平成９年度

学位論文

一つの問題に対する多様な解法を数学学習へ活用することの研究

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科

教科・領域教育専攻　自然系コース

Ｍ９６５６２Ｇ　廣田耕一郎

はじめに

「数学は、問題解決そのものである」とよくいわれる。他の教科と違い、問題を解いてこそ数学なのである。しかし、数学は、新しい公式が出てきたらそれを覚え、例題の解法を覚え、練習問題を解けるようにするといった学習を繰り返すような単純な教科ではない。ところが、実際には、そのような学習形態をとっている生徒は少なくない。また、教師の指導もそのような形態になっていることが多い。このような現状が、数学嫌いやスローラーナーの増大の要因となっているように思える。

また、高校での数学の授業は、大学受験を見据えたものとなっている場合が多い。受験をしない生徒や受験科目に数学がない生徒は、何の目的もなく授業を受け、定期考査で点数をとるためだけに学習しているようにも思える。

筆者が、教職２年目の頃、次のようなことがあった。高校１年生の授業において、ある問題の別解を説明していたところ、生徒達の反応がほとんどないのである。一所懸命勉強して成績を上げようとしている真面目な生徒だけが、必死にノートをとり、それ以外の生徒はノートもとらず別のことでも考えているように思えた。また、「この問題は二通りのやり方があるから二通りの解答を作ってみなさい」と指示して問題を解かせたときは、一通りの方法で解いただけで別の方法で解こうとしない生徒が多くいたこともあった。後日、ある成績上位の生徒に、なぜ別解を大事にしないのか聞いたところ、その生徒の答えは、「とにかく問題が解ければいいんだから、別解なんて知らなくてよい」ということであった。また、成績下位の生徒に同じことを聞いたところ、その生徒の答えは、「一つの解答を覚えるのさえ大変なのに、それ以上の解答を覚えられない」ということであった。このように、生徒には、別解、あるいは多様な解法を考えることは無駄なことと捉えられているようである。しかし、その頃の筆者は、なぜ別解、あるいは多様な解法を考えることが重要なのか、うまく生徒達に言い聞かせることができなかった。あるいは、筆者も、一通りの方法で解ければよいと考えていたのかもしれない。

勿論、「多様な解法を考えること」は意義のあることである。それでは、「なぜ重要なのか」、「問題解決とどのような関連があるのか」、「生徒は多様な解法を考えることができるのか」について考察し、「多様な解法指導」への示唆を与えたい、ということが本研究の出発点である。

【目　次】

はじめに

第１章　本研究の目的と先行研究 ---------- 1
　第１節　本研究の目的 ---------- 1
　第２節　本研究に関する先行研究 ---------- 3
　　１．「多様な解法を考えること」が重視される理由 ---------- 3
　　２．多様な解法の分類 ---------- 6

第２章　問題解決学習における「多様な解法を考えること」 ---------- 10
　第１節　問題解決と多様な解決 ---------- 10
　　１．問題解決について ---------- 10
　　２．問題解決と多様な解決 ---------- 11
　第２節　問題解決能力と多様な解法を考えること ---------- 15
　　１．問題解決能力について ---------- 15
　　２．問題解決能力と多様な解決 ---------- 17

第３章　「多様な解法を考えること」に関する生徒の実態 ---------- 21
　第１節　Santos-Trigo Ｍ.の実態調査 ---------- 21
　　１．調査の概要 ---------- 21
　　２．調査問題と可能な解法 ---------- 21
　　３．調査結果と考察 ---------- 22
　　４．まとめ ---------- 23
　第２節　日本の高校生の実態調査 ---------- 25
　　１．調査の概要 ---------- 25
　　２．結果と考察 ---------- 25

第４章　「多様な解法」指導への示唆 ---------- 41
　第１節　授業での取り組み ---------- 41
　　１．多様な解法を授業で取り扱う意義 ---------- 41
　　２．多様な解法を授業で取り扱う場合の注意 ---------- 43
　第２節　「多様な解法」の評価について ---------- 46
　　１．Ｍ方式のテスト ---------- 46

２．個人の学習状態を見る評価 ---------- 47

おわりに ---------- 52

引用・参考文献 ---------- 55

第１章　本研究の目的と先行研究

第１節　本研究の目的

1980年に、ＮＣＴＭ（全米数学教師の会）は、”An Agenda For Action”を刊行し、「問題解決は、1980年代の学校数学の焦点にならなければならない」と指摘した。それ以来、問題解決が盛んに採り上げられるようになり、現在も問題解決学習が重要視されている。しかし、高等学校の現場では教師による講義形式の授業が多く、こうした流れに逆行しているようにも思える。また、多くの生徒の学習形態は、公式を必死に覚え、それを問題に適用するための練習を行うというものである。これでは、生徒自身で数学を創っていくという数学学習の面白さを味わうこともできないし、数学的に考える力も育成されない。

ところで、数学の問題は、一つの解法だけではなく多様な解法をもつものがほとんどである。そこで、多様な解法を考える力は、問題解決能力の重要な要素の一つとして考えられる。この多様な解決に関して、クルーリックとルドニック(1980）は、次のように述べている。

《４つの問題それぞれを一つの方法で解決することよりも、一つの問題を４つの方法で解決することの方が、問題解決過程としてより価値が大きい。》（ｐ．32）

また、古藤（1986）は、次のように述べている。

《子供たちに一つの問題をいろいろな方法で考えさせる場面を導入し、その重要性を強調することは、その問題の理解をいっそう深めるだけでなく、更に、子供たちが自分自身の力で数学を創っていく（do mathematics）という、数学を学習する真の醍醐味を感得させることができよう。》（ｐ．２）

このように、多様な解法を考えることの重要性を指摘している研究がいくつかある。

現在、問題とされている「数学嫌い」、「理系離れ」等の原因の一つに、数学の画一化した指導が挙げられよう。また、数学の問題を解くことは、一つの方法で一つの答えを導くものと思われ、そこにも「数学嫌い」の原因があると思われる。しかし、多様な解法を考えさせることによって、古藤の述べるような「do mathematics」を感得させることができ、個に応じた指導も可能になるのではない

だろうか。

そこで、本研究では、主に高校数学を対象にした問題解決学習の一つの要素として、「多様な解法を考えること」に注目することとした。そして、生徒は多様な解法を考える力をどの程度もっているかという生徒の実態を調査し、数学学習に「多様な解法」を活用するための示唆を与えることを目的とする。

第２節　本研究に関する先行研究

１．「多様な解法を考えること」が重視される理由

前節において、「多様な解法を考えること」が重要であると述べた。それでは、なぜ「多様な解法を考えること」が重要なのか、その理由を明確にしておかなければならない。なぜなら、その理由を教師、生徒それぞれが理解しておかなければ、「多様な解法を考える」授業、あるいは学習があまり意味のないものになると思われるからである。

能田（1983）は、次のように述べている。

《一人の子どもにはその子どもなりの存在価値がある。他の子どもと代えることのできない唯一の価値がある。算数や数学の教科ができなくても、また、行動面において、他の子どもより少々遅れることがあっても、その子どもは、その子どもなりに精一杯生きており、また、学習しているだろう。

学校教育で、大切なことは、一人ひとりの子どもが全精力で自己実現できる空間 ── そこでは、一人ひとりの子どもが各自の目的を持ち、自由に行動でき、しかも、充実した気持ちを持つことができる ── を保証することではないだろうか。》（p．53）

現在行われている約 40 人の生徒に対する一斉授業では、全ての生徒の達成状況を詳しく把握する事は難しい。テストの点数で、この生徒はできる、この生徒はできないと判断していることが多い。できない生徒に対しての指導は、定期考査前の（テストで点数をとらせるための）補習という形ですまされているという状況が少なくない。普段の授業で、こうした能力や意欲、興味等の異なる全ての生徒を教師の期待する水準に到達させることは非常に困難なことである。その結果、スローラーナーを生み出し、数学嫌い、理系離れを増長させていると思われる。

問題演習等で、教師の解説と違う方法で解いている生徒の中には、自分の解答を消し、教師の示す解法だけをノートに残している生徒もいる。そのような生徒は、教師が示す解法、あるいは教科書に書かれている解法だけが正しいと信じ、自分の考えは捨ててしまうのである。生徒それぞれが考えた多様な解法、あるいは生徒個人に考えさせた多様な解法をそれぞれ吟味し、それぞれの解法の価値を判断させていくことによって、能田の言う、生徒個人個人の存在価値を尊重し、彼らが自己実現できる空間を保証していくことができるのではないだろうか。

また、古藤（1986）は、多様な考えが重視される理由として次の４点を挙げて

いる。

a）数学の本質から
b）画一化への反省
c）創造力の育成
d）練り合いの場の構成

それぞれについて考察してみる。

a）について

数学の問題について多くの生徒は、一つの正答と、その正答を導くための一つの解法しかないと考えている。そのような思い込みが、数学が融通のきかない不自由な学問と捉えられる原因と考えられる。しかし、古藤は、数学的な思考の本質はその自由性にあると述べている。前節で引用したクルーリックとルドニックの言葉に見られるように、一つの問題を一つの解法だけに限定せずに、多くの方法で解くことが価値あることとされている。

b）について

高校でしばしば行われている一斉授業では、全ての生徒に同じ学習内容を同じレベルまで教えようとする傾向が見られる。このような状況が、画一的な授業、指導を生みだしていると考えられる。しかし、前述したように生徒一人ひとりは、異なる能力や意欲、興味をもっており、画一化した授業や指導は、生徒の個性の伸張を妨げている。多様な解法を考えさせることによって、生徒は、それぞれの学習段階や能力に応じて考えることができ、自分の個性を生かすことができる。そして、古藤（1986）も、次のように述べている。

《子供に多様な解決法を要求する目的は、前述のように、いろいろな考えを発表させることによって、そこで当面した数学的な概念や法則、更には、その考え方などを理解させようという目的とともに、一人ひとりの子どもの個性の尊重というねらいも含まれていると考えられる。》（p．2）

c）について

現代の我が国は、科学の発達とともにコンピュータ社会となり、また、次々と新しいものを取り入れ、世界をリードしていこうとしている。このような現代社会のニーズに応じて、既存の知識や技能の習得だけでなく、新しい時代を創造する能力が必要とされてきている。多様な解法を考えさせることが、こうした創造力を育成する一つの要因となろう。

これまでの数学の授業は、問題を解くための技能等を教師から生徒へ伝達するといった形態であったように思える。言い換えると、詰め込み教育のような形態であったといえる。そこで、多様な解法を考えさせ、生徒それぞれの学習段階や能力に応じた解法を尊重し、また、一つの問題をいろいろな視点からアプローチさせることによって、生徒それぞれの創造力を養う学習形態が形成されるのではないだろうか。つまり、多様な解法を重視する理由の一つに、このような創造力の育成が挙げられる。

ｄ）について

多様な解法を考える授業の一つに、生徒個人個人が考えた解法を発表させるという授業形態が考えられる。数学の問題や解答は、単純な数字、記号、図形で表されることが多く、解決に至る筋道は論理的である。したがって、高校生ともなると、自分の解法、または考え方を他人に伝達することはそう難しいことではないと思われる。つまり、多様な解法を考える授業は、生徒が相互にいろいろな意見を発表し、練り合うための効果的な場を提供する。古藤（1995）は、こうした練り合いの場を構成するねらいを次のように述べている。

《…当面した問題の解決過程を通して基礎的・基本的な知識・技能や数学的な考え方をいっそう確実なものにすることとともに、クラス全員の意欲的な学習参加を通して実現することが期待される一人一人の子供の数学的な表現能力の育成と、それぞれの個性を伸張する点におかれている…》（ｐ．112）

以上のことは、多様な解法を考えることの生徒側の利点であるが、教師側からの利点として、村井（1995）は、Ｍ方式のテスト（考えついた解法をすべて答案に書かせるテスト）を行うことによって次のようなことがわかると述べている（このことは第４章で詳しく述べる）。

