平成１９年度

学 位 論 文

教 授 学 的 状 況 理 論 を 視 座 と し た 証 明 の 教 授 ・ 学 習 に 関 す る 考 察

兵庫教育大学大学院　学 校 教 育 研 究 科
教科・領域教育学専攻　自 然 系 コ ー ス
Ｍ０６２３２Ｇ　福 本 稔

目　次

はじめに

「なぜ，学校において数学を学ぶのか？」

この問いに答えることこそが，数学教育の目的である。古くて新しい問いであるが，筆者の経験からも，いまだにこのような素朴な，そして根元的な問いを投げかける生徒は多い。では，その問いに対する答えとはいったい何であろうか？

数学教育の目的としてよく挙げられるのが，「実用的目的」，「陶冶的目的」，「文化的目的」の三つである。では，この三つの目的にはどのような意味が含まれているのであろうか？　あるいは，この三つの目的を統合した目的とは何なのか？

その問いに対して筆者の考える答は，「数学教育の第一の目的は，人格形成である」である。数学を学ぶことを通して，一つの人格を形成してほしい。また，人格形成に欠かすことのできない学問の一つが，数学であると考える。日常生活を過ごす中で，実用的価値の高い数学を身に付けることは，よりよく生きるために必要なことである。また，数理的にまたは論理的に事象を思考する力は，人間らしく生きるために大切なことである。そして，これらの内容を現在に残した歴史的，文化的背景を知ることは，その内容の理解を深めるために欠かすことのできないことである。

このように考えたときに，現在の中学校における数学の学習は，その役割を十分に果たしているだろうか？

筆者のこれまでの教職経験において，特にその疑念を強くさせる内容が「図形の証明」であった。古代ギリシャ以来，「数学をするとは証明をすることである」と言われるように，「証明する」ことは，数学的な思考を高めるために必要不可欠な活動であり，数学という学問にとって基礎となる活動である。にもかかわらず，現在の中学校の数学における図形の証明の学習が，その基礎を築いているとは言えない現状がある。証明問題における生徒の到達度の低さはもちろんのこと，証明の意義の理解度の低さ，さらにはその学習自体に意義を感じているのかどうかも含めて，図形の証明の学習が数学教育本来の目的を目指そうとする方向に合致しているのか，はなはだ疑問を感じずにはいられない。

このような現状をふまえた上で，前述した数学教育本来の目的の達成を目指すためには，その教授や学習をどのように行えばよいのか。これが，本研究の動機である。

本研究では，上述の目的を達成するために，「主体は“milieu”に対して同化と調節を繰り返しながら学習する」という Piaget の均衡化理論を一つの前提とした Brousseau の教授学的状況理論に着目する。そして，それを一つの視座として，生徒が「証明」を意義あるものとしてとらえ，その方法を理解し，さらにその学習自体に意義を感じる，そのような教授・学習場面の実践のあり方について探っていくことにする。

２００７年１２月２０日

福本　稔

第　1　章

図形の証明の学習の現状と本研究の主題

本章では，まず，中学校における図形の証明の学習について，その目的及び生徒の実態と，図形の証明の学習の困難性を考察するための二つの観点について述べる。次に，その改善のために，フランス数学教授学における Brousseau の教授学的状況理論に着目した理由について述べ，それらをふまえて，本研究の主題及び本論文の構成について述べる。

本章の構成は，以下の通りである。

第１節　図形の証明の学習の現状

　　１．図形の証明の学習の目的

　　２．図形の証明の学習における困難性

　　３．図形の証明の学習における考察の観点

第２節　本研究の主題と本論文の構成

　　１．本研究の主題

　　２．本論文の構成

第１節　図形の証明の学習の現状

本節では，中学校における図形の証明の学習について，その目的及び生徒の実態と，本研究における図形の証明の学習の考察のための二つの観点について述べる。

１．図形の証明の学習の目的

我が国の学校数学における図形の証明の学習は，明治20年代に菊池大麓によって編纂された『初等幾何学教科書』以来，さまざまな議論が行われながらも今日まで続けられてきている。図形の証明の学習の教育的価値や必要性については，それらの議論において常に認められているところである（清水，1995）。現在のように中学校の第２学年以降に図形の証明の学習が明確に位置づけられたのは，昭和33年の学習指導要領の改訂からであり，その内容は以下のように記されている。

> *（１）図形の合同の概念を明確にし，三角形の合同条件を理解させ，これを用いることができるようにする。*
>
> （中略）
>
> *（３）図形についての研究方法として，論証を用いる意義や方法の理解を図り，論理的に筋道を立てて，考えることができるようにする。*
>
> *ア　帰納や類推によって，推測した図形の性質が正しいかどうか確かめるためには，根拠とすることがらや，用語の定義が明確であり，推論の筋道が論理的に正しいことが必要であること。*
>
> *イ　論証における仮定と結論の意味。*
>
> *（４）次のような図形的な性質を明らかにし，これを用いることができるようにする。*
>
> （以下略）　　　　　　　　　　　　　　（文部省，1959，pp.88-94）

この内容については，それ以降の学習指導要領の改訂のたびに若干の変更は行われているものの，現在までほぼ踏襲されている。現行の「中学校学習指導要領解説－数学編－」（文部省，1998）では，図形領域の指導の意義として「図形の概念形成と性質の理解」と「論理的な思考力の育成」の二つが挙げられている。この二つの内容が不可分であることは，昭和33年の改訂時の学習指導要領指導書にも次のように述べら

れている。

図形についての研究方法として，実験，実測的な方法や帰納的な方法は，小学校以来これまでじゅうぶんに親しんできた。これらの方法は，図形の性質や関係を見通したり，個々の具体的な図形を処理する方法としてはたいせつであり，今後も重視する必要があるが，見通した性質や関係の正しさや一般性を保証したり，図形の概念を確実にし，豊富にする点からいって，必ずしもじゅうぶんではない。

もう一つの研究方法として，論証的な方法が必要である。すなわち，根拠とすることがらや，用語の定義を明確にし，定義と性質とを区別したり，仮定と結論の意味を明らかにして，論理的に筋道を立てて正しい推論を行うことである。（p.92）

すなわち，図形の概念形成や性質の理解には，演繹的な推論を行うことが不可欠な条件であると述べられている。では，演繹的な推論をなぜ図形領域において始めなければならないのか。現行の学習指導要領解説－数学編－（文部省，1998）には，その理由が以下のように記されている。

中学校数学の大きな特徴は，「図形」領域において，演繹的な推論の方法を活用することにある。それは，図形に関する内容が，演繹的な推論を行うのに適した教材であり，また，豊富な問題を提供しうること，その推論の過程が視覚に訴える図形によって裏付けられることによる。（p.41）

つまり，演繹的な推論を行うこと，すなわち「証明する」ことの意義や方法を学ぶには，図形領域は望ましい教材であり，また，上述したように，図形の概念形成や性質の理解をするためには，「証明する」という活動が不可欠であるという相互関係が存在している。

古代ギリシャ以来，「数学をするとは証明をすることである」と言われるように，「証明する」ことは，数学的な思考を高めるために必要不可欠な内容であり，数学という学問にとっての基礎となる活動である。その第一歩として，中学校の図形領域の学習では，ただ単に図形の概念形成や性質を理解することのみにとどまらず，「証明

する」という活動の意義や方法を学ぶ機会として，その学習が行われなければならないと考える。

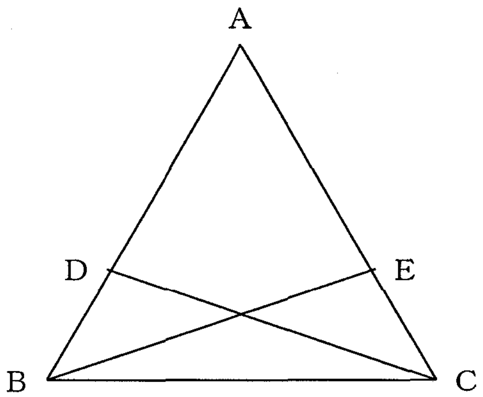
２．図形の証明の学習における困難性

前小節で述べたように，図形の証明の学習は，中学校の数学において重要な学習内容の一つである。しかし，その学習における困難性は，数多くの調査や実践によって，つねに指摘され続けている。

例えば，平成19年に実施された全国学力・学習状況調査においても，その困難性が示されている。下の**図１－１**は，同調査における結果を示したものである。

下の図のようなＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣがあります。辺ＡＢ，辺ＡＣ上にＢＤ＝ＣＥとなる点Ｄ，点Ｅをそれぞれとります。

このとき，ＣＤ＝ＢＥとなるとなることを，次のように証明しました。



証明

△ＤＢＣと△ＥＣＢにおいて，

仮定から，ＢＤ＝ＣＥ ……①

△ＡＢＣは二等辺三角形なので底角は等しいから，

∠ＤＢＣ＝∠ＥＣＢ ……②

また，　ＢＣ＝ＣＢ（ＢＣは共通） ……③

①，②，③より，$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ から，

△ＤＢＣ≡△ＥＣＢ

したがって，ＣＤ＝ＢＥ

上の $\boxed{\qquad\quad}$ に当てはまる三角形の合同条件を，下の**ア**から**オ**の中から１つ選びなさい。

ア　３辺がそれぞれ等しい

イ　２辺とその間の角がそれぞれ等しい

ウ　１辺とその両端の角がそれぞれ等しい

エ　直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい

オ　直角三角形の斜辺と１つの鋭角がそれぞれ等しい

正答率・・・７３．９％

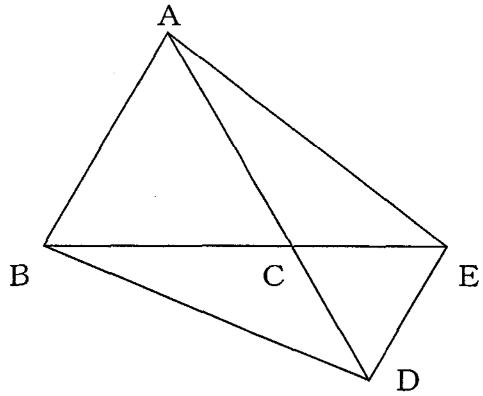
（参考　平成15年度小・中学校教育過程実施状況調査　第２学年
正答率・・・７３．１％）

図１－１　（文部科学省，国立教育政策研究所，2007，pp. 140-141）

この調査結果が示すように，適切な三角形の合同条件をただ単に選択する課題においても，四分の一以上の生徒が誤った選択をしており，図形の証明についての理解が不十分であることが伺える。

また，証明を生徒自身が一から構成し，それを記述する課題になると，その到達度はさらに著しく減少する。**図１－２**は筆者の勤務していた山口県の第２学年を対象とした平成 17 年度の調査結果である。

線分ＡＤとＢＥが点Ｃで交わっています。△ＡＢＣと△ＥＤＣがそれぞれ正三角形であるとき，ＡＥ＝ＢＤを証明しなさい。



調査人数１，０９４人　　　　正答率・・・３７．５％

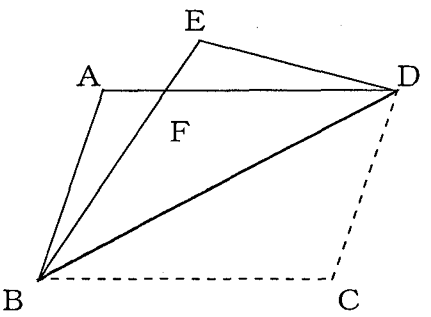
図１－２　（山口県中学校教育研究会数学部会他，2006，pp. 69-72）

この正答率は，例えば平成 15 年度教育課程実施状況調査（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004）などの他の全国調査における証明の記述問題と，ほぼ同様の結果である。三角形の合同条件を利用した基本的な証明問題を記述できる生徒の割合は，半数を超えない現状にあることがわかる。

さらに，証明に用いるアイディアを自ら見いださなければならないような課題では，その到達度はさらに低下する。**図１－３**は山口県の第３学年の平成16年度の調査結果である。

右の図のように，平行四辺形ＡＢＣＤを対角線ＢＤを折り目として折り返しました。頂点Ｃが移る点をＥ，ＢＥとＡＤの交点をＦとします。

△ＦＢＤが二等辺三角形であることを証明しなさい。



調査人数１，８２１人　　　　正答率・・・１４．０％

図１－３　（山口県中学校教育研究会数学部会他，2005，pp. 85-88）

この課題では，「折り返す」という操作によってできた線対称な位置にある角度は等しいという条件を用いなければ証明できないが，それを見いだすことに多くの生徒は困難を感じたのではないかと分析されている。

これらの図形の証明の学習に関する困難性は，現行の学習指導要領になって生じてきたものではない。例えば，昭和 58 年に実施された学習達成状況に関する調査（文部省初等中等教育局，1985）における三角形の合同条件を用いた証明の記述問題の通過率は３９．０％であり，現状とほぼ変わらない結果である。また，その報告書においては，「２年の論証の問題としては，基礎的・基本的な内容なので，この通過率では十分でない」と評価されており，この困難性は現在に至るまで継続的な問題であるととらえることができる。

3．図形の証明の学習における考察の観点

前小節では，図形の証明の学習の困難性について生徒の実態を述べた。では，このような図形の証明の学習の困難性をどのような観点でとらえればよいのであろうか。

山下（1987）は，中学校の図形の証明学習における生徒の実態を分析するための五つの観点を示している（**表１－１**）。

表１－１　図形の証明の学習における五つの観点（山下，1987，pp. 22-23）

観点１	記号化	… 言葉だけで述べられている命題を，記号を用いた命題に直すこと
観点２	証明	… 図形の性質を基本的な性質をもとに演繹的に導くこと
観点３	図の意味	… 描かれた特定の図を，命題に述べられている図形の代表として捉えること
観点４	「文章化」	… 証明した内容をとらえて，一般命題の文章に直すこと
観点５	論証の意義	… 証明することの必要性やその意義がわかること

筆者は，この五つの観点を，さらに大きく二つにまとめてとらえることができると考える。一つは，「証明する」のは何のためなのか，という証明の意義を理解しているかどうかという観点であり，もう一つは実際に「証明する」ことができるかどうかという観点である。証明の学習指導において，この二つの理解の観点は不可分である。証明の意義の理解ができてこそ，証明を行うことの理解はより促進される。また逆に，たとえ証明を行うことができても証明の意義の理解が不十分であれば，形だけの学習にとどまり，前節で述べた証明の学習の目標が達成されることはない。この両者の理解が相互的に促進されてこそ，証明の学習は意味あるものとなる。

しかし，図形の証明の学習の現状は，このような状態にないことが先行研究においても指摘されている（例えば，国宗，1987）。証明の意義を理解していても，その遂行が必ず可能になるとは言えないであろうし，また，証明を行うことができるとして

も，必ずしもその意義を理解しているとは限らない。

そこで，本研究においては，図形の証明の学習の困難性を，「証明の意義の理解の困難性」と「証明の遂行場面における困難性」の大きく二つの観点でとらえ，それぞれについて考察を進めていくことにする。**表１－２**は，その内容をまとめて示したものである。なお，この表における点線は，その観点の境界が必ずしも明白ではないことを示している。上述したように，この二つの観点は実際の教授・学習場面においては不可分なものであり，例えば，山下による「図の意味」の観点は，本研究における二つの観点において，ともに必要となる観点である。

表１－２　本研究における図形の証明の学習の困難性の観点

本研究における観点	山下（1987）における観点
①　証明の意義の理解の困難性	論証の意義，
	図の意味
②　証明の遂行場面における困難性	証明，記号化，「文章化」

第２節　本研究の主題と本論文の構成

本節では，前節で示した図形の証明の学習の困難性を改善するために，フランス数学教授学における Brousseau の教授学的状況理論に着目した理由について述べる。次に，それらをふまえて，本研究の主題及び本論文の構成について述べる。

１．本研究の主題

前節で述べた図形の証明の学習における困難性は何に起因するのであろうか？

第一の要因として，現在の中学校における図形指導が，生徒に完成された図形の知識や体系を与えようとしている点にあるのではないか（太田，1991）と考える。いくつかの先行研究においては，この点に関しての提言や示唆を含む実践が行われている。しかし，中学校における図形の証明の学習の現状として，完成された知識を生徒に身に付けさせようとするあまり，教師が権威的に指導を行い，生徒主体の学習が進められていないことが多いのではないだろうか。

また，その結果，第二の要因として，図形の証明の学習において，多くの場合「～を証明せよ」という課題が与えられることによって，生徒にとって問題解決的な学習になりにくいという点があるのではないかと考える。そのため，証明の意義を生徒が感じることなく，さらにはその証明が意味することを理解することなく，学習が進められているのではないだろうか。

中原(1994)は，数学教育のパラダイムを絶対主義的な数学観から社会的構成主義的な数学観へと転換する必要性を，以下のように述べている。

> *子供たちには，教師からの伝達だけによっては，意味を伴う数学的知識を獲得させることはできないこと，また，子供たちは隠された数学的知識を発見しているというよりも，子供たちなりに自らの数学的知識を構成していると捉える方が適切であること，これらのことは日々の問題解決的な授業実践を振り返ってみれば十分に納得できるのではなかろうか。*（p.9）

すなわち，絶対的な数学的知識を教師から生徒へ一方的に伝達する指導ではなく，教授・学習場面における「教師」，「生徒」，「数学的知識」の三者の望ましいあり方を考え，図形の証明を生徒が主体的に学習する場面を構成することが重要であると考

える。

そこで，本研究においては，「生徒は，矛盾や困難さ，不均衡を生じる“milieu”に自分自身を適応させることによって学習する」(Brousseau，1997，p.30) という Piaget の均衡化理論を前提とする Brousseau の教授学的状況理論（Theory of didactical situations）に着目する。この理論は，フランス数学教授学における基礎理論の一つであり，まさに「教師」，「生徒」，「数学的知識」の三者間の関係を重視した教授・学習理論である。この理論を視座として望ましい図形の証明の教授・学習場面を考察していくこと，これが本研究の目的である。

そのために，本研究では，まず，この教授学的状況理論を概観し，その主要な要素である「教授学的契約（didactical contract)」及び「委譲（devolution)」の概念について述べる。そして，前節で述べた「証明の意義の理解の困難性」及び「証明の遂行場面における困難性」について，教授学的契約の概念を視座として証明の学習における困難性の所在を明らかにし，委譲の概念をもとにして望ましい教授・学習場面のあり方について考察を深めていくことにする。

２．本論文の構成

本論文は，五つの章からなる。本章第１節では，まず，中学校における図形の証明の学習の目的について述べるとともに，その困難性について生徒の実態を述べ，その困難性を考察するための二つの観点「証明の意義の理解の困難性」と「証明の遂行場面における困難性」について述べた。

