平成１０年度　学位論文

クッキー・カッター系に現れるフラクタル集合について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
Ｍ９７５５４Ａ　駒田　勝

序　文

IBMの研究員であるマンデルブロー（B.B.Mandelbrot）は，1960年代から1970年代にかけて，フラクタル幾何学という新しい幾何学を構成した．彼が“フラクタル”という造語を用いたのは，“破壊された（fractured）”とか“断片の（fractional）”といった単語を人々に連想させるためであった．このフラクタル幾何学は，壊れたり，しわが寄っていたり，一様でなかったりする形に焦点を当てた幾何学である．この幾何学で扱う集合，つまりフラクタル集合は，その形をどんどん倍率を上げて眺めてゆく場合に，ある倍率で見える形と，その細部を別の倍率で見た形とが酷似している点や，高木関数のグラフのような一部の例外があるものの，一般に，次元が非整数となる点など際立った特徴を持つものである．

一方，1960年代の初期に，ローレンツ（E.N.Lorenz）は，コンピュータを使って大気の運動を記述する非線形方程式を解いていた際，次のような事実に気づいた．それは，微少な初期値の違いが非線形方程式の近似解を求めていくうちに無視できない差となり，全く異なった結果を得ることになるということであった．この発見は，データの精度をいくら高めても完全な予測は不可能であるということを意味し，決定論的な因果性を持った力学系の中に予測不可能な振る舞いが潜んでいることを我々に知らせることとなった．ローレンツのこの仕事は，1970年代の初期になって，初めて多くの研究者の知るところとなり，注目を集めた．特に，このような予測不可能な結果が簡単な系でも起こり得る事実が確認されて以後，数学，物理，工学の科学者達によってこの手の力学系に関する研究が多くなされてきた．これらの研究の1つに，ボーエン（R.Bowen）やリュエル（B.Ruelle）らによって，エルゴード理論と関係して統計力学の考えを力学系へと押し進めた研究があり，現在では熱力学形式論と呼ばれている．

1920年代に既に，様々な関数に対して予測不可能な振る舞いを生じさせる，複素平面内の数のある集合について，その性質を定式化していた人物がいる．フランスのジュリア（G.Julia）である．その集合は，2次関数に対応する場合ですら劇的に複雑であり，これらはフラクタル集合の例となっている．このような集合は，ジュリアに因んでジュリア集合と呼ばれる．

本論文の主目的は，フラクタル集合を研究することにある．上述のジュリア集合のように，ある種の力学系に現れるフラクタル集合に的を絞って議論していく．具体的には，クッキー・カッター系と呼ばれる離散力学系に現れるフラクタル集合（反発子）に着目し，熱力学形式論とエルゴード理論の立場から，フラクタル集合を研究していくことを目的としている．

以下に本論文の概略を述べる．

第1章では，幾何学的測度論についての基礎事項と反復関数系について述べる．まず，測

度の定義をおこない，フラクタル集合を比較する手段として，ボックス次元とハウスドルフ次元を導入する．特に，完全加法性をもつハウスドルフ測度から定義されるハウスドルフ次元は，理論展開にとって有用である反面，比較的単純な集合に対してでも，その測度と次元を評価することは困難を伴うことが多い．そのため，1.6 節では，次元評価に役立つ命題を述べ，第 3 章の理論展開に備える．後半の 1.8 節では，反復関数系を扱っていく上で必要となる基本事項をまとめて述べ，併せて今後必要となる記号や概念もここで説明しておく．

第 2 章では，前半で熱力学形式論を扱う上で必要となる力学系，すなわちクッキー・カッター系を定義し，クッキー・カッター集合と呼ばれる反発子の導入をおこなう．後半では，クッキー・カッター集合上定義されたリプシッツ関数を用いて，有界変動原理と有界歪曲原理を証明する．更に，有界歪曲原理より，1.9 節で述べた定理がクッキー・カッター集合に対して応用できることを述べる．

第 3 章では，熱力学形式論を用いて，クッキー・カッター系 f に現れるクッキー・カッター集合 E の次元公式と，E に台をもつ f の下で不変な確率測度の存在を示す．具体的には，3.1 節で圧力とギップス測度を定義し，その存在を明らかにする．3.2 節では，3.1 節の結果を踏まえ，圧力関数を用いて，f のクッキー・カッター集合 E の次元公式を導く．また，3.3 節では，関数解析から得られる結果を用いて，不変ギップス測度の存在を証明する．更に，測度 μ がエルゴード的であるとはどういうことなのかを述べ，任意のギップス測度が f に関してエルゴード的であることを証明する．3.4 節では，力学系理論の重要な不変量となるエントロピーの存在を示し，圧力とエントロピーの関係を表す変分原理について述べる．最後に，3.5 節では熱力学形式論と統計力学の関係を，1 次元粒子鎖を用いて説明する．

第 4 章では，確率論と力学系における最も基本的でかつ重要な結果のひとつであるエルゴード定理を，自己相似集合やクッキー・カッター集合に対して適用していく．具体的には，4.1 節でエルゴード定理を証明し，続く 4.2 節では，エルゴード定理の簡単な応用例として力学系のリアポノフ指数について述べる．更に，4.3 節では，1992 年にベドフォード（T.Bedford）とフィッシャー（A.Fisher ）によって導入された平均密度について述べる．フラクタル集合に対して一般には密度は存在しないが，平均密度の方はクッキー・カッター集合を含めた多くのフラクタル集合に対して，その存在が明らかにされている．本節では，平均密度を定義した後，カントール 3 進集合とクッキー・カッター集合の平均密度が存在することを，エルゴード定理を用いて証明する．

最後に，この論文作成に当たり，ひとかたならぬご指導をいただいた小池敏司先生に深く感謝の意を表します．また，測度論の勉強に際してゼミへの参加を快諾して下さった藤原司先生並びに横山博次さんにお礼申し上げるとともに，渡辺金治先生をはじめ数学教室の諸先生方に心から感謝いたします．

目次

第 1 章　フラクタル幾何学の基礎

本章では，本論文において利用されるフラクタル幾何学の基本的な考え方をまとめる．まず最初に，測度とルベーグ積分に関する基本的事項を述べる．続いて，フラクタル次元について述べることにする．特に，ボックス次元，ハウスドルフ次元を定義し，その性質についてまとめる．後半では，フラクタル集合を表現する上で役立つ手法を準備し，反復関数系の導入をおこなう．併せて，今後必要となる記号や概念についてもここでまとめて説明することにする．

1.1　測度

n 次元ユークリッド空間$\boldsymbol{R}^n$の部分集合を X とする．このとき X の部分集合の族 $\mathcal{M}$ が，

1）$\emptyset \in \mathcal{M}$

2）$A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$

3）$A_n \in \mathcal{M}\ (n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

を満たすとき，$\mathcal{M}$ は**σ 集合体**であるという．空間 X に付随させて，X の部分集合のσ 集合体 $\mathcal{M}$ が与えられているとき，$(X, \mathcal{M})$ を**可測空間**といい，$\mathcal{M}$ に属する集合を**可測集合**と呼ぶ．

可測空間 $(X, \mathcal{M})$ が与えられているとき，$\mathcal{M}$ の各集合に対して一つずつ値を対応させる次のような関数 μを $\mathcal{M}$ 上の**測度**という．

1）$0 \leq \mu(X) \leq \infty$，$\mu(\emptyset) = 0$　　（非負性）

2）$A, B \in \mathcal{M}$，$A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$　　（単調性）

3）$A_n \in \mathcal{M}\ (n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\mu\Bigl(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$　　（劣加法性）．

ここでは，一般的な測度論の外測度の意味で測度という要語を用いていることに注意しておく．

X の部分集合 A が**μ -可測**であるとは，任意の $E \subset X$ に対して，

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \tag{1.1}$$

が成り立つときにいう．

命題 1.1.1 μは X 上の測度とする．$\mathcal{M}$ を X のすべての μ-可測な部分集合の族とする．このとき測度 μ は，次の性質を満たす．

1) $A_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$，$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ であるならば

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.2}$$

2) $\mathcal{M}$ に属する単調増加する集合列 $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ に対し，

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i). \tag{1.3}$$

3) $\mathcal{M}$ に属する単調減少する集合列 $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ に対し，もし，$\mu(A_1) < \infty$ ならば

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i). \tag{1.4}$$

【証明】 $\triangleright$*K.J.Falconer*（畑　政義訳）[5] 第 1 章第 1 節定理 1.1，定理 1.2 参照 □

$\boldsymbol{R}^n$の空でない部分集合 A に対し，A の**直径**を，

$$|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

と定義する．また，$\boldsymbol{R}^n$の空でない部分集合 A，B に対して，この 2 つの集合間の**距離**を，

$$dist(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$$

と定義する．

X 上の測度 μが**ボレル (Borel) 測度**（距離外測度）であるとは，$dist(A, B) > 0$ となる A，$B \subset X$ に対して，

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{1.5}$$

が成り立つときにいう．

$\boldsymbol{R}^n$のコンパクト集合全体を$\mathcal{C}(\boldsymbol{R}^n)$ で表す．$\mathcal{C}(\boldsymbol{R}^n)$ を含む最小のσ 集合体を**ボレル集合体**といい，$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ と書く．このような最小のσ 集合体は常に存在する．その存在性の証明については，猪狩　惺 [11] 第 2 章第 5 節を参照されたい．$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元を**ボレル集合**という．

ボレル集合については，次のことが成り立つ．

定理 1.1.2 μを X 上のボレル測度とする．このとき，X の任意のボレル集合は μ-可測である．

【証明】 $\triangleright$*K.J.Falconer*（畑　政義訳）[5] 第 1 章第 1 節定理 1.5 参照 □

測度 μが**正則**であるとは，X の任意の可測集合 E に対し，$\mu(E) = \mu(A)$ を満足する μ-可測な集合 A で，E を含むものが存在するときにいう．今後，特に断ることがなければ，測度はボレル正則な測度を意味するものとする．また更に，全体集合 X については，すべての測度 μに対して，$\mu(X) > 0$ となっていることも仮定しておく．

$\mu(X) < \infty$ となるとき X 上の測度 μは**有限**といい，すべての有界な集合 A に対して，$\mu(A) < \infty$ であるとき μは**局所有限**であるという．また，$\mu(X) = 1$ となる測度 μ を**確率測度**という．

μの**台 (support)** とは，$spt(\mu)$ と書いて，測度 0 の補集合で最小の閉集合をいう．すなわち，

$$spt(\mu) = X \setminus \cup\{U : U \text{ は開集合，} \mu(U) = 0\} \ .$$

以下に測度の例をいくつか紹介しておく．

1）任意の集合 $X \subset \boldsymbol{R}^n$において，$X$ のある 1 点 a を固定し，集合 $A \subset X$ が a を含むとき $\mu(A) = 1$，含まないときは $\mu(A) = 0$ と定めると，X のすべての部分集合族の上で定義された測度が得られる．これを a に質量をもつ**単位質量分布**または**ディラック（Dirac）測度**という．

2）**（$\boldsymbol{R}^n$上のルベーグ測度）**　座標平行体 $P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ の$\boldsymbol{n}$**次元体積**を

$$Vol^n(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$$

で定義する．そのとき，$\boldsymbol{R}^n$の部分集合 A の$\boldsymbol{n}$**次元ルベーグ測度** $\mathcal{L}^n(A)$ は

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} Vol^n(P_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\Big\}$$

と定義される．ここで，各 P_iは$\boldsymbol{R}^n$の座標平行体である．

3）X 上の測度を μ，X の部分集合を E とする．そのとき，任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，

$$\mu|_E(A) = \mu(A \cap E) \tag{1.6}$$

で定義すると，$\mu|_E$は測度となる．これを$\boldsymbol{\mu}$**の**$\boldsymbol{E}$**への制限**という

4）分割の繰り返しによって，測度を有益に定義することができる (図 1.1 参照).

$m \geq 2$ に対して，列 $\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : k \geq 0,\ 1 \leq i_j \leq m\ (j = 1, 2, \ldots, k)\}$ で添え字付けられた$\boldsymbol{R}^n$上の部分集合からなる階層を考えることにする．任意の列 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対して，$X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$を$\boldsymbol{R}^n$上の空でない有界閉集合とし，また，そのような集合すべてからなる族を $\mathcal{E}$ と表すことにする．これらの集合に対して，

$$X_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \supset \bigcup_{i=1}^{m} X_{i_1, i_2, \ldots, i_k, i}$$

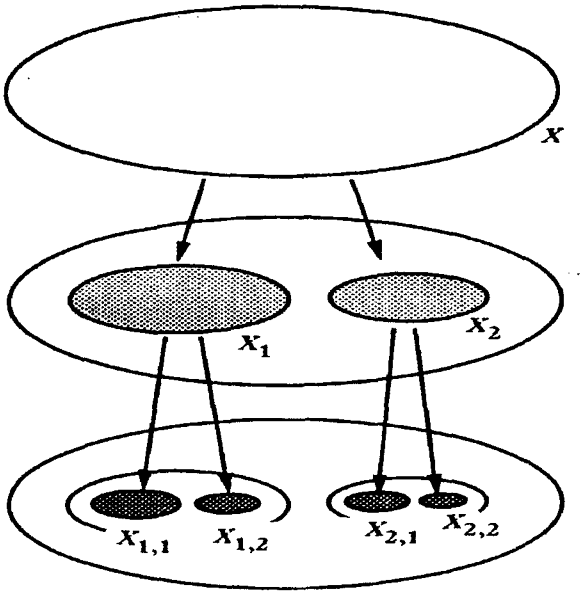

図 1.1: 分割の繰り返しによる測度の構成

を満たす入れ子構造になっていることを仮定する．更に，どの列 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対しても，

$$\mu(X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(X_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i})$$

となるように，$X_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \in \mathcal{E}$ に対して，$\mu(X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) < \infty$ が定義されていると仮定する．これは，質量 $\mu(X_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$ が部分集合 $X_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i}$，$(1 \le i \le m)$ で分割されていることを意味する．また，すべての列 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対して，集合の直径 $|X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|$ とその測度 $\mu(X_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$ が共に $k \to \infty$ として 0 に収束すると仮定する．各 k に対して $E_k = \bigcup_{i_1,i_2,\ldots,i_k} X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ と書き，$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ とおけば，E は閉かつ空でない減少列の交わりであり，従って E は空でない閉集合となる．ここで，$A \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$\mu(A) = \inf\Big\{\sum_i \mu(V_i) : A \cap E \subset \bigcup_i V_i, V_i \in \mathcal{E}\Big\} \tag{1.7}$$