（Ａ）生徒の学習レベルがどの段階にあるか

（Ｂ）生徒の問題解決能力、数学的センス

例えば、ある生徒が、高校で学習したことを使って解決できる問題を中学校で学習した方法でしか解決できないならば、その生徒のレベルは中学校レベルであるということである。また、通常のテスト（一つの解法を要求するようなテスト）の点数だけでは、その生徒の問題解決能力を測れるとはいえない。なぜなら、通常のテストは、教科書の解き方を暗記するだけで解けるような問題や、計算能力を重視した問題等が含まれることが多いからである。

このように、教師側からの利点という面からも、「多様な解法を考えること」が重要視される理由はあるのである。

２．多様な解法の分類

教師は、多様な解法を生徒に考えさせ、彼らが考えたそれぞれの解法を解説していくだけでは、多様な解法を数学学習に生かすという点では物足りなさを感じる。生徒が考えたそれぞれの解法をただ説明するだけではなく、いくつかの解法は一つにまとめることができるのか、それぞれの解法に優劣をつけることができるのか等を生徒に考えさせることによって、更によい学習指導になるのではないだろうか。このことについて、古藤（1986）は、次のように述べている。

《算数・数学科の学習指導において、一人ひとりの子供の個性をみとり、それを伸張させるためには、まず、問題解決などの際における子供たちの多様な考えの質的な分類をする必要がある。》（ｐ．６）

そして、次のように分類することが、指導上有益であると述べている。

１．<u>独立的な多様性</u>（１） 作問やオープンな問題の指導の際にみられるいろいろな考え。 ２．<u>独立的な多様性</u>（２） 問題解決の過程におけるそれぞれの考えが数学的な考えとして意味のあるとき。 ３．<u>序列化可能な多様性</u> 数学的な見地からそれぞれの考えに優劣をつけることができるとき。 ４．<u>統合化可能な多様性</u> 発表されたいろいろな考えを一つの考えにまとめることができるとき。 ５．<u>構造化可能な多様性</u> いろいろな考えをいくつかのグループにまとめることができ、さらに、それらの関連を構造化できるとき。

ここでは、これら５点を、以下の理由から、３点に統合する。まず、「独立的な多様性（１）」であるが、高等学校での指導の際には、作問やオープンな問題はほとんど取り扱うことがないので、「独立的な多様性（２）」と統合して、「独立的な多様性」とする。「統合化可能な多様性」は「構造化可能な多様性」に含まれると考えられるので、これら２つを統合して「構造化可能な多様性」とする。

以上のことより、本研究では、解法の多様性を次の３つに分類することとする。

①独立的な多様性 ②序列化可能な多様性 ③構造化可能な多様性

（１）独立的な多様性

古藤は、子供たちの発表する考えがお互いに無関連ではあるが、それぞれの考えが数学的に価値をもっているとき、「独立的な多様性」として分類している。

次のような例で考えてみる。

問題　座標平面上に、３点Ａ（２，１）、Ｂ（５，２）、Ｃ（６，６）をとる。 もう１点Ｄをとり、四角形ＡＢＣＤが平行四辺形になるようにしたい。 点Ｄの座標を求めよ。

この問題に対する生徒の考えは、主に、次のようなものが予想される。

解法１　ベクトルを使う解法
解法２　２点間の距離を使う解法
解法３　直線の方程式を使う解法
（※詳しい解答は、第３章(pp.28-29)で述べる。）

以上の３つの解法は、それぞれに数学的価値のある解法であり、優劣をつけることはできない。また、構造的に同じような解法も含まれていないため、「独立的な多様性」と分類される。この分類について、古藤（1986）は、次のように述べている。

《教師は、それぞれの考え方のよさをほめて、他の子供たちに、それらの考えの優れている点を納得させることが指導上のてだてといえよう。》（ｐ．７）

（２）序列化可能な多様性

古藤は、問題解決の場面において子どもたちが発表するいろいろな考えは、数学的に、一番よいもの、次によい考え、…というように、その価値の順序で序列化することができる場合があるとして、その場合を「序列化可能な多様性」として分類している。

この分類に関しては、能田（1983）の例で考えてみる。

問題　$\frac{2}{3}$と$\frac{3}{4}$とはどちらが大きいだろうか。

この問題の予想される解法は、次の通りである。

解法１　それぞれを１から引いた差を比較する解法
解法２　それぞれの分数を小数に直して比較する解法
解法３　通分して比較する解法
（※詳しい解答は、第４章(p.45)で述べる。）

勿論、これらの解法は、間違いでなくすべて正しい考え方である。しかしそれぞれの解法を詳しくみると、解法１は、偶然、１との差が単位分数になっており、一般性がある解法ではない。解法２は、小数に直すことで大小をはっきりとつかむことができ、また一般性もある解法である。ただし、この問題の場合は分母、分子とも１桁の数で、割り算が簡単にできるが、分母、分子がもっと大きい数になると計算間違いを起こしやすくなるというおそれもある。解法３は、分数の加減の計算の基礎となっているものであるから、この問題を分数の加減の学習の前に扱う場合には、一番重要な解法とみることができよう。

それぞれの解法は、子ども達が考えた貴重なものであるから、それぞれのアイデアを評価することが重要である。しかし、一般性のない解法よりも後の学習や将来への発展につながる解法をしっかりと理解させておかなければならない。

（３）構造化可能な多様性

古藤は、子ども達の多様な解法は、ある観点からいくつかのグループにまとめ

ることができ、全体として構造化することができる場合があるとして、その場合を「構造化可能な多様性」として分類している。
次のような例で考えてみる。

問題　次の関数のグラフとx軸の共有点の個数を求めよ。 $y=x^2+3x+1$

この問題は、主に次のような解法が考えられる。

解法１　判別式の値を計算する解法
解法２　実際に方程式の解を求める解法
解法３　微分法を用いてをグラフ描く解法
解法４　式変形してグラフを描く解法
（※詳しい解答は、第４章(p.42)で述べる。）

これらの解法は、生徒にとっては本質的に異なる解法と捉えられているかもしれない。しかし、x軸との共有点は方程式の解の個数であるから、解法１と解法２は、構造的に同じ解法である。したがって、解法１と解法２は一つのグループにまとめることができる。また、解法３と解法４は、グラフの概形を描くという構造的には同じ解法である。ただ、グラフの概形を描く際に微分法を使うか式変形を使うかの違いがあるだけである。したがって、解法３と解法４も一つのグループにまとめることができる。
生徒自身でいろいろな解法をこのように構造化できるようにする指導も大切なことと考えられる。

第２章　問題解決学習における「多様な解法を考えること」

第１節　問題解決と多様な解決

「多様な解法を考えること」は、問題解決学習時に行われるものである。したがって、「多様な解法を考えること」は、問題解決学習を構成する一つの要素といえる。そこで、本節では、問題解決と多様な解決との関連を考察する。そのために、まず、問題解決についてまとめておく。

１．問題解決について

（１）問題について

クルーリックとルドニック（1985）は、問題は次の３つの基準を満足するものでなければならないとしている。

1	是認：	その個人がその問題を認める。次のような種々の理由によって個人的なかかわりがある。つまり、内的な動機づけ、外的な動機づけ［相手、親及び（または）教師の圧力］あるいは、単に問題を解決することの喜びを経験したいという願望である。
2	妨害：	その個人の解決における最初の試みが実を結ばない。自分の習慣的な反応や攻略のパターンが役立たない。
3	探求：	１で確認された個人的なかかわりが、新しい攻略の方法を探求するようその個人に強いる。

（p. 10）

これらの基準に従えば、解法がルーチン化し、それを暗記しておれば解けるようなものは「問題」とはいえない。また、同じ問題であっても、個人によって「問題」であったり、「問題」でなかったりする。例えば、「７＋８」のような足し算は、足し算を習い始めた小学校低学年の子どもにとっては「問題」であるが、我々にとっては、もはや「問題」ではない。逆に、微分積分を全く知らない小学

生や中学生は、おそらく、微分積分の問題を解こうという意識をもたないであろうから、これも、小学生や中学生にとっては、「問題」とはいえない。

（２）問題解決について

杉山（1985a）は、

《問題解決とは、「問われたことに答える」というような受け身的なものではなく、もっと能動的なものである。》（p．24）

と述べている。これは、クルーリックとルドニックが述べた問題のもつ３つの条件を考えると容易に理解できる。

クルーリックとルドニックは、上述した問題のもつ条件をふまえて、問題解決を次のように定義している。

《問題解決は、一つのプロセスである。それは手段である。つまり、不慣れな問題状況が要求しているものを満足させるために、個人が以前に獲得した知識や技能や理解を用いるための手段である。》（p．12）

また、三塚（1986）は、問題解決を、

《既知の知識や固定化された行動パターン、アルゴリズムによっては、解決できない問題事態に対して、問題意識をもち、主体的に、問題解決の手法や手段、ストラテジーによって、条件の内容を解釈したり、手法を適用したり、新しい内容に再構成し、数学的アイデアや数学的能力により解決を図る過程である》（p．35）

と定義している。

これらの問題解決の定義から考えると、全く「問題を解決するための知識」の構成がなされていない状況と、完全に「問題を解決するための知識」が構成されている状況の中間で問題解決活動が行われるといえる。

２．問題解決と多様な解決

問題解決指導の必須条件に、「よい問題を与えること」があげられることが多い。クルーリックとルドニック（1985）は、その「よい問題」が備えるべき特性の一つに「問題そのものが多様な解決に適している」という項目を挙げている。

これは、「多様な解決」が問題解決において、重要な価値をもっていることを意味している。

例えば、次の問題を考えてみる。

問題　$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}$ の値を求めよ。(Schoenfeld、1992)

この問題の主な解法は、次の通りである。

解法1

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i!}-\frac{1}{(i+1)!}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i!}-\frac{1}{(i+1)!}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(i+1)!}$$

$$=\frac{(i+1)!-1}{(i+1)!}$$

解法2

与式の値をS_nとすると

$S_1=\frac{1}{2}$、$S_2=\frac{5}{6}$、$S_3=\frac{23}{24}$、$S_4=\frac{119}{120}$、 .....