次に，本節では，さらにその改善に向けて，フランス数学教授学における Brousseau の教授学的状況理論に着目した理由について述べ，本研究の目的が，「教授学的状況理論を視座として望ましい図形の証明の教授・学習場面を考察していくこと」であることを述べた。

そして，この目的を達成するための具体的方法として，「証明の意義の理解の困難性」及び「証明の遂行場面における困難性」の所在を教授学的契約の概念を視座として明らかにし，委譲の概念をもとに望ましい教授・学習場面のあり方について考察を深めていくことを述べた。

第２章では，視座とする教授学的状況理論の土台となるフランス数学教授学について概説し，教授学的状況理論の二つの前提及びこの理論によって特徴づけられる亜教授学的場面の概略について述べる。そして，この理論の主要な要素である「教授学的契約」と「委譲」の概念について，本研究での位置づけを考察する。

第３章では，証明の意義の理解に関する生徒の困難性の所在を，Sowder & Harel（1998）の証明及び正当化の図式をもとにして明らかにし，その困難性の一因となる教授学的契約について考察する。そして，その教授学的契約の進化をねらう問題の委譲の条件を抽出し，それをもとに教授・学習場面の事例的考察を行う。

第４章では，証明の遂行場面における困難性の所在を Herbst（2002）の先行研究をもとにして明らかにし，その困難性の一因となる教授学的契約について考察する。そして，その教授学的契約をネゴシエーションする問題の委譲の条件を抽出し，それをもとに教授・学習場面の事例的考察を行う。

そして，第５章では，第３章および第４章での考察をもとに本研究のまとめを行い，さらに，今後の課題について述べる。

第　2　章

教授学的状況理論

本章では，本研究において視座とする教授学的状況理論の土台となるフランス数学教授学について概説し，教授学的状況理論の二つの前提及びこの理論によって特徴づけられる亜教授学的場面の概略について述べる。そして，この理論の主要な要素である教授学的契約と委譲の概念について，本研究での位置づけを考察する。

本章の構成は，以下の通りである。

第１節　教授学的状況理論

　　１．フランス数学教授学

　　２．教授学的状況理論

第２節　教授学的契約

　　１．教授学的契約の概念

　　２．教授学的契約の意図するところ

　　３．教授学的契約の概念の拡張

第３節　委譲

　　１．委譲の概念

　　２．Balacheff の研究における事例

第１節　教授学的状況理論

本節では，本研究において視座とする教授学的状況理論の土台となるフランス数学教授学について概説し，教授学的状況理論の二つの前提及びこの理論によって特徴づけられる亜教授学的場面の概略について述べる。

１．フランス数学教授学

本小節では，教授学的状況理論を知る上で前提となるフランス数学教授学の起源とその目的について述べる。

数学の学習における困難性に関して，

「その困難性は，いかなる性質を持つのか」

「教師は本当にその困難性を理解しているのか」

「その困難性の根本問題は何か」

といった疑問が以前より投げかけられているが，これらの疑問に対する返答が，経験主義的な態度や見解によって語られることが少なくない。

それに対し，これらの困難性に関する諸問題を，理論的・科学的に説明，記述し，明らかにしようとする試みが，1960 年代後半からフランスの G.Brousseau や G.Vergnaud らによって始められた。数学の教授・学習の改善を目指すこの試みが，ひとつの学問・研究領域となり，それが「フランス数学教授学」と呼ばれるフランス固有の「数学教授学[1]」として成立した（宮川，2002b）。

Balacheff（1990）は，数学教授学の目的を次のように述べている。

我々のねらいは，数学の教授と学習に関連した現象やプロセスについて，知

---

[1] 「フランス数学教授学」の「教授学」という語は，他国や他の教科・領域で一般に「教授学」と呼ばれているものとは区別される。すなわち，フランスでは「教授学」の中に「数学教授学」が位置づけられているのではなく，数学に固有の「教授学」が存在する。英語に翻訳される際にも，フランス語の *didactique* の語がそのまま用いられており，一般の「教授学」とは区別されている（宮川，2002b）。

識の基本的体系を構成することである。そのような企ての社会的目的は，教授ー学習場面をデザインしたり，コントロールしたりすることを教師自身に可能にさせることであり，既成のプロセスを再生産することではない。この知識は，教師を，彼らが出会う実践的問題を解くことや，彼らの実践を実際の教室に適用することを可能にするであろう。(p.269)

すなわち，フランス数学教授学とは，数学の教授・学習における現象と数学的知識のモデル化への取り組み（宮川，2002b）であり，数学の教授・学習を，経験論的ではなく，理論的に体系化することが，フランス数学教授学の目的である。

このような理論化の動きは，特にフランスに限った動きではない。日本や他の国々においても数多く見受けられるが，フランス数学教授学はその中でも最も体系的に取り組まれているものの一つである（溝口，2003)。

では，数学の学習の困難性は，何に起因するのであろうか？

フランス数学教授学では，数学の学習の困難性は，数学的知識そのものに本質的に伴う複雑性・特殊性に起因することを前提とする。また，この複雑性・特殊性は，知識を教授・学習という「特殊な状況」に置くからこそ生じるものであるともされている（宮川，2002a)。

この複雑性・特殊性を明らかにするために，フランス数学教授学では，「教師」・「生徒[2]」・「数学的知識」の三者による教授システム（*système didactique*）の性質及び三者間の相互関係である教授学的関係の分析に焦点を当てる（宮川，2002b)。

数学教授学者は，教師・生徒・数学的知識の間に働いている作用ー具体的に授業で観察され，後で再構成できる作用ーに関心をもっている。この三つのものの占める場所が，教授組織（système didactique）であり，この三者関係が教授学的関係である。(Chevallard，1991，p.14)

---

[2] 先行研究においては，学習主体として「生徒」，「児童」，「子ども」，「学習者」など様々な表現が用いられているが，本研究は中学校での教授・学習に関する研究であるため，学習主体を「生徒」と表現する。

つまり，フランス数学教授学の研究の基本的な立場は，教授・学習という現象を引き起こす要因が，教師もしくは生徒個人に固有のものではなく，教師・生徒・数学的知識の三者に固有ものであるととらえることである（宮川，2007）。

このような立場のもと，フランス数学教授学を代表する基礎理論として挙げられるものとして，Y.Chevallard による「教授学的変換[3]」や G.Brousseau の「教授学的状況理論[4]」などがある。

Chevallard（1991）は，数学教育において，それまで教授者と被教授者の関係のみが重視して語られてきたことへの危うさを説き，特に数学的知識に注目し，この知識は集団や共同体の所産であるとして,「教授学的変換」の理論を構築した（宮川, 2002a）。

> *知識内容は，教えるべき知識として指定されると，それは，そのときから，一群の適応変形を受け，その変形によって，教育の対象としてふさわしい地位を与えられるようになる。教えるべき知識の対象から，教育の対象を作るこの「作業」は，教授学的変換といわれる。*（Chevallard，1991，p.34）

つまり，教授学的変換とは，教科の母体となる学問分野で対象とする「数学的知識」から学校数学の対象となる「教えるべき知識」への，さらには「教えるべき知識」から教授学的社会でより伝承しやすい知識，すなわち「教える知識」へと知識を変容する行為であり，これらの知識の性質はどう異なるのか，また，異なるとすれば，それぞれはどのように特徴づけられるかということを，教師・生徒・数学的知識の三者の相互関係から位置づける試みである（Chevallard，1991；小原，2002)。この教授学的

---

[3] 原語は「Transposition didactique」であり，この訳語として「教授学的変換」もしくは「教授学的置換」が用いられている（例えば，宮川，2002a；小原，2002）が，どちらか適切であるかについては，定まった見解はない。

[4] 「教授学的状況理論（Theory of didactical situations）」における「状況」及び「場面」は，“situation”の訳であり，元来同じ語である。本研究では，宮川（2007）に倣い，理論名の訳語としては一般的な「状況」を用いるが，教授・学習という現象における具体的な“situation”に対しては，「場面」の訳語を用いる。（宮川は，訳語として「場」を用いているが，この訳語にはさらに検討が必要であると述べている。）

変換の概念は，数学的知識を整理・体系化するプロセスと数学を創るプロセスを区別し，数学教授学を論じていく上で基本的な視点の一つとなる（小原，2001）。

また，Brousseau（1997）は，生徒に与えられた学習場面[4]において，危うくなった数学的知識を分析することによって，教授・学習場面における現象を論じる教授学的状況理論（Theory of didactical situations）を構築した。この理論は，数学的知識は，生徒が教授学的場面において教師によって設定された milieu [5] と接する game において行動することによって獲得されるという立場をとる。次の小節では，この教授学的状況理論の概略について述べる。

[5] “milieu”は一般的には「環境」と訳されることが多いが，Brousseau は数学教授学に固有なものとして“milieu”の語を用いており，一般的な日本語の「環境」の意味することとは異なるため，本研究においてはあえて訳さずに用いる。

２．教授学的状況理論

Brousseau（1997）は，前述のフランス数学教授学の目的に沿って，子どもは学習場面においていかに数学的知識を受けとめ獲得するのか，その過程と場面のモデル化を試みた（宮川，2002b）。これが教授学的状況理論である。この理論では心理学的前提（学習の前提）と教授学的前提（教授の前提）の二つの前提をおき，それをもとに理論化が進められている。

（１）心理学的前提（学習の前提）

Brousseau（1997）は，第一に，構成主義の立場に基づく Piaget の「主体は“milieu”に対して同化と調節を繰り返しながら学習する」という均衡化理論の主張を前提とし[6]，「生徒は，矛盾や困難さ，不均衡を生じる“milieu”に自分自身を適応することによって学習する」(p.30) と知識獲得の条件を明確にした。

ここでの milieu は，教授学的状況理論において最も重要な要素の一つである。Sierpinska（2003）は，milieu について以下のように述べている。

> *“milieu”は，「水は魚のための自然な milieu である」のように，恐らく生態学的な意味で理解されるであろう。したがって，「教授学的 milieu は生徒のための自然な milieu である」。人間は，通常いくつかの様々な milieu の中で生き，そこにおいて様々な役割を演じる。身近な milieu としては，子ども，母親，父親等があろう。スポーツの milieu としては，選手やコーチ等があろう。他の可能な役割は，活動場所の milieu，社会的 milieu 等において演じられるであろう。学校の milieu としては，生徒や教師，管理者があろう。各教育課程において，生徒は固有な milieu に対処しなければならず，その課程における各授業においてより固有な milieu が存在する。*(Lecture 1，p.1)

---

[6] 宮川 (2002b) は，「教授学的状況理論は Piaget の主張を前提としてはいるが，Piaget の心理学とは目的を異としている。教授学的状況理論では，場をモデル化し，望ましい教授・学習場面の条件を導くことを目的としており，主体である子どもの心理にはまったく触れていない」(p.67) と述べている。

Brousseau が用いる milieu とは，上述の引用の最後の一文の「各授業における milieu」である。すなわち，教授学的状況理論では，対象となる数学的知識に固有な，もしくはその知識の側面に固有な milieu のみをモデル化の対象とする。さらに，milieu は，その語の意味から，対象となる数学的知識において不変なものではなく，生徒や学習場面によってそれぞれ異なるものであるといえる。

また，Brousseau（1997）は，先に述べた心理学的前提に従い，milieu の条件として，「生徒の働きかけに対して何らかの情報や反発としてフィードバックを与えること」を挙げている。**図２－１**は，生徒と milieu の関係を表した図であり，左から右への矢印が生徒の働きかけ，右から左への矢印が milieu によるフィードバックを表している。

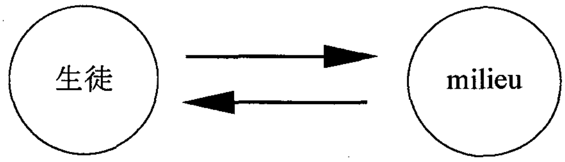


図２－１　非教授学的場面 (Brousseau, 1997, p. 55)

教授学的関係の視点から見ると，この図において教師は存在しない。すなわち，この図は，生徒は教師の要求にしたがって学習するのではなく，生徒自身の milieu への働きかけのフィードバックに対して，自らの行動を振り返ったり，軌道修正したりすることによって学習することを表している。Brousseau は，このように教授意図の存在しない状態を「非教授学的場面（non-didactical situation）」と呼んでいる。

（２）教授学的前提（教授の前提）

前述の心理学的前提に基づく非教授学的場面における生徒と milieu の関係だけでは，教師の期待する数学的知識のすべてを生徒に獲得させることが困難であることは明白であろう。Brousseau（1997）は，以下のように述べる。

> *教条主義による教科の教授に帰されることを「自然に」学習することに帰することによって，ピアジェ派の理論は，教師のすべての教授学的責任を軽減する危険性を得る－これは一種の経験主義に矛盾した返答を構成する！　しかし，教授学的緊張のない milieu は，我々が生徒に獲得することを期待する文化的知識をすべて生徒に引き出すためには，明らかに不十分である。*(p.29)

すなわち，心理学的前提のみによって文化的に認められる数学的知識のすべてを生

徒に引き出すことは非常に困難であるため，「教授の現代の概念は，生徒に期待された適応を引き起こすことを教師に要求する」（上掲書，p.29）。これが，教授学的状況理論の第二の前提となる教授学的前提（教授の前提）である。したがって，教師は生徒に獲得させたい数学的知識を生じるような milieu への働きかけを行う必要性が生じることになる。

（３）亜教授学的場面[7]

上述の二つの前提に基づいて，Brousseau（1997）は教師・生徒・milieu 間の教授学的関係について，理想的な教授・学習場面をモデル化した。この教授・学習場面に関して，Brousseau は以下のような条件を挙げている。

１）教師は，生徒が自分自身のものとして受け入れるような問題設定を行う。
２）生徒は，自分自身の動機づけによって活動し，対話し，思考し，展開していく。
３）教師は，これらの生徒の活動の間，干渉したり，指示したりすることを控える。
４）生徒は，その問題が新しい知識を獲得することを支援するということをよく理解すると同時に，教授学的理由ではなく場面の本質的な論理によってその知識が正当化されるということを理解する。

これらの条件は，前述の心理学的前提，つまり，「教授の文脈外であり，かつ意図的な指図のない場面において，生徒は自分自身が用いるために知識を得るときにのみ，真にこの知識を獲得する」(p.30) という考えに基づくと同時に，「教授意図のない milieu は生徒に数学的知識を引き出させるには不十分である」という教授学的前提をも考慮している。すなわち，生徒は milieu との相互作用により数学的知識を獲得するのではあるが，同時にその milieu は教授学的な意図を含まなければならない。Brousseau は，このような教授・学習場面を「亜教授学的場面（adidactical situation）」と呼び，

---

[7] “adidactical situation”は，以前は「無意識な教授学的状況」と訳されていたが（宮川，2002b；梅實，2004 など），宮川（2007）は一つの専門用語として導入するために「亜教授学的状況」の語を用いている。「亜」には「準ずる」や「二番目の」といった意味があるが，ここでは必ずしもその意味で用いてはいない。本研究においても宮川の意に沿って，「亜教授学的場面」と訳して用いる。

この亜教授学的場面における milieu を「亜教授学的 milieu（adidactical milieu)」と呼んでいる。

この亜教授学的場面を図式化したものが，**図２－２**である。この図は，実際の問題設定などにおいては教師の介入が行われているが，生徒がその問題解決を教師の要求であるとは意識せずに，問題を自分自身の問題として，現在置かれている状況に内在する論理のみに頼って答を出せると思えるような場面を示している。図の点線の矢印は，教師による働きかけは行われているが，生徒にとっては自ら学習しているように思える，すなわち教師の介入が不透明であることを表している（宮川，2002b）。換言すれば，亜教授学的場面とは，生徒が「あたかもひとりで新たな知を構築し，発見できたと思えるような理想的な」学習場面であるといえる（宮川，2002a）。

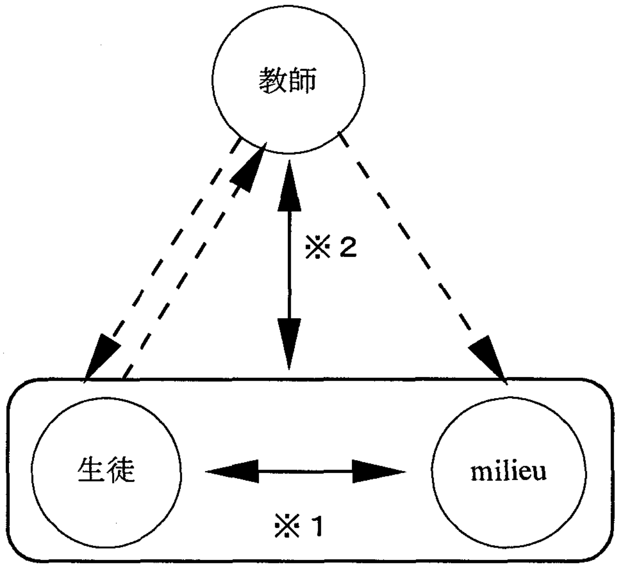


図２－２　亜教授学的場面(Brousseau, 1997, p. 56)

また，Brousseau（1997）は，この教授・学習場面における行為を“game”という語を用いて表している。亜教授学的場面における game の種類には，生徒の game と教師の game の二種類がある。生徒の game とは，亜教授学的 milieu との相互作用における行為，すなわち**図２－２**の**※１**を指している。教師の game とは，**※１**の game を組織する教師の行為，すなわち**図２－２**の**※２**を指している。これらの game において，教授学的状況理論における重要な要素である「教授学的契約（didactical contract）」が生じる。次節では，この教授学的契約について述べる。

第２節　教授学的契約

本節では，教授学的状況理論の主要な要素の一つである教授学的契約の概念について述べる。

１．教授学的契約の概念

教授学的契約（didactical contract）は，教授学的状況理論における主要な要素の一つであり，学習の対象となる特定の数学的知識に関する教師と学習者との相互的な期待において生じるものである。Brousseau（1997）は，この教授学的契約を以下のように定義する。

> *教師によって準備され提供された教授場面において，生徒は一般的に与えられた（数学的）問題を解くという課題を持つ。この課題への接近は，尋ねられた質問の解釈，提供された情報及び負わされている拘束を通してなされるが，これは教師の教授方法において恒常的なものである。これらの教師の（特異な）習慣は生徒によって期待され，生徒の行動は教師によって期待されるーこれが教授学的契約である。*（p.225）

