

［荷物一覧表］（重さの単位　kg）

品　目	重さ	価値
衣類Ａ	2.5	5
洗面用具等	2	5
水筒	1	2
ﾋﾞﾃﾞｵｶﾒﾗのｾｯﾄ	3	5
雨具	0.5	3
衣類Ｂ	2.5	5
予備のくつ	1	2
ｶﾞｲﾄﾞﾌﾞｯｸ	0.5	2
衣類Ｃ	2	5

(2)　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅという５つの行事が行われる。何人かの人は２つ以上の行事に参加する予定である。参加する人が重なっている行事は，同時には行事を行えないとする。各行事を行うにはそれぞれ１日必要である。下のように参加する人が重なっているとき，全部の行事を終えるのに最低何日必要か。

［参加する人が重なっている行事］…ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＥ

アンケート用紙

年　　組　　番　氏名

(1)　1時間目の授業はおもしろかったですか。

[1.おもしろい　2.どちらかというとおもしろい　3.どちらかというとおもしろくない　4.おもしろくない]

(2)　2時間目の授業はおもしろかったですか。

[1.おもしろい　2.どちらかというとおもしろい　3.どちらかというとおもしろくない　4.おもしろくない]

(3)　1時間目の授業はわかりましたか。

[1.わかった　2.だいたいわかった　3.あまりわからない　4.わからない]

(4)　2時間目の授業はわかりましたか。

[1.わかった　2.だいたいわかった　3.あまりわからない　4.わからない]

(5)　今までに習った数学とくらべて，どこが違うと思いますか。

(6)　今までに習った数学の内容とくらべて，どちらが役に立つと予想しますか。

(7)　数学の学習に何を期待しますか。

(8)　授業や問題の内容について感想を書いてください。