これらから、$S_n=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ …①と予想できる

①を数学的帰納法で証明する

1) $n=1$ のとき

$\sum_{i=1}^{1}\frac{i}{(i+1)!}=\frac{1}{2}$、$S_1=\frac{1}{2}$

よって、成り立つ

2）n＝kのとき

$\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{(i+1)!}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$ が成り立つとする

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

よって、n＝k＋1のときも成り立つ

ゆえに、$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

この問題は、生徒にとって、やや難易度の高い問題であろう。しかし、Σの意味や階乗の計算、数学的帰納法等が既習の生徒にとっては、解法のきっかけさえつかめば自力解決可能な問題である。

これら二つの解法は、それぞれに数学的に価値のある解法であり、優劣をつけることはできない。おそらく、通常のテスト（一つの問題に対して一つの解法で答える）では、簡単に短時間で解答できる解法１が望ましいと思われる。解法１のキーポイントは、一般項である $\frac{i}{(i+1)!}$ を部分分数に分けることである。分数式を部分分数に分けることは、普段の授業で取り扱うが、「！」の記号がついた分数式を部分分数に分ける練習はほとんど行っていないと思われる。したがって、$\frac{i}{(i+1)!}$ が部分分数に分けられることに気づかない生徒、または、気づいても部分分数に分けることができない生徒が多いと思われる。したがって、そのような生徒は、他の解法を考える必要がある。このような場合、多様な解法を考える力が備わっていない生徒は、自力解決を諦めるしかない。問題解決学習において、自力解決が重要であるとよくいわれるが、自力解決を諦めて教師の解答を期待するということは問題解決学習になっていないことを意味する。

そのようなとき、多様な解法を考える力を備えていれば、生徒は、試行錯誤的に問題を解こうとするであろう。試行錯誤的に考えようとするならば、n＝1から、順に代入していくと思われる。これがパターンを探る方略となり、結果を予想することができるであろう。後は、数学的帰納法で証明すればよいのである。

逆に、解法２を最初に考える生徒もいるであろう。そのような生徒には、もっと簡単に解ける方法はないか考えさせ、簡単に短時間で解くことのできる解法１

を見つけさせることも重要である。

数列の分野に関して、「Σ」が出現してからわからなくなった、嫌いになったという生徒の声を聞くことが多い。また、「！」の記号がついた問題も、生徒は複雑な計算を伴っていると思い込み、敬遠される傾向がある。つまり、この問題は、生徒の苦手とする「Σ」、「！」の二つの記号が含まれており、問題を見ただけで諦めてしまう生徒もいると思われる。つまり、問題解決学習が成り立たない可能性がある。

問題解決学習において、注意しなければならない点として、問題が生徒にとって興味深いものでなければならない、生徒の自力解決でなければならない等が挙げられると思われる。しかし、ただ一つの解法だけを重視し、その解法で正答をを得た時点で次の問題に移ったり、次の学習内容に移ったりするならば、「この解法は、自分には無理だ」というように生徒の興味が薄れたり、他の解法ならば自力解決が可能であったとしても自力解決できないままに終わってしまうことがある。しかし、正答まで到達しなくとも、多様な解法を考えることによって、また、多様な解法を考えられるような訓練をしておくことによって、生徒個人個人の学習段階や能力に応じて、興味深く感じる内容を見つけることができたり（例えば、解法１は意味がわからず解こうという意欲が湧かない、解法２は意味がわかり解こうという意欲が湧く）、自力解決できる方法を見つけることができたりすることが考えられる。つまり、多様な解法が考えられるということは、問題解決学習を成功させる一つの要因となり得るのである。

第２節　問題解決能力と多様な解法を考えること

１．問題解決能力について

問題解決が、単に「問われたことに答える」ということではなかったように、問題解決能力も単に「問題を解決する能力」では語れないようである。

杉山（1985b）は、問題解決能力を支えるものとして以下のものを挙げている。

問題の解決ができるために必要な数学的知識・技能

問題解決に必要な考え方 ―― その問題に固有な解決の方法 / 広く問題解決一般に通じる考え方

彼は、まず、問題解決能力は大きく二つの要素に分けられるとして、その一つに「問題の解決ができるために必要な数学的知識・技能」を挙げている。これは、学習した知識・技能が身に付いているということだけではなく、それらが問題場面に応じて使えるということである。高校生にもなると、様々な知識や技能を習得しているものと思われる。したがって、それらを問題解決に活用することができるかどうかということが重要となる。

問題解決能力を支えているもう一つのものに、「問題解決に必要な考え方」を挙げている。そして、これは、更に二つに分けられるとしている。

その一つは、「その問題に固有な解決方法」である。例えば、次のような問題でそれを考えてみる。

問題　$x=1+\sqrt{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

$$x^3-3x^2+5$$

この問題の一つの解法は、次のようなものである。

解答

$$x-1=\sqrt{2}$$
$$(x-1)^2=(\sqrt{2})^2$$
$$x^2-2x+1=2$$
$$x^2-2x-1=0$$
$$\begin{aligned} x^3-3x^2+5 &= (x^2-2x-1)(x-1)-x+4 \\ &= -x+4 \\ &= -(1+\sqrt{2})+4 \\ &= 3-\sqrt{2} \end{aligned}$$

この問題を解決するには、与えられた値を、直接、求める式に代入するという方法もある。この問題の場合は、求める式が3次式であるから、直接代入してもさほど困難ではないかもしれないが、求める式が、4次式、5次式となると計算が困難になるし、計算間違いも起こりやすい。しかし、上記の解法は、スマートで、計算間違いも起こりにくい。したがって、この解法は、この問題に固有の解法であるといえよう（与えられた値が虚数であることもある）。つまり、この解法を獲得しているならば、より短時間に、より確実に解答できるのである。

また、他にもこのような「その問題に固有な解法」は数多くあると思われる。したがって、それらを獲得しているかしていないかで、問題解決能力は大きな差が出てくると思われる。

問題解決に必要な考え方のもう一つは、「広く問題解決一般に通じる考え方」である。これは、いわゆる方略（ストラテジー）と呼ばれるものである。この方略には、大きく分けると、次の二つの方略があると思われる。

①総合的方略：解決の手順・構想を示す方略で、問題を解くためにたてられた主体的計画をいう。代表的なものに、ポリアの4段階がある。

②一般的方略：総合的方略を実行に移すときに必要な方略で、帰納的な考え、類推的な考え、一般化する考え等である。

杉山（1985a）は、問題解決能力を考える場合、問題解決を一つのプロセスと考え、そのプロセスに従って考えるのも一つの分析の仕方と考えている。その問題解決のプロセスは、総合的方略にしたがって実行される。したがって、以下では、問題解決能力に及ぼす多様な解決の影響を総合的方略にしたがって考えていくことにする。

２．問題解決能力と多様な解決

ここでは、総合的方略に従って問題解決能力と多様な解決の関連を考察していくが、そのためには、それがどのような段階から構成されるのかを明らかにしなければならない。何人かの研究者がその段階を定義しているが、ここでは、ポリア（1954）の４段階に従って考えていくこととする。ポリアの４段階は次のようなものである。

１．問題を理解すること
２．計画を立てること
３．計画を実行すること
４．ふり返ってみること

「３．計画を実行すること」については、計算や技能といったものが重要視される段階で、多様な解決との関連は薄いと思われるので、以下、

（１）問題を理解すること

（２）計画を立てること

（３）ふり返ってみること

の３段階について考察していくこととする。

（１）問題を理解すること

この段階は、問題について、様々な視点からアプローチし、何がわかっているのか、何を求めるのか、条件は何なのか等を分析することが重要である。ポリア（1954）は、この段階について次のように述べている。

《理解しない問題に答えるということはばからしいことである。自分の望まない目的に対して働くということはつらいことである。》（ｐ．10）

問題を解決するということは、この段階から始まるのであって、問題を理解しないことは、生徒は問題に対して何の目的ももたないことになり、退屈で面白くない学習を意味するものである。また、一つだけの視点からアプローチして問題を理解しようとしても、十分な問題の理解まで達しないこともあるであろうし、問題の理解に行き詰まってしまうこともあるであろう。したがって、考えられる様

々な視点からアプローチして問題を理解することが重要であり、アプローチの仕方によっては解法が異なることもある。例えば、「二次関数のグラフとｘ軸との共有点の個数を求めよ」という問題において、「二次関数のグラフの問題である」と理解したならば、式変形や微分を用いてグラフの概形を描いて解くであろうし、「方程式の解の個数を求める問題である」と理解したならば、判別式を用いて解いたり、実際に方程式を解いたりするであろう。

（２）計画を立てること

次に、問題の解決のために計画を立てなければならない。この段階は、解答を得るためには、どのような知識、技能を用いればよいのかを判断する段階である。多様な解法を考えることができない生徒は、教科書の例題に出てくる方法しか考えられないことが多いであろう。しかし、そのような方法では解答できない場合も多くあるのである。

次の問題（ページ問題）を例に挙げてみる。

問題	一冊の本が開かれています。開かれている右のページ数と左のページ数をかけると、その積が、3,192 になりました。何ページ目が開かれていますか。(ページ問題)

生徒は、まず、この問題を「問題を理解する」の段階で、「積が 3,192 となるような連続数の積を見つけること」と理解するであろう。

問題が理解できれば、次に、連続数の値を決めるにはどのようにすればよいのかの計画をたてなければならない。このページ問題に似た問題として、積の値は 3,192 という大きな数でなく、もっと簡単な、方程式をたてるとすぐに因数分解できるような数値が与えられた問題がよく教科書に見られる。つまり、二次方程式の利用の典型的な例題である。したがって、二次方程式をたてればすぐ解けるだろうと考え、とりあえず「$x(x+1)=3192$」と方程式をたてる生徒が多いと思われる。しかし、このページ問題は、簡単に因数分解できるものではなく、また解の公式を用いても簡単に計算できるものではない。ここで、多様な考え方ができない生徒の中には、「$x(x+1)=3192$」という方程式をたてたところで諦めてしまう者がいると思われる。それに対して、多様な考え方のできる生徒は、その他に、試行錯誤で解けるかもしれない、素因数分解してみてはどうだろう等の計画が浮かんでくるはずである。

このような多様な解法を考えることができるならば、この問題の主な計画として次の３通りが考えられる。

①方程式をたて、それを解く

②試行錯誤によって、未知数である連続数を探る

③素因数分解を用いて、3,192 を２数の積に分解する

そこで、生徒は、この計画の中から簡単に求められそうな、あるいは、自分の得意な計画を選べばよいのである。もし、選んだ計画を実行して失敗したならば、他の計画に戻って実行し直せばよいのである。

（３）ふり返ってみること

多くの生徒は、解答が得られると、安心して次の問題に移る。このような生徒は、「ふり返ってみる」という大切なことを怠っているといえる。「ふり返ってみる」ことは、単に自分の得た解答が正しいか正しくないかを確かめるだけではない。ポリア（1954）は、この段階の重要性を次のように述べている。

《解ができ上がったときにこれを振り返り、結果を調べ直してそれ迄にたどった道を見直すことは、彼らの知識をいっそうたしかなものとし、問題をとく能力をゆたかにするものである。》（pp. 18-19）

また、次のようにも述べている。

《われわれは２つのちがった仕方で証明をし度いと望むのである。同じ結果を違った仕方で導くことができるか。》（p. 19）

一つの解法で解を得て、また同じ方法で解を確かめることがよく行われる。ページ問題において、例えば、素因数分解で解答（56 ページと 57 ページ）を得た生徒がいたとする。その生徒は、もう一度その過程を検討し直してみるだろう。それだけで、その解答が正しいか正しくないかが確かめられる。また、その解答が正しいか正しくないかを確かめるだけでなく、自分の解法をもう一度検討し直し、その解法をより一層確かなものとして獲得できるのである。

しかし、他の解法で検討し直すことも重要である。このページ問題においては、素因数分解の過程を再度検討し直すことで解答が正しいか正しくないかは確かめられるが、方程式に代入してみて確かめる方法をとることも重要だと思われる。そうすることによって、二通りの方法で確かめたことになり、解答もより確実なものであることがわかるだろう。一通りの方法で検討し直しても、単純な計算間

違い等は気づかないことも多いのである。また、この問題では、方程式を解くということは困難であったが、それは間違いではなかったことがわかり、方程式で解くという解法も獲得することができるであろう。解答としては、一通りの方法でしか答えなくても、結果を何通りかの方法で確かめることによって、それぞれの解法の特徴を理解し、それらに対する理解を深めることができると思われる。その結果、問題解決能力を豊かにしていくと思われる。

第３章　「多様な解法を考えること」に関する生徒の実態

第１節　Santos-Trigo M.の実態調査

１．調査の概要

Santos（1994、1996）は、生徒の問題解決活動の特徴を明らかにするために、メキシコの２つの中等学校の第10学年の生徒35名に対してインタビュー調査を行った。それは、３問の問題を生徒に解かせながらインタビューする（20分から45分）という方法で行われた。インタビュアーは生徒に対して、時折、自分の解法を説明するよう尋ねたり、ヒントを与えたりした。

２．調査問題と可能な解法

調査問題は、以下の３問である。

問題１	農夫は、何匹かの豚と、何羽かの鶏を飼っている。彼は、これらの動物を合わせると、19の頭と60の足をもつことに気づく。彼は、何匹の豚と、何羽の鶏を飼っているか。（農夫問題）
問題２	あなたは、積が1,000,000で、ａもｂもその表示に０を含まないような整数ａ、ｂを見つけられますか。他のそのような組がありますか。また、なぜあるのでしょうか、また、なぜないのでしょうか。（1,000,000問題）
問題３	テキストが、ランダムに開かれている。その開かれているページ数の積は、3,192である。何ページが開かれているか。（ページ問題）