と定義すると，μ は E に含まれた台をもつ測度となる．

$\mathcal{V}$ は，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合からなる集合族とする．$\mathcal{V}$ が集合 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ をヴィターリの意味で被覆するとは，任意の $x \in E$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U \in \mathcal{V}$ が存在して，

$$x \in U \text{ かつ } |U| < \varepsilon$$

となることである．このとき $\mathcal{V}$ を E の**ヴィターリ（Vitali）被覆**という．

定理 1.1.3 （ヴィターリの被覆定理）

$E \subset \boldsymbol{R}^n$，$\mu(E) < \infty$ とする．$\mathcal{V}$ は閉球からなる E のヴィターリ被覆とする．このとき，互いに交わらない $\mathcal{V}$ の可算列 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在して

$$\mu\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) = 0$$

が成り立つ．

【証明】 ▷猪狩　惺 [11] 第４章第３節定理 4.4，*K.J.Falconer*（畑　政義訳）[5] 第１章第３節定理 1.10 参照 □

測度が導入された可測空間 $(X, \mathcal{M})$ において，その各点 s に対して定義された命題 $P(s)$ が成立しないような s 全体の集合の測度が 0 であるとき，$P(s)$ は**ほとんどすべての** s について成り立つ，あるいは，**ほとんどいたるところ**成り立つという．

命題 1.1.4 $\boldsymbol{R}^n$ 上の局所有限ボレル測度を μ とする．このとき，任意の μ-可測な集合 E に対して，測度 0 の点を除いて，

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \tag{1.8}$$

は存在し，μ-ほとんどすべての $x \in E$ に対して 1，μ-ほとんどすべての $x \notin E$ に対して 0 となる．なお，$B(x,r)$ は中心が x で，半径 r の閉球を表す．

【証明】 μ は局所有限であり，問題は局所的であるので，μ は有限であると仮定しておいてもよい．最初に μ-ほとんどすべての $x \notin E$ に対して，(1.8) は 0 になることを証明する．

そこで，$0 < c < 1$ を取り，

$$M_c = \{x \in E^c : r \text{ は任意の小さな値として，} \mu(E^c \cap B(x,r)) < c\mu(B(x,r))\}$$

と定義したとき，$\mu(M_c) = 0$ となることを示すことから始める．ここで，E^c は E の補集合を表す．

$\varepsilon > 0$ を与えれば，$\mu(U) < \mu(M_c) + \varepsilon$ となるような開集合 $U \supset M_c$ は存在する．いま，

$$\mathcal{V} = \{B(x,r) : x \in M_c, B(x,r) \subset U, \mu(E^c \cap B(x,r)) < c\mu(B(x,r))\}$$

で球の族 $\mathcal{V}$ を定義する．このとき $\mathcal{V}$ は M_c のヴィターリ被覆となる．よって，ヴィターリの被覆定理より，$\mu\Big(M_c \setminus \bigcup_i B_i\Big) = 0$ となる $\mathcal{V}$ に属する互いに素な球の列 $B_1, B_2, \ldots$ が存在する．

そこで，

$$
\begin{aligned}
\mu(M_c) = \mu\Big(M_c \cap \bigcup_i B_i\Big) + \mu\Big(M_c \setminus \bigcup_i B_i\Big) &= \sum_i \mu(M_c \cap B_i) \\
&< \sum_i c\mu(B_i) \\
&= c\mu\Big(\bigcup_i B_i\Big) \\
&\leq c\mu(U) \\
&< c(\mu(M_c) + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

となる．$\mu(M_c) < c(\mu(M_c) + \varepsilon)$ は任意の $\varepsilon > 0$ について正しいのだから，$\mu(M_c) \leq c\mu(M_c)$ となり，$\mu(M_c) = 0$ を得る．よって，μ-ほとんどすべての $x \in E^c$に対して，

$$c\mu(B(x,r)) \leq \mu(E^c \cap B(x,r)) \leq \mu(B(x,r))$$

となり，

$$c \leq \frac{\mu(E^c \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \leq 1$$

を得る．$0 < c < 1$ は任意より，$x \notin E$ で

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(E^c \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 1$$

となる．結局，μ-ほとんどすべての $x \notin E$ で

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 0$$

となる．

また，μ-ほとんどすべての $x \in E$ に対して 1 となることも同様にして証明できる． □

X 上の測度 μ と νがすべての集合 $A \subset X$ に対して，

$$c_1\mu(A) \leq \nu(A) \leq c_2\mu(A) \tag{1.9}$$

となるような $c_1, c_2 > 0$ が存在するとき，2 つの測度 μ と ν は**同値**であるという．

1.2 ルベーグ積分

この小節では，本論文第 3 章，第 4 章で主に使用されるルベーグ積分の基本的事項について述べる．なお，可測空間 $(X, \mathcal{M})$ は与えられているものとする．

$f : X \to \boldsymbol{R}$が**単関数**であるとは，$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \boldsymbol{R}$で，$A_1, A_2, \ldots, A_k$は互いに交わらない可測集合としたとき，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}(x)$$

で表される関数をいう．なお，$1_{A_i}(x)$ は定義関数である．μに関する非負単関数 f の積分を，

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$$

で定義する．このとき，積分の右辺の値は単関数 f の表現に無関係に決まる（猪狩　惺 [11] 第３章第３節参照）．

$f : X \to \boldsymbol{R}$が**可測関数**であるとは，すべての $c \in \boldsymbol{R}$ に対して，集合 $\{x \in X : f(x) < c\}$ が可測集合となるときにいう．f を非負可測関数としたとき，$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \to f(x)$ を満足する可測単関数列 $\{s_i\}$ が存在する（猪狩　惺 [11] 第３章第２節定理 3.4）．

可測関数 $f : X \to \boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}$ の積分は，$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \to f(x)$ を満足する可測単関数列 $\{s_i\}$ をひとつ選び，

$$\int f(x) d\mu(x) = \lim_{i \to \infty} \int s_i(x) d\mu(x)$$

で定義する．このとき，右辺の極限値は単関数列 $\{s_i\}$ の選び方に依存しない（猪狩　惺 [11] 第３章第３節参照）．

可測関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$に対し，$f_+(x) = \max(f(x), 0)$，$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ とする．このとき，$\int f_+ d\mu$，$\int f_- d\mu$が共に有限であれば，f は積分を有するといい，

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

で定義する．このような関数 f を**可積分**であるという．X 上で定義された可積分関数全体を $L(X, d\mu)$ または $L(X)$ と書く．特に，考えている定義域が自明なときは単に L と書く．以下に可積分関数の諸性質と基本的定理を述べる．

可測集合 E, F が $E \cap F = \emptyset$ であり，さらに $f \in L$ であるならば，

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$$

が成り立つ．また，$f, g \in L$，$a, b \in \boldsymbol{R}$とすれば，

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$

が成り立つ（猪狩　惺 [11] 第３章第４節補題 3.6，定理 3.6）．

$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ を非負可測関数列とするとき，

$$\int (\sum_{i=1}^{\infty} u_i) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int u_i d\mu$$

が成り立つ（**レビ (Levi) の定理**）．また，可測関数の列 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ で，$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ ならば，

$$\int (\lim_{i \to \infty} f_i) d\mu = \lim_{i \to \infty} \int f_i d\mu$$

が成り立つ（**単調収束定理**）．さらに，可測関数の列が $f_i \geq 0$ ならば，

$$\int (\liminf_{i\to\infty} f_i) d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int f_i d\mu$$

が成り立つ（**ファトゥー (Fatou) の補題**）．最後に，可測関数の列 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$に対し，$\mu$-ほとんどすべての x に対して $|f_i| \leq g$ を満たす，可積分な関数 g が存在し，$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ であれば，

$$\int (\lim_{i\to\infty} f_i) d\mu = \lim_{i\to\infty} \int f_i d\mu$$

が成り立つ (**ルベーグ (Lebesgue) 収束定理**)．これらの収束定理については，伊藤清三 [13] 第３章第１３節を参照されたい．

1.3 ボックス次元

集合のフラクタル次元の研究は，フラクタル数学の中心内容のひとつである．本節と次節で定義される内容は，一般距離空間の中でも考えられるのだが，ここでは，$\boldsymbol{R}^n$上の部分集合の次元を中心に扱うことにする．次元については様々な定義がなされているが，まず最初に，最も単純なボックス次元について述べる．この次元は，エントロピー次元，容量次元などとも呼ばれることがある．

$\boldsymbol{R}^n$上の空でない有界な集合 E に対して，$N_r(E)$ は集合 E を被覆できる直径が高々r の集合の最小個数とする．このとき集合 E の**下ボックス次元**と**上ボックス次元**を，

$$\underline{\dim}_B E = \liminf_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{1.10}$$

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{1.11}$$

で定義する．これら２つの次元の値が等しいとき，集合 E の**ボックス次元**として，

$$\dim_B E = \lim_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{1.12}$$

と定義する．このとき，個数 $N_r(E)$ の定義を次のように書き換えても (1.10) と (1.11) の右辺の値は変化しないことが容易に確かめられる (図 1.2 参照)．

１）E を被覆する半径 r の閉球の最小個数

２）E を被覆する一辺 r の立方体の最小個数

３）E と交わる r-$mesh$ 立方体の個数

４）E を被覆する直径が高々r の集合の最小個数

５）E の中に中心をもつ半径 r の互いに素な球の最大個数

なお，r-$mesh$ 立方体とは，$m_1, m_2, \ldots, m_k$が整数として式$[m_1 r, (m_1+1)r) \times \cdots \times [m_k r, (m_k+1)r)$ で表される立方体をいう．

集合 E の**r-近傍**または**r-平行体**を，

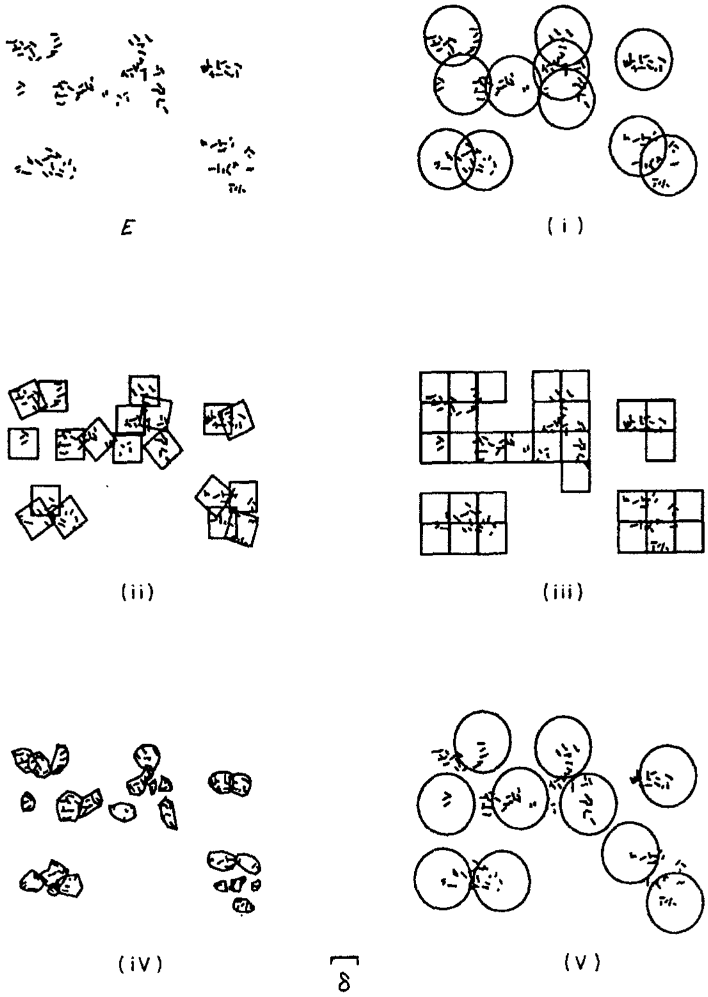

図 1.2: 集合 E の $N_r(E)$ を求める5つの方法

$$E_r = \{x \in \boldsymbol{R^n} : \text{ある } y \in E \text{ に対して，} |x-y| \leq r\}$$

と定義する．

集合 E の r-平行体 E_r の n 次元ルベーグ測度（もしくは n 次元体積）を用いて書き換えたボックス次元の定義を**ミンコノフスキー（Minkowski）次元**といい，$E \subset \boldsymbol{R^n}$ に対して，

$$\underline{\dim}_B E = n - \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{1.13}$$

$$\overline{\dim}_B E = n - \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{1.14}$$

$$\dim_B E = n - \lim_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{1.15}$$

と定義される ($K.J.Falconer$ [6] 第3章第1節命題3.2参照).

ボックス次元の最大の弱点は，測度になりえないことである．以下にそのことを確認する．

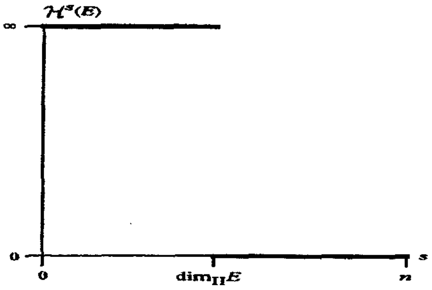

図 1.3: s の関数としての $\mathcal{H}^s(E)$ のグラフ

命題 1.3.1 $\overline{E}$を E の閉包とする．このとき，

$$\underline{\dim}_B\overline{E} = \underline{\dim}_B E,\ \overline{\dim}_B\overline{E} = \overline{\dim}_B E$$

が成立する．

【証明】 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ を，半径 r の閉球による有限族とする．もし，閉集合$\bigcup_{i=1}^{k} B_i \supset E$ ならば，$\bigcup_{i=1}^{k} B_i \supset \overline{E}$ でもあることから明らかである． □

この命題の結果からボックス次元は，測度の条件，劣加法性を満足しないことがわかる．たとえば，集合 E を 0 と 1 の間の有理数による（可算個の）集合とすると，集合$\overline{E}$は区間 $[0,1]$ となり，$\underline{\dim}_B\overline{E} = \overline{\dim}_B\overline{E} = 1$ である．しかし，1 点集合とみなされるどの有理数のボックス次元も明らかに 0 である．すなわち，$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \dim_B E_i$ は一般に成立しない．

1.4 ハウスドルフ測度とハウスドルフ次元

ハウスドルフ次元は，一般の被覆に対して定義される分，ボックス次元よりもより複雑である．

$\boldsymbol{R}^n$上の有限個または可算個からなる集合族 $\{U_i\}$ が，集合 $E \subset \boldsymbol{R}^n$の**$\delta$-被覆**とは，すべての i に対して，$|U_i| \leq \delta$で，$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$が成り立つときにいう．

E を$\boldsymbol{R}^n$上の部分集合とし，かつ $s \geq 0$ とする．このとき，$\delta > 0$ に対して，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}\text{ は集合 }E\text{ の }\delta\text{-被覆}\Big\}$$

と定義する．s を固定して，δの関数と考えたとき，$\mathcal{H}^s_\delta(E)$ は δの減少とともに単調に増加する．従って，∞ 値までこめれば，常に極限値は存在することがわかる．ここで，$\boldsymbol{R}^n$の部

分集合 E の **s 次元ハウスドルフ (Hausdorff) 測度**を

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{1.16}$$

で定義する．

定理 1.4.1 集合 $E \subset \boldsymbol{R}^n$に対して，

1) $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ であるとき，$t > s$ ならば $\mathcal{H}^{\mathrm{t}}(E) = 0$ となる．

2) $\mathcal{H}^s(E) > 0$ であるとき，$s > r$ ならば $\mathcal{H}^r(E) = \infty$ となる．

【証明】 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$，$t > s$ ならば $\delta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\mathrm{t}}_\delta(E) &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t : |U_i| \le \delta, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big\} \\
&\le \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-s}|U_i|^s : |U_i| \le \delta, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big\} \\
&= \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(E)
\end{aligned}$$

だから，$\delta \to 0$ で $\mathcal{H}^t(E) = 0$ を得る．また，2) も同様にして得られる． □

$\mathcal{H}^s(E)$ は，$\boldsymbol{R}^n$上のボレル正則測度となる (猪狩　惺 [11] 第 5 章第 8 節定理 5.14)．だから，すべてのボレル集合 $E_1, E_2, \ldots$に対して，

$$\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) \tag{1.17}$$

が成立する．なお，等号は E_iが互いに素な場合に成立する．

定理 1.4.1 より，$\mathcal{H}^s(E)$ は s の関数として，高々 1 個の不連続点をもつ階段関数である．このときの不連続点 s の値を，つまり，

$$\dim_H E = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

となる s の値を集合 E の**ハウスドルフ次元**という．$s = \dim_H E$ において，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ となる集合 E を***s*-集合**という．

次に，ハウスドルフ測度とルベーグ測度の関係を述べる．

定理 1.4.2 （等直径不等式）

直径 d をもつ，$\boldsymbol{R}^n$の閉凸集合の最大の n 次元体積をもつものは，直径 d の閉球であり，その体積 $c_n(d)$ は，Γ 関数を用いることで

$$c_n(d) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}(\frac{1}{2}d)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

となる．

【証明】 ▷都筑卓司 [26] の付録D参照 □

定理 1.4.3 $\boldsymbol{R}^n$の任意の部分集合 E に対して,

$$\mathcal{L}^n(E) = c_n \mathcal{H}^n(E)$$

が成り立つ．ここで，c_nは直径 1 の閉球の n 次元体積を表す.