つまり，数学の教授・学習場面では，教師は学習対象となる数学的知識が生じるような問題を準備し，その問題を生徒に伝えようとする。生徒は，質問の解釈や与えられた情報や拘束に従ってその問題に取り組む。その場面において，教師は生徒を支援する義務を持ち，生徒はそのような教師の支援を期待する。また，逆に生徒はその問題の解決に向けて取り組み，行動するよう教師から期待される。すなわち，教授・学習のパートナーである教師と生徒は，教授・学習場面において相互的な期待の関係を生じ，その期待に応えようと相互的な責務を負って行動する。この相互的な責務は「契約」に似ており，その契約[8] に従うかのように生徒は学習活動を行う。Brousseau は，これらの契約の中の学習対象となる数学的知識に固有のものを教授学的契約と呼んで

---

[8] ここでの「契約（contract）」の概念は，社会的に用いられる「契約」の意とは異なり，教授学的場面における暗黙的なものを指している（Herbst & Kilpatrick，1999）。

いる。

Brousseau（1997）はまた，「教授学的契約は，教授学的場面の game のルールと方略である」（p.31）とも定義している[9]。この game に関する教授学的契約の定義について，溝口（2004）は以下のように述べている。

> *いかなるゲームにおいても，ルールと戦略が存在する。特に，教師と児童・生徒／ミリューシステムの間のゲームにおいては，そのようなルールや戦略は教授内容（知識）に固有のものとして認められ，これを「教授学的契約（Didactical Contract）」と呼ぶ。したがって，ゲームのプレーヤーやあるいはゲームそのものの進化を語ろうとすれば，知識と教授学的契約の両方に目を向ける必要がある。*（p.38）

また，Sierpinska（2003）は教授学的契約について以下のように述べている。

> *教授学的契約というルールは暗黙的である－教師と生徒は，教授学的関係の中へ入る時に「権利や義務」のチャート(chart)に調印しない。*(Lecture 3，p.1)

つまり，教授学的契約とは，教授・学習場面での相互的な期待や責務によって生じる契約のようなもののうち，学習対象である数学的知識に関する暗黙的なルールや方略であるといえる。

---

[9] 教授学的契約は元来抽象度の高い概念であり，現在のフランス数学教授学においては，教授学的契約とは，教師と生徒の相互期待，責務における暗黙的な関係のことを指し，数学的知識に関する具体的なルールや方略は「教授学的契約によって生じている暗黙の規則」として述べられることが多い。しかし，本研究では，論旨を明確にするために，引用した Brousseau の教授学的契約の定義に基づき，教授学的契約を「数学の教授・学習場面における game のルールと方略である」ととらえることにする。

２．教授学的契約の意図するところ

教授学的契約は，そもそもは教授・学習の失敗事例を分析するために Brousseau によって導入された概念である。Sierpinska（2003）は，次のように述べている。

それら（教授学的契約）はそこ（教授・学習場面）に存在し，それらが破られたときにそれらがそこにあることを我々は知る。（Lecture 3，p.1）

つまり，教授学的契約の存在は，その契約に起因する学習の困難さが生じた時に始めて明白になるといえる。

Herbst & Kilpatrick（1999）は，「船長の年齢問題」を例として，文章題における教授学的契約の問題に関して述べている。「船長の年齢問題」とは，

Ａ：「船の上に，26 匹の羊と 10 匹のヤギがいる。船長は何歳ですか？」

Ｂ：「船に 36 匹の羊がいる。10 匹が水の中に落ちた。船長は何歳ですか？」

といった問題である。この問題に対して，Ａ：「36 歳」，Ｂ：「26 歳」と答える生徒がいる。これらの生徒はこの場面において，意味づけを行うために数学を用いようとしたのではなく，むしろこの場面において数学を探すような行為をしている。すなわち，この問題は，これまでの数学（算数）の文章題解決の実践において確立された教授学的契約の破棄（breaking of the contract）を生徒に提供している。例えば，Ｂの問題においては，いくつかの羊が水の中に落ちたという情報は，「数を減ずる」ことを明らかに指示しており，これまでの教授学的契約に従った生徒は，自ずと前述のような答えを生じ，実践における学習の困難さを生じてしまう。

このように教授学的契約の概念は，「生徒の学習の極度の機能不全を理解しようと努める理論的な必要性として表れる」（Brousseau，1997，p.225）ものであり，「『良好な契約』という考えを扱うというものではない」（Balacheff，1999，p.27）とされている。また，前述したように，教授学的契約は教授・学習場面における教師と生徒の相互的責務によって暗黙のうちに存在するものである。

教授学における理論的な概念（concept）は，それ故に，契約（良い，悪い，

真実の，誤った契約）ではなく，契約を探すという仮定的なプロセスである。このプロセスは観察を表現することであり，それらをモデル化し説明しなければならない。（Brousseau，1997，p.32）

すなわち，教授学的契約は，生徒の学習に支障が生じた場合に明白になるものであり，また，学習の対象となる数学的知識や各々の教授状況によって様々な生じ方をするものである。したがって，この契約の概念は，教師が自身の実践を理解するのを助けるかもしれないが，その実践を行うための「技術的な道具」ではないとされている（Herbst & Kilpatrick,1999）。

３．教授学的契約の概念の拡張

溝口（2004）は，この教授学的契約の対象を拡げ，「教授学習場面においてこれを顕在化させることで，既存の教授学的契約を進化させることを通して，教授学習内容としての知識の進化をねらう」（p.38）ことが可能であると論じている。

このような教授学的契約の解釈は，フランス数学教授学における元来の教授学的契約の概念を越えた範囲を対象としているが，「そのように考えることで，児童・生徒の学習内容としての知識を整理し，また教授学習場面の設計においてそのような知識の整理が有効である」（上掲書，p.38）という考えに基づいており，本研究においても同様の立場をとる。すなわち，図形の証明に関する先行研究に基づいて，想定されうる教授学的契約を顕在化し，その進化をねらう教授・学習場面の設計を行うことによって，教授・学習内容としての知識の進化をねらいたい。

また，Herbst（2006）は，「教授学的契約が教師と生徒の間の教授・学習活動を制御するという前提は，参加者の間のこの契約のネゴシエーションの中へと探究をうながす」（p.315）と述べ，教授学的契約のネゴシエーションの可能性を示唆している。さらに，「契約のネゴシエーションは，契約のもとに存在する多くのルールや学習対象に関するネゴシエーションである」（p.319）と述べ，教授学的契約のネゴシエーションを行うことによって，幾何学における生徒の推論活動が活性化できるという立場をとっている。本研究においても，Herbst と同様の立場をとり，教授学的契約を顕在化させ，そのネゴシエーションを行う活動を構成することによって，教授学的契約の問題に起因する学習の困難さの解消に向けた教授・学習場面を構成しうると考える。

さらに，溝口（2004）は，前述したように教授学的契約を進化させるためには，これまでの教授学的契約を認めながらも，その限界や問題性を顕在化させるような問題の委譲を行う必要が生じると述べている。本研究においても，このような問題の委譲を行うことにより，「教授学的契約の進化」や「教授学的契約のネゴシエーション」をうながすことができるという立場をとる。次節では，この問題の委譲の概念について述べる。

第３節　委譲

本節では，教授学的状況理論の重要な要素であり，学習過程における知識獲得の条件となる「委譲」の概念について概説し，図形の証明における委譲の例として，Balacheff（1990）の研究における事例について考察する。

１．委譲の概念

Brousseau（1997）は，「委譲（devolution）」の概念を，以下のように定義している。

委譲は，教師が（亜教授学的な）学習場面や問題に対する責任を生徒に受諾させ，この責任の一連の転換を引き受ける行為である。（p.230）

前節でも述べたように，ここでの亜教授学的な学習場面とは，数学的な知識はその学習場面における本質的な論理によって正当化され，教授学的な根拠（例えば，「教師や友人が認めたから」や「教師がそのように導いたから」など）に訴えることなくその知識を構成することができるという学習場面である（上掲書，p.30）。したがって，教師が知識を伝達するのではなく，亜教授学的な学習場面に生徒を置くことにより，生徒が自分自身の問題としてその問題に取り組んでいく状況を生じさせることが委譲であるといえる。

さらに，Brousseau は，問題の委譲について，以下のように述べている。

数学を“行う”ためのただ一つの方法は，ある特有の問題を探究し解くことであり，この機会に新しい問題を生起することであるということを我々は知っている。したがって，教師は知識の伝達ではなく，よい問題の「委譲」を行わなければならない。（上掲書，p.31）

すなわち，よりよい問題の委譲を行うことによって，生徒が新たな問題意識を生起するような学習場面が生じると考えられる。

では，問題の委譲を行うためにはどのような教授・学習場面を構成すればよいのであろうか。Brousseau（1997）は，「いかなる数学的知識にも，それに意味を与えるひ

とつもしくは複数の亜教授学的場面が存在する」(p.30) と述べ，さらに，この亜教授学的場面にするためには，教授・学習場面において milieu が学習者の活動に対してフィードバックを与えることを一つの条件として挙げている。このフィードバックは，学習者自身の予想と得られた結果との間の隔たりによって，一層有効となる（宮川，2007)。したがって，学習場面を亜教授学的場面とするためには，すなわち，よい問題の委譲を行うためには，その条件の一つとして milieu が生徒の予想に反する結果を与えることが挙げられる。そのような条件の下で，前節で述べたような「教授学的契約の進化」が可能になると言える。

また，前節で述べた「教授学的契約のネゴシエーション」をうながす問題の委譲のを行うことができる教授・学習場面とは，どのような場面であろうか。先程述べたように，亜教授学的場面とは教授学的な根拠に頼らない学習場面である。したがって，教師が生徒に獲得させたい知識やルール，戦略などを一方的に教授するのではなく，生徒自らが問題を解決する過程において，これまでの教授学的契約の問題を意識し，そのネゴシエーションを行う必要性を感じる学習場面こそ，問題の委譲が行われた場面となる。そのような milieu を構成することによってこそ，教授学的契約のネゴシエーションが可能になると言える。

２．Balacheff の研究における事例

前述の問題の委譲の概念の例として，Balacheff（1990）の研究における具体的な事例を考察する。

Balacheff（1990）は，フランスの第７学年における「三角形の内角の和は 180 度である」ことを証明する学習場面の構成と分析を行っている。この学習場面において，Balacheff は教師から生徒へ問題を委譲する際の四つの拘束を挙げている。

・一連の学習場面の目的が，「三角形の内角の和は 180 度である」ことを確立することにある，ということをあらかじめ生徒に告げることはできない。そのような行為は問題をだめにするであろう。なぜならば，生徒はその主張がもはや推測とは考えられなくなるからである。

・推測を確立する手段として，特別な三角形についての測定の妥当性は拒否されるべきである。しかし，この決定は生徒たちによって自分たちの責任でなされるべきであり，教師によって課せられるのではない。このことは，活動のための場面[10]を要求する。

・我々が計画する場面は，三角形の大きさとその角の和の値との間の関係について生徒の考えを引き出すはずである，なぜなら，それはこの生徒の考えと，推測されうるであろう和が 180 度であるという事実の間の矛盾からである。

・我々は推測についての証明の構成に向けて方向づけられた妥当性判断の場面[10]を教室に提供すべきである。

以下に，これらの四つの拘束に基づいて構成され分析された事例について述べる。

フランスの生徒はそれまでの学習において，一般的に「三角形が大きければ大きい

---

[10] Brousseau (1997) は，教授学的状況理論において教授・学習の異なる過程を特徴づけるために，四つの必要となる場面を定めている。「活動の場面（situation of action）」，「定式化の場面（situation of formulation）」，「妥当性判断の場面（situation of validation）」，「制度化の場面（situation of institutionalisation）」の四つがそれであり，Balacheff の事例もそれに準じて構成，分析が行われている。

ほど，その角の和も大きい」という概念を有している。そこで，まず最初に各生徒に適当に書かせた三角形の三つの内角の大きさを測定させる。ここで測定された内角の和は160度から260度の間に散らばるが，この多様性は生徒にとってはあまり意味をもたないと考えられる。なぜならば，生徒たちが描いた三角形は各々が大きさも形も違うものであり，これは前述の概念と矛盾しないからである。

次に,生徒たちはコピーして配られた共通の三角形の内角の和について予想をする。ここでの生徒の返答は教師によってヒストグラムに記録される。この予想は先の活動の結果から180度を中心に散らばるが，実際には160度から770度までの広がりがあった。そこで，生徒は，配られたコピーの三角形の内角の和を実際に測定する。多くの生徒は180度に近い値を返答し，予想した値との差の理由を尋ねられるが，その値の差を誤差として説明する。この場面においても180度という大きさは生徒にとって特別な意味を持たない。なぜならば，この数値は特別な三角形についての固有な値として認識されるからである。

次の段階において，「三角形の内角の和はいつも 180 度である」ことの定式化が意図される。この活動のために，**図２－３**のような三つの三角形が準備される。生徒たちは，いくつかのグループに分かれ，事前に予想を行う。この段階においても，半数近い生徒は，三つの三角形の少なくとも一つに対して，180 度とは違う値を予想している。その後，測定を行い，その差についての説明を再度求められる段階において,それぞれの三角形の内角の和の値に関する問題が議論されるようになる。

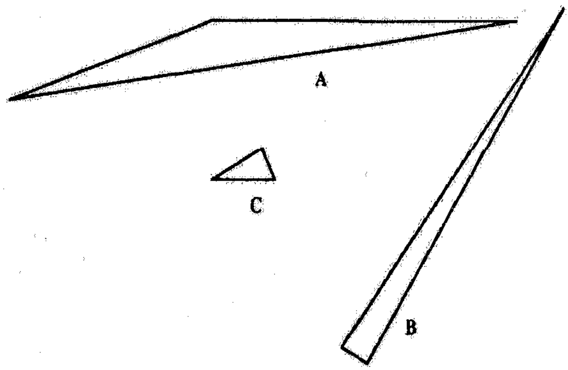


図２－３　Balacheff(1990), p.267

この議論の段階においては，いくつかの場面が想定される。例えば，180 度という予想は明らかであるように思われるが，まだ一部の生徒は特別な三角形を選んだせいであると主張するかもしれない。その場合には，角の和が180度とはならない三角形を見い出すようにクラスを刺激する。また，クラスが「三角形の角の和は180度である」ことを支持した場合には，その根拠を測定の結果とすることはできないため，合理的な論拠に基づく証明を構成するという問題が生じてくる。

以上の一連の教授・学習場面において，教師はその場面を運営はしたものの，生徒によって産み出された結果の妥当性や推測の正当性については，どんな意見も決して

提示はしていない。そして，クラスの問題はこの推測が正しいことを示すか，あるいはそれに反駁することへと向かっていく。この教授・学習場面においては，まさに問題の委譲が行われており，生徒及びクラスがその推測に対して責任を有している状況であるといえよう。

しかし，この Balacheff の事例は，現行の日本の学習指導要領における「算数」と「数学」の教材の配列を考慮した場合，そのまま実施することは，困難な事例でもある。そこで，次章以降では，現行の学習指導要領に沿う学習内容において，教授学的契約と委譲の二つの概念の視点から，望ましい教授・学習場面について考察を行う。

第　3　章

証明の意義の理解に関する考察

本章では，証明の意義の理解に関する生徒の困難性の所在を明らかにし，その困難性の一因となる教授学的契約について考察する。次に，その教授学的契約を進化させうる問題の委譲について考察し，それをもとに問題の委譲に関する具体的な教授・学習場面の事例的考察を行う。

本章の構成は，以下の通りである。

第１節　証明の意義の理解の困難性の所在

　１．証明の意義や必要性の理解の困難性

　２．証明の意義に関する先行研究

　３．正当化における一般性の理解の問題

第２節　正当化における一般性に関する教授学的契約と委譲

　１．正当化における一般性に関する教授学的契約

　２．正当化における一般性を認識する問題の委譲

第３節　事例的考察

　１．証明の学習初期における事例

　２．証明の学習中期における事例

第１節　証明の意義の理解の困難性の所在

本節では，まず，証明の意義や必要性の理解の困難性について述べる。次に，その困難性の所在を明らかにするために，証明の意義に関する先行研究や Sowder & Harel（1998）の証明及び正当化の図式をもとに考察する。そして，証明の意義の理解の困難性の一因として，正当化における一般性の認識の問題に焦点を当てる。

１．証明の意義や必要性の理解の困難性

「なぜ，このような証明をしなければならないのか？」

中学校の数学の教師であれば，図形の証明の学習において，このような生徒の反応に一度は出会うであろう。この証明の意義や必要性の理解に関する問題は，日本国内はもとより諸外国においても，古くから多くの研究において述べられている。例えば，Gonobolin（1954）は，次のように述べている。

> （前略）*子ども達は，いつも，幾何の定理の論理的証明の必要性を認識さえしていない－特に，これらの証明が視覚的に明確な性質であったり，経験的に簡単に確立されうるときに－。*（中略）*ある少女は「私には二等辺三角形の底角が等しいことを証明する必要がある理由がわかならない－とりわけ分度器を用いたなら，誰にでもそれは分かる」と我々に話した。*（p.61）

また，石谷（1955）も以下のように述べている。

> *「幾何とはわかりきったことを証明する数学である」というような嘲笑が生徒の間からわくようでは幾何指導の初期は失敗に終わる心配がある。*（p.3）

しかし，こうした証明の意義や必要性の理解の困難性は依然として解消されているとはいえない現状にある。小関・国宗ら（1978；1979）は，論証（証明）の意義[10]について，次の三つの点を指摘している。

・形式的に証明することはできるが，論証（証明）の意義を理解していない生徒がいること

・証明問題を繰り返し行っても，論証（証明）の意義が理解できるようになることはあまりないこと
・論証（証明）の意義を正しく理解していれば，基本的な証明問題は行うことができること

また，国宗（1987）は，この一連の研究のまとめとして，「論証の意義[11]」の理解の困難さを示すとともに，「証明を口述したり記述したりできるのに，その証明の意義がわからないというのであれば，それは，“仏つくって魂入れず”である」（p.4）と述べ，証明の意義の理解の重要性を指摘している。

では，証明の意義や必要性の理解の困難性の原因は何であろうか？　その困難性の所在を明らかにするために，本研究では，証明の意義と証明の必要性をほぼ同義にとらえ[12]，次小節では，証明の意義に関する先行研究について述べる。

---

[11] 小関・国宗らは，一連の研究の初期（例えば，1978；1979）においては，“論証の意義”を証明の意義と明確に区別して用いていない。しかし，研究後期（例えば，国宗，1987）においては，「論証の意義」を同研究における固有の語として用い，その観点を明確に示している。そこで，本研究においては，前者を“論証（証明）の意義”，後者を“「論証の意義」”と区別して表記した。なお，「論証の意義」のとらえ方については，次小節において詳しく述べる。