これらの問題には、次のような解法が考えられる。

<table>
<tr><th>問題</th><th>農夫問題</th><th>1,000,000 問題</th><th>ページ問題</th></tr>
<tr><td rowspan="4">可能な解法</td><td>1．絵で表す</td><td>1．試行錯誤</td><td>1．試行錯誤</td></tr>
<tr><td>2．試行錯誤</td><td>2．素因数分解</td><td>2．素因数分解</td></tr>
<tr><td>3．対応を考える</td><td rowspan="2">3．簡単な問題からの類推</td><td>3．平方根を求める</td></tr>
<tr><td>4．方程式の利用</td><td>4．方程式の利用</td></tr>
</table>

3．調査結果と考察

（1）農夫問題

多くの生徒は、代数的に解こうとした（連立方程式をたてた）。その内、何人かの生徒は、豚、鶏、頭、足それぞれを変数としたため、混乱していた。インタビュアーが、生徒に他に解く方法はないかと尋ねると、試行錯誤の方法で解こうとしたが、19 匹の豚と、10 羽の鶏といったような極端な（問題状況に合わないような）場合を試していた。また、1 人の生徒は、19 と 60 の和を２と４で割り、34.5 と 19.2 を得、34.5 羽の鶏と 19.2 匹の豚がいたと言った。

（2）1，000，000問題

何人かの生徒は、ａｂ＝ 1,000,000 と表し、両辺をｂで割って、$a=\frac{1,000,000}{b}$ とした。それから、ｂにいくつかの値を代入してａの値を見つけようとしたが、多くの生徒は失敗した。また、963 × 56 ＝ 53928、99987 × 89 ＝ 9799804、…のようにやみくもに計算をしている生徒もいた。インタビュアーが、1,000,000 よりも小さな数字でやってみようと示唆すると、何人かの生徒は、10 ＝２×５、100 ＝４× 25 …とやってみることによって、パターンを見つけることができた。しかし、２と５の累乗の積になっていることに気づいた生徒は、１人だけであった。

（3）ページ問題

多くの生徒は、まず代数的に方程式（ｘ（ｘ＋１）＝ 3192）をたてた。しかし、

その方程式が解けずに戸惑い、$x+1=\frac{3192}{x}$ と変形した生徒もいた。ある生徒は、他に方法はないかと聞かれると、ただやみくもに、32 × 95 等の計算をしていた。しかし、インタビュアーからそれらの数字の意味を尋ねられると、連続数でないことに気づき、32 × 33、60 × 61 等の計算を始めた。その生徒は、32 × 33 では小さすぎて 60 × 61 では大きすぎることより、ようやく 56 × 57 を得た。

4．まとめ

これらの観察結果から、Santos は、生徒の問題解決活動の特徴を次のように述べている。

①問題を理解しようとすることに時間を費やさない。つまり、問題を読むとすぐに主なデータを確認しないで、計算を始める。
②活動が問題状況に合わないことを認識することが困難であった。
③アプローチに行きづまると、簡単に諦めてしまう。
④教師から解法を知らされることを期待している。

①について

生徒の行動をみると、生徒は、問題解決能力の最初の重要なプロセスである「問題を理解すること」を怠っていることがわかる。

農夫問題では、19 と 60 の和を２と４で割り、それを答えとするような生徒がいた。これらの数字のもつ意味について理解ができていないことがわかる。また、ページ問題では、この問題のキーポイントである２つの連続数の積が 3192 になるということがしっかり理解できれば、解法の糸口が見えてくるはずである。

②について

農夫問題において、34.5 羽の鶏と、19.2 匹の豚という答えを出している生徒がいた。動物の数に小数点が出現したことに疑問をもたないことは、これらの数値を得た活動が問題状況に合っていないことを認識していないからであろう。ページ問題で、やみくもに 32 × 95 等の計算をしている生徒も同様である。

③について

ページ問題において、$x(x+1)=3192$ の方程式が解けない生徒は、行きづまって、前述のような変形をしたりして、結局諦めてしまう。1,000,000 問題では、$a=\frac{1,000,000}{b}$ という式変形から、b にいくつかの数を代入して a の値を求めよう

としたが、求められずに諦めてしまう生徒がいた。つまり、このような生徒は、他の方法を考えようとはせず、簡単に諦めてしまっている。

④について

生徒は、公式を見つけようとしたり、ルーチン化した解法を見つけようとしたりする。そして、それが見つけられない、または、それらが見つけられたとしても、公式の利用やルーチン化した解法に行きづまると、上述したように他の解法を考えようとせず、教師の助言を待つのである。

これらの Santos の調査結果から、生徒は、多様な解法を考えることが困難であることが分かった。

第２節　日本の高校生の実態調査

１．調査の概要

（１）調査目的

多様な解法を考えることは、生徒にとって困難であることが Santos（1994、1996）の研究からうかがえる。そこで、日本の高校生にも同様なことがいえるかどうかを調査した。また、数学の成績が優れている生徒とそうでない生徒を比較し、多様な解法を考える能力と数学の成績との関連も調べた。

（２）調査方法

調査は、テスト形式で各問題 14 分ずつの時間配分で行った。調査の実施に先立って、できるだけ多くの方法で解くように指示してもらった。

（３）調査対象・時期

調査時期は、1997 年 10 月初旬で、対象とした被験者は、熊本県内の公立高校３年生 40 名である。また、被験者は、担当の数学教師によって、数学の成績をＡ、Ｂ、Ｃの３段階に分けられた。以下の表に見られる生徒番号 1 から 12（12 名）がＡ段階、13 から 30（18 名）がＢ段階、31 から 40（10 名）がＣ段階の生徒である。対象者は、熊本県内で、平均的な数学的能力をもつ生徒達である。

（４）調査問題

数学を不得意とする生徒でも、十分に考えられるように中学校レベルの知識で解くことのできる基本的な問題を選んだ。

２．結果と考察

（１）結果

①問題１

問題 1	一冊の本が開かれています。開かれている右のページ数と左のページ数をかけると、その積が、3,192 になりました。何ページ目が開かれていますか。

この問題の解法として、次のようなものが考えられる。

解法１

ページ数をｘ、ｘ＋１（ｘ＞０、ｘは整数）とおくと

$x(x+1)=3192$

$(x+57)(x-56)=0$

$x=-57,\ 56$

$x>0$ より　$x=56$

よって、56ページと57ページ

解法２

3192を素因数分解すると

$3192=2^3\times3\times7\times19$

$\quad=(2^3\times7)\times(3\times19)$

$\quad=56\times57$

よって、56ページと57ページ

解法３

$60\times60=3600$

$60\times59=3540$

$59\times58=3422$

$58\times57=3306$

$57\times56=3192$

よって、56ページと57ページ

解法４

$\sqrt{3192}=56.4977\cdots$

これより、$3192=56\times57$

よって、56ページと57ページ

※解法１の方程式を解く過程で、解法２，または解法３等を用いている生徒もいると思われるが、ここでは、解法１，解法２，解法３と独立させた。

この問題の結果は、次の通りである。

【表１】

生徒番号	解法１	解法２	解法３	解法４	その他			合計
1	○							1
2			○					1
3		○	○					2
4		○	○		○			3
5	○	○						2
6	○	△	○					3（1）
7	○	○						2
8	△							1（1）
9		△	△					2（2）
10		○	△					2（1）
11	○		○					2
12	△	○						2（1）
13		○						1
14	○		○					2
15			○					1
16	△		○					2（1）
17		△	○					2（1）
18	○							1
19		△	○					2（1）
20	○		○					2
21	△		○					2（1）
22	○							1
23	○							1
24			○					1
25		△						1（1）
26	○		○					2
27								0
28	△	△	○					3（2）
29		△						1（1）
30			○					1
31			○					1
32		△						1（1）
33			○					1
34	△							1（1）
35		△						1（1）
36	○	○		△				3（1）
37			○					1
38								0
39		△						1（1）
40			○					1
合計	18（6）	18（10）	22（2）	1（1）	1			

※表中の○は正解を示し、△は正解までは達していないが考え方は正しいことを示す。合計数には、△も含む。括弧内の数字は、合計数のうち△の数である。

数学の成績と平均解答数及び複数解答者数の関係は以下の通りである。

【表２】

成績段階	平均解答数
A	1.916 …
B	1.444 …
C	1.100
全体	1.500

【表３】

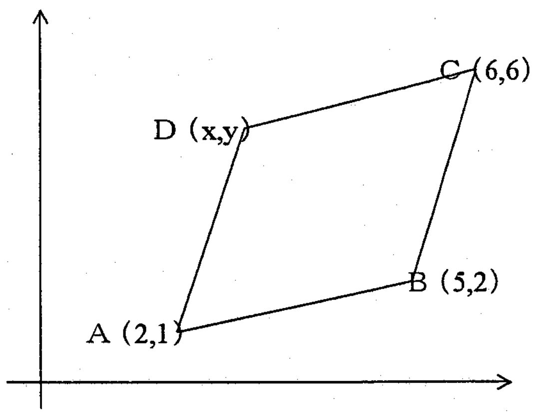
成績段階	複数解答者数
A	9人（75 %）
B	8人（44.4 %）
C	1人（10 %）
全体	18人（45 %）

②問題２

問題２　座標平面上に、３点Ａ（２，１）、Ｂ（５，２）、Ｃ（６，６）をとる。もう１点Ｄをとり、四角形ＡＢＣＤが平行四辺形になるようにしたい。点Ｄの座標を求めよ。

この問題の解法として、次のようなものが考えられる。

解法１



Ｄ（ｘ、ｙ）とおくと

$\overrightarrow{AB}=(3,1)$、$\overrightarrow{DC}=(6-x, 6-x)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より

$6-x=3$ …①

$6-y=1$ …②

①、②を解いて

$x=3$、$y=5$

したがって、Ｄ（３，５）

解法２

$|AB|=|DC|$ より

$\sqrt{(5-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{(6-x)^2+(6-y)^2}$ …①

$|AD|=|BC|$ より

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(6-5)^2+(6-2)^2}$ …②

①、②を解いて、

ｘ＝３、ｙ＝５
したがって、Ｄ（３，５）

解法３

直線ＡＢと直線ＤＣの傾きは、等しいから

$$\frac{2-1}{5-2}=\frac{6-y}{6-x}$$

これより、ｘ－３ｙ＝－12…①

直線ＡＤと直線ＢＣの傾きは等しいから

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{6-2}{6-5}$$

これより、４ｘ－ｙ＝７…②

①、②を解いて、

ｘ＝３、ｙ＝５

したがって、Ｄ（３，５）

解法４

平行移動を考える

点Ｂからｘ軸方向に－３、ｙ軸方向に－１平行移動すると点Ａになるから

（ｘ、ｙ）＝（６－３，６－１）＝（３，５）

したがって、Ｄ（３，５）

解法５

線分ＡＣの中点は

$$\left(\frac{6+2}{2},\frac{6+1}{2}\right)=\left(4,\frac{7}{2}\right)\cdots①$$

線分ＢＤの中点は

$$\left(\frac{5+x}{2},\frac{2+y}{2}\right)\cdots②$$

①、②は一致するから

$$4=\frac{5+x}{2}、\frac{7}{2}=\frac{2+y}{2}$$

これより、ｘ＝３、ｙ＝５

したがって、Ｄ（３，５）

この問題の結果は、次の通りである。

【表４】

生徒番号	解法１	解法２	解法３	解法４	解法５	その他		合計
1		△	○		○			3（1）
2				○				1
3				○				1
4				○				1
5	○		○					2
6		△		○				2（1）
7				○				1
8				○				1
9								0
10				○				1
11			○	○				2
12				○				1
13				○				1
14								0
15				○				1
16								0
17				○	△			2（1）
18				○				1
19		△						1（1）
20				○				1
21				○				1
22		△		○				2（1）
23				○				1
24				○				1
25								0
26				○				1
27								0
28				○				1
29								0
30				○				1
31				○				1
32								0
33								0
34								0
35								0
36				○				1
37				○				1
38				○				1
39		△						1（1）
40				○				1
合計	1	5（5）	3	26	2（1）			