【証明】 最初に，$\mathcal{L}^n(E) \leq c_n \mathcal{H}^n(E)$ を示す．$\mathcal{H}^n(E) < \infty$ の場合を考えれば十分である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^n < \mathcal{H}^n(E) + \varepsilon$ を満たす閉凸集合からなる E の被覆 $\{U_i\}$ が存 在する．そうすれば， 定理 1.4.2 により $\mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n |U_i|^n$ となる．よって,

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_n |U_i|^n < c_n(\mathcal{H}^n(E) + \varepsilon)$$

となる．εは任意だから，$\mathcal{L}^n(E) \leq c_n \mathcal{H}^n(E)$ が成り立つ.

次に，$\mathcal{L}^n(E) \geq c_n \mathcal{H}^n(E)$ を示す．$\mathcal{L}^n(E) < \infty$ の場合を考えれば十分である．任意の$\varepsilon > 0$ に対して,

$$\sum_i Vol^n(\mathcal{C}_i) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon \tag{1.18}$$

を満たすような，E を被覆する右半開区間列 $\{\mathcal{C}_i\}$ が存在する．各 $\mathcal{C}_i$を少しだけ膨らませることによって，$\{\mathcal{C}_i\}$ は (1.18) を満たす開集合列であるとしても差し支えない．任意に $\delta > 0$ を固定する．各 i に対して，$\mathcal{C}_i$に含まれ，直径が δ以下の閉球全体を考えれば，これが $\mathcal{C}_i$に関するヴィターリ被覆となっていることがわかる．よって， 定理 1.1.3 より，$\mathcal{H}^n\Big(\mathcal{C}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\Big) = 0$ を満たす，$\mathcal{C}_i$に含まれ，直径が δ以下で，互いに交わらない閉球列 $\{B_{ij}\}$ が存在する．従って，特に，$\mathcal{H}^n_\delta\Big(\mathcal{C}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\Big) = 0$ を得る．一方，$\mathcal{L}^n$はボレル測度であるから,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{ij}) = \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\Big) \leq \mathcal{L}^n(\mathcal{C}_i)$$

となる．(1.18) を用いて,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta(\mathcal{C}_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B_{ij}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta\Big(\mathcal{C}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\Big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |B_{ij}|^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}^n(B_{ij})}{c_n} \\
&\leq \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\mathcal{C}_i) \\
&< \frac{1}{c_n}(\mathcal{L}^n(E) + \varepsilon)
\end{aligned}$$

となる．従って，$c_n\mathcal{H}^n_\delta(E) < \mathcal{L}^n(E)+\varepsilon$ を得る．εと δは任意であるから，$c_n\mathcal{H}^n(E) \le \mathcal{L}^n(E)$ となる． □

定理 1.4.4 $E \subset \boldsymbol{R}^n$とする．$f: E \to \boldsymbol{R}^m$は，定数$c > 0$，$\alpha > 0$に対して，

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|^\alpha \quad (x, y \in E) \tag{1.19}$$

を満たす写像であるとする．このとき，各sに対して，

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \le c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s(E) \tag{1.20}$$

が成り立つ．

【証明】 集合Eの δ-被覆を$\{U_i\}$とする．このとき，各iに対して，

$$|f(E \cap U_i)| \le c|U_i|^\alpha \tag{1.21}$$

が成り立つ．いま，$\varepsilon = c\delta^\alpha$とおくと，集合$\{f(E\cap U_i)\}$は$f(E)$の$\varepsilon$-被覆となる．(1.21) の両辺を$\dfrac{s}{\alpha}$乗し，和をとることで，$\displaystyle\sum_{i=1}^\infty |f(E\cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \le c^{\frac{s}{\alpha}}\sum_{i=1}^\infty |U_i|^s$ を得る．よって，$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}_\varepsilon(f(E)) \le c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s_\delta(E)$ となり，$\delta \to 0$を取ることで結果を得る． □

不等式 (1.19) は**指数αのヘルダー条件**として知られている．特に重要なのは，$\alpha = 1$のときで，fは**リプシッツ写像**と呼ばれる．すなわち，定数$c > 0$に対して，

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y| \quad (x, y \in E)$$

のときである．そしてこのとき，

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \le c^s\mathcal{H}^s(E) \tag{1.22}$$

となる．同様にして，fがある$c_1, c_2 > 0$に対して，

$$c_1|x-y| \le |f(x) - f(y)| \le c_2|x-y| \quad (x, y \in E)$$

を満たす**双リプシッツ写像**であるならば，

$$c_1^s\mathcal{H}^s(E) \le \mathcal{H}^s(f(E)) \le c_2^s\mathcal{H}^s(E) \tag{1.23}$$

が成り立つ．この特別なケースとして，fが相似比rの**相似変換**であるとき，すなわち，任意の$x, y \in E$に対して，$|f(x) - f(y)| = r|x-y|$となるときは，

$$\mathcal{H}^s(f(E)) = r^s\mathcal{H}^s(E) \tag{1.24}$$

が成立する．これを**ハウスドルフ測度の比率性質**という．

1.5 次元の基本的性質

この小節では，次元の単調性と２つの次元の関係，つまりボックス次元とハウスドルフ次元の関係を述べる．

定理 1.5.1 $\boldsymbol{R}^n$上の任意の部分集合 X，Y に対して，$X \subset Y$ ならば，$\dim_H X \leq \dim_H Y$ となる．

【証明】 $X \subset Y$ より，$\mathcal{H}^n(X) \leq \mathcal{H}^n(Y)$ である．いま，$\dim_H Y = \mathrm{s}$ とすれば，$\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y)$ となる．この不等式が，$0 \leq \mathcal{H}^s(Y) \leq \infty$ で常に成立するためには，$\dim_H X \leq s$ でなければならない． □

定理 1.5.2 $\boldsymbol{R}^n$上の任意の空でない有界集合 E に対して，

$$\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E \tag{1.25}$$

が成り立つ．

【証明】 $\underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E$ は定義より明らかなので，$\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E$ を証明する．集合 E が $N_\delta(E)$ 個の直径 δの集合で被覆されていると仮定すると，$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq N_\delta(E)\delta^s$ が成り立つ．任意の $s < \dim_H E$ に対して，$\mathcal{H}^s(E) = \infty$ だから十分に小さい δにおいて

$$1 < \mathcal{H}^s_\delta(E) \leq N_\delta(E)\delta^s$$

となり，対数を取ることで，

$$0 < \log N_\delta(E) + s \log \delta$$

となり，

$$s \leq \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B E$$

が得られる． □

1.6 次元の計算

我々は，しばしば集合の次元を評価することが必要になる．通常，上からの評価よりも下からの評価の方が困難を伴う．ここでは，次元評価に役立つ命題を述べる．

$0 < \mu(\boldsymbol{R}^n) < \infty$ を満たし，コンパクトな台をもつような$\boldsymbol{R}^n$上のボレル測度 μを**質量分布**という．この質量分布に関して，次の命題が成り立つ．

命題 1.6.1 (質量分布法則)

集合 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ とし，μを E 上の質量分布とする．いま，$s \geq 0$，$c > 0$，$\delta_0 > 0$ が存在して，$|U| \leq \delta_0$ となるすべての集合 U に対して$\mu(U) \leq c|U|^s$ を仮定する．このとき，

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c},\ s \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E$$

が成り立つ．

【証明】 $\{U_i\}$ は直径が高々δ_0 であるような集合による E の任意の被覆であるとする．このとき，

$$\mu(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

が成り立つ．従って，$\delta \leq \delta_0$ において

$$0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq c\mathcal{H}^s(E)$$

となる．よって，$\mathcal{H}^s(E) > 0$ より $s \leq \dim_H E$ となり，(1.25) $\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E$ を考えあわせることで結論を得る． □

集合 E 上のある“局所密度条件”を満足するような測度 μ を見つけることができるならば，上述の考えを発展させることで，集合 E におけるハウスドルフ測度の評価が可能となる．命題の証明に先立ち，次の補題を準備しておく．

補題 1.6.2 (被覆補題)

$\boldsymbol{R}^n$のある有界部分集合に含まれる球からなる任意の集合族を$\mathcal{C}$ とする．このとき，$\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$ となる互いに交わらない有限または可算個の $\mathcal{C}$ の部分列 $\{B_i\}$ を選び出すことができる．ここで，$\tilde{B}_i$は球 B_iと同心球で直径を 4 倍に相似拡大した閉球である．

【証明】 ▷*K.J.Falconer* [6] 第 4 章第 1 節補題 4.8 参照 □

命題 1.6.3 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ はボレル集合とし，μを$\boldsymbol{R}^n$ 上の質量分布とする．更に，cは $0 < c < \infty$ を満足する定数とする．

1) すべての $x \in E$ に対して $\overline{\lim_{r\to 0}} \dfrac{\mu(B(x,r))}{r^s} < c$ ならば，$\mathcal{H}^s(E) \geq \dfrac{\mu(E)}{c}$ となる．

2) すべての $x \in E$ に対して $\overline{\lim_{r\to 0}} \dfrac{\mu(B(x,r))}{r^s} > c$ ならば，$\mathcal{H}^s(E) \leq 8^s \dfrac{\mu(\boldsymbol{R}^n)}{c}$ となる．

【証明】 (1) の証明) 各$\delta > 0$ に対して

$$E_\delta = \{x \in E : \text{ある}\varepsilon > 0 \text{ に対して，すべての } 0 < r \leq \delta \text{ で}\mu(B(x,r)) < (c-\varepsilon)r^s\}$$

とおく．ここで，$\{U_i\}$ は E の δ-被覆とすると，$\{U_i\}$ は E_δ の δ-被覆でもある．E_δ の点 x を含むどの U_iに対しても中心が x で，半径 $|U_i| \le \delta$ である球 $B(x, |U_i|)$ は確かに U_iを含んでいる．E_δ の定義より

$$\mu(U_i) \le \mu(B(x, |U_i|)) < c|U_i|^s$$

だから，

$$\mu(E_\delta) \le \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \le c\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

が成り立つ．$\{U_i\}$ は E の任意の δ-被覆であるのだから，

$$\mu(E_\delta) \le \inf\Big\{c\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\Big\} = c\mathcal{H}^s_\delta(E) \le c\mathcal{H}^s(E)$$

となる．なお，左辺については，δが 0 に減少するとき，E_δ は E に単調増大するので，$\delta \to 0$ で命題 1.1.1 の 2) より $\mu(E)$ となる．

(2) の証明） いま，μは質量分布だから，コンパクトな台をもち，この台を K とすれば，$K \cap E$ は有界である．これを改めて E とする．$\delta > 0$ を固定して，次のような球の族

$$\mathcal{C} = \{B(x,r) : x \in E, 0 < r \le \delta, cr^s < \mu(B(x,r))\}$$

を定義する．この族 $\mathcal{C}$ に被覆補題を適用することで，$E \subset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$ であるような互いに素な球 $B_i \in \mathcal{C}$ がとれる．このとき，$\{\tilde{B}_i\}$ は E の 8δ-被覆となり，従って，

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{8\delta}(E) \le \sum_i |\tilde{B}_i|^s &= 4^s \sum_i |B_i|^s \\
&= 8^s \sum_i \Big|\frac{B_i}{2}\Big|^s \\
&< 8^s \sum_i \frac{\mu(B_i)}{c} \\
&\le 8^s \frac{\mu(\boldsymbol{R}^n)}{c}
\end{aligned}$$

を得る．さらに，μは，$0 < \mu(\boldsymbol{R}^n) < \infty$ だから，$\mathcal{H}^s_{8\delta}(E) < 8^s\dfrac{\mu(\boldsymbol{R}^n)}{c} < \infty$ となり，$\delta \to 0$ とすることで，$\mathcal{H}^s(E) \le 8^s\dfrac{\mu(\boldsymbol{R}^n)}{c} < \infty$ を得る．□

なお，2) に関しては，より繊細な議論をおこなうことで $\mathcal{H}^s(E) \le 2^s\dfrac{\mu(E)}{c}$ となることが知られている (*K.J.Falconer* [7] [6] を参照)．しかし，後で本論で用いる道具としては上の弱い結果で十分である．

1.7 密度

密度は幾何学的測度論の発展に欠かすことのできないものである．特に，ここでは s 集合の密度に注目していくことにする．

$\boldsymbol{R}^n$内の s 集合 E の点 x における**下密度**と**上密度**を

$$\underline{D}^s(x) = \underline{D}^s(E,x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))}{(2r)^s} \tag{1.26}$$

$$\overline{D}^s(x) = \overline{D}^s(E,x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))}{(2r)^s} \tag{1.27}$$

で定義する．また，$\underline{D}^s(E,x) = \overline{D}^s(E,x)$ が成り立つとき，この値を E の**密度**といい，$D^s(E,x)$ と書く．$f : X \to \boldsymbol{R}$を開集合 $X \subset \boldsymbol{R}$上定義された C^1-写像とする．このとき，$E \subset \boldsymbol{R}$に対して，$f'(x) \neq 0$ となるすべての x において

$$\underline{D}^s(E,x) = \underline{D}^s(f(E),f(x)) \tag{1.28}$$

$$\overline{D}^s(E,x) = \overline{D}^s(f(E),f(x)) \tag{1.29}$$

となることが容易に示される．

定理 1.7.1　$\boldsymbol{R}^n$内の任意の s 集合を E とする．
1) $\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての $x \notin E$ に対して，$\underline{D}^s(E,x) = \overline{D}^s(E,x) = 0$ が成立する．
2) $\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての $x \in E$ に対して，$\dfrac{1}{2^s} \leq \overline{D}^s(E,x) \leq 1$ が成立する．