[12] 証明の意義と証明の必要性については，いくつかの先行研究において，ほぼ同義にとらえられている（例えば，小関・国宗ら，1979）。また，証明の必要性について触れている研究はあるものの，その観点などを明確に位置づけた研究はほとんど見られない。よって，次小節では証明の意義に関する先行研究について述べていくこととする。

2．証明の意義に関する先行研究

証明の意義に関しては，いくつかの先行研究があるが，それが何であるかを明確に示している研究は多くない。本小節では，証明の意義に関して，それを明確にするよりどころとして，前小節で述べた国宗（1987）の研究における「論証[13]の意義」と，学校数学を対象とした宮崎（2005）の研究における証明の意義としての証明の機能について述べる。

（1）「論証の意義」

国宗（1987）は，「論証の意義」についての理解の観点を，「論証[13]のもつ一般性」と「推論のしくみ」という二つの観点に大別してまとめている（**表３－１**）。

表３－１　国宗（1987）における「論証の意義」の理解の観点

１．「論証のもつ一般性」の理解
- １－①　定理は全称命題であることの理解
- １－②　証明には一般性があることの理解
- １－③　図は代表であることの理解
- １－④　実験・実測による方法の特徴の理解

２．「推論のしくみ」の理解
- ２－①　仮定・結論，証明の理解
- ２－②　根拠となることがら，定義の意味の理解
- ２－③　循環論法は不合理であることの理解
- ２－④　「体系」の理解

（国宗，1987，p.5）

---

[13] 「論証」と「証明」の語の違いについては，これまでも多くの先行研究で述べられている（例えば，清水，1995）。中学校の教授・学習場面では，ほぼ同義に用いられることも多いが，本研究では，国宗（1987）の研究の意図するところを推察し，国宗の研究における「論証の意義」や「論証のもつ一般性」における「論証」の語を，やや広義に「何かのよりどころによって考えを進めること」（石田，1960）としてとらえる。

なお，**表３－１**における「論証のもつ一般性」の理解とは，考察の対象である定理そのもののもつ一般性（１－①），考察の方法である証明のもつ一般性（１－②），考察の仲介をする図のもつ一般性（１－③）の三つからなる一般性の理解と，さらに実験・実測による方法は，これらの三つの一般性をもっていないという特徴を理解すること（１－④）を指している。

国宗は，生徒への調査結果をもとに，「論証の意義」の理解の実態として，二つの観点のうち，「推論のしくみ」に関する理解度と比較して「論証のもつ一般性」に関する理解度の低さを指摘している。また，証明問題を繰り返し練習していると「推論のしくみ」に関する理解は深まるが，「論証のもつ一般性」についての理解は意図的な指導なくしては深まらないと述べている（中西・国宗ら，1983；国宗，1987）。そこで，本研究では，「論証の意義」の理解に関する二つの観点のうち，根本的な問題として，「論証のもつ一般性」の理解の困難性に焦点を当てることにする。

（２）証明の機能

宮崎（2005）は，Bell（1976）や De Viliiers（1999）の研究をもとにして，学校数学における証明の意義としての証明の機能の分類を行っている。

Bell（1976）は，「証明の数学的意味づけ（meaning）は，三つの意味（sense）をもつ」（p.24）と述べ，証明の意味として以下の三つを挙げている。

・「立証や正当化」…命題の真偽に関わる立証という意味
・「解明」　　　　…ある命題が，なぜ真であるかということへの洞察を与えるという意味
・「体系化」　　　…公理や主要な概念，定理などを演繹的な体系へと組織化するという意味

De Viliiers（1999）は，Bell の挙げた三つの証明の意味を証明の機能としてとらえ直し，さらに，それを拡張した。特に，Bell の「解明」という意味を「説明」という機能としてとらえ直し，さらに「発見」，「コミュニケーション」，「知的チャレンジ」という三つの機能を加えて，以下の六つを証明の機能として挙げている。

・「立証」　　　…　陳述の正しさに関連する機能

・「説明」　　　　　　… ある命題が真である理由への洞察を提供する機能
・「体系化」　　　　　… 公理や主要な概念，定理の演繹的体系への様々な結果の組織化の機能
・「発見」　　　　　　… 新しい結果の発見や創造の機能
・「コミュニケーション」… 数学的知識の伝達の機能
・「知的チャレンジ」　… 証明の構成から導かれる自己実現の機能

さらに宮崎（1993）は，学校数学における証明の意義として，これらの証明の機能に焦点を当てることにより，生徒の証明の学習が改善される可能性があることを指摘した。また，これらの機能を学校数学における証明の基本的な機能と応用的な機能の二つに大別し，さらに応用的な機能を「証明に基づく発展・統合」と「実際的な価値の生成」に分類した（宮崎，2005)。**表３－２**はそれをまとめたものである。

表３－２　宮崎（2005）による証明の機能の分類

基本的な機能	「立証[14]」，「説明」	
応用的な機能	証明に基づく発展・統合	「発見」， 「体系化」
	実際的な価値の生成	「コミュニケーション」， 「知的チャレンジ」

先行研究では，これらの証明の機能のうち，「発見」の機能に焦点を当てたもの（例

---

[14] Bell の証明のセンスでは「立証（verification）や正当化（justification)」，De Viliiers の証明の機能では「立証(verification)」の語が用いられており，宮崎（1993）においても「立証」の語が用いられている。宮崎（2005）では，この機能を「正当化」と表しているが，本研究では，後述する Sowder & Harel（1998）の「証明及び正当化の図式」の「正当化」の語と区別し，さらに，証明の機能としては「立証」の語の方が適切であると考え，それを用いる。

えば，茅野，2002）や，「体系化」の機能に焦点を当てたもの（例えば，和田，2003）もある。しかし，本研究は，証明の意義の理解の困難性における根本的な問題を考察の対象とするものであるので，これらの機能の中でも，特に，基本的な機能として挙げられている「立証」や「説明」の機能に焦点を当てることにする。

３．正当化における一般性の理解の問題

本研究では，証明の意義の理解に関して，国宗らの一連の研究（国宗，1987 他）における「論証のもつ一般性」の理解の困難性及び，宮崎（2005）の研究における証明の「立証」や「説明」の機能に焦点を当てることを，前小節において述べた。本小節では，これらの研究をもとに，この困難性の所在について考察を深めていく。

国宗（1987；2000；2007）は，前述した「論証のもつ一般性」の理解に関して，三度に渡って調査を行っている。その調査で用いられた調査問題は，以下の通りである。

調査問題　「三角形の内角の和は 180°である」

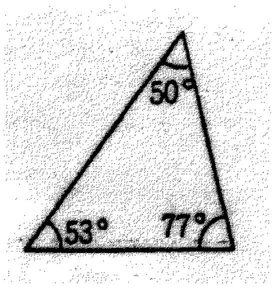
このことが正しいことを，Ａ～Ｃ君の３人がそれぞれ次のように説明しました。３人の説明は，上のことがらの説明としてじゅうぶんだといえるでしょうか。いえるものには○，いえないものには×を□内につけ，なぜそうなのかの理由を［　　］内に書きなさい。

Ａ君の説明

右の図の三角形の３つの角をはかってみたら，50°，53°，77°だった。３つの角の和は

$$50^\circ + 53^\circ + 77^\circ = 180^\circ$$

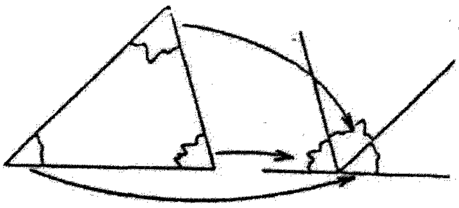
だから，三角形の内角の和は 180°である。



□［○または×］　理由［　　　　　　　　　　　　　］（以下解答欄略）

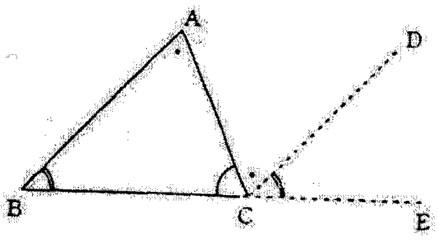
Ｂ君の説明

三角形をかき，その３つの角を切りとって右の図のように集めてみたら，ちょうど一直線になった。だから，三角形の内角の和は 180°である。



C君の説明

△ＡＢＣで，辺ＢＣを延長し，ＢＥとする。また，ＣからＢＡに平行に直線ＣＤをひく。



ＡＢ//ＤＣだから，

錯角で　∠Ａ＝∠ＡＣＤ

同位角で　∠Ｂ＝∠ＤＣＥ

したがって，∠Ａ＋∠Ｂ＋∠ＡＣＢ＝∠ＡＣＤ＋∠ＤＣＥ＋∠ＡＣＢ

＝∠ＢＣＥ＝ 180°

だから，三角形の内角の和は 180° である。

（国宗，1987，pp.5-6）

この調査は，A君，B君の説明に対して×を，C君の説明に対して○をつけ，さらにその理由もそれぞれ正しく述べている生徒を「論証のもつ一般性」の理解が十分である生徒と想定し，こうした生徒の経年変化を調べるために，三度実施された。その結果が以下の**表３－４**である。

表３－４　「論証のもつ一般性」を理解している生徒の割合

実施時期	1986 年 1 月	1999 年 2 ～ 3 月	2005 年 2 ～ 3 月
中学２年生	9	8	9
中学３年生	23	23	22

（数値は%），（国宗，1987；2000；2007）

この表から分かるように，「論証のもつ一般性」を理解している生徒は，第１回目の調査（国宗，1987）では，中学２年生でわずか 9 %，中学３年生においても 23 %にとどまっている。また，その継続研究として行われた第２回目の調査（国宗，2000）においても，中学２年生で 8 %，中学３年生で 23 %の生徒，第３回目の調査（国宗，2007）においても中学２年生で 9 %，中学３年生で 22 %の生徒しか，「論証のもつ一

般性」を理解しておらず，ほぼ第１回目の調査と同様の結果となっている。

また，梅川（2001）も，中学３年生に対して同様の調査を行っている。梅川の調査では，国宗の調査と同様に「三角形の内角の和は 180°である」ことの説明として，上述の三つの説明にもう一つ以下のような説明を加えている。また，四つの説明の中から「一番よいと思う」説明を選択し，その理由を記述させる方法をとっている。

> 正三角形について考えます。正三角形の１つの内角は 60°です。内角は３つありますから，３つの内角の和は，60°＋60°＋60°＝180°となります。
> だから，三角形の内角の和は 180°であることがいえます。

その結果，前述のＣ君のような証明を最もよい説明であるとして選択した生徒は 27.4 %であった。さらに，その理由として「論証のもつ一般性」を理解しているととらえられる記述をした生徒は，全体の 24.5 %であった。この結果は，国宗の調査結果とほぼ一致しており，「論証のもつ一般性」の理解の困難さを示しているとともに，従来型の指導（例えば，形式的証明ができることを重視した指導など）の改善が必要であることを示唆している。

では，このような「論証のもつ一般性」の理解の困難性は何に起因しているのであろうか？　次に，その困難性の所在を明確にするために，前節で述べた証明の機能や「論証のもつ一般性」との関連をふまえながら考察を進める。

本研究においては，宮崎（2005）による証明の基本的な機能の中で，立証と説明の機能に焦点を当てることは既に述べた。しかし，この二つの機能は，並列して作用する機能ではない。説明の機能は，「命題の正しさに加え，その理由やアイディア等に及ぶ」（上掲書，p.495）という点において，立証の機能を前提としている。この前提に位置づく立証の機能において，「論証のもつ一般性」の理解は欠かすことのできない観点である。特に，「論証のもつ一般性」の中の，命題のもつ一般性（前述の**表３－１の**１－①）や証明のもつ一般性（同１－②），図のもつ一般性（同１－③）の理解といった一般性の理解は，立証において欠くことのできない観点である。そして，これらの一般性の理解の困難さが，立証や，それを前提とする説明といった基本的な機能の理解に，影響を及ぼしているのではないかと考える。その根拠を，次に述べる

Sowder & Harel（1998）の証明及び正当化の図式[15] をもとに考察する。

Sowder & Harel（1998）は，生徒の証明及び正当化の図式として，各々サブカテゴリーを伴った３つの証明図式を示している（**図３－１**）。

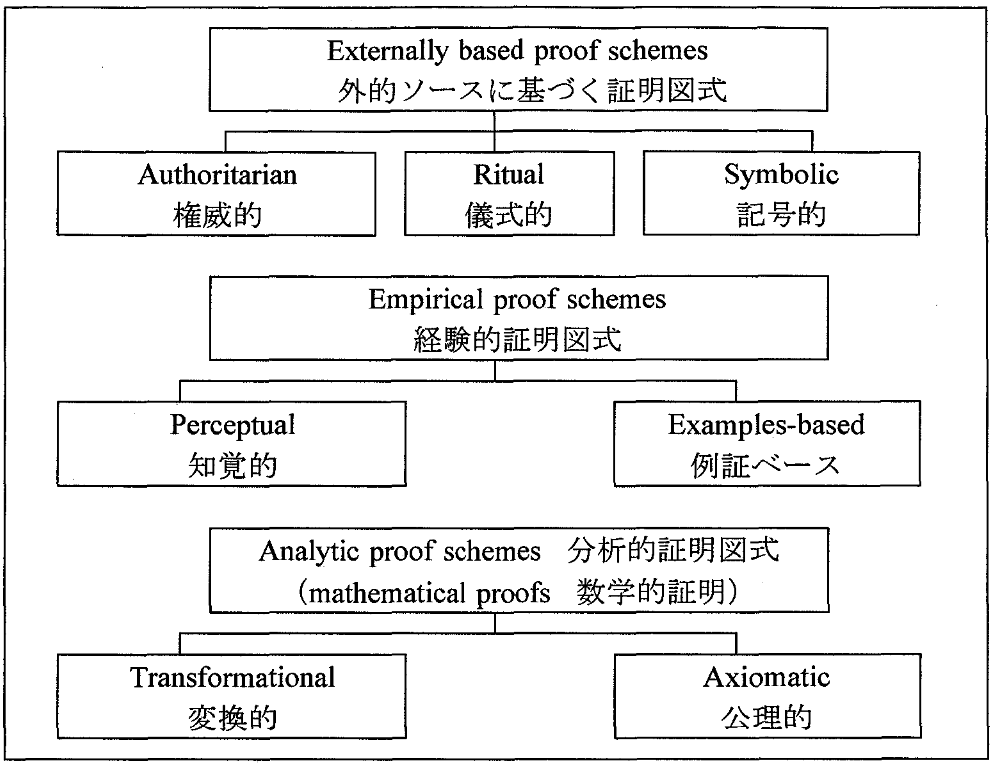


図３－１　Sowder & Harel（1998, p.671）による証明及び正当化の図式

この証明及び正当化の図式において，上述した一般性の理解に関連して注目すべき図式は，「経験的証明図式」のサブカテゴリーである「例証ベース証明図式」と「知覚的証明図式」である。

先述した一般性の理解の困難性についての一因として考えられることは，この例証ベースの証明図式に基づいて，いくつかの例をもとに帰納的に推論を行うことで，命題が正当化されると判断してしまうことである。いくつかの例をもとに帰納的に推論することは，算数・数学学習において重要な活動ではあるが，逆にこの例証ベース証

[15] Sowder & Harel は，証明図式の「証明（proof)」の語を，「数学的証明」の狭い意味というよりはむしろ，「正当化」の心理学的な広い意味で用いている。本研究では，その意に沿って “proof schemes” を「証明及び正当化の図式」として用いる。

明図式が，命題のもつ一般性や証明のもつ一般性の理解の困難さを生じさせている一つの原因ではないかと思われる。

また，「経験的証明図式」のもう一つのサブカテゴリーである「知覚的証明図式」にも着目したい。図形の性質を見いだすような学習場面では，見た目に基づいて判断することは重要なことであり，新しい性質の発見へのアイディアを見い出すこともできる。しかし，例えば，「二等辺三角形の２つの底角が等しいことはあたりまえではないか？」という生徒の反応には，いくつかの例に基づくと同時に，「図の見た目が等しい」という理由に基づく要因が存在するであろう。また，ある証明を行う場面で，知覚した内容がそこに用いられた図に特有の性質であるにもかかわらず，その知覚した内容に一般性があると誤って認識してしまう可能性も高い。このように，知覚的証明図式が働き，命題が正当化されると判断してしまった場合，先の例証ベース証明図式の場合と同様，一般性の理解の困難さを生じる一因となる可能性がある。

以上，本節では，本研究で焦点を当てる証明の意義や必要性の理解の困難性の所在について述べた。これをまとめたものが**図３－２**であるが，証明の意義の中で，本節で焦点を当てた観点についての理解を，今後は「正当化における一般性の理解」と表記することにする。

「証明の意義（証明の必要性）」の枠組み

<table>
<tr><td rowspan="2">「論証の意義」
証明の機能</td><td colspan="4">「論証のもつ一般性」</td><td rowspan="2">「推論のしくみ」</td></tr>
<tr><td>命題のもつ一般性</td><td>証明のもつ一般性</td><td>図のもつ一般性</td><td>実験実測による方法</td></tr>
<tr><td>立証，説明</td><td colspan="4">理解の困難さの一因として
例証ベース証明図式
知覚的証明図式
本研究での焦点として
「正当化における一般性の理解」</td><td></td></tr>
<tr><td>発見，体系化</td><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td>コミュニケーション
知的チャレンジ</td><td colspan="4"></td><td></td></tr>
</table>

図３－２　本研究で焦点を当てた証明の意義の観点と証明及び正当化の図式との関係

第２節　正当化における一般性に関する教授学的契約と委譲

本節では，前節において述べた正当化における一般性の理解に関して，既に述べた Sowder & Harel（1998）の証明及び正当化の図式に基づいて想定される教授学的契約の問題を考察し，その教授学的契約を進化させる問題の委譲の条件を抽出する。

１．正当化における一般性に関する教授学的契約

前節で述べたように，経験的証明図式のサブカテゴリーである例証ベース証明図式と知覚的証明図式に基づく正当化が，正当化における一般性の理解の上での困難性の一因を生じているとすれば，それはまさに，図形の性質に関する教授・学習場面における教授学的契約の問題であるといえるかもしれない。

我が国における小学校の図形の学習では，多くの場合，図形の性質は演繹的に導かれるのではなく，操作や実測，観察等を通して帰納的，あるいは知覚的に導かれる。さらに，教師も生徒によって導かれたそれらの性質を，演繹的に確かめることなく肯定することが多い。また，現行の学習指導要領に基づく中学校の図形領域においても，すべての命題が演繹的な推論によって導かれるわけではなく，いくつかの命題は，小学校の算数と同様，帰納的に，もしくは知覚的な認識に基づいて導かれている。これらの状態を鑑みるとそこには，