数学の成績と平均解答数及び複数解答者数の関係は以下の通りである。

【表５】

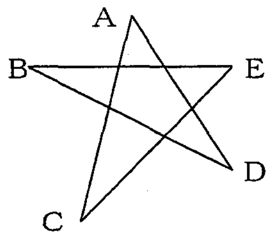
成績段階	平均解答数
A	1.333 …
B	0.833 …
C	0.500
全体	0.900

【表６】

成績段階	複数解答者数
A	4人（33％）
B	2人（11.1％）
C	0人（0％）
全体	6人（15％）

③問題３

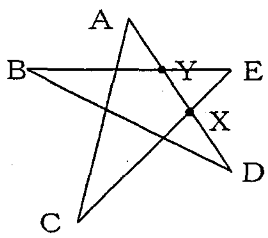
問題３



図のような星形の頂角∠A、∠B、∠C、∠D、∠Eの和は何度か。

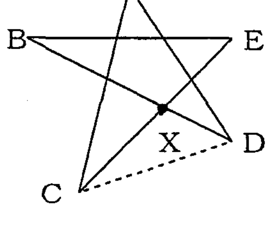
この問題の解法として、次のようなものが考えられる。

解法１



図のように、点X、点Yをとる。
∠YXE＝∠A＋∠C
∠XYE＝∠B＋∠D
△XYEにおいて、
∠E＋∠x＋∠Y＝∠E＋∠A＋∠C＋∠B＋∠D＝180°
よって、180°（※類似した解法も含む。）

解法２

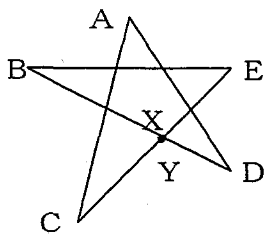


図のように、点Xをとり、補助線CDをひく。
∠EXD＝∠B＋∠E
∠XCD＋∠XDC＝∠B＋∠E
△ACDにおいて
∠A＋∠C＋∠D＋∠B＋∠E＝180°

よって、180°

（※類似した解法も含む。）

解法３



$\angle A+\angle C+\angle D=\angle Y=\angle X$

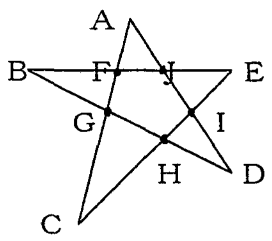
$\triangle BXE$ において

$\angle B+\angle A+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ$

よって、180°

（※類似した解法も含む。）

解法４



図のように、点Ｆ、点Ｇ、点Ｈ、点Ｉ、点Ｊをとる

$\angle F=\angle A+\angle B+\angle D$

$\angle G=\angle B+\angle C+\angle E$

$\angle H=\angle A+\angle C+\angle D$

$\angle I=\angle B+\angle D+\angle E$

$\angle J=\angle A+\angle C+\angle E$

辺々足すと

$\angle F+\angle G+\angle H+\angle I+\angle J=3(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E)$

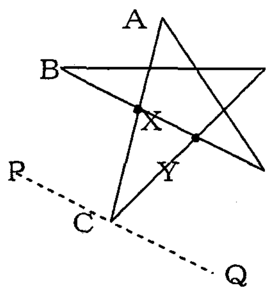
$540^\circ=3(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E)$

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ$

よって、180°

（※類似した解法も含む。）

解法５



線分ＢＤに平行な直線ＰＱ、をひき、点Ｘ、点Ｙをとる。

$\angle DXC=\angle A+\angle D$

錯角より、$\angle PCX=\angle A+\angle D$

$\angle XYC=\angle B+\angle E$

錯角より、$\angle YCQ=\angle B+\angle E$

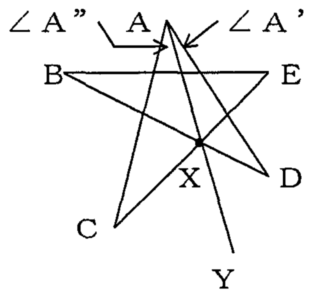
直線ＰＱを考えると

$\angle A+\angle D+\angle C+\angle B+\angle E=180^\circ$

よって、180°

（※類似した解法も含む。）

解法６



図のように、頂点Ａから点Ｘを通る直線ＡＹをひき、
∠Ａ'、∠Ａ"をとる（$\angle A = \angle A' + \angle A''$）。

$\angle DXY = \angle A' + \angle D$

$\angle CXY = \angle A'' + \angle C$

$\angle EXD = \angle B + \angle E$

直線ＥＣを考えると

$$\angle A' + \angle D + \angle A'' + \angle C + \angle B + \angle E = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$$
$$= 180^\circ$$

よって、180°

（※類似した解法も含む。）

この問題の結果は、次の通りである。

数学の成績と平均解答数及び複数解答者数の関係は以下の通りである。

【表７】

成績段階	平均解答数
A	0.750
B	0.222 …
C	0.200
全体	0.375

【表８】

成績段階	複数解答者数
A	３人（25％）
B	０人（０％）
C	０人（０％）
全体	３人（7.5％）

【表９】

生徒番号	解法１	解法２	解法３	解法４	解法５	解法６	その他	合計
1	○		○	△				2（1）
2								0
3								0
4								0
5								0
6	○			○				2
7				○	△			2（1）
8								0
9								0
10				△				1（1）
11	○							1
12								0
13				○				1
14								0
15								0
16								0
17								0
18								0
19				○				1
20				○				1
21								0
22								0
23								0
24	○							1
25								0
26								0
27								0
28								0
29								0
30								0
31								0
32								0
33								0
34								0
35								0
36				○				1
37								0
38								0
39								0
40			○					1
合計	4	0	2	8（2）	1（1）	0		

（２）考察

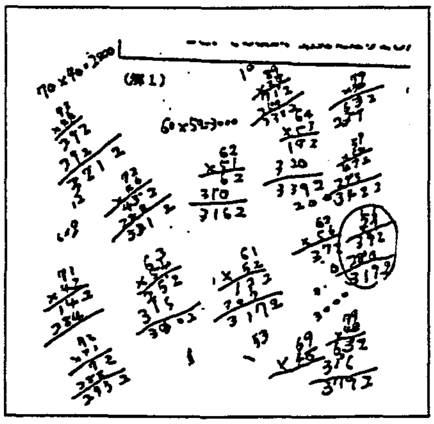
①問題１

ここでは、Santos のページ問題を、わかりやすく表現し直し、日本の高校生を対象に再調査してみた。Santos の研究では、方程式をたてるが、それが解けずに、やみくもな試行錯誤をしていたと報告されていた。

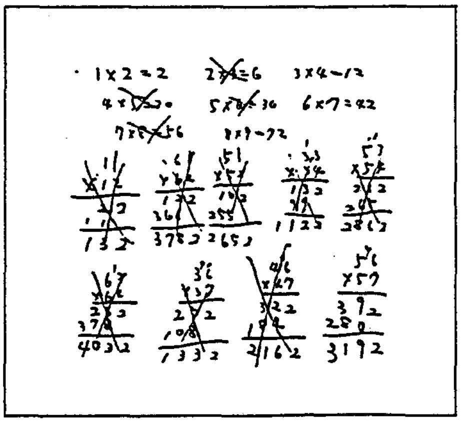
筆者の調査では、方程式「$x^2 + x - 3192 = 0$…①」（$x^2 - x - 3192 = 0$ も含む）をたてた生徒は、40 人中 18 人（45 %）で、正解まで達している生徒は、12 人（30 %）であった。①の方程式が解けた生徒の中で、８人が、他の解法として解法２（素因数分解の使用）、解法３（試行錯誤法）の少なくとも一つを答えている。また、残りの４人も、方程式を解く過程で、解法２、解法３を何らかの形で使用していると思われた。つまり、①の方程式で、和が１で積が－ 3192 の２数を直観的に見つけること、または解の公式を使用することは困難であり、多くの生徒は、何か他の方法でこの方程式の解を見つけようとして、素因数分解を利用したり、試行錯誤したりしたと思われる。しかし、一方で、方程式をたてただけで、後は白紙の生徒もおり、方程式が解けないと簡単に諦めてしまう傾向も見られた。

試行錯誤法で解答した生徒の中には、次のような解答をした者がいた。

解答例１



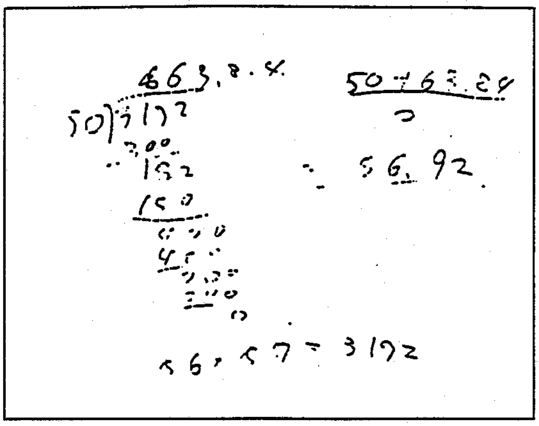
解答例２



解答例１のように、問題状況（２数は、連続数であること）を理解せずに、ただやみくもに計算しているような生徒は、一人だけであった。したがって、Santos の研究で報告されたような生徒は、一般的ではなく、ごく一部の生徒であると思われる。多くの生徒は、$50 \times 50 = 2500$、または $60 \times 60 = 3600$ からアプローチしていた。また、解答例２のように、数名の生徒は、１の位が２になることに着目したアプローチをしていた。

また、偶然正解となっているが、次のような解答をしている生徒もおり、創意工夫が見られた。

解答例３



生徒の平均解答数（△も含む）は、Ａ段階の生徒で 1.916 …、Ｂ段階の生徒で 1.444 …、Ｃ段階の生徒で 1.100 であり、全体の平均解答数は 1.500 であった。また、最多解答数は３であった。我々、数学教師は、少なくとも、解法１、解法２、解法３の３つの解法は解答してくれるものと生徒に期待するが、実際にはその期待にはほど遠い状況であった。複数解答した者は、Ａ段階の生徒で 12 人中９人（75 %）、Ｂ段階の生徒で 18 人中８人（44.4 %）、Ｃ段階の生徒で 10 人中１人（10 %）で、成績間で差が出たといえる。

②問題２

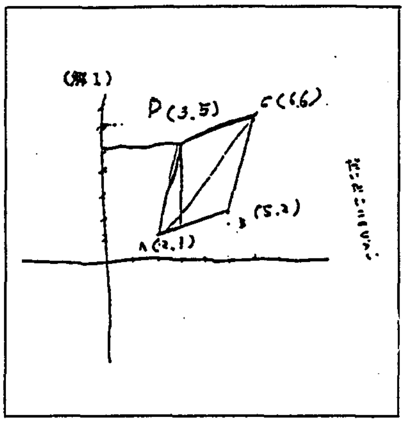
この問題は、問題１が多少見慣れない問題であることに対して、教科書あるいは問題集等でよく見られる見慣れた問題といえる。また、平行四辺形のもつ特徴（向かい合う辺が平行である、向かい合う辺の長さが同じである、２つの対角線は、それぞれの中点で交わる等）は、生徒がよく知っていることであるから、多くの解法を考えてくれるのではないかと予想された。