【証明】　▷$K.J.Falconer$（畑　政義訳） [5] 第 2 章第 2 節系 2.4，系 2.5 参照　□

密度の古典的な結果のひとつに，ルベーグ密度定理がある．

定理 1.7.2 （ルベーグ密度定理）
集合 E が$\boldsymbol{R}^n$上のルベーグ可測集合とする．このとき，$\mathcal{L}^n$-ほとんどすべての x に対して，

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E\cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \tag{1.30}$$

が存在し，$\mathcal{L}^n$-ほとんどすべての $x \in E$ に対して 1，$\mathcal{L}^n$-ほとんどすべての $x \notin E$ に対して 0 となる．

【証明】　定理 1.1.4 で一般の測度の場合を証明済．　□

上述の結果と定理 1.4.3 を利用することで，$\mathcal{H}^n$-ほとんどすべての点 x に対して

$$D^n(E,x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(E\cap B(x,r))}{(2r)^n} \tag{1.31}$$

が存在し，$\mathcal{H}^n$-ほとんどすべての $x \in E$ に対して 1，$\mathcal{H}^n$-ほとんどすべての $x \notin E$ に対して 0 となる．

1.8 反復関数系

これ以降，特に断らない限り集合 X は$\boldsymbol{R}^n$の空でない閉部分集合を指すものとする．

$F: X \to X$ が**縮小写像**であるとは，ある定数 $r \in (0,1)$ が存在して，

$$|F(x) - F(y)| \leq r|x - y| \tag{1.32}$$

が，任意の $x, y \in X$ に対して成り立つときにいう．**反復関数系 (iterated function system)** とは，2 個以上の X 上の縮小写像の族 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ のことである．反復関数系 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ をIFS$\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ と表す．また，反復関数系の各元 F_iに対して，(1.32) を満足する定数をそれぞれ r_iとしたとき，

$$r_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} r_i \tag{1.33}$$

と定義する．当然，$r_{\max} < 1$ である．反復関数系の基本的な性質は，$E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E)$ を満足する唯一空でないコンパクト集合 E を決定することである．このような集合 E の多くはフラクタル集合となる．たとえば，F_1, $F_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が，

$$F_1 = \frac{1}{3}x \ , F_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \tag{1.34}$$

で与えられたとき，$E = F_1(E) \cup F_2(E)$ を満足する**カントール (Cantor) の 3 進集合**はその例である．

X 上空でないコンパクト部分集合の族を $\mathcal{S}$ で表すことにする．A_δは A の δ-近傍を表すことにするとき，

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\} \tag{1.35}$$

で $\mathcal{S}$ 上の距離 d を定義する．そして，この d を $\mathcal{S}$ 上の**ハウスドルフ (Hausdorff) の距離**という．

定理 1.8.1 $\mathcal{S}$ はハウスドルフの距離 d によって完備な距離空間となる．

【証明】 $\mathcal{S}$ 内の任意のコーシー列を $\{A_j\}$ とする．すなわち，任意の $\delta > 0$ に対し，十分大きな N を取れば，$d(A_p, A_q) \leq \delta$がすべての $p \geq q \geq N$ で成り立つとする．示すべきことは，ハウスドルフの距離の意味で列 $\{A_j\}$ が $\mathcal{S}$ のある点に収束することである．

さて，$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$ とおく．ここで，$\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$は集合$\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$ の閉包を表す．明らかに $\{A_j\}$ は一様有界だから，各 E_kはコンパクト集合であり，また $\{E_k\}$ は単調減少列である．よって，$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ は $\mathcal{S}$ の元である．従って，

$$E \subset E_q = \overline{\bigcup_{i=q}^{\infty} A_i} \subset (A_q)_\delta$$

が成り立つ．

一方，任意の点 $x \in A_q$に対し，$A_q \subset (A_q)_\delta$だから任意の $p \geq q$ に対してある点 $y_p \in A_p$がとれて $|x - y_p| \leq \delta$ を満たす．このとき，点列 $\{y_p\}$ の集積点のひとつを z とすれば，$|x - z| \leq \delta$ である．さらに，どんな $p \geq k$ に対しても，$y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k$ であり，E_kはコンパクト集合だから $z \in E_k$を得る．k は任意だから，$z \in E$ であり，$x \in z_\delta \subset E_\delta$ が成り立ち，$A_q \subset E_\delta$ を得る．ゆえに $d(E, A_q) \leq \delta$であり，つまり，列 $\{A_j\}$ は E に収束している． □

定理 1.8.2 （バナッハ縮小写像定理）

X を完備距離空間とする．$\varphi : X \to X$ を X から自分自身への写像とする．定数 $0 < \lambda < 1$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して，$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d(x, y)$ が成立するならば，φ は X に唯一の不動点，すなわち，$\varphi(x) = x$ を満たす点 $x \in X$ をもつ．

【証明】 ▷矢野公一 [29] 第 6 章第 1 節第 4 項定理 6.10 参照 □

定理 1.8.3 （縮小写像定理）

集合 $X \subset \boldsymbol{R}^n$上の反復関数系を $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ とする．このとき，

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E) \tag{1.36}$$

を満足する唯一空でないコンパクト集合 $E \subset X$ が存在する．さらに，$A \in \mathcal{S}$ に対して，

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(A) \tag{1.37}$$

で変換 $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を定義すれば，$k \to \infty$ のときハウスドルフの距離 d で，すべての $A \in \mathcal{S}$ に対して，

$$F^k(A) \to E$$

となる．なお，F^kとは F の k 回反復のことである．

そのうえ，もし，$A \in \mathcal{S}$ がすべての i に対して，$F_i(A) \subset A$ であるならば，

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A) \tag{1.38}$$

となる．

【証明】 $A, B \in \mathcal{S}$ とする．もし，すべての i に対して δ-平行体 $(F_i(A))_\delta$が $F_i(B)$ を包含しているならば，$\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i(A)\right)_\delta$ は$\bigcup_{i=1}^{m} F_i(B)$ を包含する．逆も同様．よって，

$$d(F(A), F(B)) = d\Big(\bigcup_{i=1}^{m} F_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} F_i(B)\Big) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(F_i(A), F_i(B)) \leq \Big(\max_{1 \leq i \leq m} r_i\Big) d(A, B)$$

である．$\max_{1\leq i\leq m} r_i < 1$ であるから，写像 F は完備距離空間 $(\mathcal{S}, d)$ 上の縮小写像である．よって，バナッハ縮小写像定理によって F は唯一の不動点をもつ．すなわち，$E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E)$ となる不動点集合 $E \in \mathcal{S}$ が唯一存在する．更に，$k \to \infty$ で $F^k(A) \to E$ となる．特に，もしすべての i に対して，$F_i(A) \subset A$ ならば，$F(A) \subset A$ となる．だから，$F^k(A)$ は E を含む空でないコンパクト集合の減少列であり，$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A) \neq \emptyset$ が成り立つ． □

(1.36) を満足する唯一空でないコンパクト集合 E を**アトラクター (attractor)** または **IFS$\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$の不変集合**という．

アトラクター E をもつ反復関数系を $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ とする．$k = 0, 1, 2, \ldots$に対して，$\{1, 2, \ldots, m\}$ から選ばれた数字からなる任意の k 項整数列の集合として I_kを定義する．すなわち，

$$I_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\} \tag{1.39}$$

と定義する．なお，I_0は空の列を表す．

$$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \tag{1.40}$$

で I_kの列を簡単に書くこともある．このようなすべての列の集合を，

$$I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \tag{1.41}$$

と書く．なお，I_∞は無限列に対応した列を表す．すなわち，

$$I_\infty = \{(i_1, i_2, \ldots) : 1 \leq i_j \leq m\} \tag{1.42}$$

と定義する．また，$\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の並記を表すのに，$\mathbf{i},\mathbf{j}$ と書く．特に，$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ のとき $\mathbf{i}, i = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i)$ となる．

$A \in \mathcal{S}$ は，すべての i に対して $F_i(A) \subset A$ を満足する集合とする．そうすれば，$F(A) \subset A$ となる．(1.38) から，E は $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ にわたる和集合

$$F^k(A) = \bigcup_{I_k} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A) \tag{1.43}$$

からなる減少列の交わりとなる．さらに，すべての $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対して，$F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A) \subset F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_{k-1}}(A)$ となり，$|F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)| \leq r_{\max} |F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_{k-1}}(A)|$ を得る．だから，すべての $(i_1, i_2, \ldots) \in I_\infty$ に対して，この減少列の集合の交わりは 1 点

$$x_{i_1, i_2, \ldots} \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A) \tag{1.44}$$

で，$k \to \infty$ のとき $|F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)| \to 0$ となる．従って，E のあらゆる点は，少な

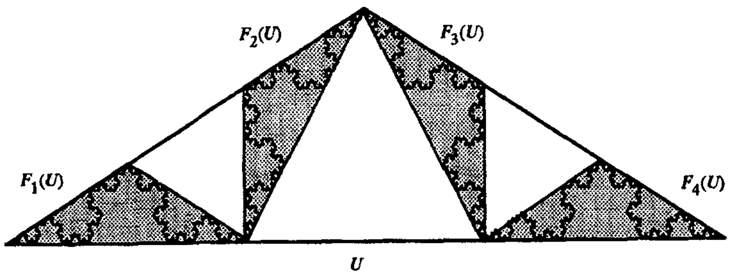

図 1.4: 開集合条件を満足する例

くとも 1 つの列 $(i_1, i_2, \ldots) \in I_\infty$に対して，(1.44) のような交わりとなるのだから，

$$E = \bigcup_{I_\infty} \{x_{i_1, i_2, \ldots}\} \tag{1.45}$$

が成り立つ．

反復関数系のアトタクターの解析をしやすくするために，$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I$ と $A \subset X$ に対して，

$$A_{\mathbf{i}} = A_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A) \tag{1.46}$$

と書くことにする．

最も簡単な状態は，集合 $F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$ が互いに素のときである．このとき，(1.43) の和集合は互いに素な集合からなり，E の各々の点は唯一 $x_{i_1, i_2, \ldots}$で表現される．事実，このとき，$F(A) \subset A$ となる任意の集合 A に対して，$E \subset A$ となるのだから $F_1(E), F_2(E), \ldots, F_m(E)$ は互いに素である．

和集合 $E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E)$ において各 $F_i(E)$ が互いに素であるとき，IFS$\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ は**強分離条件**を満足するという．この例としては，カントール 3 進集合 (1.34) の反復関数系などがある．しかしながら，強分離条件は使用する上で強すぎる条件であるため，より弱い分離条件も定義しておく．互いに素な集合の和集合で，

$$\bigcup_{i=1}^{m} F_i(U) \subset U \tag{1.47}$$

となる有界開集合 $U \subset X$ が存在するとき，IFS$\{F_1, F_2, \ldots F_m\}$ は**開集合条件**を満足するという．強分離条件は満たさないが開集合条件を満たす例としては，コッホ曲線やシェルピンスキーの三角形などがある (図 1.4 参照)．

IFS$\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ が相似変換からなる，アトラクター E を**自己相似**という．

定理 1.8.4 F_iは相似比 r_iの相似変換で，族 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ のアトラクターを E とする．このとき，開集合条件 (1.47) を満足するならば，

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1 \tag{1.48}$$

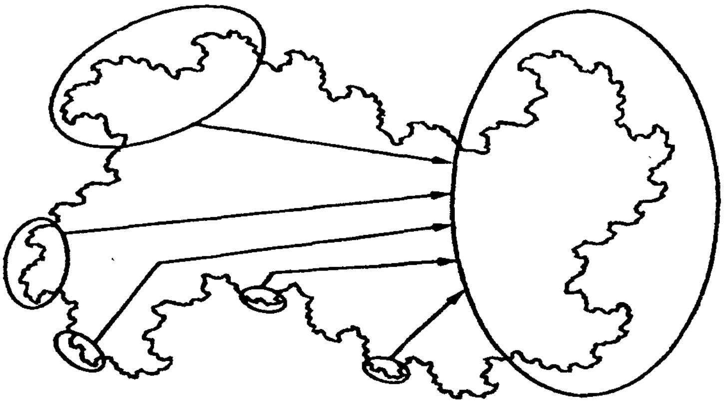

図 1.5: 定理 1.9.1 の条件を満足する集合 E の例

の唯一の正の解を s とすると，$\dim_H E = \underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$ となる．更に，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ が成立する．

【証明】 $\triangleright$ *K.J.Falconer* [6] 第 9 章第 2 節定理 9.3 参照 □

1.9 次元を扱うための間接的な方法

ハウスドルフ次元は，数学の理論展開には有用であるが，その次元計算は困難を伴うことが多い．この小節では，直接次元計算をすることを避け，間接的な方法，つまり $s = \dim_H E$ で $\mathcal{H}^s(E) > 0$，又は $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ となる集合 E の幾何学的条件を述べ，次元を求める一助とする．

集合 E における任意の小近傍を考える．次の定理 1.9.1 は，小近傍の大きさによって決まる定数をもつリプシッツ写像により，その小近傍が E のより大きい部分へ写されるような集合 E に対して適用される (図 1.5 参照)．なお，証明の中で用いた $\sharp$ は集合の元の数を表す記号である．

定理 1.9.1 E を $\boldsymbol{R}^n$ 上の空でないコンパクト部分集合とし，$a > 0$，$r_0 > 0$ とする．更に，E と交わる $|U| < r_0$ のすべての集合 U に対して，

$$\frac{a}{|U|}|x - y| \leq |g(x) - g(y)| \quad (x, y \in E \cap U) \tag{1.49}$$

を満足する写像 $g : E \cap U \to E$ が存在すると仮定する．このとき，$s = \dim_H E$ とすれば，$\mathcal{H}^s(E) \geq a^s > 0$，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$ が成り立つ．

【証明】 すべての $d > 0$ に対して，

$$\mathcal{H}^d(E) < a^d \text{ ならば } \overline{\dim}_B E < d \tag{1.50}$$

となることが証明できればよい．なぜなら，(1.50) が証明できれば，$s = \dim_H E$ に近い任意の $d > s$ を取ることで，$\mathcal{H}^d(E) < a^d$ より $\overline{\dim}_B E < d$ となる．任意の $d > s$ に対して成り立つことより，$\overline{\dim}_B E \leq s$ を得る．また，一般に $\dim_H E \leq \overline{\dim}_B E$ だから，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$ が成り立つ．更に，(1.50) の対偶をとることで，$\mathcal{H}^s(E) \geq a^s > 0$ も得られる．