「いくつかの例によって確認された性質は，正当化される」
「知覚的に確認された性質は，正当化される」

といった正当化における一般性に関する教授学的契約が存在していると考えられる。これらの契約の存在をそのままの状態にしたままで，どのような教授・学習場面を設定したとしても，この一般性に関する生徒の認識を変容させることは難しいことであろう。

そこで，この正当化における一般性に関する教授学的契約を顕在化させ，さらにそれを進化させることを通して，教授・学習内容である（数学的）知識の進化をねらうことが必要となる。そのためには，正当化におけるこれまでの教授学的契約を認めながらも，その限界や問題性を顕在化させるような問題の委譲を行うことが必要となる。

2．正当化における一般性を認識する問題の委譲

国宗（1987）は，「論証のもつ一般性」の理解は，意図的な指導なくして深まらないと述べ，正当化における一般性認識の困難さを指摘している。また，村上（1992）も，一般性の認識について，いくつかの例を実測したり，いくつかの例に数学的な働きかけを行ったりした結果をもとに帰納的に推測する段階から，凡例や命題の対象全体に働きかけて推測する段階へいかに高めることができるかが，数学教育における正しい一般性認識の根本問題であると述べている。

学習習指導要領解説書（文部省，1999）には「証明は，命題が例外なしに成り立つことを明らかにする方法である」（p.90）と命題のもつ一般性や証明のもつ一般性に関する記述はあるものの，その指導方法については具体的に触れられていない。また，図のもつ一般性に関しても，「証明するためにかかれた図は，すべての代表として示されている図である」（p.90）と述べてはいるものの，やはり具体的な指導に関する記述はない。先行研究においても，経験的説明や演繹的推論などの説明の方法に関して討論することの有効性を示した指導例はあるものの（例えば，国宗，1987），正当化における一般性を生徒が自ら感じることができるように教材自体を工夫した例はあまり見られない。そこで，これまでの教授学的契約を進化させるためには，生徒自らが，教材自体から一般性の必要性を認識するような学習場面を設定することが重要となる。

第２章第３節で述べた Balacheff の事例は，正当化における一般性に関する問題の委譲が行われた場面として非常に有効な事例であると言えよう。しかし，現行の日本の学習指導要領における教材の配列を考慮した場合，この事例を中学校でそのまま実施することは困難である。そこで，正当化における教授学的契約を進化させるために，現行の学習指導要領に沿う学習内容において，望ましい問題の委譲が達成されうる具体的な教授・学習場面について検討する。そして，この場面によって問題の委譲を行うことができれば，生徒は正当化における一般性を認識することが可能となり，それが証明の意義や必要性の理解に繋がると考える。

次に，問題の委譲を行う教授・学習場面の設定において，二つの視点を述べる。

まず，第一の視点は，正当化における一般性に関する教授学的契約の進化を目指す問題の委譲場面の設定についてである。これは，第２章第１節で述べた教授学的状況理論の心理学的前提「生徒は，矛盾や困難さ，不均衡を生じる“milieu”に自分自身

を適応することによって学習する」に基づいて検討する。すなわち，「いくつかの例で認められた性質であっても常に成り立つとは限らない」場面や，「見た目には成り立ちそうな性質であっても，いつも成り立つとは限らない」といった場面が有効であるといえる。

さらに，問題を委譲するためには，その場面が亜教授学的場面となる必要がある。すなわち，生徒の働きかけに対して，その学習における milieu が生徒に何らかのフィードバックを与える必要がある。しかし，それは決して教師から指示されるものであってはならず，生徒が自ら獲得できるものでなければならない。例えば，生徒どうしの討論は，その一つの方法であろうが，その必要性さえも生徒達が milieu との相互作用から生じうるような問題場面を設定する必要があろう。

第二の視点は，そのような問題場面をどの程度設定するかである。もちろん，証明の導入初期において，証明の意義の理解を深めるために，そのような問題場面を設定することは重要である。しかし，それだけでよいのだろうか。

Martin ら（2005）は，Sowder & Harel の証明及び正当化の図式に関して，分析的証明図式に基づいて活動している生徒達が，経験的証明図式に立ち返る事例を見い出している。このことからも正当化における一般性に関する生徒の認識は，一度や二度の指導で容易に変容するものではないと言える。

上述の二つの視点をもとに，次節では，証明の学習の初期における事例とある程度証明の学習を行った後の事例についての考察を行う。

第３節　事例的考察

本節では，前節で述べた正当化における一般性に関する二つの視点に基づいた学習場面として，証明の学習の初期における事例とある程度証明の学習を行った後の事例について考察を行う。

１．証明の学習初期における事例

いくつかの例や見た目の正しさによる正当化という問題に関して，委譲されなければならない問題は「いくつかの例から言えそうなことは，正しいのだろうか？」や「見た目に正しいと言えそうなことは，本当に正しいのだろうか？」である。そこでこの問題を生起させるために，まず最初の場面では，**図３－２**のような**課題３－１**を与える。

課題３－１　下の図は，いずれの図も $l \parallel m$ である。∠ＡＯＢの二等分線を作図しなさい。また，その時にどんなことが言えそうですか。

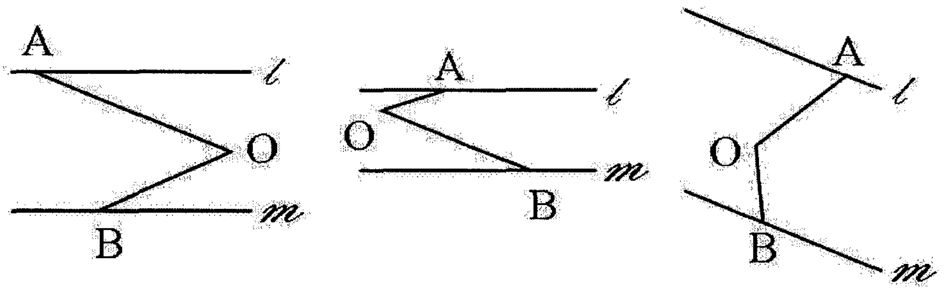


図３－２

３つの図はすべて二等分線と最初の２直線が平行となる例である。この質問に対し，生徒の反応は以下の３つが予想されよう。

Ｓ１：「角の二等分線は l, m と平行になる」

Ｓ２：「角の二等分線は l, m と平行になるような気がするけど，どんな場合でも平行になるのだろうか？」

Ｓ３：「たまたま角の二等分線が，l, m と平行になっただけである」

Ｓ１は，教授学的契約「いくつかの例によって確認された性質は，正当化される」または「知覚的に確認された性質は，正当化される」に従った反応である。しかし，平行線と二等分線という二つの事項の関連に不思議さを持つ生徒はＳ２の反応を示すであろう。そして，「本当にそうなるのか」という疑問を生じる。この疑問を自ら生じる場面こそが，生徒に問題を委譲する最初の場面となる。

次の場面では，この疑問を抱いた生徒によって，反例はないか他の図でも調べてみようという活動がなされるであろう。そして，多くの場合に成立しないことが明白となる（**図３－３**）。こうして得られた性質の成立・不成立の判断は，与えられた図や自ら描いた図，すなわち milieu からのフィードバックによるものであり，決して教師によって示されたものではない。これは問題の委譲にとって不可欠な条件である。この場面において，最初の教授学的契約「いくつかの例によって確認された性質は，正当化される」や「知覚的に確認された性質は，正当化される」が問題視されることとなり，それを進化させる必要性が生じてくる。

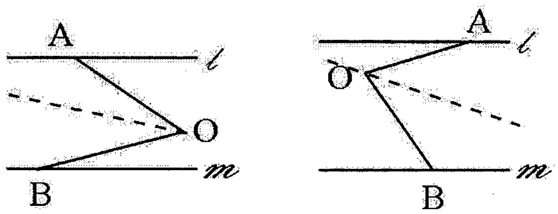


図３－３

第３の場面として，「どのような場合に∠ AOB の二等分線と l, m は平行になるのか？」といった疑問が第２の場面によって必然的に生じるであろう。この場面では，以前行っていたように実測に頼ろうとして，分度器の使用を要請する生徒もいるかもしれない。しかし，正当化における一般性を生徒が認識するためには，そのような実測による方法に頼ることなく，平行線の性質（錯角や同位角は等しい）より∠ａ＝∠ｂという条件を生徒の議論から産み出させなければければならない（**図３－４**）。

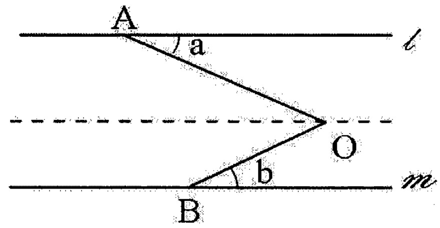


図３－４

最終場面では，∠ AOB の二等分線と l, m の平行関係と，∠ａ＝∠ｂに関する命題が議論の対象となる。議論の対象として生徒がつくると予想される命題は以下の３つである。

Ｓ４：「∠ａ＝∠ｂならば，∠ AOB の二等分線は，l, m と平行になる」

Ｓ５：「∠AOB の二等分線と ℓ，m が平行であれば，∠ａ＝∠ｂである」
Ｓ６：Ｓ４とＳ５の両方を述べている命題

Ｓ４は，この一連の系列からすれば，順当に生じる命題である。しかし，その証明をしようとすれば，例えば図３－５のように，補助線を引き，さらに三角形の内角と外角の性質を用いなければならない。この活動によって，生徒の思考を活性化させる場合もあれば，逆に生徒の状態によってはその証明に困難さを生じる場合もあろう。Ｓ５は，Ｓ４の逆命題であるが，もしこの命題が生徒の議論によって受け入れられれば，その証明は容易にできると思われる。また，Ｓ６のように，この両方の命題に目が向けられた場合，命題の「逆」という概念についての議論に広がる可能性もある。しかし，証明の学習初期における学習場面でもあり，その議論が可能かどうかについては，生徒の状態に依存し，早計には判断できない。

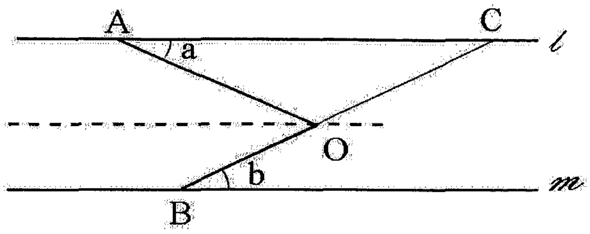


図３－５

いずれの場合にせよ，問題の委譲の概念に沿って，これらの問題についての議論の必要性は，生徒自身によって産み出されなければならない。また，上述の学習場面で最も重要なことは，「正当化するためには，いくつかの例や見た目の正しさだけではなく，どのような場合でも成り立つことを説明しなければならない」ことを生徒が認識することである。**課題３－１**に対する一連の学習によって，生徒は委譲された問題を解決するために，それまでの教授学的契約である「いくつかの例によって確認された性質は，正当化される」や「知覚的に確認された性質は，正当化される」を進化させ，「一般性のある説明をすることによって性質は正当化される」という新しい教授学的契約を認め始めることになるのではないかと考える。また，このように教授学的契約を進化させることによって，「証明する」とはどういうことかを生徒は認識し，「証明」という数学的知識の進化を図ることができると考える。

2．証明の学習中期における事例

前節でも述べたように，正当化における一般性に関する生徒の認識は，証明の学習初期に行った一度の指導で容易に変容するものではない（例えば，国宗，1987)。教授学的契約という視点から見ても，一度の指導によって生徒がその進化を認識するということも多くは期待できないであろう。なぜならば，生徒の理解は，必ずしも直線的に深まるとはいえず，多くの場合，行きつ戻りつするのが自然であるからである（Pirie & Kieren, 1989)。

そこで，ある程度証明の学習を行った後に，例えば，**図３－６**のような**課題３－２**を設定する。

課題３－２　下の図は，いずれも四角形の各辺の中点を結んだものである。このとき，四角形の内側にはどんな四角形ができると言えそうですか。

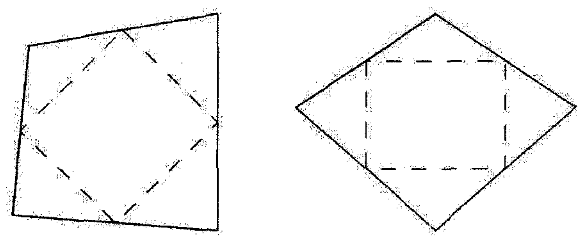


図３－６

この課題は，一瞥すると長方形ができるように見えるが，前小節の課題と同様，それは特殊な条件（対角線が直交する）のもとでのみ成立する。問題の意図するところや問題場面の構成は，前小節での**課題３－１**とほぼ同様であるため，詳細は略し，以下に教授・学習場面の構成の概略を示す。

教授・学習場面の構成

①　**課題３－２**の提示

課題３－２に対する生徒の予想される反応は以下の通りである。

Ｓ７　：「長方形（または正方形）になる」

Ｓ８　：「長方形（または正方形）になるような気がするけど，どんな場合でもなるのだろうか？」

Ｓ９　：「平行四辺形になる」

Ｓ１０：「どんな四角形になるか決まっていない」

② 最初の問題の生起

①のような生徒の反応より，「本当に長方形や正方形になるのか」という問題が生起し，反例がないか他の図でも調べてみようとする。

その結果，**図３－７**のように多くの場合に正方形や長方形にはならないことが明白となる。

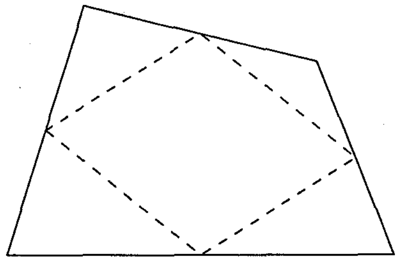


図３－７

③ 第二の問題の生起

「どのような場合に正方形や長方形になるのか？」といった問題が②の場面によって必然的に生じると考える。

議論の対象が二つの対角線に向けられ，それらの垂直関係に目を向ける必要があるが（**図３－８**），この必要性をいかに生徒の議論から生じさせることができるかが重要となる。

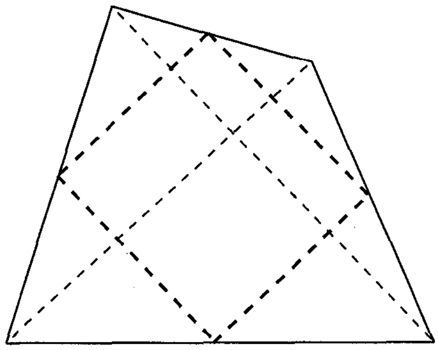


図３－８

④ 第三の問題の生起

与えられた四角形の内側にできる四角形と二つの対角線の関係を様々な場合について考察する。

Ｓ１１：「２つの対角線が垂直に交われば，長方形になる」（**図３－９**）

Ｓ１２：「２つの対角線が直交し，さらに等しければ，正方形になる」（**図3-10**）

Ｓ１３：「２つの対角線が等しければ，ひし形になる」（**図３－１１**）

Ｓ１４：「２つの対角線が垂直でも等しくもなければ，一般の平行四辺形

になる」

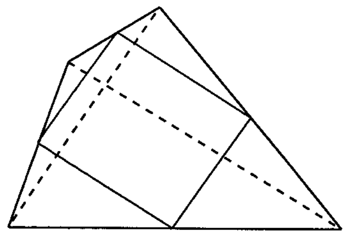


図3－9

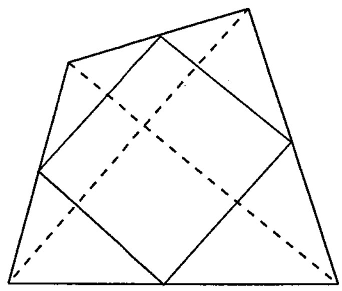


図3－10

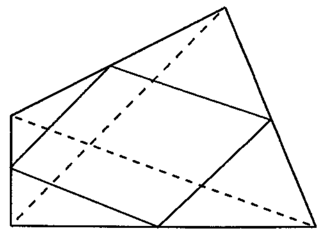


図3－11

さらに，これらの命題がなぜ正しいと言えるのかについての議論が生じ，正当化における一般性に関する認識が深まる。

課題3－1の一連の学習場面と同様に、これらの四つの場面において重要なことは，これらのすべての議論の必要性は，生徒自身によって産み出されるように工夫することである。生徒の議論が自ら生じるように，このような課題をいくつか設定することによって，正当化における一般性の認識は一層深まり，証明の必要性を生徒は感じることができると期待できる。そして，進化した教授学的契約「一般性のある説明をすることによって性質は正当化される」を生徒が一層容認していくと同時に，「証明」という数学的知識の進化を図ることができる。

第　4　章

証明の遂行場面における考察

本章では，証明の遂行場面における困難性の所在を明確にし，その困難性の一因となる教授学的契約について考察する。そして，その教授学的契約のネゴシエーションを可能とする問題の委譲の条件を抽出し，それをもとに円周角の定理の証明の教授・学習場面における事例的考察を行う。

本章の構成は，以下の通りである。

第１節　証明の遂行場面に関する困難性の所在

本節では，まず，中西（1987）の研究をもとに証明を遂行することの困難性について述べる。そして，その困難性の中でも，特に教授的な側面に着目した Herbst（2002）の先行研究をレビューし，証明の遂行場面における教授学的契約の問題について述べる。

１．証明を遂行することの困難性

図形の証明を行うことの困難性は，多くの調査や実践によって示され，同時にその改善を目指すための示唆的な研究も数多く行われている。しかし，第１章第１節でも述べたように，依然として，基本的な証明問題についてもその困難性は解消されたとは言い難い現状にある。では，その困難性の要因として，どのような観点が挙げられるのだろうか。

中西ら（1987）は，「証明は生徒にとってどうして難しいのだろうか」という根元的な問いへの答えとして，「証明の難しさ」として考えられる要因をすべて挙げ，その分類を行っている（**表４－１**）。

表４－１　図形の証明の難しさの要因

①　命題の表現の問題
（例えば，一般命題か特述命題か，など）
②　証明の方法の問題
（例えば，間接証明法ではないか，場合分けが必要ではないか，など）
③　論理の型にかかわる問題
（ｉ）証明の長さにかかわる問題
（ⅱ）仮定・結論の数にかかわる問題
（ⅲ）論理の流れにかかわる問題
④　図にかかわりのある問題
（ｉ）図の重なりの問題
（ⅱ）図の一般性の問題
（ⅲ）補助線の問題
（ⅳ）図形概念に関連した問題　　（中西，1987，p.59）