調査を実施してもらった数学教師によると、調査時期がベクトルを学習した直後であったこともあり、この問題を見て、思わず「ベクトルを使え」と言った生徒がいたそうである。しかし、実際にベクトルを使って解答した生徒は一人だけ（この一人が、「ベクトルを使え」と発言した生徒かどうかはわからない）であった。この解法１が、この問題では一番期待される解答であるだけに残念な結果であった。

この問題で最も多かった解答が解法４（平行移動を使う）であった。この問題

を解決するはじめの手順は、座標平面上に点を取り、図を描いてみることであると考えられる。実際、図を描いていない生徒は一人もいなかった。図を描くことを通して、自然にこの解法が考えられたのではないだろうか。しかし、最も多かった解法とはいえ、26 人（65 %）しか解答していなかった。逆に言えば、この解法を考えられなかった生徒は、14 人（35 %）もいたのである。その 14 人の中には、次のような解答をした生徒がいた。

解答例４



解答例４のように、数学的に意味のない解答をした生徒が 10 人もいたことには驚かされた。

調査前に、最も多くの生徒が解答するだろうと予想した解法が解法２である。平行四辺形がもつ、向かい合う辺の長さが等しいという性質は誰もが知っていることであり、３点の座標が与えられているのだから、簡単に連立方程式がたてられるはずである。しかし、この解法を考えた生徒は５人だけであった（連立方程式を解く過程で大きな数字を扱わなければならないこともあり、正解まで達していた生徒はいなかった）。この原因としては、単にこの解法を思いつかなかった生徒を除くと、次のようなことが考えられる。

①平行移動で簡単に答えを出すことができたので、面倒な計算を必要とする新しい解法を考えようとしなかった。

②２点間の距離を求める公式を忘れた。

①の場合

生徒は、とにかく面倒なことを嫌がる傾向がある。複雑な計算などが出てくると自分で計算せずに、教師や友人の出す答えを待っている生徒も少なくない。簡単な方法で解き終えると、多少面倒な計算がでてくるような他の解法は考えようとしないのである。また、簡単な解法だけで十分であると考えるのである。

②の場合

生徒は、公式を忘れてしまうと簡単に問題を解くことを諦めてしまう。ほとんどの生徒は、多くの公式（例えば、２点間の距離の公式）が簡単に自分で作れるのに、公式は暗記するものであると考えている。そして、数学は暗記科目であると考えている生徒も少なくないと思われる。「この公式は重要だから必ず覚えるように」という、教師の詰め込み教育にも問題があるのかもしれない。

この問題２の平均解答数は、Ａ段階の生徒で1.333…、Ｂ段階の生徒で0.833…、Ｃ段階の生徒で0.500であった。また、生徒全体での平均解答数は0.900で、１を割っている。多様な解法を考えることが困難であることは、この問題からも確認できる。また、複数解答した者は、Ａ段階の生徒で12人中４人（33.3%）、Ｂ段階の生徒で18人中２人（11.1%）、Ｃ段階の生徒で10人中０人（０%）であった。問題１と同様に、成績間に差が見られる。

③問題３

この問題は、ピタゴラスの星形といって中学校数学では有名な問題である。また、多くの解法をもつことでも知られている。しかし、調査の対象が、高校３年生ということもあって、すっかり忘れてしまっていたのか、無答者数が29人（72.5%）とかなり多かった。したがって、考察の対象としては適切ではないかもしれないが、複数解答した者は、Ａ段階の生徒が12人中４人（１人が３通り、３人が２通り）いたのに対して、Ｂ段階、Ｃ段階の生徒は、１人も複数の解法を考えることができなかった。成績との関連という視点から考えると、３問中でもっとも顕著であったといえる。

（３）まとめ

この調査では、成績との関連という視点も設けた。成績のよい生徒と、そうでない生徒の間には、知識量の違い、計算力の違い等があると思われる。したがって、ある問題を解けるか解けないかという場面では、当然、大きな差が出てくる。しかし、「多様な考え方をする」という点では、多少の差はあっても明らかな差は見られないのではないかと予想していた。この調査では、最後まで解けなくても途中までの解答は消さずに残しておくように指示してもらっていたため、多様な考え方ができたかどうかという点では、成績の差はあまり見られないだろうと考えたのである。しかし、結果は、成績間に大きな差が出た。それぞれの問題の平均解答数、複数解答者数を見ると、明らかにＡ段階の生徒が優れていることがわかった。成績のよい生徒は、そうでない生徒と比べて、問題が解けるだけでなく多様な考え方ができるのである。

また、Santosの調査結果から得られたことは、次のようなことであった。

①問題を理解しようとすることに時間を費やさない。つまり、問題を読むとすぐに主なデータを確認しないで、計算を始める。

②活動が問題状況に合わないことを認識することが困難であった。

③アプローチに行きづまると、簡単に諦めてしまう。

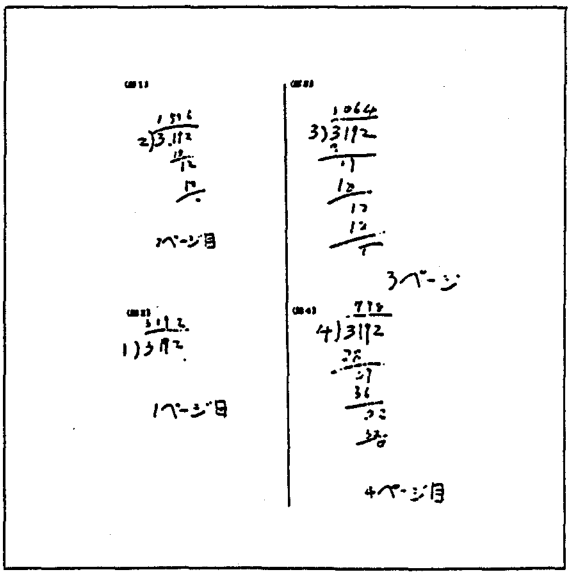
④教師から解決法を知らされることを期待している。

今回の調査結果からこれらのことを検証してみる。ただし、④については、今回はインタビュー調査ではないので確認できない。

①、②について

次のような解答をした生徒がいた（解答例５）。この生徒は、問題をよく理解しようとしたとは思えない。おそらく、何かの数字と何かの数字をかけたら 3192 になるということしか頭の中に入っていなかったと思われる。それで、とにかく何かの計算をしなければならないということで、このような解答になったと思われる。そして、出した答えが連続数になっていないにもかかわらず、問題状況に合わないことが認識できずにそのまま答えとしている。

解答例５



③について

$x^2 + x - 3192 = 0$ と方程式をたてて、後は白紙で終わっている解答がいくつかあった。こうした生徒は、連続数の積が 3192 になるということで、とりあえず方程式をたててみたと思われる。しかし、その方程式を解くことができず、試行錯誤法で考えようともせず、簡単に諦めてしまっている。

このように、Santos の言うような生徒は確かに存在した。しかしそのような生徒は少数であり、さして問題になるような状況ではなかったといえる。

この調査で確認できた重要なことは、多様な解法を考えることが、生徒にとって困難であるということである（勿論、このことは Santos も指摘している）。前に、成績の良い生徒は多様な考え方ができると述べたが、それはあくまで成績のよくない生徒と対比したときであって、一般的にいえることではない。Ａ段階の生徒でさえも、３問合計の平均解答数は４である。つまり、１問につき 1.333 …通りの考え方しかできていないのである。これは、指導現場において何らかの策を講じなければならないことを示唆しているといえる。

第４章　「多様な解法」指導への示唆

第１節　授業での取り組み

１．多様な解法を授業で取り扱う意義

前章において、生徒は、多様な解法を考えることが困難であることがわかった。そこで、多様な解法を考えることができるように指導しなければならない。しかし、多様な解法を授業で取り扱う意義や必要性を教師、生徒それぞれが理解していなければ効果の上がる指導は期待できない。実際、一つの解法で十分だと考えている生徒は多数存在し、そう考えている教師も多少はいるであろう。

多様な解法を授業で取り扱う意義の一つとして、能田（1983）は、次のように述べている。

《教師は、子どもが、おのおの新しい考えを出して、それでもって解決したとき、その解決の仕方が妥当なものかどうか不安になるであろう。そういうとき、必ず、検算なりたしかめをさせるだろう。そのためにも、最初の解決と異なる多様な解決を各自が身につけておかなければならない。》（p．204）

また、教科書の例題の解き方を覚えるという学習をしている生徒も少なくない。そのような生徒は、ほとんど考えることなく見慣れた問題を解いている。しかし、見慣れない問題には対応できない場合が多い。また、見慣れた問題でも、公式を忘れたり、解法を忘れたりすると、それ以上考えることができなくなる場合もある。しかし、そのような状況でも、多様な解法を考える力をつけていれば、対応できるであろう。

次のような問題を考えてみる。

問題　次の関数のグラフとｘ軸の共有点の個数を求めよ。

$$y = x^2 + 3x + 1$$

この問題は、主に次のような解答が考えられる。

解法１　判別式の値を計算する。

$b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot1$

$=5>0$

よって、２個

解法２　ｘ軸との共有点のｘ座標は、方程式 $x^2+3x+1=0$ …①の解である。

①を解くと、

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

解が２つあるから、共有点も２つある。

よって、２個

解法３　$y=x^2+3x+1$

$y'=2x+3$

$y'=0$ より

$x=-\dfrac{3}{2}$

x		$-\frac{3}{2}$	
y'	−	0	＋
y		$-\frac{5}{4}$	

最小値は、$x=-\dfrac{3}{2}$ のとき $y=-\dfrac{5}{4}$ である。

この関数のグラフは、下に凸なのでｘ軸とは２点で交わる。

よって、２個

解法４　$y=x^2+3x+1$

$y=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

最小値は、$x=-\dfrac{3}{2}$ のとき $y=-\dfrac{5}{4}$ である。

この関数のグラフは、下に凸なのでｘ軸とは２点で交わる。

よって、２個

これは、２次関数の分野で教科書に必ず出てくる問題である。解法１と解法２は、一見全く違う解法のように見えるが、構造的には同じものである。したがって、数学的には、この２つの解法を別の考え方とはいえない。しかし、多くの生

徒は、判別式から共有点の数を求める解法１と共有点のｘ座標を実際に求める解法２とは異なる解法であるとみなすであろう。また、解法３と解法４もグラフの概形を用いた解法であるが、グラフの概形を決める過程に、微分を用いるか式変形を用いるかの違いがあるので、別の解法とした。

解法１で解き始めた生徒が、もし、判別式の値が正のとき２個なのか負のとき２個なのかの記憶が曖昧であったりすると、勘によって解答することになる。そのようなとき、多様な解法を考える力が備わっていなければ、他の解法でその答えを確かめることができないのである。また、多様な解法を考える力が備わっていない生徒が、解法１で解こうとしたとき、判別式（b^2-4ac）を忘れていたり、覚えていなければ、他の解法を考えようともせずに解くことを諦めてしまうかもしれない。

そこで、この問題を取り扱う場合、解法１と併せて解法２も考えさせることが重要となる。そうすることによって、解法１で解いて不安をもつ生徒も解法２で確かめることができる。また、この問題のもつ意味（ｘ軸との共有点の個数→方程式の解の個数）をしっかりと理解させることができるのである。また、解法３解法４を考えることによって、二次関数のグラフの描き方の復習ができるし、問題を視覚的に捉えることができるのである。

２．多様な解法を授業で取り扱う場合の注意点

（１）問題特有な解法にとらわれすぎない

Sigurdson、Olson、Mason（1994）は、鶴亀算の問題を例に挙げ、ストラテジーの提示と活用に関し、次のような３つの選択肢に教師は直面すると述べている。

１．すべての可能なストラテジーを生徒に提示する。

２．生徒が好んだストラテジーを使用させる。

３．問題に特有なストラテジーに集中する。

鶴亀算の問題は、多様な解法をもつ。選択肢１は、それらをすべて生徒に示す指導方法である。しかし、生徒にそれぞれの方法を理解させるには、授業時間の短さ等の問題から消化不良となることが考えられる。