さて，E はコンパクト集合だから，$\mathcal{H}^d(E) < a^d$ ならば，ハウスドルフ測度の定義より，$E \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ ，$\sum_{i=1}^m |U_i|^d < a^d$ となる，$|U_i| < \min\{\frac{1}{2}a, r_0\}$ であり，E と交差する有限個の集合 $U_1, U_2, \ldots, U_m$ が存在する．d に近い値 t を取ることによって，

$$\frac{\sum_{i=1}^m |U_i|^t}{a^t} < 1 \tag{1.51}$$

を満足する $0 < t < d$ を見つけることができる．仮定から，

$$|x-y| \leq \frac{|U_i|}{a}|g_i(x) - g_i(y)| \quad (x, y \in E \cap U_i) \tag{1.52}$$

を満足する写像 $g_i : E \cap U_i \to E \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ が存在する．うまく定義域をとることでこれらの写像の逆，つまり $\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_m^{-1}\}$ を反復関数系のように扱うことができる．いま，$I_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$ は整数を並べた k 項列の集合とする．また，$I = \bigcup_{k=0}^\infty I_k$ とする．更に，各 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ に対して，

$$U_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = g_{i_1}^{-1}(g_{i_2}^{-1}(\ldots(g_{i_k}^{-1}(E))\ldots))$$

と定義する．なお，$A \cap g_i(E \cap U_i) = \emptyset$ ならば $g_i^{-1}(A) = \emptyset$ であるから，この集合のうちのいくつかは空集合であるかもしれない．それにもかかわらず，各 k に対して，$E \subset \bigcup_{\mathbf{i} \in I_k} U_{\mathbf{i}}$ となっていることに注意する．(1.52) を繰り返し適用すると，

$$|x-y| \leq \frac{|U_{i_1}|}{a} \cdots \frac{|U_{i_k}|}{a}|g_{i_k} \circ \cdots \circ g_{i_1}(x) - g_{i_k} \circ \cdots \circ g_{i_1}(y)| \quad (x, y \in U_{i_1, \ldots, i_k})$$

となる．特に，

$$|U_{i_1, i_2, \ldots, i_k}| \leq \frac{|U_{i_1}|}{a} \cdots \frac{|U_{i_k}|}{a}|E|$$

が成立する．

$b = \dfrac{\min_{1 \leq i \leq m} |U_i|}{a}$ とおく．$r < |E|$ が与えられたとき，任意の $x \in E$ に対して，$x \in U_{\mathbf{i}}$，$br \leq \dfrac{|U_{i_1}|}{a} \cdots \dfrac{|U_{i_k}|}{a}|E| < r$ となる $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I$ が存在する．だから，E を被覆する高々 r の直径をもつ集合の最小個数を $N(r)$ とし，(1.51) を適用すれば，

$$\begin{aligned} N(r) &\leq \sharp\{\mathbf{i} \in I : br \leq \frac{|U_{i_1}|}{a} \cdots \frac{|U_{i_k}|}{a}|E|\} \\ &\leq \sum_{\mathbf{i} \in I} \frac{1}{(br)^t}\Big(\frac{|U_{i_1}|}{a} \cdots \frac{|U_{i_k}|}{a}|E|\Big)^t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le |E|^t \frac{1}{(br)^t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{kt}} \sum_{\mathbf{i}\in I_k} (|U_{i_1}| \cdots |U_{i_k}|)^t \\
&= |E|^t \frac{1}{(br)^t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{kt}} (\sum_{i=1}^{m} |U_i|^t)^k \\
&= |E|^t \frac{1}{(br)^t} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{a^t} \sum_{i=1}^{m} |U_i|^t\Big)^k \\
&\le \frac{c_1}{r^t}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，c_1は有限な定数である．よって，

$$
\overline{\dim}_B E = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r)}{-\log r} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\log c_1 r^{-t}}{-\log r} = t
$$

となり，$\overline{\dim}_B E \le t < d$ を得る．これで，(1.50) が示された． □

縮小される場合を次に述べる (図 1.6 参照).

定理 1.9.2 E を$\boldsymbol{R}^n$上の空でないコンパクト部分集合とし，$a > 0$，$r_0 > 0$ とする．更に，E に中心をもち，半径 $r \le r_0$であるすべての閉球 B に対して，

$$
ar|x-y| \le |g(x) - g(y)| \quad (x, y \in E) \tag{1.53}
$$

を満足する写像 $g : E \to E \cap B$ が存在すると仮定する．このとき，$s = \dim_H E$ とすれば，$\mathcal{H}^s(E) \le \dfrac{4^s}{a^s} < \infty$，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$ が成り立つ．

【証明】 E に中心をもち，半径 r の互いに素な閉球の最大個数を $N(r)$ とする．最初に，ある $r < \min\{\dfrac{1}{a}, r_0\}$ に対して，

$$
N(r) > \frac{1}{a^s r^s} \tag{1.54}
$$

を仮定することで矛盾を導き，任意の $r < \min\{\dfrac{1}{a}, r_0\}$ に対して，$N(r) \le \dfrac{1}{a^s r^s}$ を示す．

いま，(1.54) を仮定すれば，

$$
m \equiv N(r) > \frac{1}{a^t r^t} \tag{1.55}
$$

となる $t > s$ が存在する．従って，E に中心をもち半径 r の互いに素な閉球 $B_1, B_2, \ldots, B_m$ が存在する．仮定から，

$$
ar|x-y| \le |g_i(x) - g_i(y)| \quad (x, y \in E) \tag{1.56}
$$

を満足する写像 $g_i : E \to E \cap B_i$ $(1 \le i \le m)$ が存在する．また，$d = \min_{i\ne j} dist(B_i, B_j) > 0$ とする．このとき，(1.56) を $(q-1)$ 回用いると，$ar < 1$ であることから，

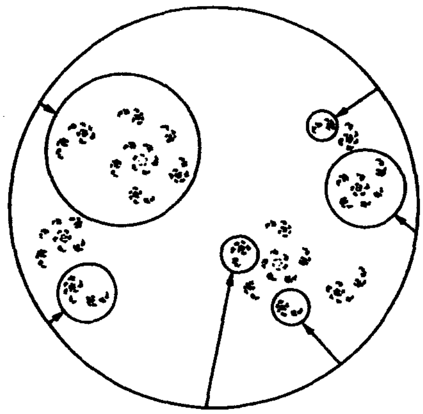

図 1.6: 定理 1.9.2 の条件を満足する集合 E の例

$$
\begin{aligned}
&dist(g_{i_1}\circ g_{i_2}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E),\ g_{j_1}\circ g_{j_2}\circ\cdots\circ g_{j_k}(E))\\
&=\inf\{|x-y| : x\in g_{i_1}\circ g_{i_2}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E),\ y\in g_{j_1}\circ g_{j_2}\circ\cdots\circ g_{j_k}(E)\}\\
&\geq \inf\{(ar)^{q-1}|x-y| : x\in g_{i_q}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E),\ y\in g_{j_q}\circ\cdots\circ g_{j_k}(E)\}\\
&\geq (ar)^{q-1}dist(B_{i_q},B_{j_q})\geq (ar)^q d
\end{aligned}
\tag{1.57}
$$

を得る．ここで，q は $i_q\neq j_q$ となる最小の整数である．

命題 1.6.1 質量分布法則を利用するために測度 μ を定義しておく．すべての $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ に対して，$\mu(g_{i_1}\circ g_{i_2}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E))=\dfrac{1}{m^k}$ となる分割の繰り返しによって定義された E 上の測度を μ とする．U は $|U|<d$ の E と交わる $\boldsymbol{R}^n$ 上の任意の部分集合とする．そして，k は

$$(ar)^{k+1}d\leq |U|<(ar)^k d \tag{1.58}$$

となる整数とする．(1.57) によって，U は高々 1 つの k 項列 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ に対し $g_{i_1}\circ g_{i_2}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)$ と交わる．だから，(1.55)，(1.58) によって

$$\mu(U)\leq\frac{1}{m^k}<(ar)^{kt}\leq\frac{1}{(dar)^t}|U|^t$$

となる．$\mu(U)<\dfrac{1}{(dar)^t}|U|^t$ より，命題 1.6.1 質量分布法則を利用することで，$\dim_H E\geq t>s$ より $\dim_H E>s$ を得る．ところが，この結果は仮定の $\dim_H E=s$ に矛盾する．従って，任意の $r<\min\{\dfrac{1}{a},r_0\}$ に対して，$N(r)\leq\dfrac{1}{(ar)^s}$ である．いま，$\dim_H E=s$ ならば十分に小さい r に対して，$N(r)\leq\dfrac{1}{(ar)^s}$ だから，両辺の対数を取ることで $\overline{\dim}_B E\leq s$ となる．よって，$s=\dim_H E\leq\overline{\dim}_B E$ だから，$\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E=s$ を得る．さらに，B_i $(1\leq i\leq N(r))$ の半径を 2 倍にすることで，E は $N(r)$ 個の半径 $2r$ の球により被覆される．さもなくば，E に中心をもつ半径 r の互いに素な球 $N(r)$ 個は最高個数の族でなくなる．よって，

$$\mathcal{H}^s_{4r}(E)\leq N(r)(4r)^s\leq\frac{1}{(ar)^s}(4r)^s=\frac{4^s}{a^s}$$

となり，$\mathcal{H}^s(E) \leq \dfrac{4^s}{a^s}$を得る． □

カントールの3進集合を取り上げることで，これらの定理がどのように利用されるのかを簡単に説明する．

カントール3進集合をEとする．UはEと交わり，$k \in \boldsymbol{Z}^+$に対して，$\dfrac{1}{3^{k+1}} \leq |U| < \dfrac{1}{3^k}$ならば$U \cap E$から$E$への相似比$3^k$の相似変換が存在する．従って，$a = \dfrac{1}{3}$で(1.49)を満足できる．同様に，もし$B$が$E$に中心をもち$\dfrac{1}{3^k} \leq r < \dfrac{1}{3^{k-1}}$となる長さ$2r$の区間（1次元球）であるならば，$E$から$E \cap B$への相似比$\dfrac{1}{3^k}$の相似変換が存在する．従って，$a = \dfrac{1}{3}$で(1.53)を満足できる．よって，定理1.9.1，定理1.9.2の結果から$s = \dim_H E$で$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$を得る．いま，カントール集合の左部分と右部分を$E_L$，$E_R$と書くことにすれば，ハウスドルフ測度の比率性質(1.24)を利用して，

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E_L) + \mathcal{H}^s(E_R) = \frac{1}{3^s}\mathcal{H}^s(E) + \frac{1}{3^s}\mathcal{H}^s(E)$$

となる．従って，カントールの3進集合の次元sは$s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$となることがわかる．

系 1.9.3 F_iを$0 < r_i < 1$となる相似比r_iをもつ相似変換とし，Eを$IFS\,\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$によって定義された自己相似集合とする．このとき，$\dim_H E = s$ならば$\mathcal{H}^s(E) < \infty$，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$となる．更に，$\{F_i(E)\}_{i=1}^m$が互いに素であるならば$\mathcal{H}^s(E) > 0$となり，$s$は$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$を満足する．

【証明】 $r_{\min} = \min_{1 \leq i \leq m} r_i$とする．また，$x \in E$で，$r \leq |E|$とする．このとき，すべての$k$に対して$x \in F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E)$となる列が存在する．いま，$r_{\min} r < r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k} |E| \leq r$となる$k$を選ぶ．そうすれば，$x \in F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E)$で，$F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k} : E \to E \cap B(x, r)$は相似比が少なくとも$\dfrac{r_{\min} r}{|E|}$である相似変換である．従って，定理1.9.2によって次元の等号と$\mathcal{H}^s(E) < \infty$を得る．

次に，$\min_{i \neq j} dist(F_i(E), F_j(E)) = d > 0$を仮定する．このとき，$(j_1, j_2, \ldots, j_k)$が$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$と異なるならば

$$dist(F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E),\ F_{j_1} \circ F_{j_2} \circ \cdots \circ F_{j_k}(E)) \geq r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{k-1}} d$$

となる．また，Uを$|U| < d$のEと交わる集合とすれば，$x \in E \cap U$で$x \in F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E)$かつ$d r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k} \leq |U| < d r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{k-1}}$となる列$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$がある．だから，すべての$(j_1, j_2, \ldots, j_k) \neq (i_1, i_2, \ldots, i_k)$となる列に対して，$U$は$F_{j_1} \circ F_{j_2} \circ \cdots \circ F_{j_k}(E)$と交わることはない．すなわち，$U$は高々1つの$k$項列$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$に対して，$F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E)$とだけ交わることになる．このことより$E \cap U \subset F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(E)$となる．従って，

$(F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k})^{-1} : E \cap U \to E$ は相似比 $\dfrac{1}{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}} \geq \dfrac{d}{|U|}$ の相似変換となるので定理 1.9.1 の仮定を満たし，再び次元の等号を得る．更に $\mathcal{H}^s(E) > 0$ が成り立つ．最後に，互いに素な場合とハウスドルフ測度の比率性質 (1.24) により，$\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(F_i(E)) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s \mathcal{H}^s(E)$ となる．よって，$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$ を得る． □

第 2 章　クッキー・カッター と有界歪曲

本章は，次章の熱力学形式論を扱うのに必要となる力学系を準備する．本章以降扱う力学系は，クッキー・カッター系と呼ばれるものである．前半では，このクッキー・カッター系を定義し，クッキー・カッター集合と呼ばれる**反発子 (repeller)** の導入をおこなう．これは，反復関数系で述べたアトラクターに相当するものであり，フラクタル集合となる．後半では，このクッキー・カッター集合上定義されたリプシッツ関数を用いて，有界変動原理を述べる．更に，この有界変動原理を利用して，有界歪曲原理を導き出す．この有界歪曲原理は，ある集合における十分小さな任意の近傍が，過度な歪曲を受けることなく変換されることによって，その集合のより大きな部分へと写される"**概自己相似**"な集合の考えを導くものである．

2.1　クッキー・カッター集合

簡単のために，反復関数系は2つの写像からなるものを扱い，更に，$\boldsymbol{R}$の部分集合 X 上で考えることにする．とはいえ，これから述べる内容は，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合上へ一般化できるものである．

X を空でない有界な閉区間とし，X_1，X_2は X の部分集合で互いに素であるとする．また，写像 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ は，X_1，X_2をそれぞれ X へ全単射に写すものとする．更に，f は連続導関数をもち，拡大していると仮定する．すなわち，すべての $x \in X_1 \cup X_2$に対して $|f'(x)| > 1$ を仮定する．この f を使って，点を反復することによって与えられる力学系を扱っていく．特に，興味を示すべきは，f^kを f の k 回反復を表すとして，

$$E \doteq \{x \in X : \text{すべての } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ に対して } f^k(x) \in X_1 \cup X_2\} \tag{2.1}$$