さらに，中西らは，この分類において，特に**表４－１**の③の論理の型にかかわる問題と④の図にかかわりのある問題について，これらの問題に関わる困難性を得点化し，実態調査の結果と照合している。（なお，①の問題に関しては，特述命題（例えば，「△ＡＢＣにおいてＡＢ＝ＡＣならば，∠Ｂ＝∠Ｃである」）よりも一般命題（例えば，「二等辺三角形の二つの底角は等しい」）の方が証明することが困難であること，また，②の問題に関しては，間接証明法や場合分けが必要な場合の方が高度な証明であり困難性が増すことは自明であるとして分析の対象からはずされている。）その結果，その得点化の方法はほぼ妥当であるとしながらも，証明の困難さの要因として，例えば，

・三角形の合同条件を用いるかどうか

・「外角」の用語を用いるかかどうか

といった③，④に挙げた問題以外の要因を考えざるをえないという結論にいたっている。ここでの「三角形の合同条件を用いるかどうか」という要因は，三角形の合同条件を用いない証明はそれまでにあまり行っておらず，証明の方針自体を立てることが難しいこと，「外角の用語を用いるかどうか」という要因は，外角という言葉自体に生徒が慣れておらず抵抗感があることであり，これらの要因はそれまでの教授・学習の状況に影響を受けるという教授的な側面に起因する問題であるととらえることができる。このことは，③や④にあげられたような主として証明問題自身に内在する困難さに関わる問題だけではなく，教授的な側面の影響による問題を検討する必要性があることを示唆している。

本研究では，この教授的な側面の影響による問題に特に焦点を当て，教授学的契約の概念を用いて考察を深めていく。そこで，次小節では，証明の遂行場面での教授的な側面について考察した Herbst（2002）の研究をレビューする。

2．Herbst の研究における事例

Herbst(2002)は，アメリカの第９学年での幾何学の図形の証明の事例において，教授学的契約に起因する教授・学習の困難さを示している。この事例での，証明の導入期以降の教授・学習の流れは，以下の通りである。

・証明が「仮定から結論を導く陳述と根拠を組み立てるステップの繋がり」として導入される。

↓

・いくつかの等式の性質が公準として定義される。

↓

・簡単な方程式を解く過程の各行に，公準とされた等式の性質を用いて根拠を書き加え，それが証明であると指導される。

↓

・角度と平行線に関するいくつかの幾何学の証明問題を二欄形式（two-column proof）によって証明する。

ここまでの教授・学習の流れよって，証明問題を行う際には証明すべき命題は明白に与えられていることや，証明とは与えられた仮定から始め，以前に学習した内容（生徒が持っている知識）を根拠として用いることによって結論まで陳述を繋ぐことであるという概念が規範的になっていたとされている。すなわち，ここまでの証明の教授・学習において，

「証明するための命題は，明白に与えられる」

「証明をするということは，生徒が持っている知識を利用することである」

といった教授学的契約が生じていたと Herbst は述べている。

そして，**図４－１**は，この研究において生徒に提示された課題であるが，この課題の解決過程において，上述の教授学的契約に関する問題が顕在化したとされている。

Write a proof of the following:

Given : ∠ ABC is a straight angle.

m ∠ ABF = m ∠ FBE

m ∠ EBD = m ∠ DBC

Prove: ∠ FBD is a right angle.

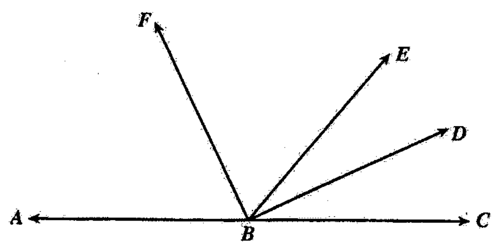


図４－１　Herbst（2002, p.183)において教師が生徒に与えた課題

Herbst は，この課題を**表４－２**に示すような観点によって分析している。

表４－２　課題の設定における分析の観点

1　課題の目標はどのように示されているか？
（例えば，課題が「○○を証明せよ」という表現になっているか？）

2　証明することは何か？
（例えば，証明する命題は最初に明確に与えられているか？）

3　どのようにして命題が述べられているか？
（例えば，「仮定」は○○，「結論」は△△と明確に分離されているか？）

4　課題が必要とする定義語は何か？
（例えば，用いなければならない定義語は簡単なものであるか？）

5　図はどのように与えられているか？
（例えば，最初から課題と一緒に与えられているか？）

6　図の記号はどのようにして付けられているか？
（例えば，環状にアルファベット順に割り当てられているか？）

（Herbst，2002，p.187）

この課題では，生徒自らが少しでも証明しやすいようにとの配慮から，**表４－２**の括弧内の記述に対していずれも肯定的な設定が行われている。その設定及び設定によって意図されたことは以下の通りである。

１．課題の目標は証明を行うことであると明確に述べられている。
・生徒は，課題に取り組むとき，証明を行わなければならないかどうかを調べるこ

となく，与えられた命題の証明をすればよいとすぐに知ることができる。

・証明すべき命題は正しいことであると生徒に保証している。

2．証明すべき命題が，課題においてはっきりと述べられている。

・課題の与え方によっては，何を証明すべきかがわからなくなってしまう場合が起きるかも知れない。しかし，命題が最初にはっきり述べられていることによって，例えば，この課題で証明しなければならないことは何であったかというような討論が起こる可能性がなくなる。

3．命題が，仮定（given）と結論（prove）として，明確に分けられている。

・仮定という証明の出発点及び結論という終着点を明確に分けて述べることによって，証明とは仮定から結論までの演繹的な推論であるという点が強調できる。

4．課題に含んでいる定義語は角のみである。

・多くの定義語や複雑な定義語を用いた課題は，難しく長い証明になるか，あるいはすべての定義語を用いて正当化していかなければならないといった印象を生徒に与えるとともに，これまでの証明の形式的概念を弱める可能性がある。したがって，簡単な定義語のみを用いることによって，これまでの証明の形式的概念を継続するとともに，生徒の参加をうながすことができる。

5．図を課題とともに与える。

・図を与えることによって，図を用いなければならないことを示唆したり，図の用い方を制限することができる。

・この課題では，大きさがわからない四つの角が存在しているにもかかわらず，角度を測ることのできる角が存在している。このことを意外に思う生徒に対して，視覚的に図を与えることによって命題の理解をうながすことができる。また，もし生徒に図をかかせた場合には，正確に角度が等しくなるようにかくために生徒は分度器などの道具を要求すると思われる。したがって，図を与えることによって，証明をするかわりに経験的な方略（測定や作図）を生徒が用いることを防ぐことができる。

6．図の中の記号を，アルファベット順で環状につける。

・図に記号をつけることによって，対象を明確にすることができ（例えば，「２組の連続的で等しい角がある」ではなく，「∠ ABF ＝∠ FBE」と「∠ EBD=∠ DBC」と表せる），証明の記述を容易にすることができる。さらに，生徒が証明を行う際に，記号を用いるべきであると示唆をしている。
・アルファベット順で環状に記号をつけることによって，図に現れている角に一連の関わりがあることを示唆しており，等式∠ ABC ＝∠ CBD ＋∠ DBE ＋∠ EBF ＋∠ FBA をつくることをうながしている。

これらの設定及び設定によって意図されたことにより，証明の遂行場面における生徒の困難さは軽減するであろうと考えられた。つまり，これらの設定によって，生徒の証明の形式的概念，すなわち，証明とは与えられた仮定から始め，以前に学習した内容（生徒が持っている知識）を根拠として用いることによって結論まで陳述を繋ぐことであるという概念が強調されるとともに，証明を行う際のアイディアの発見に関しても示唆されている。よって，生徒は演繹的な推論の繋がりとその根拠を書くことのみに焦点を合わせることができるはずであると想定された。しかし，実際の教授・学習場面では，生徒がこの命題を自分自身で証明することは困難であった。証明の遂行場面において生徒が困難性を感じたのは，次の二つのアイディアを用いる場面であったと述べられている。

① ∠ ABC ＝∠ ABF ＋∠ FBE ＋∠ EBD ＋∠ DBC
　すなわち，図からの情報を用いるというアイディア

② ２∠ FBE ＋２∠ EBD ＝ 180°
　すなわち，幾何学的な対象を数量的な言語で表す（代数的に変換する）というアイディア

①は，課題の設定における**表４－２**の観点５や６において意図されていた内容である。つまり，課題とともに図を与え，さらに記号を環状につけることによって，命題には書かれてない一連の角の関係を発見しやすく設定されていた内容である。また，②は，証明過程において幾何学的対象を数量的な言語を用いて代数的に扱うことである。生徒は，証明を行う際にこの二つのアイディアを用いようとしなかったため，証明を行うことができなかった。Herbst は，この困難性の一因として教授学的契約の問

題を挙げている。すなわち，これまでの図形の証明の学習では，課題の設定における**表４－２**の観点１～４において，前述したような証明の形式的概念が強調される設定が行われていたため，生徒は証明を形式的な繋がりとその根拠を述べることであるととらえていた。したがって，図から得られたり，幾何とは異なる代数の知識を活用して得られたりする上述の二つのアイディアを用いることは，前述した二番目の教授学的契約「証明をするということは，生徒が持っている知識を利用することである」の不履行にあたると生徒は感じ，証明を行う場面においてこれらのアイディアの活用を躊躇し困難性を生じたのではないか，と Herbst は分析している。

第２節　証明の遂行場面における教授学的契約と委譲

本節では，前節で述べた Herbst（2002）の研究や，関口（2005）の研究をもとに，証明の遂行場面における困難性の一因となる教授学的契約について考察する。そして，委譲の概念及び Martin ら（2005）の教授的選択に関する研究をもとに教授学的契約のネゴシエーションを可能とする条件について考察する。

１．証明の遂行場面における教授学的契約

前節で述べたように，Herbst（2002）は，以前の教授・学習場面において，証明とは与えられた仮定から始まり，それまでに学習した内容を根拠として用いることによって結論を導くことであるという規範的な概念が生じていたと述べている。そして，図からの情報や代数的な知識を用いるといった証明に新たなアイディアを用いることは，その概念によって強調された「証明をするということは，生徒が持っている知識を利用することである」という教授学的契約の不履行であると感じ，生徒は証明を遂行する場面で困難性を生じたと分析している。

このような規範的な概念に関する研究として，関口（2005）は，日本の公立中学校第２学年の図形領域の授業の分析を行い，図形の証明の授業における数学的規範[16]として，「証明の規範」について述べている。ここで述べられている「証明の規範」とは，「証明できなければ使えない（既に証明したものでなければ使えない[17]）」ことである。さらに，図形の単元における証明とは，公理的前提や定義やすでに認められた定理だけを用いて論理的に導くことであるという数学的内容から，「証明には授業で習っていないことは使えない」という規範が，その系として成立するとしている。

これらの数学的規範は，教授学的契約の視点からとらえると，生徒へ知識を伝えたい教師の責任として，さらに，教師の要求に応えようとする生徒の責任として相互的な責務から生じてくるものであるととらえることができる。従って，もしこれらの規

---

[16] 関口（2005）の研究における「数学的規範」とは，Yackel & Cobb（1996）の研究における「社会・数学的規範（sociomathematical　norms）」と同義のものとして用いられている。

[17] 括弧内は，文脈を判断し，筆者が加えたものである。

範の一部が，個々の授業におけるさまざま要素によって，学習の困難性の源となる場合には，それはまさに教授学的契約の問題であると言えよう。

では，この教授学的契約によって，どのような場面で問題生じるのであろうか。
Herbst（2002）の事例における

「図からの情報を用いる」

「幾何学的な対象を量的言語（代数的）に表し，代数的に処理する」

といったアイディアを用いる場面の他にも，実際の図形の証明問題を遂行するためには，多くのアイディアを用いる場面が必要である。例えば，前節で述べた中西（1987）の証明の難しさの要因に挙げられている問題に関して言えば，

「場合分けして証明する」

「図に新たに点や直線，線分（補助線）を加える」

といった場面が挙げられる。また，その他にも現行の中学校第２学年の教科書（例えば，大阪書籍，2006）の証明では，

「図形を配置しなおす（例えば，直角三角形の合同条件や三平方の定理の証明)」

「定理として示されてはいないが，以前に証明した命題を用いる」

といったアイディアを用いる場面が挙げられる。したがって，これらのアイディアを証明に用いる場面においても，Herbst の研究における事例と同様に，教授学的契約の問題が生じる可能性が想定される。

また，Herbst（2002）の研究における課題の設定の分析における観点（前述の**表４－２**）は，既に述べた教授学的契約「証明をするということは，生徒が持っている知識を利用することである」以外の教授学的契約が，図形の証明の学習において想定されうることを示唆していると思われる。例えば，観点１の設定に関して，

「証明するのは，「証明せよ」という課題に取り組むときである」

という教授学的契約が生じていた場合には，「証明せよ」とは述べられていないが証明を必要とするような探究型の課題の場合，生徒はそこで証明をしなければならないとは感じないかもしれない。また，観点２の設定に関する

「証明する課題は，特称命題として与えられた課題である」

といった教授学的契約や，観点３の設定に関する

「証明をする課題では，仮定と結論が明確に分けて述べられている」

といった教授学的契約が生じていた場合には，全称命題を証明する課題や，仮定と結

論を命題の文中から自らが見い出さなければならない課題では，生徒はその遂行が困難になると思われる。

これに似た状況は，現在の日本の中学校の証明の学習においても，よく見られる光景である。例えば，現行の学習指導要領（文部省，1998）では，第２学年の図形の証明に関する内容は次のように述べられている。

> *(2)　平面図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ，論理的に考察する能力を養う。*
>
> *ア　証明の意義と方法について理解すること。*
>
> *イ　三角形の合同条件を理解し，それに基づいて三角形や平行四辺形の性質を論理的に確かめることができること。*
>
> *ウ　円周角と中心角の関係を観察や実験などを通して見いだし，それが論理的に確かめられることを知ること。*　　(p.87)

この内容からもわかるように，第２学年の図形の証明の学習は，三角形の合同条件を用いたものに重点が置かれることが多い。そして，三角形の合同条件を用いた証明の習熟を図るために，よく用いられるのが三角形の合同条件を用いた証明を形式的に指導するという方法である。例えば，池田（2002a）は，証明の学習に遅れがちな生徒に対する一つの指導手段として，証明のフォーマット（**図４－２**）を繰り返し用いることの有効性を述べている。確かに，三角形の合同条件を用いた証明に習熟させるために，証明の学習初期の段階で，このようなフォーマットを用いた指導は一般的な方法であり，有効であろう。また，習熟の遅れがちな生徒に対する指導としても有効であると思われる。しかし，その習熟を図るあまり，この形式的なフォーマットを強調しすぎた指導を行うことによって，「証明するとは，このような形式に基

△ＡＯＢと△ＣＯＤにおいて
平行四辺形の性質より ________ ＝ ________　…①
ＡＢ//ＤＣだから　　 ________ ＝ ________　…②
ＡＢ//ＤＣだから　　 ________ ＝ ________　…③
①②③より ________________ がそれぞれ等しいので
△ＡＯＤ≡△ＣＯＤ
∴ＡＯ＝ＣＯ，ＢＯ＝ＤＯ

図４－２　証明のフォーマット（池田，2002，p.145）

づいて三角形の合同条件を用いた証明を行うことである」という教授学的契約が生じる可能性がある。また，前節で述べた中西（1987）の考察による証明の難しさの要因「三角形の合同条件を用いるかどうか」についても，三角形の合同条件を用いない証明問題の困難性の一因として，この教授学的契約に関連する問題としてとらえることができる可能性もある。

以上，本節で考察した教授学的契約及びそれに関連した問題を生じる場面について，現状の日本の中学校で証明の遂行場面において困難性を生じる可能性をまとめたものが，次ページの**表４－３**である。

なお，第２章第２節で述べたように，教授学的契約はしばしば暗黙裡であり，さらに教室ごと，文化ごとに微妙に異なるものである（溝口，2004）。したがって，**表４－３**に示した教授学的契約は，証明の教授・学習場面において必ず生じるものではなく，その生じる可能性は教師の教授方法やそれまでの教授・学習場面に大きく影響を受ける。あくまでも，現状の日本の中学校において，生じる可能性のあるものを示したものであることに留意する必要がある。

表４－３　証明の遂行場面で想定される教授学的契約とその問題が生じる場面

想定される教授学的契約	問題が生じる場面
「証明をするということは，生徒が持っている知識を利用することである」	・図からの情報を用いる場面 ・幾何学的な対象を量的言語（代数的）に表し，代数的に処理する場面 ・場合分けして証明する場面 ・図に新たに点や直線，線分（補助線）を加える場面 ・図形を配置しなおす（例えば，直角三角形の合同条件や三平方の定理の証明）場面 ・定理として示されてはいないが，以前に証明した命題を用いる場面
「証明するのは，「証明せよ」という課題に取り組むときである」	・「証明せよ」とは述べられていないが証明を必要とする探究型の課題に取り組む場面
「証明する課題は，特称命題として与えられた課題である」	・全称命題を証明する場面
「証明をする課題では，仮定と結論が明確に分けて述べられている」	・仮定と結論を命題の文中から自らが見い出さなければならない課題を行う場面
「証明するとは，ある形式に基づいて三角形の合同条件を用いた証明を行うことである」	・三角形の合同条件を用いない証明を行う場面

2．問題の委譲と教授学的契約のネゴシエーション

本小節では，前小節において想定した教授学的契約をどのようにネゴシエーションすることができるかについて考察する。

第2章第2節および第3節で述べたように，Herbst（2006）は，「教授学的契約が教師と生徒の間の教授・学習活動を制御するという前提は，参加者の間のこの契約のネゴシエーションの中へと探究を促す」（p.315）と述べ，教授学的契約のネゴシエーションの可能性を示唆している。この教授学的契約のネゴシエーションを必要とする場面は，まさに問題の委譲を行うことによって生じる場面であると考えられる。

さらに，Herbst は「契約のネゴシエーションは，契約の下に存在する多くのルールや学習対象に関するネゴシエーションである」（p.319）と述べている。つまり，証明の遂行場面における教授学的契約のネゴシエーションを行うことは，委譲された問題を解決するために，ルールや学習対象のネゴシエーションを行うことであると言える。

では，どのようにすればこのネゴシエーションを行うことができるのだろうか。

まず最初に，教授学的契約のネゴシエーションを可能とする問題の委譲の条件について考える。問題が委譲された場面となるには，生徒自身が何が問題となっているかということを自ら意識する必要がある。つまり，証明の遂行場面では，証明に必要な推論を教師の側からの一方的な教授によって構成するのではなく，生徒自身がその推論を構成する活動に参加することが必要条件となる。そのためには，第2章第3節で述べたように教授・学習場面が亜教授学的場面となるような亜教授学的 milieu を構成すること，すなわち，milieu からのフィードバックが期待できるような課題を設定することが重要である。