選択肢２は、解決方法を生徒個人個人に任せるという指導方法である。生徒は、それぞれ異なる方法で解決するであろうし、生徒個人個人でも多様な方法で解決していることも考えられ、それぞれの解法について、後の学習内容に生かせるのか、これまでの学習内容を用いているか等吟味しなければならない。また、数学的に正しいかも評価しなければならない。生徒の好みに任せると、後で取り返しのつかないことにもなりかねないのである。

多くの教師が選択すると予想されるものは、選択肢３であろう。その理由としては、カリキュラム、授業時間等を考慮に入れると、生徒にすべての解法を理解させることは困難であること、生徒に間違った考え方または一般性のない考え方をさせないため等が考えられる。これらの理由から、多様な解法を取り扱うことなく、その問題に特有な解法を生徒に示すこととなる。

しかし、その問題に特有な解法以外に、重視されなければならない解法をもつ問題が多い。本節の１．で採り上げた問題を例に挙げるならば、問題に特有な解法は解法１である。これは、最も簡潔な解法ではあるが、意味もわからないままに機械的に理解するという危険をはらんでいる。解法１の理解を更に深めさせるために解法２も指導すべきであるし、他の視点から問題を捉える解法３または解法４も併せて指導すべきであろう。

鶴亀算の解法で考えられるストラテジーは、試行錯誤、絵をかく、パターンを探る、代数的に考える等が考えられる。しかし、絵をかく、パターンを探る等を試行錯誤に含めるならば、試行錯誤と代数的に考えるの二つのストラテジーに大きく分けることができる。もし、鶴亀算の問題を解こうとしているのが中学生や高校生であれば、大部分の生徒は、代数的に考え連立方程式をたてるであろう。勿論、代数的に解くことは、簡単にそして素早く解くことができて、大変有効である。多くの生徒は、式をたて、それを計算するという解法でないと数学の解答にならないと考えがちである。しかし、試行錯誤法で解くことも立派な解答であることをわからせるため、また、見慣れない問題が出てきたときに試行錯誤法で解くことができるようにするためにも、この場面では、代数的に解く方法と併せて試行錯誤法も重視すべきである。

（２）それぞれの解法を吟味する

能田（1983）は、多様な解決による数学的活動が行われる授業における問題点を次のように指摘している。

《子どもにいろいろな考えを出させておいて、その中からどの解法がより一般性があるのか、またどのような限界があるのかなどの評価が十分検討されないまま「よくできました」で終わっている場合が多い…》（p．204）

能田は、この問題点を次の問題例を用いて説明している。

問題　$\frac{2}{3}$と$\frac{3}{4}$とはどちらが大きいだろうか。

この問題の予想される解法は、主に次のようなものである。

解法１　$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$、$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

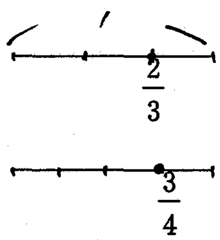
$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$

よって、$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

解法２　$\frac{2}{3}\fallingdotseq 0.67$、$\frac{3}{4}=0.75$

よって、$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

解法３　長さ１の線分図で考えると



よって、$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

解法４　$\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$、$\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$

よって、$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

これらの解法は、それぞれに意義のあるものである。しかし、「これらのような解法がありますね」だけでは、どの解法が、一般性があるのか、後の学習内容に生かせるのか、生徒にはわからないので、何も意味のないものになってしまう。例えば、解法１は、偶然、１との差が単位分数になり、一般性があるとはいえな

い。したがって、解法１に注目してしまった生徒は後の学習内容でつまづいてしまう可能性がある。

これらの解法の中では、解法４が一般性をもち、また後の学習内容にも生かせる。例えば、解法４によって、$\frac{1}{12}$という同じ単位に揃えること（通分）によって大小が比べられることを押さえておくと、$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$のような分数の和もスムーズに求めることができるであろう。

つまり、多様な解法が出たところで、「よくできました」で終わると、後に重要となる内容をおろそかにしてしまうことがある。

第２節　「多様な解法」の評価について

１．Ｍ方式のテスト

（１）Ｍ方式のテストの概要

村井（1995）は、多様な解法をすべて答案に書かせるテスト（Ｍ方式のテスト）を行うと、次のようなことが有効に調査・測定できるとしている。

（Ａ）生徒の数学の学習レベルがどの段階にあるか（例えば、高校で学習したことを使って解決できる問題を中学校で学んだ方法でしか解決できないとするとその生徒の学習レベルは中学校段階である）

（Ｂ）生徒の数学的問題解決能力、数学的センス

彼は、次のような実践結果を示している。

理科型 77 名、文科型 77 名、計 154 名の高校３年生を対象とした、計 10 問のＭ方式のテストの結果は以下の通りであった。

	理科型	文科型
Ｍ方式の１人当たり解答数（Ａ）の平均値	9.26	5.97
従来方式の１人当たり解答数（Ｂ）の平均値	6.49	5.17
（Ａ－Ｂ）の平均値	2.77	0.81
（Ａ－Ｂ）の標準偏差	1.98	1.07

※Ｍ方式による解答数（Ａ）…被験者の解答の中から本質的に異なる解法の数をかぞえたもの。

※従来方式による解答数（Ｂ）…Ｍ方式で実施したテストを従来のように、問題一つに対して少なくとも一通りの解法で解けていれば１として数えたもの。問題一つに対して複数解答していても、それは１として数える。

（２）考察

村井は、理科型生徒と文科型生徒の（Ａ－Ｂ）の平均値の差がかなり大きいことから、理科型の生徒は文科型の生徒より数学的問題解決能力や数学的センスに優れていると述べている。確かに、従来方式のテストとして考えたものよりＭ方式のテストの方が、理科型の生徒と文科型の生徒の多様な解法を考える力の差が明らかに出ているようだ。また、各問題の解答を個々に見ることによって学習レベルがわかるとも述べている。

２．個人の学習状態を見る評価

（１）Ｍ方式テストの問題点

村井（1995）のＭ方式テストによって、理科型の生徒と文科型の生徒の問題解決能力、数学的センス、学習レベルに差があることがわかった。しかし、問題点もいくつかあるように思える。

まず、問題点の一つとして 10 問の問題を 50 分で解かせている点が挙げられる。筆者が行った調査で感じたことではあるが、考えられる解法をすべて書かせるならば、1 問につき 15 分から 20 分の時間が必要であろう。したがって、生徒が、考えられるすべての解法を書けたのかという疑問がある。多様な解法を考えさせるには十分な時間を与えることが必要である。

次に、多様な解法を考えることが重要なのは、集団でなく生徒個人個人であるということである。村井の調査結果は、理科型の生徒と文科型の生徒という集団の比較であって、生徒個人個人の学習状態については分析されていない。

（２）個人の学習状態を見る評価

生徒それぞれの中には、数学的能力の高い者、低い者等様々な者がいる。そして、数学的問題を考える際にも、正答まで到達できる生徒、正答までは到達できていないが考え方は正しい生徒、考え方はうまくないが何かしら解決しようとしている生徒、全く手が出ない生徒等様々なパターンが考えられる。したがって、生徒個人個人の学習状態を把握し、今後の指導に役立てていくことが重要となる。

次の問題を例に、生徒個人個人の学習状態を把握してみる。

問題　ｘ＞０のとき、不等式$x+\frac{1}{x}\geqq 2$が成り立つことを証明せよ。

この問題は、主に次のような解法が考えられる。

解法１（「左辺」－「右辺」を変形する方法）

「左辺」－「右辺」$=x+\frac{1}{x}-2=\frac{1}{x}(x^2-2x+1)=\frac{1}{x}(x-1)^2\geqq 0$ $(\because x>0)$

∴「左辺」－「右辺」≧０

よって、$x+\frac{1}{x}\geqq 2$　等号成立はｘ＝１のとき

解法２（「相加平均」≧「相乗平均」を用いる方法）

「相加平均」≧「相乗平均」より

$$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$$

よって、$x+\frac{1}{x}\geqq 2$　等号成立はｘ＝１のとき

解法３（グラフ（微分法）を用いる方法）

$f(x)=x+\frac{1}{x}$、$g(x)=2$とおく

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$より、ｘ＝１（∵ｘ＞０）

増減表を書くと

x	0		1		
$f'(x)$			0		
$f(x)$		－	2	＋	

グラフより、f(x)≧g(x)

よって、$x+\frac{1}{x}\geqq 2$　等号成立は x = 1 のとき

解法1は、不等式の証明分野でもっとも基本的な方法である。この解法が使える生徒は、基本的事項を獲得しているといえる。解法2は、この問題特有の方法である。教科書等に必ず出てくる方法であるが、生徒にとっては十分に練習しないと使うことが難しい方法のようである。不等式の証明分野では、グラフ（微分法）を用いる方法は教科書等にほとんど出てこないので、解法3を考えることのできる生徒は、数学的能力があると思われる。

この問題の主要な解法としては、以上の3通りが考えられるが、考えられる解答パターンは次の通りである。

	A	B	C	D	E	F	G	H
解法1	○	○	○	×	○	×	×	×
解法2	○	○	×	○	×	○	×	×
解法3	○	×	○	○	×	×	○	×

それぞれのパターンの生徒の学習状態を考察し、今後の学習形態を考えてみる。

パターンAの生徒…この分野での学習成果が見られ、高い数学的能力が身に付いていると思われる。高いレベルの問題を与えるとよいと思われる。

パターンBの生徒…この分野での学習成果は見られるが、多様な解法を考える力は十分とはいえない。他の学習分野（この場合は、微分法）からもアプローチできるような学習が必要である。

パターンCの生徒…基本的事項が獲得され、数学的能力も感じられるが、この問題に特有な解法が身についておらず、学習不足が感じられる。その問題に特有な解法を学習すべきである。

パターンDの生徒…問題特有な方法が獲得されており、微分法を用いるという多様な考え方もできているが、基本的な事項が獲得されていない。もう一度基本に戻って学習する必要がある。

パターンＥの生徒…基本的事項は獲得されているが、それ以上の発展が見られない。教科書、問題集等を利用して基本から１ステップ上の問題を練習する必要がある。

パターンＦの生徒…問題特有な解法は獲得されているが、基本的事項が獲得されておらず、また更なる飛躍も見られない。このパターンの生徒は、教科書等の例題を機械的に記憶するといった学習方法をとっている危険性があり要注意と思われる。解法、公式等の意味をしっかりと理解させるような学習が必要である。

パターンＧの生徒…微分法の分野については、ある程度の学習成果が見られるが、不等式の証明の分野では、全く学習成果が見られない。不等式の証明の分野を苦手としているのか、または何らかの理由で学習できていないおそれがあり、一から学習し直す必要がある。

パターンＨの生徒…パターンＧの生徒と類似するが、このパターンの生徒は、数学自体を苦手としており、数学的能力がかなり低い生徒だと思われる。どの段階まで理解できているのかさらに詳しく調べる必要がある。

このように、生徒個人個人の解法パターンを探ることによって、それぞれの学習段階、数学的能力が把握され、今後の指導に役立てることができる。また、個に応じた指導の手だてともなる。逆に、一つだけの方法で問題を解かせても、その問題が解けるか解けないかだけがわかるだけで、生徒の学習段階や数学的能力を把握することはできないのである。

考えついた解法をすべて書かせるテストは、中間考査、期末考査等の総括的評価にはあまり向いていないと言えよう。なぜなら、一つの問題につき 15 分から 20 分の時間が必要であり、幅広く出題ができないからである。したがって、普段の授業場面の演習の時間等にテストという形でなく診断的評価、あるいは形成的評価としてとり入れていくことが望ましいと思われる。