となる集合である．すなわち，E は f の反復下で $X_1 \cup X_2$の中に残った点の集合である．E は，f^kの逆像を考えることで，$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X)$ と表せる．従って，E はコンパクト集合からなる減少列の共通集合として表せることより，集合 E はコンパクト集合であり，空集合ではない．明らかに，$x \in E$ と $f(x) \in E$ は同値であることより，

$$f(E) = E = f^{-1}(E) \tag{2.2}$$

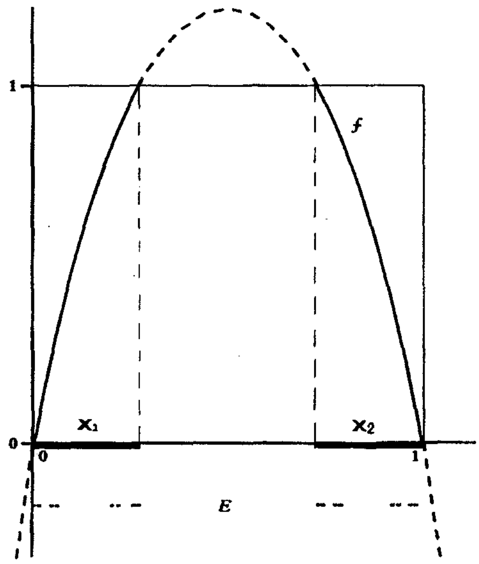

図 2.1: 関数 f に対する反発子 E の例

となり，E は f の下で不変である．更に，E は次の意味で**反発子**でもある：どんなに E の近くにある点であっても E の元でない点は，f の反復下において，いずれ $X_1 \cup X_2$ の外へ写されてしまう性質をもつ．実際，図2.1の例では関数 $f : X_1 \cup X_2 \to [0,1]$ に対して，集合 $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}[0,1]$ は，f に対する反発子となり，すべての $x \notin E$ に対して $f^k(x) \to -\infty$ $(k \to \infty)$ となる．

この状態を観察する方法に，反復関数の逆像による考え方がある．いま，F_1，$F_2 : X \to X$ を f の逆対応による2本の枝として定義する．すなわち，F_1 と F_2 は，X を X_1 と X_2 にそれぞれ全単射に写す，

$$F_1(x) = f^{-1}(x) \cap X_1, \quad F_2(x) = f^{-1}(x) \cap X_2$$

で定義されるものとする．このとき，

$$f(x) = \begin{cases} F_1^{-1}(x) & (x \in X_1) \\ F_2^{-1}(x) & (x \in X_2) \end{cases} \tag{2.3}$$

となる．f は，コンパクト集合 $X_1 \cup X_2$ 上で $|f'(x)| > 1$ となる連続導関数をもつので，すべての $x \in X_1 \cup X_2$ に対して，$1 < \dfrac{1}{c_{\max}} \leq |f'(x)| \leq \dfrac{1}{c_{\min}} < \infty$ を満足する数 $0 < c_{\min} < c_{\max} < 1$ が存在する．また，逆関数 F_1，F_2 は微分可能で，$x \in X$ に対して $c_{\min} \leq |F_1'(x)|$，$|F_2'(x)| \leq c_{\max}$ となることが導かれる．平均値の定理より，$i = 1, 2$ に対して，

$$c_{\min}|x - y| \leq |F_i(x) - F_i(y)| \leq c_{\max}|x - y| \quad (x, y \in X) \tag{2.4}$$

となる．(2.1) から，f の反発子 E は，

$$E = F_1(E) \cup F_2(E) \tag{2.5}$$

を満足する．なぜなら，F_1とF_2はX上の縮小写像であるので，定理1.8.3より，等式(2.5)を満足する唯一空でないコンパクト集合Eが存在するからである．従って，fの反発子EはIFS$\{F_1, F_2\}$のアトラクターである．

1.8節と同じように，反復関数系と結びつけて考えられる区間を，1と2からなる列$I_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : i_j = 1 \text{又は} 2\}$で表示し，更に，$I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$とする．特に，各$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$に対して，$X_{\mathbf{i}} = X_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(X)$と書く．従って，$f^k : X_{\mathbf{i}} \to X$は逆写像$F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}$による閉区間と$X$の間で全単射となる．更に，一般には，各$k \leq m$に対して，$f^k : X_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \to X_{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_m}$も全単射となる．$X_1 \cup X_2 \subset X$は互いに素な集合より，すべての$\mathbf{i}$に対して$X_{\mathbf{i},1} \cup X_{\mathbf{i},2} \subset X_{\mathbf{i}}$も互いに素な集合からなる．従って，$E_k \equiv \bigcup_{\mathbf{i} \in I_k} X_{\mathbf{i}}$とすれば，列$\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$はコンパクト集合の減少列で，$E_k$は$2^k$個の互いに素な閉区間からなる．(1.38) $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$より$E$は**全不連結**であり，カントール集合と位相同値である．なお，全不連結とは，どの連結成分も1点からなる位相空間をいう．

(2.4)を使用することで，すべての$\mathbf{i} \in I$と$i = 1,\ 2$に対して，

$$c_{\min}|X_{\mathbf{i}}| \leq |X_{\mathbf{i},i}| \leq c_{\max}|X_{\mathbf{i}}| \tag{2.6}$$

となる．

最も簡単な例は，写像$f : [0,\ \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\ 1] \to [0,\ 1]$に対応する(1.34)からなるIFS$\{F_1,\ F_2\}$である．従って，反発子$E$はカントール3進集合となり，各$E_k$は長さが$\frac{1}{3^k}$の小区間$2^k$個からなる．しかしながら，本論文で扱っていくのは，F_1，F_2が必ずしも相似な写像でない場合である．

この節で述べてきた型の力学系$f : X_1 \cup X_2 \to X$又は同義となるX上のIFS$\{F_1,\ F_2\}$は，(本論文の題目に現れる) **クッキー・カッター系**と称され，集合Eは**クッキー・カッター集合**と呼ばれる．一般に，写像F_1とF_2は相似変換ではなく，Eは“歪められた”カントール集合となる．それにもかかわらず集合Eは“おおよそ自己相似”となる．

2.2 有界変動原理と有界歪曲原理

$f : X_1 \cup X_2 \to X$を，前節で述べたIFS$\{F_1,\ F_2\}$と反発子Eに対応したクッキー・カッター系とする．また，$\phi : X_1 \cup X_2 \to \boldsymbol{R}$はリプシッツ関数とする．すなわち，ある数$a > 0$が存在して，

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq a|x - y| \quad (x, y \in X_1 \cup X_2) \tag{2.7}$$

を満足するとする．本論では，fによる点の連続した反復でのϕの値に着目していく．特に，$k = 1, 2, \ldots$に対して，

$$S_k\phi(x) \ \equiv \ \phi(x) + \phi(f(x)) + \phi(f^2(x)) + \cdots + \phi(f^{k-1}(x))$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) \tag{2.8}$$

と書き，これを評価していく．なお，$S_k\phi(x)$ は，ある $\mathbf{i} \in I_k$ に対して準備された $x \in X_{\mathbf{i}}$ で定義されている．もし，$w \in X$ に対して $x = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)$ ならば，

$$S_k\phi(F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)) = \sum_{j=1}^{k} \phi(F_{i_j} \circ F_{i_{j+1}} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)) \tag{2.9}$$

となる．

命題 2.2.1 （有界変動原理）

$\phi : X \to \boldsymbol{R}$を，$a$ をリプシッツ定数に持つリプシッツ関数とする．

1) すべての $k = 1, 2, \ldots$ とすべての $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$に対して，$x$，$y \in X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ならば

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b \tag{2.10}$$

を満足する数 b が存在する．

2) 更に，一般にすべての $q \geq k$ とすべての $(i_1, i_2, \ldots, i_q) \in I_q$に対して，$x$，$y \in X_{i_1, i_2, \ldots, i_q}$ならば

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq \frac{b}{|X|}|X_{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_q}| \tag{2.11}$$

を満足する．

【証明】 (1) の証明)　(2.4) を繰り返し用いることで，すべての $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I$ に対して，$|X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}| = |F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(X)| \leq c_{\max}^k |X|$ を得る．もし，x，$y \in X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ ならば，$j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して，$f^j(x)$，$f^j(y) \in X_{i_{j+1}, i_{j+2}, \ldots, i_k}$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\left|\phi(f^j(x)) - \phi(f^j(y))\right| &\leq a|f^j(x) - f^j(y)| \\
&\leq a|X_{i_{j+1}, i_{j+2}, \ldots, i_k}| \\
&= a|F_{i_{j+1}} \circ F_{i_{j+2}} \circ \cdots \circ F_{i_k}(X)| \\
&\leq a c_{\max}^{k-j}|X|
\end{aligned}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}
|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| &= \left|\sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(y))\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(f^j(x)) - \phi(f^j(y))| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} a c_{\max}^{k-j}|X| \\
&\leq \frac{a c_{\max}|X|}{1 - c_{\max}}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$b = \dfrac{ac_{\max}|X|}{1-c_{\max}}$ とおくことで，(2.10) が得られる．

(2) の証明)　$x,\ y \in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots,i_q}$ ならば，$j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して，$f^j(x),\ f^j(y) \in X_{i_{j+1},i_{j+2},\ldots,i_k,\ldots,i_q}$ となる．更に，

$$|\phi(f^j(x)) - \phi(f^j(y))| \leq ac_{\max}^{k-j}|X_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_q}|$$

より，

$$\begin{aligned}|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| &\leq \frac{ac_{\max}|X_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_q}|}{1-c_{\max}} \\ &= \frac{b}{|X|}|X_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_q}|\end{aligned}$$

が得られる． □

ここで，(2.10) を変形した式

$$\frac{1}{e^b} \leq \frac{\exp S_k\phi(x)}{\exp S_k\phi(y)} \leq e^b \tag{2.12}$$

が，しばしば役立つことがあることを注意しておく．

$f : X_1 \cup X_2 \to X$ は，C^2級であるとする．そうすれば，逆関数 F_1と F_2もまた C^2級である．このとき，$x \in X_1 \cup X_2$に対して，

$$\phi(x) = -\log|f'(x)| \tag{2.13}$$

を選ぶ．$|f'(x)| > 0$ であることより，関数 ϕ は $X_1 \cup X_2$で有界連続な第 1 導関数をもつ．平均値の定理によって，ϕはリプシッツ条件を満足する．すなわち，(2.13) によって選んだ ϕはリプシッツ関数となる．

関数の合成 f^kの導関数に対して連鎖律 (chain rule) を用いることで，

$$(f^k)'(x) = f'(f^{k-1}(x)) \times f'(f^{k-2}(x)) \times \cdots \times f'(x) \tag{2.14}$$

を得る．この両辺の絶対値の対数を取ることで，

$$\begin{aligned}-\log|(f^k)'(x)| &= -\log|f'(f^{k-1}(x)) \times f'(f^{k-2}(x)) \times \cdots \times f'(x)| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} -\log|f'(f^j(x))| \qquad (2.15) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) \\ &= S_k\phi(x) \qquad (2.16)\end{aligned}$$

を得る（これは，$j = 0, 1, \ldots, k-1$ で $f^j(x) \in X_1 \cup X_2$，すなわち $x \in \bigcup_{\mathrm{i}\in I_k} X_{\mathrm{i}}$ のとき成り立っている）．従って，和 $S_k\phi$ は f の k 回反復の導関数という点から，うまく説明をつけることができる．

命題 2.2.2 (有界歪曲原理)

すべての $k=1,2,\ldots$ とすべての $(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in I_k$に対して，$x\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ならば

$$\frac{1}{b_0}\le |X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}||(f^k)'(x)|\le b_0 \tag{2.17}$$

を満足する数b_0が存在する．更に，$f^k: X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\to X$ は，すべての y, $z\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ に対して

$$\frac{|y-z|}{b_0}\le |f^k(y)-f^k(z)||X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|\le b_0|y-z| \tag{2.18}$$

を満足する．

【証明】 $X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}=F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X)$ とする．このとき，$f^k: X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\to X$ は微分可能で全単射である．f^kに平均値の定理を利用すると，y, $z\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ に対して，$w\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ が存在し，

$$f^k(y)-f^k(z)=(y-z)(f^k)'(w) \tag{2.19}$$

を満足する．

今，$X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$の端点としてyとzを選ぶことで，$f^k(y)$，$f^k(z)$ はXの端点となる．従って，ある $w_0\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ に対して，

$$|X|=|X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}||(f^k)'(w_0)| \tag{2.20}$$

となる．(2.16) を用いて (2.12) の形で有界変動原理を利用すれば，すべての $x\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$に対して，

$$\frac{1}{e^b}\le\frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(w_0)|}\le e^b \tag{2.21}$$

を得る．この結果に，(2.20) を組み合わせることで，

$$\frac{1}{e^b}\le\frac{|X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}||(f^k)'(x)|}{|X|}\le e^b$$

となり (2.17) を得る．

次に，(2.21) で $x=w\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$とおくことで，

$$\frac{1}{e^b}\le\frac{|(f^k)'(w)|}{|(f^k)'(w_0)|}\le e^b$$

となり，

$$\frac{|X|}{e^b}\le|(f^k)'(w)||X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|\le|X|e^b$$

を得る．従って，

$$\frac{|X|}{e^b}|y-z|\le|f^k(y)-f^k(z)||X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|\le|y-z||X|e^b$$

となり (2.18) が得られる．なお，b_0は$|X|$とbのみに依存している． □

(2.17) を次のように表現することもある：すべての$x \in X$に対して，

$$\frac{1}{b_0} \leq \frac{|X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|}{|(F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k})'(x)|} \leq b_0.$$

特別な場合として，F_1，F_2が相似比c_1，c_2の相似変換であるとすれば，$f'(x)$は$X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$上で一定である．しかも，変数は$X_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}|X|$で減少する．この結果は，反発子$E$が自己相似集合になることを期待させるものである．

有界歪曲原理の有用な点の1つは，各$\mathbf{i}$に対して，$X_{\mathbf{i},1}$と$X_{\mathbf{i},2}$が，$X_{\mathbf{i}}$の中で分別よく分離されていることである．おまけに，$X_{\mathbf{i}}$はある決まった方法で，次の系で述べられる球（区間）と比較可能である．

系 2.2.3 Eをクッキー・カッター集合とする．また，$d = dist(X_1, X_2)$とする．
1) すべての$\mathbf{i} \in I$に対して，

$$\frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}| \leq dist(X_{\mathbf{i},1}, X_{\mathbf{i},2}) \leq |X_{\mathbf{i}}| \tag{2.22}$$

を満足する．
2) $\lambda = \dfrac{d}{b_0}c_{\min}$とする．すべての$\mathbf{i}$に対して，$x \in X_{\mathbf{i}} \cap E$かつ$|X_{\mathbf{i}}| \leq r < \dfrac{|X_{\mathbf{i}}|}{c_{\min}}$であるならば，

$$B(x, \lambda r) \cap E \subset X_{\mathbf{i}} \cap E \subset B(x, r) \tag{2.23}$$

を満足する．

【証明】 (1) の証明) 写像$f^k : X_{\mathbf{i}} \to X$は，微分可能で全単射であり，(2.18) を満足する．$f^k(y) \in X_1$，$f^k(z) \in X_2$が$|f^k(y) - f^k(z)| = d$を満足するように，$y \in X_{\mathbf{i},1}$，$z \in X_{\mathbf{i},2}$を取れば，(2.18) の右側の不等式より，

$$\frac{|X_{\mathbf{i}}|}{b_0}d \leq dist(X_{\mathbf{i},1}, X_{\mathbf{i},2})$$

となり，(2.22) の左側の不等式を得る．更に，$X_{\mathbf{i}} \supset X_{\mathbf{i},1} \cup X_{\mathbf{i},2}$だから，明らかに (2.22) の右側の不等式は成り立つ．