次に，生徒自身が推論を構成する際に問題となった教授学的契約をネゴシエーションを可能とする条件について考える。教授学的契約とは，そもそも生徒／ milieu システムと教師の間に存在するルールや方略のことである[18]。したがって，そのネゴシエーションは，対象となる知識（ここでは，「証明」という知識）に関する生徒，教師の三者によるネゴシエーションでなければならない。つまり，このネゴシエーションの成立に関しても，やはり教師の側からの一方的な教授ではなく，生徒と教師間

[18] 第2章第2節 p.23 参照

及び生徒どうしの間の，対象となる知識に関する討論が必要条件となる。さらに，このネゴシエーションは委譲の概念に基づいているので，この場面での教師の教授はあくまでも生徒にとって暗黙的なものでなければならない。この条件を前提に，前節で述べた教授学的契約に関する Herbst の研究及び Yackel & Cobb（1996）の研究 における社会・数学的規範などを理論的視点とした Martin ら（2005）の研究に着目する。Martin らは，幾何学の証明授業分析をもとに，教師と生徒の活動をコード化した一覧を示し（**表４－４**），生徒が推論活動を行う際の教師の教授的選択の重要性を次のように述べている。

> *オープンエンドな課題を提示したり，生徒に推論に対しての責任を置く対話に従事させたり，生徒の論法を分析したり，生徒の根拠に助言したりする教師の教授的選択が，推測をし，正当化を提供し，推論のつながりを構築することに生徒が参加する環境を生み出す。*（p.95）

表４－４　教師と生徒の活動の分析に導出されたコードの例

教師の活動	生徒の活動
課題を選択する 活動を計画する，活動を指示する	推測する 主張したり，関係についての質問をしたりする
言い直す，投げ返す 生徒のコメントや質問を繰り返したり，言い換えたりする	解答・結論を提供する 情報を求める教師の要求に応答する
説明・推論を要求する 情報を提供するようクラス全体に求めたり指名したりする	正当性を提供する 主張を正当化する，他人の主張のための根拠を提供する
証明に関連したスキルをモデル化する 特定の証明を書くテクニックを説明する	図を用いる 関係を同定するため，推論を説明するために図を用いる
生徒の反応を評価する 生徒の推論を明確にまたは暗黙のうちに分析する	論法を評価する 自分また他の人の推論を分析する

生徒のアイディアを価値づける（コーチする） 生徒のアイディアを聞き，フォローする	

（Martin et al.，2005，p.102）

つまり，生徒が推測をしたり，正当化を提供したり，あるいは推論のつながりを構築したりする－すなわち，推論活動に参加する－ためには，**表４－４**の教師の活動に示されたような教授的選択が重要となる。例えば，教授・学習場面においてオープンエンドな課題を提示したり，生徒の反応に対して教師が繰り返したり言い換えたりすることで，生徒自らが推論活動に参加し，その推論についての責任を生徒自身に置くことによってこそ，教授学的契約のネゴシエーションが可能になると言える。

以上のことから，証明の遂行場面における問題の委譲の条件である亜教授学的milieuを構成する方法として，例えば

・milieuからのフィードバックが可能な課題を構成する
・オープンエンドな課題を提示する

といった教師の教授的選択が重要であると言える。

また，その学習場面で問題となる教授学的契約をネゴシエーションする方法については，生徒に推論についての責任を置くような討論を行うといった教師の教授的選択が重要であると言える。

次節では，上述したような証明の遂行場面における教授学的契約のネゴシエーションを意図した事例について考察を行う。

第３節　事例的考察　－円周角の定理の証明－

本節では，円周角の定理の証明の教授・学習場面を例にして，前節で述べた証明の遂行場面における教授学的契約のネゴシエーションを可能とする教授・学習場面の事例的考察を行う。

１．事例における教授学的契約の問題

本節では，前節において述べた想定されうる教授学的契約を顕在化させ，そのネゴシエーションを行う方法を考察する。そこで，例として，円周角の定理の証明について教科書（大阪書籍，2006）の内容に沿って一般的に学習を進めた場合を想定し，その場面において想定される教授学的契約の問題とそのネゴシエーションを行う場面について考察することにする。

教授学的契約の問題は，それ以前の教授・学習における教師と生徒の活動に影響を受けると考えられる。そこで，まず最初に，証明の概念の導入を行ってから円周角の定理の証明を行うまでの学習の流れについて簡単に示す。今回，例として用いた教科書では，以下のような構成になっている。

① 「仮定」と「結論」…　命題における「仮定」と「結論」及び命題の「逆」について定義する。

② 「証明」の定義…　「基本的な性質などを根拠にし，すじ道を立てて，仮定から結論を導くことを証明という」

③ 証明の根拠となることがら…　「証明の根拠として，これまでに学んだ次の基本性質がよく使われる」
対頂角の性質，平行性についての性質と条件，三角形の内角と外角，
多角形の内角の和と外角の和，合同な図形の性質，三角形の合同条件

④ 練習問題，章末問題

⑤ 二等辺三角形の性質…「二等辺三角形の２つの底角は等しい」の証明

⑥　「定理」の定義…　「証明されたことがらのうちで，よく使われるものを定理という」

⑥　２つの角が等しい三角形…　「２つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」ことの証明

⑦　直角三角形の合同条件…　直角三角形の合同条件の証明，直角三角形の合同条件を用いた証明問題

⑧　円周角の定理の証明

次に，今回考察する円周角の定理の証明の，教科書における授業の流れは以下のようになっている。

①　**図４－３**において，∠ＡＯＢと∠ＡＰＢの間の関係を予想する。

②　**図４－３**において，

$\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2} \angle \mathrm{AOB}$ を証明する。

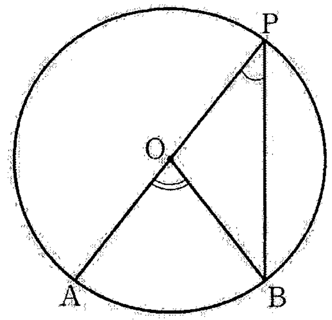


図４－３

【証明】ＯＰ，ＯＢは同じ円の半径だから等しいので，△ＡＰＢは二等辺三角形である。

よって，２つの底角は等しく　∠ＯＰＢ＝∠ＯＢＰ　…(1)

また，△ＯＰＢにおいて　∠ＡＯＢ＝∠ＯＰＢ＋∠ＯＢＰ…(2)

(1)，(2)より　∠ＡＯＢ＝２∠ＯＰＢ

＝２∠ＡＰＢ

左辺と右辺を入れかえると　２∠ＡＰＢ＝∠ＡＯＢ

両辺を２でわると　$\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2} \angle \mathrm{AOB}$

（証明終）

③　**図４－４**において，$\angle APB$の大きさを測定し，気づいたことを述べる。

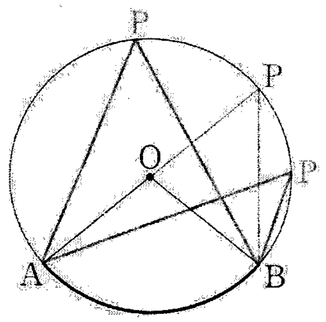


図４－４

④　**図４－５**において，

$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ を証明する。

【証明】点Ｐを通る直径ＰＣをひく。
$\angle APC = \angle x$，$\angle BPC = \angle y$と表すと，
②の証明より

$\angle AOC = 2\angle x$，$\angle BOC = 2\angle y$

したがって

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOC + \angle BOC \\ &= 2\angle x + 2\angle y\end{aligned}$$

左辺と右辺を入れかえると

$2\angle x + 2\angle y = \angle AOB$

両辺を２でわると

$$\angle x + \angle y = \frac{1}{2}\angle AOB$$

ゆえに

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

（証明終）

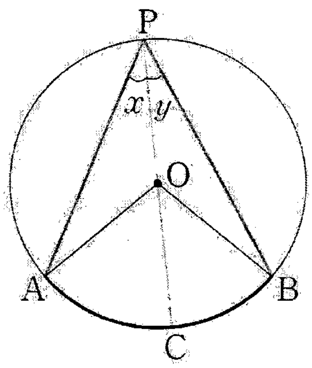


図４－５

⑤　**図４－６**においても，

$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$　が成り立つことを確認する。

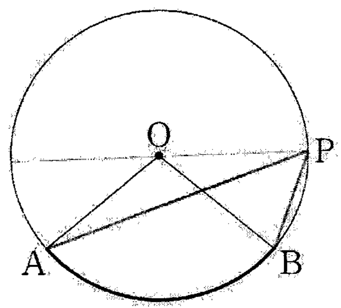


図４－６

（図４－３～図４－６はすべて，大阪書籍，2006，pp. 121-123）

この授業において，前節で述べたような教授学的契約の問題が生じる場面としては，以下に挙げるようなことが想定される。

・④の証明において，「幾何学的な対象を量的言語（代数的）に表し，代数的に処理する」こと

Herbst（2002）の事例と同様，図形の証明の問題において角の大きさをｘ，ｙという文字を用いて代数的に表すことや代数的に処理をする証明を行うことは難しいことであると想定される。

・④の証明において，「新たに点や線分（補助線）を加える」こと

補助線を引き，新たに交点に記号をつける証明については，二等辺三角形の時に二度例題として示されているが，生徒自身がこの補助線を思いつくことは難しいことであると想定される。

・④の証明において，「(定理として示されてはいないが,) 以前に証明した命題を用いる」こと

同じ図を用いての連続した証明問題において，直前に証明された命題を用いる問題は既に行っているが，定理とされていない命題（この場合は，**図４－３**における②の命題）を最初に証明した図（**図４－３**）とは違う図（**図４－５**）に適用することは難しいことであると想定される。

・②，④の証明において，「三角形の合同条件を用いた証明以外の証明を書く」こと

この問題に取り組む前の証明問題は，今回用いた教科書において２２問（内６問が例として）提示されているが，そのうち三角形の合同条件を用いない証明問題は３問のみである。前節でも述べたように，それまでの教授・学習の方法によっては，「証明をするということは，三角形の合同条件を用いて証明を書くことである」と感じていた生徒がいたかもしれない。そのような生徒にとっては，この問題で記述したことを証明として受容することは難しいことであると想定される。

・②，④，⑤の証明において，一つの命題を「場合分けして証明する」こと

これまでの証明問題では，ある一つの図をかいて証明すれば，その図のもつ一般性や証明のもつ一般性によって，命題が正当化された。すなわち，一つの図やそれに対する証明によって命題が一般化される，と感じていた生徒がほとんどであろう。円周角の定理の証明において，一つの命題を証明するために場合分けをしなければならないという場面に初めて出会うが，その証明を行うことには困難さをともなうと想定される。

これらの生徒の困難さが，教授学的契約の問題として生じている場合には，その困難さの解消を目指す方法として，教授学的契約のネゴシエーションを行う活動を意図的に設定することが大切であると考える。次小節では，その具体的な学習場面を一つの例を用いて提案する。

2．事例における教授学的契約のネゴシエーション

前節で述べたように，問題の委譲を行うためには，生徒自身がその問題を自分自身で意識するために，フィードバックが可能な milieu を構成したり，オープンエンドな課題を設定することが重要である。

そこで，これらの条件をもとに次のような**課題４－１，４－２**を設定する。

課題４－１　右の**図４－７**で，点Ｐが円周上を動くとき，∠Ｐと∠ＡＯＢの間にはどのような関係があるでしょうか。

課題４－２　また，**課題４－１**で気づいたことは，どのようにして証明することができるでしょうか。

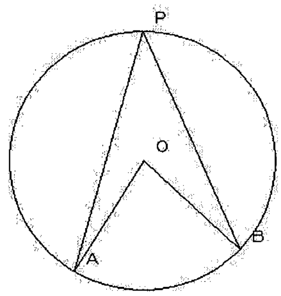


図４－７

ここでは，生徒の推測や推論をフォローするため，作図ツールなどの動的ソフトウェア[19] を用いることが有効であろう。動的ソフトウェアは，生徒自身が操作することによって，生徒の予想に反するフィードバックを与える一つのよい手段である。さらに，**課題４－１**において推測をすることが難しい生徒に対しては，例えば，**図４－８**のような角度表示を行うことで，教師の指図なく推測を支援する手段になりうる。また，**課題４－２**への導入として，点Ｐを動的に動かすことによって，前小節で掲げた**図４－８**のような特殊な場合には推論を行うのが簡単であろうということを見いだす生徒が生じてくることが期待できる。

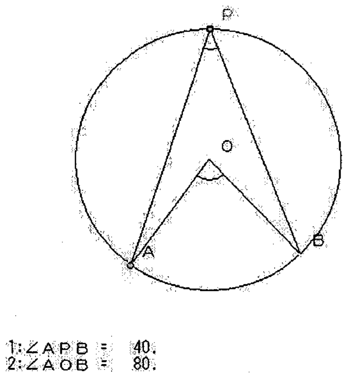


図４－８

次に，**課題４－２**によって，実際の証明を行う場面になる。この場面において，生

[19] ここで用いた動的ソフトウェアは，飯島康之が開発した Geometric Constructer Win 1.10 である。http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/index.htm，（最終アクセス，2007 年 6 月 20 日）

徒が自分自身で証明を完成させることは，難しいことであると予想される。その原因は，前小節で述べた教授学的契約の問題のいくつかが生じている場合もあれば，他の要因による場合もあると考えられる。もし，この困難さの要因が教授学的契約の問題である場合には，次のような生徒の反応が予想される。

Ｓ１５：「ここに線（線分ＰＯ及びその延長線）ひいてもいいのかな？」
Ｓ１６：「ここの大きさ（例えば，∠ＡＰＯ）に何か記号をつけてもいい？」
Ｓ１７：「さっきも同じような証明をかいたんだけど…」
Ｓ１８：「証明なのに『△ＡＰＯと△ＢＰＯにおいて…』とか書かなくていいの？」

これらの生徒の反応は，これまでの教授学的契約をネゴシエーションする必要性を生徒が感じている反応であり，また，そのネゴシエーションを行う絶好の機会である。したがって，教師は場面に応じて**表４－４**に示されたような教授的選択を適切に行うことによって，教授学的契約のネゴシエーションを行うことが大切である。その際は，教師はなるべく暗黙的に，適切な介入を行うことによって，この証明を生徒とともに完成させ，生徒自身にその証明に対する責任を感じさせることが重要である。

また，この課題の証明を完成することによって教授学的契約がネゴシエーションされたとしても，すべての生徒がそれに同意するとは限らない。さらに，問題となる教授学的契約を顕在化させることを目的とはするものの，そもそも教授学的契約は暗黙的なものであり，一度のネゴシエーションによってその問題による困難さがすぐに解消されるというものでもなかろう。機会を捉えては，そのネゴシエーションの場面を設定したり，繰り返し振り返りを行ったりする過程においてこそ，教授学的契約のネゴシエーションは可能になると考える。

そこで，この課題の証明を振り返るために，次のような**課題４－３**を設定することによって，教授学的契約の問題をもう一度顕在化させ，そのネゴシエーションを深めることが大切である。この課題は，オープンな課題であり，生徒の様々な反応が予想される。しかし，**課題４－２**において生徒自身が推論のつながりをつくることに参加していれば，その生徒自身が困難さを生じたところ，すなわち問題となる教授学的契約に自然と目が向き，以下のような生徒の反応が予想される。

課題４－３　**課題４－２**で行った証明は，これまで行ってきた証明（例えば，直前に行った**図４－９**のような証明問題）とどんな点が似ていて，どんな点が違いますか？

課題　∠ＸＯＹの二等分線上の点Ｐから辺ＯＸ，ＯＹに垂線を引き，交点をそれぞれＡ，Ｂとすると

ＰＡ＝ＰＢ

であることを証明しなさい。

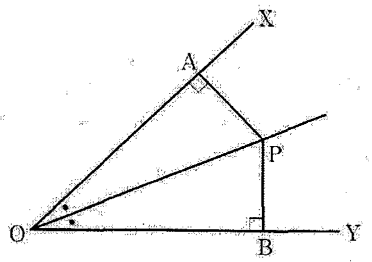


図４－９　**（大阪書籍，2006，p. 120）**

Ｓ１９：「数式の学習の時にしたような，式の変形をする」

Ｓ２０：「最初に自分で線を加えて，記号をつける」

Ｓ２１：「最初にした証明を，次の証明に使っている」

Ｓ２２：「三角形の合同条件を使っていない」

Ｓ２３：「二つの場合に分けて証明している」

そこで，例えば，最初に挙げたＳ１９のような反応「数式の学習の時にしたような，式の変形をする」に対しては，以下のようなプロトコルが想定できよう。

Ｓ：「数式の学習の時にしたような，式の変形をするところ。」

Ｔ：「そうだね。そういうのは今までの証明にはなかったよね。」

Ｓ：「先生，そういうのって証明に使っていいんですか？」

Ｔ：「みんなはどう思う？」

Ｓ：「多分いい…」

Ｓ：「よくわからない…」

Ｓ：（賛否両論，もしくは自分の考えをまとめることができない）

Ｔ：「うーん，そうだね。じゃあ，証明するってことは，そもそも何だったんだっ

け？」

S：「そういえば教科書には確かこう書いてあった」（「証明」の定義を読む）

T：「そうだったね。じゃあ，さっきのみんなの疑問に戻ってみようよ。」

S：「根拠となる基本性質っていうのがあれば…」

S：「こんな基本的性質ってあったっけ？」

S：「……これって“＝”の式だから…ひょっとして等式の性質？」

繰り返しになるが，この場面では，決して教師から明白に指導するのではなく，それぞれの問題において証明を遂行するために必要な新しい教授学的契約のネゴシエーションに生徒自らが参加することが重要である。そして，教師と生徒の間で首尾よくネゴシエーションできたならば，それは証明問題の遂行場面における困難さの改善に向けての一助となると思われる。

第　5　章

本研究のまとめと今後の課題

本章では，第１章第２節で述べた本研究の目的をふまえて，まず，各章のまとめ及び全体的なまとめをする。次に，それらをふまえて今後の課題を述べる。

本章の構成は，以下の通りである。

第１節　本研究のまとめ

第１章第２節でも述べたように，「教授学的状況理論を視座として望ましい図形の証明の教授・学習場面を考察していくこと」が本研究の主題であった。

これをふまえて，本節では，まず，第２章から第４章の各内容をまとめ，次に全体的なまとめをする。

１．各章のまとめ

第２章では，本研究で視座とした教授学的状況理論及びその主要な要素である教授学的契約と委譲の概念について述べた。

第１節では，まず，教授学的状況理論の土台となるフランス数学教授学について，その起源と目的を述べた。次に，フランス数学教授学の基礎理論の一つである教授学的状況理論の二つの前提，心理学的前提と教授学的前提及び教授・学習場面のモデルである亜教授学的場面について概説した。