おわりに

本研究では、「多様な解法を考えること」について考察した。

まず、「多様な解法を考えること」が重視される理由を先行研究を基に考察した。まとめると、次のようになる。

ａ）数学の本質から

数学の基本的法則は、二通り以上の観点から眺めることが重要であるとよくいわれる。そうすることによって、それらの法則はより確実なものとなり、それらの理解が更に深まるのである。これは、問題の解法についても同じことである。

ｂ）画一化への反省

一斉授業では、全ての生徒に同じ学習内容を同じレベルまで教えようとする傾向がある。そのような状況が、画一的な授業、指導を生み出し、生徒一人一人の個性の伸張を妨げている。多様な解法を考えることによって、生徒は、それぞれの学習段階や能力に応じて考えることができるのである。

ｃ）創造力の育成

現代の我が国は、科学の発達とともにコンピュータ社会となり、また、次々と新しいものを取り入れ、世界をリードしていこうとしている。そのような現代においては、既存の知識や技能の習得よりも創造力を育成することが重要である。多様な解法を考えさせ、一つの問題をいろいろな視点からアプローチさせることが、創造力を育成する一つの効果的な方法である。

ｄ）練り合いの場の構成

多様な解法を考える授業の一つに、生徒個人個人の考えた解法を発表させるという形態が考えられる。そのような授業を通して、一人一人の数学的表現能力の育成とそれぞれの個性を伸張させることが期待できる。

次に、問題解決能力と多様な解法を考えることの関連を考察した。問題解決の手順である総合的方略のそれぞれの段階（本研究では、１．問題を理解すること、２．計画を立てること、３．ふり返ってみることの３段階で考察した）において多様な解法を考えることが重要であることがわかった。

１．問題を理解すること

ある一つの問題に対して、様々な視点からアプローチし、何がわかっているのか、何を求めなければならないのか、条件は何なのか等を分析することが重要である。また、一つだけの視点からアプローチして問題を理解しようとしても、問題の理解が不十分であったり、問題の理解に行きづまってしまうこともあるであろう。

２．計画を立てること

多様な解法を考えることができるならば、何通りかの計画を立てることができるだろう。問題を解決するためにはその中から、簡単に求められそうな、あるいは自分の得意とする計画を選べばよいのである。もし、その計画がうまく実行できなかったら、他の計画に戻って実行し直せばよいのである。

３．ふり返ってみること

解答としては、一通りの方法でしか答えなくても、結果を何通りかの方法で確かめることによって、その解答がより確実なものとなるであろうし、またそれぞれの方法を習得することができるであろう。

以上のように、多様な解法を考えることの重要性、問題解決と多様な解法を考えることの関連を考察した。それでは、生徒は多様な解法を考えることができるのか、また、多様な解法を考える力と成績とに関連があるのかを実態調査で明らかにした。Santos の調査結果から得られたことで、本研究の調査に関連していたことは、次のようなことであった。

①問題を理解しようとすることに時間を費やさない。つまり問題を読むとすぐに主なデータを確認しないで、計算を始める。

②活動が問題状況に合わないことを認識することが困難であった。

③アプローチに行きづまると、簡単に諦めてしまう。

①、②について

ページ問題において、答える数は連続数であるにもかかわらず、解答が連続数になっていない生徒がいた。また、やみくもに割り算を計算している生徒もいた。これらの生徒は、問題をよく理解しようとしたとは思えない。また、連続数になっていない２数を答えにすることから、問題状況に合わない活動をしていたことを認識できていなかったことがわかる。

③について

ページ問題において、「$x^2+x-3192=0$」と方程式をたてただけで、後は白紙になっている解答がいくつか見られた。つまり、方程式が解けないと判断したら、試行錯誤的にも答えを見つけようとせず、すぐに諦めていたことがわかる。

Santos の言うような生徒は確かに存在した。しかし、本研究の調査結果からいえる重要なことは、多様な解法を考えることは、我々が想像していた以上に生徒にとって困難であるということである。数学の成績がＡ段階の生徒でさえも１問につき 1.333 …通りの解法しか考えることができていなかったのである。

この調査結果は、指導現場において何らかの策を講じなければならないことを示唆している。そこで、多様な解法を考えさせ指導を実践する意義やそのときの留意点等について考察した。勿論、単に多様な解法を考えさせるだけでは、効果は期待できない。それぞれの解法を吟味し、その中からどの解法がより一般性が

あるのか、またどのような限界があるのかを十分検討しなければならない。そして、生徒が多様な解法を考えることができているのか、どのような解法を考えたのか等を評価しなければならない。そのためには、生徒に、ある一つの問題に対して考えついたすべての解法をかかせ、生徒一人一人の答案を吟味しなければならない。それぞれの生徒の解法パターンを探ることによって、各生徒の学習段階や数学的能力が把握でき、今後の指導に役立てることができる。逆に、一つだけの方法で問題を解かせても、その問題が解けるか解けないかだけがわかるだけで、生徒の学習段階や数学的能力を把握することはできないのである。

本研究で考察してきたことを指導現場で実践し、生徒に多様な解法を考えさせることに関する新しい発見や効果、限界等について検証していかなければならない。それが、今後の課題である。

最後になりましたが、本研究を進めるにあたり、細部にわたって適切な教示ならびに示唆を与えてくださり、懇切丁寧なご指導をしてくださいました崎谷真也先生、國岡高宏先生に心より感謝申し上げます。更に、研究全体にわたり、貴重なご助言を賜りました山田篤史先生はじめ数学教室の諸先生方に、感謝申し上げます。また、本研究に対して調査の機会を快く与えてくださいました熊本県立牛深高等学校数学科の先生方及び３年４組の生徒の皆様に、感謝申し上げます。

平成９年 12 月

引用・参考文献

Branca N.A.（1980）. Problem solving as a goal,process,and basic skill, NCTM 1980 YEARBOOK 3-8.

Greeno J.G.（1980）. Trends in the theory of knowledge for problem solving, *Problem Solving And Education:Issues In Teaching And Research*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 9-23.

Grugnetti L.、Jaquet F.（1996）. Senior secondary school practices, *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 615-645.

Polya G.（1980）. On solving mathematical problems in high school, NCTM 1980 YEARBOOK, 1-2.

Santos-Trigo M.（1994）. Student's approaches to s olve three problems that involve various methods of solution, *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Volume Ⅳ, 193-200.

Santos-Trigo M.（1996）. An exploration of strategies used by students to solve problems with multiple ways of solution, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 263-284.

Schoenfeld A.H.（1980）. Heuristics in the classroom, NCTM 1980 YEARBOOK, 9-22.

Schoenfeld A.H.（1985）. Mathematical problem solving, ACADEMIC PRESS.

Schoenfeld A.H.（1992）. Learning to think mathematically:problem solving,metacognition,and sense making in mathematics, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-369

Sigurdson S.E.、Olson A.T.、Mason R.（1994）. Problem solving and mathematics learning, *Journal of Mathematical Behavior* 13, 361-388.

Silver E.A.、.Leung S.S.、Cal J.（1995）. Generating multiple solutions for a problem ： a comparison of the responses of U.S. and Japanese students, *Educational Studies in Mathematics* 28, Kluwer Academic Publishers, 35-54.

井川満，伊関兼四郎，伊藤清三，大島利雄，加藤順二，塩田徹治，広瀬健，渡辺信三（1995）.「新編　数学Ｉ」，数研出版.

井川満，伊関兼四郎，伊藤清三，大島利雄，加藤順二，塩田徹治，広瀬健，渡辺信三（1995）.「新編　数学Ａ」，数研出版.

石田忠男（1985）.「問題解決のストラテジーの指導」，最新中学校数学科指導法講座２　問題解決の能力を伸ばす指導，片桐重雄，古藤怜，平岡忠編著，明治図書，84-98.

伊藤説朗（1985）.「問題解決指導のポイント」，数学的な考え方と問題解決１　研究理論編，中島健三編集，金子書房，51-75.

大山正，東洋編（1982）.「認知心理学講座　1　認知と心理学」，東京大学出版会.

小谷津孝明編（1982）．「認知心理学講座　2　記憶と知識」，東京大学出版会．
クルーリック S.，ルドニック J.A.著，伊藤説朗訳（1985）．「問題解決指導ハンドブック」，明治図書．
古藤怜（1985）．「課題設定のあり方」，数学的な考え方と問題解決 1　研究理論編，中島健三編集，金子書房，17-32.
古藤怜（1986）．「学校数学における多様性とその指導」，数学教育研究第 1 号，上越教育大学数学教室，1-9.
古藤怜（1995）．「問題解決における多様な考えとその指導」，数学学習の理論化へ向けて，日本数学教育学会編，産業図書，110-119.
佐伯胖編（1982）．「認知心理学講座　3　推論と理解」，東京大学出版会．
佐藤重勝（1987）．「子供の多様な考えを重視した算数指導」，数学教育研究第 2 号，上越教育大学数学教室，75-84.
杉山吉茂（1985a）．「問題解決の能力を伸ばす指導のねらい」，最新中学校数学科指導法講座 2　問題解決の能力を伸ばす指導，片桐重雄，古藤怜，平岡忠編著，明治図書，24-35.
杉山吉茂（1985b）．「問題解決の評価」，数学的な考え方と問題解決 1 研究理論編，中島健三編集，金子書房，77-96.
辰野千寿編（1987）．「学習指導用語事典」，教育出版．
塚原成夫（1988）．「高等学校数学教育におけるストラテジーについての考察－Schoenfeld－を中心として」，第 21 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，1-6.
塚原成夫（1989）．「高等学校数学教育におけるストラテジーについての一考察」，筑波数学教育学研究第 8 号，77-87.
デービス R.B.著、佐伯胖監訳（1987）．「数学理解の認知科学」，国土社．
布川和彦（1988）．「算数・数学における問題解決ストラテジーの二つの型について－問題解決活動との関わりから－」，筑波数学教育学研究第 7 号，183-193.
布川和彦（1988）．「問題解決におけるストラテジーについての基礎的考察」，第 21 回数学教育論文発表会発表要項，日本数学教育学会，29-34.
布川和彦（1989）．「問題解決過程における「図をかく」ストラテジーの役割－児童の事例の考察を通して－」，第 22 回数学教育論文集，日本数学教育学，37-42.
布川和彦（1991）．「学校数学におけるストラテジー指導に関わる問題点について－ストラテジー指導に対する批判を手がかりとした新しい方向性の研究－」，筑波大学教育学系論集第 16 巻第 1 号，83-95.
能田伸彦（1983）．「算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究－授業の構成と評価」，東洋館．

能田伸彦（1995）．「オープン・アプローチによる学習指導」，数学学習の理論化へ向けて，日本数学教育学会編，産業図書，85-98．
波多野誼余夫編（1982）．「認知心理学講座　4　学習と発達」，東京大学出版会．
平岡忠（1985）．「問題解決の意義とその指導」，数学的な考え方と問題解決１研究理論編，中島健三編集，金子書房，33-50．
平林一栄・石田忠男編（1981）．「算数・数学科　重要用語３００の基礎知識」，明治図書．
ポリア G.著、柿内賢信訳（1954）．「いかにして問題をとくか」，丸善．
三塚正臣（1986）．「数学における問題解決の構造について」，金沢大学教育学部教科教育研究第 22 号，33-42．
三塚正臣（1987）．「学校数学における問題解決の方略の分析について」，金沢大学教育学部教科教育研究第 23 号，1-11．
三塚正臣（1988）．「問題解決における一般的ストラテジーの分析と指導について」，第 21 回数学教育論文発表会発表要項，日本数学教育学会，7-10．
村井貫悦（1995）．「答案に別解も書くテストについての一考察」，第 28 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，579-584．
村井貫悦（1996）．「多様な解法と評価法に関する考察」，第 29 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，481-486．
文部省（平成元年）．「高等学校学習指導要領解説」，ぎょうせい．