(2) の証明) $\lambda = \dfrac{d}{b_0}c_{\min}$，$|X_{\mathbf{i}}| \leq r < \dfrac{|X_{\mathbf{i}}|}{c_{\min}}$より，

$$\frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|c_{\min} \leq \lambda r < \frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}| \leq dist(X_{\mathbf{i},1}, X_{\mathbf{i},2})$$

となり，$\lambda r < dist(X_{\mathbf{i},1}, X_{\mathbf{i},2})$を得る．$x \in X_{\mathbf{i}} \cap E$，$\mathbf{j} \neq \mathbf{i}$となるすべての$\mathbf{j} \in I_k$に対して，この結果を利用すると，

$$\frac{|B(x, \lambda r)|}{2} < dist(X_{\mathbf{i},1}, X_{\mathbf{i},2}) < dist(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})$$

となる．すなわち，$B(x,\lambda r)\cap X_{\mathbf{j}}=\emptyset$ である．よって，$B(x,\lambda r)\cap E\subset X_{\mathbf{i}}\cap E$ となる．また，$|X_{\mathbf{i}}|\le r$ の条件より明らかに，$X_{\mathbf{i}}\cap E\subset B(x,r)$ となる． □

次に，E の小部分が過度に歪められることなく，E のより大きな部分に写すことができることを確かめる．より正確に言えば，E に中心をもつ各々の小球から E のより大きな部分へと写すような，球の大きさと同等の定数をもつリプシッツ写像が存在することを確かめる．なお，系 2.2.4 の結論を満足する集合を**概自己相似（approximately self-similar）**または**準自己相似（quasi-self-similar）**という

系 2.2.4 E をクッキー・カッター集合とする．ある数 $c>0$，$r_0>0$ が存在して，このとき E に中心をもち半径 $r<r_0$ となるすべての球 B に対して，

$$\frac{|x-y|}{cr}\le|g(x)-g(y)|\le\frac{c}{r}|x-y|\quad(x,y\in E\cap B)\tag{2.24}$$

を満足する写像 $g:E\cap B\to E$ が存在する．

【証明】 $r<r_0\equiv\dfrac{d}{b_0}|X|$，$x\in E$ とする．このとき，(2.6) より

$$x\in X_{\mathbf{i}},\ \frac{c_{\min}d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|\le r<\frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|$$

となる k と $\mathbf{i}=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in I_k$ を見つけることができる．なぜなら，$x\in E=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$ より，任意の k に対して $x\in E_k$ となる．また，$E_k=\bigcup_{\mathbf{i}\in I_k}X_{\mathbf{i}}$ だから，ある $\mathbf{i}$ が存在して $x\in X_{\mathbf{i}}$ となり，すべての階層において，必ず x を含む小区間が存在することがわかる．更に，(2.6) より

$$c_{\min}|X_{\mathbf{i}}|\le|X_{\mathbf{i},i}|\le c_{\max}|X_{\mathbf{i}}|<|X_{\mathbf{i}}|\le|X|$$

となり，

$$0\le\ldots<\frac{c_{\min}d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|\le\frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i},i}|\le\frac{c_{\max}d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|<\frac{d}{b_0}|X_{\mathbf{i}}|\le\frac{d}{b_0}|X|$$

となる．よって，任意の r に対して，ある k とある $\mathbf{i}$ を見つけることができる．このことは，系 2.2.3 2) の仮定を満足する．従って，系 2.2.3 2) の結果より $E\cap B(x,r)\subset X_{\mathbf{i}}$ を得る．更に，(2.18) を利用することで，写像 $f^k:E\cap B(x,r)\to X$ で，

$$\frac{|y-z|}{b_0|X_{\mathbf{i}}|}\le|f^k(y)-f^k(z)|\le\frac{b_0|y-z|}{|X_{\mathbf{i}}|}$$

を満足する数 b_0 が存在する．よって，

$$\frac{c_{\min}d|y-z|}{b_0^2\,r}\le|f^k(y)-f^k(z)|\le\frac{d|y-z|}{r}$$

を得る．ここで，$d \leq \dfrac{d}{c_{\min}} \leq \left(\dfrac{b_0}{d}\right)^2 \dfrac{d}{c_{\min}} = \dfrac{b_0^2}{dc_{\min}}$ だから，$c = \dfrac{b_0^2}{dc_{\min}}$ とし，$g = f^k$とすることで (2.24) を得る． □

クッキー・カッター集合 E は，反対の意味でも概自己相似である．すなわち，E は全体を過度に歪められることなく E の中に縮小できる．

系 2.2.5 E をクッキー・カッター集合とする．このとき, E に中心をもち半径 $r < r_0$ となるすべての球 B に対して,

$$\frac{r}{c}|x-y| \leq |g(x)-g(y)| \leq cr|x-y| \quad (x, y \in E) \tag{2.25}$$

を満足する写像 $g : E \to E \cap B$ が存在するような，$c > 0$，$r_0 > 0$ がある．

【証明】 $x \in E$，$r < r_0 = |X|$ とする．このとき，系 2.2.4 と同様にして $x \in X_{\mathbf{i}}$，$c_{\min} r < |X_{\mathbf{i}}| \leq r$ となる $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ を見つけることができる．この結果，系 2.2.3 2) より $X_{\mathbf{i}} \subset B(x, r)$ を得る．ここで，$y = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(x)$ ，$z = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)$ を (2.18) に用いることで,

$$\frac{|X_{\mathbf{i}}||x-w|}{b_0} \leq |F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(x) - F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)| \leq b_0 |X_{\mathbf{i}}||x-w|$$

を得る．このことに，$c_{\min} r < |X_{\mathbf{i}}| \leq r$ を利用することで,

$$\frac{c_{\min} r}{b_0}|x-w| \leq |F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(x) - F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)| \leq b_0 r|x-w|$$

となる．更に，$c = \dfrac{b_0}{c_{\min}}$ とおくことで,

$$\frac{r}{c}|x-w| \leq |F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(x) - F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)| \leq cr|x-w|$$

となる．最後に $F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}$ の E への制限として g を取ることで (2.25) を得る． □

概自己相似な集合 E に関するこれらの結果は，1.9 節で述べた定理がクッキー・カッター集合に応用できることを物語っている．

系 2.2.6 E を $\dim_H E = s$ であるクッキー・カッター集合とする．このとき,

$$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s, \; 0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$$

を満足する．

【証明】 系2.2.4より定理1:9.1の結果が利用できて，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$，$\mathcal{H}^s(E) > 0$ を得る．また，系2.2.5より定理1.9.2が利用できて，$\mathcal{H}^s(E) < \infty$ となる．従って，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ を得る． □

本章で述べた定理は様々な場合に応用されている ($K.J.Falconer$ [7] 第5章第5節)．特によくあるのは，$i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $f : X_i \to X$ が全単射で拡大する m 個の部分からなるクッキー・カッター系 $f : X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m \to X$ に対しての適用である．

第 3 章　熱力学形式論

熱力学形式論は，その考えの多くを統計力学に由来し，圧力，ギップス測度といった概念を我々に提供してくれる理論である．なお，熱力学形式論とは,「熱力学形式の理論」のことで「熱力学の形式論」ではない．

本章の主目的は，クッキー・カッター系 f に現れる反発子 E に関する次元公式を導くことと，E に台をもつ f の下で不変な確率測度の存在を示すことにある．その手段として，熱力学形式論を利用する．具体的には，3.1 節で**圧力**と**ギップス (Gibbs) 測度**を定義し，その存在を明らかにする．3.2 節では，3.1 節の結果を踏まえ，圧力関数を用いて，f の反発子 E の次元公式を導く．また，3.3 節では，関数解析から得られる結果を用いて，不変ギップス測度の存在を証明する．この不変ギップス測度は重要な測度で，頻繁に活用することになる．また，測度 μが**エルゴード的**であるとはどういうことなのかを述べ，次章への足掛かりとする．3.4 節では，力学系理論の重要な不変量となる**エントロピー**の存在を示し，圧力とエントロピーの関係を表す変分原理を証明する．

3.1　圧力とギップス測度

本節以降，2.1 節で導入したクッキー・カッター系を利用して，多くの重要な結果を導いていく．そのために，もう一度その概念と性質について，簡単に思い起こす．記号表記は 2.1 節のものを引き続き用いることにする：

$X \subset \boldsymbol{R}$を空でない有界な閉区間とし，X_1，X_2は X の部分集合で互いに素であるとする．写像 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ は，X_1，X_2をそれぞれ X へ全単射に写す連続な第 2 回の導関数をもつ拡大写像とする．このとき，その力学系にはクッキー・カッター集合と呼ばれる f の反発子 E が存在する．

$\phi: X_1 \cup X_2 \to \boldsymbol{R}$をリプシッツ関数とする．すなわち，ある数 $a > 0$ が存在して，

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq a|x - y| \quad (x, y \in X_1 \cup X_2) \tag{3.1}$$

を満足するとする．このとき，$x \in \bigcup_{\mathbf{i} \in I_k} X_{\mathbf{i}}$に対して

$$S_k\phi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) \tag{3.2}$$

と書く．命題 2.2.1 で大切なことは，すべての $\mathbf{i} \in I_k$ とすべての k に対して，$x, y \in X_{\mathbf{i}}$ であるならば

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b \tag{3.3}$$

となる数 b が存在し，(3.3) は，

$$\frac{1}{e^b} \leq \frac{\exp(S_k\phi(x))}{\exp(S_k\phi(y))} \leq e^b \tag{3.4}$$

と変形できたことである．

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ は，$\boldsymbol{R}^n$ 上の局所有限測度とする．このとき，列 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ が μ に**弱収束**するとは，すべての $f \in \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{R}^n)$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu \tag{3.5}$$

が成り立つときにいう．なお，$\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{R}^n)$ とはコンパクトな台をもつ実数値連続関数全体をさす．

この弱収束に関して，次の結果が成り立つ．

命題 3.1.1 $\mu_1, \mu_2, \ldots$ は，すべての有界集合 A に対して $\sup_k \mu_k(A) < \infty$ となる $\boldsymbol{R}^n$ 上の局所有限測度とする．このとき，$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ は弱収束する部分列をもつ．

【証明】 $\triangleright$ *K.J.Falconer* [7] 第 1 章第 4 節命題 1.9 参照 □

次の定理の 1) は，次節で次元公式を導く際，必要となる重要な結果である．また，2) に関しては，より多くの関数解析の知識を必要とするため，その証明は 3.3 節まで先送りすることにする．

定理 3.1.2

1) すべての k と $\mathbf{i} \in I_k$ に対して，$x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ とする．このとき，$x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ の選び方に依存しない極限

$$P(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i}\in I_k} \exp(S_k\phi(x_{\mathbf{i}})) \tag{3.6}$$

が存在する．更に，E に台をもつボレル確率測度 μ とある数 $a_0 > 0$ が存在して，このとき，すべての k とすべての $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ に対して，$x \in X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ ならば

$$\frac{1}{a_0} \leq \frac{\mu(X_{i_1, i_2, \ldots, i_k})}{\exp(-kP(\phi) + S_k\phi(x))} \leq a_0 \tag{3.7}$$

の関係が得られる．

2) *(3.7)* を満足する μ を，更に次の *a)* を満足するように選ぶこともできるし，または *b)* を

満足するようにも選ぶことができる.

a) μは，すべてのボレル集合 A に対して変換性質

$$\mu(f(A)) = e^{P(\phi)} \int_A \exp(-\phi(x)) d\mu(x)$$

を満足する.

b) μは f の下で不変である．それは，すべての $g \in \boldsymbol{C}(E)$ に対して

$$\int g(x) d\mu(x) = \int g(f(x)) d\mu(x)$$

となることである．ここで，$\boldsymbol{C}(E)$ は E 上実数値連続関数全体のなすベクトル空間である.

【証明】 $w \in E$ を固定する．(3.2) から，k, $m = 1, 2, \ldots$に対して，

$$S_{k+m}\phi(x) = S_k\phi(x) + S_m\phi(f^k(x)) \tag{3.8}$$

となる．従って，(3.4) の右側の不等式を利用することで，

$$\begin{aligned}
\sum_{x:f^{k+m}(x)=w} \exp(S_{k+m}\phi(x)) &= \sum_{x:f^{k+m}(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) \exp(S_m\phi(f^k(x))) \\
&= \sum_{z:f^m(z)=w} \sum_{x:f^k(x)=z} \exp(S_k\phi(x)) \exp(S_m\phi(f^k(x))) \\
&= \sum_{z:f^m(z)=w} \exp(S_m\phi(z)) \sum_{x:f^k(x)=z} \exp(S_k\phi(x)) \\
&\leq \sum_{z:f^m(z)=w} \exp(S_m\phi(z)) \sum_{x:f^k(x)=w} e^b \exp(S_k\phi(x)) \\
&= e^b \sum_{z:f^m(z)=w} \exp(S_m\phi(z)) \sum_{x:f^k(x)=w} \exp(S_k\phi(x))
\end{aligned}$$

を得る．また，同様にして (3.4) の左側の不等式を利用することによって，

$$\frac{1}{e^b} \sum_{z:f^m(z)=w} \exp(S_m\phi(z)) \sum_{x:f^k(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) \leq \sum_{x:f^{k+m}(x)=w} \exp(S_{k+m}\phi(x))$$

を得る．今

$$s_k = \sum_{x:f^k(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) \tag{3.9}$$

と書くことにすれば，上述の結果は，

$$\frac{s_k s_m}{e^b} \leq s_{k+m} \leq e^b s_k s_m \tag{3.10}$$

となる．この不等式の各辺の対数をとり，$a_k = \log s_k$とおけば，

$$a_k + a_m - b \leq a_{k+m} \leq a_k + a_m + b$$

となる．従って，系 A.1.2 より，$a \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log s_k}{k}$ となる数 a が存在する．よって，極限 (3.6) は各 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対して，$x_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(w)$ となる場合に存在する．更に，(3.4) より任意の $y \in X_{\mathbf{i}}$に対して，

$$\frac{1}{e^b} \exp(S_k\phi(x)) \leq \exp(S_k\phi(y)) \leq e^b \exp(S_k\phi(x))$$

だから，

$$\frac{1}{k}\Big(\log \sum_{x:f^k(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) - b\Big) \leq \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i}\in X_{\mathbf{i}}} \exp(S_k\phi(y_{\mathbf{i}})) \leq \frac{1}{k}\Big(\log \sum_{x:f^k(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) + b\Big)$$

を得る．そこで，$k \to \infty$ とすることで，

$$a \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i}\in X_{\mathbf{i}}} \exp(S_k\phi(y_{\mathbf{i}})) \leq a$$

が得られる．従って，(3.6) は，$x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ の選び方に依存しないことが示された．