第２節では，教授学的状況理論の主要な要素である教授学的契約の概念について述べるとともに，本研究では，教授学的契約の概念を「教授学的契約の進化」及び「教授学的契約のネゴシエーション」という二つの視点で拡張することを述べた。

第３節では，この二つの視点を可能とする委譲の概念について概説し，さらに，その具体的な事例として，Balacheff（1990）の研究における三角形の内角の和が１８０度であることの生徒の学習活動の事例を考察した。

第３章では，教授学的契約の概念をもとに証明の意義の理解の困難性の所在を明らかにし，その教授学的契約の進化を図る教授・学習場面の考察を委譲の概念に基づいて行った。

第１節では，まず，証明の意義に関する先行研究として，国宗（1987）の「論証の意義」と宮崎（2005）の証明の機能を考察した。そして，Sowder & Harel（1998）の証明及び正当化の図式をもとに，証明の意義の理解の困難性の一つの要因が「正当化における一般性の理解」にあることを導出した。

第２節では，第１節で焦点化した「正当化における一般性の理解」の困難性が，

「いくつかの例によって確認された性質は正当化される」

「知覚的に確認された性質は，正当化される」

という二つの教授学的契約に起因することを述べ，その教授学的契約を進化させうる

教授・学習場面の視点を委譲の概念によって考察した。

第３節では，第２節で述べた教授学的契約を進化させうる具体的な二つの事例を検討した。その結果，正当化における教授学的契約を「一般性のある説明をすることによって性質は正当化される」という契約に進化させることによって「証明」という数学的知識の進化が図れることを考察した。

第４章では，教授学的契約の概念をもとに証明の遂行場面における困難性の所在を明らかにし，その教授学的契約のネゴシエーションを図る教授・学習場面の考察を委譲の概念に基づいて行った。

第１節では，Herbst（2002）の研究をもとに，証明の遂行場面における困難性の一つの要因が，「証明するということは，生徒が持っている知識を利用することである」という教授学的契約にあることを述べた。

第２節では，現状の中学校における図形の証明の学習の困難性が，

「証明するということは，生徒が持っている知識を利用することである」

「証明する課題は，特称命題として与えられた課題である」

「証明するとは，三角形の合同条件を用いた証明を行うことである」

といった教授学的契約に起因する可能性を導出した。そして，その教授学的契約をネゴシエーションしうる教授・学習場面の条件を，委譲の概念及び Martin ら（2005）の教授的選択に関する研究に基づいて考察した。

第３節では，第２節で述べた教授学的契約のネゴシエーションを可能とする具体的な事例として，円周角の定理の証明の教授・学習場面を考察を行った。

２．本研究のまとめ

先にも述べたが，「教授学的状況理論を視座として望ましい図形の証明の教授・学習場面を考察していくこと」が本研究の主題であった。その目的に対し，図形の証明の学習の困難性を「証明の意義の理解の困難性」と「証明の遂行場面における困難性」の二つの観点でとらえ，考察を進めてきた。本研究を通して，筆者は以下のような見解を得た。

１．証明の学習において，「証明の意義の理解」と「証明を行うことの理解」は不可分な要素であり，両者の理解が重要であること

２．証明の学習における生徒の学習の困難性を考察する際には，「生徒」，「教師」，「数学的知識」の三者の関連をふまえて考察することが重要であること

３．実際の教授・学習場面に関しても，「生徒」，「教師」，「数学的知識」の三者の関連をふまえた構成を行うことが重要であること

４．上述の２，３における具体的な一つの視点として，教授学的契約と問題の委譲の概念に着目することによって，示唆を得ることができること

第２節　今後の課題

本節では，前節のまとめを踏まえて，「図形の証明のカリキュラム提案」に向けてと「図形以外の領域における証明の学習」についての二つの視点から，今後の課題を述べる。

１．図形の証明のカリキュラム提案に向けて

前節でも述べたように，本研究では Brousseau の教授学的状況理論を視座として，証明の意義の理解に関する困難性と証明の遂行場面における困難性の一因となる教授学的契約を想定し、委譲の概念に基づいて教授・学習場面の提案を行った。しかし，そのいずれもが先行研究や調査に基づく理論的考察であり，これらの提案が実際の授業場面への示唆となりうるものであるかどうかが，第一の課題である。

また，本研究では，問題となる教授学的契約の所在を明らかにするために，証明の意義の理解に関する考察と証明の遂行場面における考察をそれぞれ第３章，第４章において個々に行った。しかし，第１章第２節で述べたように，証明の意義を理解することと証明を行うことができることは，密接に関連するものであって，不可分な観点である。そこで，この両者の関連をふまえた教授・学習場面の構成を行うこと，これが第二の課題である。

そこで，これらの課題に対して，まず行わなければならないことが，図形の証明の学習全体のカリキュラムを構成することである。しかし，本研究で視座とした教授学的契約や委譲という概念は，図形の証明の学習すべてにおいて適応可能なものであるといえるかどうかは定かではない。この点に関しては，さらに考察を深めていく必要があろう。

また，図形の証明のカリキュラムに関する先行研究の中には，委譲の概念に関連すると思われるものも数多い。例えば，榛葉ら（2002）は，生徒の探究活動を重視して，生徒の疑問から生じて取り上げた問題を中心に，クラスによって展開の異なる実践報告を行っている。また，井上（1993）も，生徒の主体的な学びを目指して「課題学習の日常化」をテーマに掲げ，全 29 時間の単元構成を報告している。これらの研究の示唆するところも生かしながら，本研究を一つの視点として、いかにして図形の証明の学習全体のカリキュラムを構成し，実践していくかが今後の最も重要な課題である。

２．図形以外の領域における証明の学習について

本研究においては，その研究対象として，主として中学校の図形領域に限って考察を行った。しかし，古代ギリシャ以来，「数学をするとは証明することである」と言われるように，証明という活動は数学全領域に大きく関わる内容である。全米数学教師協議会（National Council of Teachers of Mathematics）が示した Principles and Standards for school mathematics（2000）の推論と証明の項目には，以下のように述べられている。

推論と証明は，簡単に一つの単元，あるいは例えば幾何の「証明をすること」によって教えることはできない。（中略）*数学的に推論することは，心の習慣であり，すべての習慣がそうであるように，多くの文脈で終始一貫した使用を通して発達させなければならない。*（p.56）

現行の中学校の学習内容においても，証明の学習は図形領域だけではなく，数と式領域の文字式の利用などでも行われている。本研究で行った「証明の意義の理解における考察」及び「証明の遂行場面における考察」は，そのいずれもが，他の領域にも援用可能な考察であると思われる。例えば，数と式の領域では、証明の意義の理解に関する正当化における一般性の理解について，次のような課題が提案できよう。

課題　３５×３５＝１２２５
　　　３６×３４＝１２２４
　　　４３×４７＝２０２１

（１）どのようにすれば，簡単に計算できますか？
（２）５４×５７　はいくつになりますか？

こういった課題を用いることで，本研究での考察と同様に，問題の委譲を行う教授・学習場面の構成を考察することができる。「証明」の学習自体に生徒が意義を感じるようにするためには，図形領域に限らず，このように文字式など他の領域においても教授・学習場面の構成，並びに実践化を行っていくことが必要である。

おわりに

本研究を進めていくにあたって一番に感じたこと，それは「学校における数学教育のパラダイムを転換していく必要性」である。図形の証明の領域に限らず，これまでの中学校における数学教育では，あまりにも「できること」に重点が置かれすぎてきたのではなかろうか。「はじめに」に述べたような数学教育本来の目的が達成されるためには，数学的知識が本来もつ意味の理解を図ることが不可欠である。「わかること」と「できること」，この両者が一体となってこそ，数学の学習は成立しうると言えよう。そのためには，まず，生徒が主体的に考え，自ら数学的知識を構成していくことができるような授業を行わなければならない。この点において，学習主体である「生徒」，それを教授する「教師」，そして教えられなければならない「数学的知識」の三者の関連をふまえた教授学的状況理論の示唆するところからは，意義あるものが学べたと切に感じている。

今後は，本研究で得た見解をもとに，学校現場での実践的な研究を通して，より望ましい授業のあり方を提案し，実践していきたいと考える。

最後になりましたが，本研究を進めるにあたり，適切な教示並びに懇切丁寧な指導をしてくださいました﨑谷眞也先生に心からお礼を申し上げます。先生のご指導なくしては，本研究は完成を見ることがなかったと痛切に感じ，深く感謝の意を表します。また，さまざまな機会を通して適切な助言を与えてくださいました國岡髙宏先生をはじめ本大学院数学教室の先生方や，学会他さまざまな機会に助言をくださいました諸先生方に深く感謝申し上げます。さらには，セミナー等にて多くの意見をくださった先輩方や同輩諸氏，及び難解な欧文解釈に協力していただいた本大学院の友人にも心からお礼申し上げます。

また，本大学院に派遣していただきました山口県教育委員会，光市教育委員会に深く感謝の意を表するとともに，光市立島田中学校の富永泰壽校長先生をはじめ教職員の方々にも，この場を借りて心からお礼申し上げます。

２００７年１２月２０日

《引用・参考文献》

【欧文】

Balacheff,N.（1990），“Towards a *problématique* for research on mathematics teaching” *Journal for Reseach in Mathematics Education*, vol.21, no.4, pp.258-272

Balacheff,N.（1999），“Contract and custom : Two registers of didactical interactions” *The Mathematical Educator*, vol.9, no.2, pp.23-29

Bell,A.W.（1976），“A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations” *Educational Studies in Mathematics*, vol.7, pp.23-40

Brousseau,G.（1997），*Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Chevallrard,Y.（1991），*La transposition didactique*, Grenoble:Edition La Pensée Sauvage.（平林一栄（2006）訳『教授学的変換－学問知から教育知へ－』，未刊行）

De Villiers,M.D.（1999），“The role and function of proof with sketchpad”，http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf,（last accessed, 9th September, 2007）

Gonobolin,F.N.（1954），“Pupils' comprehension of geometric proofs. ” In Wilson,J.W.(Ed)（1975），*Soviet studies in the phychology of learning and teaching mathematics. vol.12 : Problems of instruction*, The University of Chicago.

Herbst,P.（2002），“Engaging students in proving : A double bind on the teacher” *Journal for Reseach in Mathematics Education, vol.*33, no.3, pp.176-203

Herbst,P.（2006），“Teaching geometry with problems : Negotiating instructional situations and mathematical tasks” *Journal for Reseach in Mathematics Education, vol.*37, no.4, pp.313-347

Herbst,P.& Kilpatrick,J.（1999），“Pour lire Brousseau” *For the Learning of Mathematics*, vol.19, no.1, pp.3-10

Martin,T.S., McCrone,S.S., Bower,M.W. and Dindyal,J.（2005），“The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof” *Educational Studies in Mathematics*. vol.60, pp.95-124

National Council of Teachers of Mathematics（2000），*Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reaton, VA.

Pirie,S. & Kieren,T.（1989）, “A recursive theory of mathematical understanding” *For the Learning of Mathematics*, vol.9, no.3, pp.7-11

Sierpinska,A.（2003）, *Theory of didactic situations (Fall 1999)*, Lecture notes for graduate mathematics education students, Concordia university, http://alcor.cocordia.ca/~sierp/TDS.html (last accessed, 3rd August, 2007)

Sowder,L. & Harel.G.（1998）, “Types of students' justifications” *The Mathematics teacher*, vol.91, no.8, pp.670-675

Yackel,E. & Cobb,P.（1996）, “Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics” *Journal for Reseach in Mathematics Education*, vol.27, no.4, pp.458-477

【和文】

池田由佳（2002),「数学学習における学習者の理解過程に関する研究－数学の授業における相互作用パターンの影響－」,『上越数学教育研究』, 第 17 号, pp.137-146

石田一三（1960),「論証の初歩指導について」,『算数・数学教育研究』, 日本数学教育連盟, vol.1, no.4, pp.35-37

石谷茂（1955),「中学校における論証の性格」,『数学教育　日本数学教育会誌』, 第 37 巻, 第 2 号, pp.2-4

井上正允（1993),「課題学習の日常化－中学校図形領域を中心に－」」,『数学教育　日本数学教育学会誌』, 第 75 巻, 第 5 号, pp.28-36

梅川貢司（2001),「証明の意義理解に関する調査からの一考察」,『上越数学教育研究』, 第 16 号, pp.115-126

梅實幸子（2004),『数学的問題解決における教師・生徒間の相互作用－教授学的契約を視点として－』, 鳥取大学大学院修士学位論文

大阪書籍（2006),『中学数学２』, 重松敬一他著

太田伸也（1991),「『生徒が幾何の世界を構成すること』をめざす中学校の幾何教育」,『第 24 回数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会, pp.121-126

小原豊（2001),「学校数学にみられる教授学的変換について」,『教育科学数学教育』, No.520, 明治図書, pp.106-109

小原豊（2002),「教授学的変換による無理数の学習指導について－中学校数学における「行為に埋め込まれた知識」の機能－」,『筑波数学教育研究』, 第 21 号, pp.39-46

茅野公穂（2002),「学校数学における証明の機能としての「発見」－証明とその適用範囲との関係についての４つの状態－」,『第 35 回数学教育論文発表会論文集』,

日本数学教育学会，pp.439-444

国宗進（1987），「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」，『数学教育学論究　日本数学教育学会誌』，第 47-48 号，pp.3-23

国宗進（2000），「図形の論証に関する理解度の変化」，『数学教育　日本数学教育学会誌』，第 82 巻，第 3 号，pp.2-12

国宗進（2007），「論証についての理解に関する総合的研究－図形の論証と文字式による論証の観点から－」，『第 40 回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，pp.619-624

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2004），「平成１５年度小・中学校教育課程実施状況調査　ペーパーテスト調査集計結果」，http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/H15/03001100000007003.pdf，（最終アクセス，2007 年 11 月 26 日）

小関熙純，国宗進，家田晴行，春日龍郎，小寺隆幸，中西知真紀，山下国広（1978），「図形における論証指導について（その１）」，『数学教育　日本数学教育学会誌』，第 60 巻，第 1 号，pp.12-19

小関熙純，国宗進，家田晴行，春日龍郎，榎戸章仁，中西知真紀，山下国広（1979），「図形における論証指導について（その３）」，『数学教育　日本数学教育学会誌』，第 61 巻，第 3 号，pp.9-19　4

清水静海（1995），「論証」，清水静海他編『中学校数学科教育実践講座　第 6 巻　図形と論証　理論・解説編　第１章　図形と論証』，株式会社ニチブン，pp.204-236

榛葉伸吾，羽田明夫，園田博人，国宗進（2002），「中学校での図形の学習指導の改善－生徒の探究活動を重視して－」，『静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要』，第 8 号，pp.49-66

関口靖広（2005），「数学の教授・学習における数学的規範の分析について：図形領域の授業において」，『第38回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，pp. 481-486

中西知真紀，国宗進，家田晴行，榎戸章仁，春日龍郎，金児正史，小関熙純，東風谷幸広，山下国広（1983），「図形における論証指導について（第６次報告）」，『数学教育　日本数学教育学会誌』，第 65 巻，第 3 号，pp.13-24

中西知真紀，家田晴行，榎戸章仁，小関熙純，山下国広，国宗進（1987），「図形における論証指導について（第８次報告）－その２，証明の難しさの分析－」，『数学教育　日本数学教育学会誌』，第 69 巻，第 1 号，pp.22-28

中原忠男（1994），「数学教育における構成主義の展開－急進的構成主義から社会的構

成主義へ－」,『数学教育　日本数学教育学会誌』, 第 76 巻, 第 11 号, pp.2-11
福本稔（2007a),「教授学的契約を視座とした証明の教授と学習についての考察」, 全国数学教育学会第 25 回研究発表大会発表資料
福本稔(2007b),「教授学的契約を視座とした証明の教授と学習についての考察（Ⅱ）－教授学的契約のネゴシエーションについて－」, 全国数学教育学会第 26 回研究発表大会発表資料
福本稔（2007c),「教授学的契約を視座とした証明の教授と学習についての考察（Ⅲ）－証明の意義に関する教授学的契約と問題の委譲を中心に－」,『第 40 回数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会, pp.619-624
溝口達也（2003),「算数・数学の授業における教授学的契約」,『新しい算数研究』No.386, 東洋館出版社, pp.40-41
溝口達也 (2004),「学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究」,『鳥取大学教育地域科学部教育実践総合センター研究年報』, 第 13 号, pp.31-41
宮川健（2002a),「フランスにおける数学教授学－図形指導を例に－」,『教育科学数学教育』, No.492, 明示図書, pp.104-107
宮川健（2002b),「教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察」,『筑波数学教育研究』, 第 21 号, pp.63-72
宮川健（2007),「関数グラフソフトを用いた教授・学習過程の分析－教授学的状況理論の視点から－」,『数学教育　日本数学教育学会誌』, 第 89 巻, 第 1 号, pp.2-11
宮崎樹夫（1993),「学校数学における証明の意義に関する考察－証明の機能に焦点を当てて－」,『筑波大学教育学系論集』, 第 18 巻, 第 1 号, pp.155-169
宮崎樹夫（2005),「中学校数学における証明の学習活動に関する研究－証明の諸特性と子供の営みに基づく, 諸活動の分類枠組みの設定－」,『第 38 回数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会, pp.493-498
村上一三（1992),「一般性の認識について－三角形の面積の公式を例として－」,『数学教育学の新展開』, 岩合一男先生退官記念出版会, pp.53-64
文部科学省, 国立教育政策研究所 (2007),「平成１９年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要」, http://www.nier.go.jp/homepage/kyoutsuu/tyousakekka/gaiyou_chuu/tyousakekka_gaiyou.pdf,（最終アクセス, 2007 年 11 月 26 日）
文部省（1959),『中学校数学指導書』, 中村紀久二監（1991),『文部省　学習指導書　第 8 巻』, 大空社
文部省（1998),『中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説－数学編－』, 大阪書籍

文部省初等中等教育局（1985），『教育課程実施状況に関する総合的調査研究調査報告書〈中学校　数学〉』，文部省初等中等教育局

山口県中学校教育研究会数学部会他（2005），『平成 16 年度　数学教育』，第 44 号

山口県中学校教育研究会数学部会他（2006），『平成 17 年度　数学教育』，第 45 号

山下國広（1987），「子どもの実態」，小関熙純編『算数・数学教育全書２　図形の論証指導』，明治図書，pp.22-56

和田達次（2003），『学校数学における証明の機能としての体系化に関する研究：記述的公理化に基づく結果の経済性に焦点を当てて』，鳥取大学大学院修士学位論文