次に，列 $\{a_k\}$，$\{-a_k\}$ に対する系 A.1.2 の結果を，それぞれ (3.6) に当てはめることで，すべての k に対して，$kP(\phi) - b \leq a_k \leq kP(\phi) + b$ が成り立つ．各辺を指数表示することで，

$$\frac{\exp(kP(\phi))}{e^b} \leq s_k \leq e^b \exp(kP(\phi)) \tag{3.11}$$

を得る．

さて，ここで$\boldsymbol{R}$上の離散的な測度 μ_mを定義して，$m \to \infty$ で極限を取ることにより，(3.7) を満足する測度 μを構成しよう．$m = 1, 2, \ldots$と任意の集合 A に対して，

$$\mu_m(A) = \frac{1}{s_m} \sum_{x\in A:f^m(x)=w} \exp(S_m\phi(x))$$

と定義する．ここで，和は集合 A の中にある点 $F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_m}(w)$ すべてにわたる．いま，$w \in E$ より，$f^m(x) = w$ となるすべての x は，$x \in E$ となっている．従って，μ_m は E に台をもつ離散的な測度である．更に $A = E$ を考え，(3.9) を利用することで $\mu_m(E) = 1$ であることがわかる．従って，命題 3.1.1 より測度の列 $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$のある部分列は，E に台をもつボレル測度 μに弱収束する．もちろん，$\mu(E) = 1$ である．更に，$\mathbf{i} \in I_k$，$k \leq m$ ならば (3.8) を使うことで，

$$\begin{aligned}
\mu_m(X_{\mathbf{i}}) &= \frac{1}{s_m} \sum_{x\in X_{\mathbf{i}}:f^m(x)=w} \exp(S_m\phi(x)) \\
&= \frac{1}{s_m} \sum_{x\in X_{\mathbf{i}}:f^m(x)=w} \exp(S_k\phi(x)) \exp(S_{m-k}\phi(f^k(x)))
\end{aligned}$$

となる．従って，もし y が $X_{\mathbf{i}}$ の任意の点であれば，(3.4) より，

$$\frac{\mu_m(X_{\mathbf{i}})}{e^b} \leq \frac{\exp(S_k\phi(y))}{s_m} \sum_{x\in X_{\mathbf{i}}:f^m(x)=w} \exp(S_{m-k}\phi(f^k(x))) \leq e^b \mu_m(X_{\mathbf{i}})$$

となる．この式を書き換えると，$f^k : X_{\mathbf{i}} \to X$ は全単射だから，

$$\frac{\mu_m(X_{\mathbf{i}})}{e^b} \leq \frac{\exp(S_k\phi(y))}{s_m} \sum_{z\in X:f^{m-k}(z)=w} \exp(S_{m-k}\phi(z)) \leq e^b\mu_m(X_{\mathbf{i}})$$

となり，(3.9) より，

$$\frac{\mu_m(X_{\mathbf{i}})}{e^b} \leq \frac{s_{m-k}}{s_m}\exp(S_k\phi(y)) \leq e^b\mu_m(X_{\mathbf{i}})$$

となる．従って，(3.10) より，

$$\frac{\mu_m(X_{\mathbf{i}})}{e^{2b}} \leq \frac{\exp(S_k\phi(y))}{s_k} \leq e^{2b}\mu_m(X_{\mathbf{i}})$$

となる．このことは，すべての $m \geq k$ に対して成立するので，$\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ の弱収束する部分列に対しても成立し，μに対しても成立する．従って，

$$\frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{e^{2b}} \leq \frac{\exp(S_k\phi(y))}{s_k} \leq e^{2b}\mu(X_{\mathbf{i}})$$

となり，

$$\frac{s_k}{e^{2b}} \leq \frac{\exp(S_k\phi(y))}{\mu(X_{\mathbf{i}})} \leq e^{2b}s_k$$

を得る．ここで各辺の逆数をとり，$\exp(kP(\phi))$ を掛けることで，

$$\frac{\exp(kP(\phi))}{e^{2b}s_k} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})\exp(kP(\phi))}{\exp(S_k\phi(y))} \leq e^{2b}\frac{\exp(kP(\phi))}{s_k}$$

となる．従って，(3.11) より，

$$\frac{1}{e^{3b}} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp\big(S_k\phi(y) - kP(\phi)\big)} \leq e^{3b}$$

を得る．ここで，$a_0 = e^{3b}$とおくことで (3.7) が得られる． □

(3.6) で定義した数 $P(\phi)$ をϕの**圧力**という．また，ある $a_0 > 0$ に対して (3.7) を満足する測度 μを，ϕに関する**ギップス（Gibbs）測度**という．この定義より ϕに関する任意な 2 つのギップス測度は同値となることが分かる．また，クッキー・カッター集合は，ギップス測度の台となることが分かった．

3.2 次元公式

適当なリプシッツ関数 ϕを選ぶことによって，圧力に関する式を満たす点から，クッキー・カッター集合 E のハウスドルフ次元に関する次元公式を導くことができる．

いま，$s \in \boldsymbol{R}$に対して，

$$\phi(x) = -s\log|f'(x)| \tag{3.12}$$

とする．更に，s を変数とする圧力関数 $P(-s\log|f'|)$ を考える．このとき，定理3.1.2の(3.6)は，任意の $x_{\mathbf{i}}\in X_{\mathbf{i}}$ に対して，(3.2)，(2.15)，更に(2.17)を利用することで，

$$\begin{aligned}
P(-s\log|f'|) &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp(S_k\phi(x_{\mathbf{i}})) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x_{\mathbf{i}}))\Bigr) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j(x_{\mathbf{i}}))|\Bigr) \qquad (3.13)\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp(-s\log|(f^k)'(x_{\mathbf{i}})|) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}|(f^k)'(x_{\mathbf{i}})|^{-s} \qquad (3.14)\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}|X_{\mathbf{i}}|^{s} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

となる．

補題 3.2.1 $s\in\boldsymbol{R}$，$\delta>0$ に対して，

$$0<m_1\equiv\inf_{x\in X_1\cup X_2}\log|f'(x)|\le\sup_{x\in X_1\cup X_2}\log|f'(x)|\equiv m_2<\infty$$

とすれば，

$$-\delta m_2\le P(-(s+\delta)\log|f'|)-P(-s\log|f'|)\le-\delta m_1 \qquad (3.16)$$

が成り立つ．特に，$P(-s\log|f'|)$ は，$\lim_{s\to-\infty}P(-s\log|f'|)=\infty$，$\lim_{s\to\infty}P(-s\log|f'|)=-\infty$ となり，s に関して真に減少しかつ連続となる．

【証明】 $\delta>0$ に対して，(3.13)を利用することで

$$\begin{aligned}
P(-(s+\delta)\log|f'|) &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}-(s+\delta)\log|f'(f^j(x_{\mathbf{i}}))|\Bigr) \\
&\le \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j(x_{\mathbf{i}}))|-\delta km_1\Bigr) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\Bigl(\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j(x_{\mathbf{i}}))|\Bigr)\exp(-\delta km_1)\Bigr) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp\Bigl(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j(x_{\mathbf{i}}))|\Bigr)-\delta m_1 \\
&= P(-s\log|f'|)-\delta m_1
\end{aligned}$$

となる．すなわち，

$$P(-(s+\delta)\log|f'|)-P(-s\log|f'|)\le-\delta m_1$$

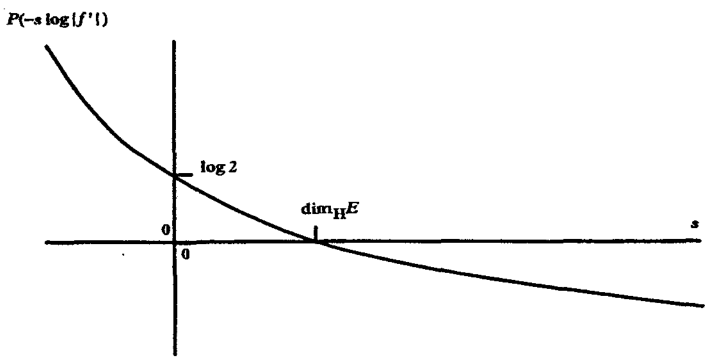

図 3.1: クッキー・カッター系における圧力関数 $P(-s\log|f'|)$ のグラフ

を得る．同様にして，

$$P(-(s+\delta)\log|f'|) - P(-s\log|f'|) \geq -\delta m_2$$

もまた得られる．従って，(3.16) が成り立つ．このことは，関数 $P(-s\log|f'|)$ の平均変化率が常に負であるを意味し，その結果，関数 $P(-s\log|f'|)$ は s に関して常に減少する．また，(3.16) は，関数 $P(-s\log|f'|)$ が連続になることも示している． □

従って，関数 $P(-s\log|f'|)$ のグラフは，図3.1で表された形となる．特に，$P(-s\log|f'|)=0$ となる唯一の正の数 s が存在する．この数 s が，クッキー・カッター集合 E のハウスドルフ次元となることが次の定理から分かる．

定理 3.2.2　s を

$$P(-s\log|f'|)=0 \tag{3.17}$$

を満足する唯一の実数とする．このとき，$\dim_H E = s$，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ が成り立つ．更に，$\mathcal{H}^s$の E への制限はギップス測度となり，特に，すべての $\mathbf{i} \in I_k$ とすべての k に対して

$$\frac{|X_{\mathbf{i}}|^s}{a_1} \leq \mathcal{H}^s(E \cap X_{\mathbf{i}}) \leq a_1|X_{\mathbf{i}}|^s \tag{3.18}$$

を満足する数 $a_1 > 0$ が存在する．

【証明】　s は (3.17) によって与えられたものとする．この s に対して，$\phi(x) = -s\log|f'(x)|$ とおくと，(2.13) で見たように ϕはリプシッツ関数である．ここで，μを定理3.1.2によって与えられたギップス測度とする．このとき，$P(\phi)=0$ より，(3.7) は，すべての $\mathbf{i} \in I_k$ とすべての k に対して，$x \in X_{\mathbf{i}}$ならば

$$\frac{1}{a_0} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(S_k\phi(x))} \leq a_0$$

となる．また，(3.2) より，

$$\exp(S_k\phi(x)) = \exp\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x))\Big) = \exp\Big(\sum_{j=0}^{k-1} -s\log|f'(f^j(x))|\Big)$$

だから，

$$\frac{1}{a_0} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-s\sum_{j=0}^{k-1}\log|f'(f^j(x))|)} \leq a_0$$

となる．更に，連鎖律 (2.15) より，

$$\frac{1}{a_0} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-s\log|(f^k)'(x)|)} \leq a_0$$

となり，

$$\frac{1}{a_0} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{|(f^k)'(x)|^{-s}} \leq a_0$$

を得る．この不等式に (2.17) を用いて，$a_2 = a_0 b_0^s$ とおけば，

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{|X_{\mathbf{i}}|^s} \leq a_2 \tag{3.19}$$

となる．従って，μ はすべての区間 $X_{\mathbf{i}}$ において $|X_{\mathbf{i}}|^s$ と同等の評価をもつ測度である．更に，μ はギッブス測度より，E に台をもつ確率測度でもある．

次に，測度 μ が E 上のハウスドルフ測度と関係付けられることを有界歪曲原理を用いて確かめる．$x \in E$，$r < \dfrac{|X|}{c_{\min}}$ とする．そして，$B(x,r)$ は中心 x，長さ $2r$ の区間として $\mu(B(x,r))$ の評価をおこなう．(2.6) より，

$$x \in X_{\mathbf{i}}, \quad |X_{\mathbf{i}}| \leq r < \frac{|X_{\mathbf{i}}|}{c_{\min}}$$

となる整数 k と $\mathbf{i} \in I_k$ を見つけることができる（系 2.2.4 の証明参照）．従って，$\lambda = \dfrac{d}{b_0}c_{\min}$ とおけば (2.23) より，

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leq \mu(X_{\mathbf{i}}) \leq \mu(B(x,r))$$

となり，(3.19) は，

$$\frac{\mu(B(x,\lambda r))}{a_2} \leq |X_{\mathbf{i}}|^s \leq a_2\mu(B(x,r))$$

となる．この不等式を変形していくと，

$$\frac{\mu(B(x,\lambda r))}{a_2\mu(B(x,r))} \leq \frac{|X_{\mathbf{i}}|^s}{\mu(B(x,r))} \leq a_2 \leq \frac{a_2\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,\lambda r))}$$

となり，

$$\frac{\mu(B(x,\lambda r))}{a_2\mu(B(x,r))}|X_{\mathbf{i}}|^s \leq \mu(B(x,r)) \leq \frac{a_2\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,\lambda r))}|X_{\mathbf{i}}|^s$$

が導かれる．更に，$|X_{\mathrm{i}}| \leq r < \dfrac{|X_{\mathrm{i}}|}{c_{\min}}$ と $\dfrac{1}{c_{\min}^s} > 1$ より，

$$\frac{c_{\min}^s \mu(B(x,\lambda r))}{a_2\mu(B(x,r))} r^s < \mu(B(x,r)) \leq \frac{a_2\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,\lambda r))} r^s < \frac{a_2\mu(B(x,r))}{c_{\min}^s \mu(B(x,\lambda r))} r^s$$

となる．従って，すべての $x \in E$ と十分に小さい r に対して，

$$\frac{r^s}{b_2} < \mu(B(x,r)) < b_2 r^s \tag{3.20}$$

となるある定数 $b_2 > 0$ が存在する．この不等式に命題 1.6.3 を用いることで，

$$\frac{\mu(E)}{b_2} \leq \mathcal{H}^s(E) \leq 8^s b_2 \mu(E)$$

を得る．よって，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$，$\dim_H E = s$ が得られる．また，任意のボレル集合を A とすれば，μ は E に台をもつ測度であるから $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ である．従って，すべての $x \in A \cap E$ に対して，

$$\frac{\mu(A \cap E)}{b_2} \leq \mathcal{H}^s(A \cap E) \leq 8^s b_2 \mu(A \cap E)$$

となる．これは，$\mathcal{H}^s$ の E への制限がギッブス測度 μ と同値であることを意味している．

最後に，$A = X_{\mathrm{i}}$ とおくことで，

$$\frac{\mu(X_{\mathrm{i}} \cap E)}{b_2} \leq \mathcal{H}^s(X_{\mathrm{i}} \cap E) \leq 8^s b_2 \mu(X_{\mathrm{i}} \cap E)$$

となり，(3.19) より，

$$\frac{|X_{\mathrm{i}}|^s}{a_2 b_2} \leq \mathcal{H}^s(X_{\mathrm{i}} \cap E) \leq 8^s a_2 b_2 |X_{\mathrm{i}}|^s$$

となる．ここで，$a_1 = 8^s a_2 b_2$ とおくことで (3.18) が得られる． □

次元公式 (3.17) は，クッキー・カッター集合のハウスドルフ次元を計算するのに有用である．実際に，それを用いてカントールの 3 進集合のハウスドルフ次元を計算してみよう．(3.15) より，

$$\begin{aligned} 0 = P(-s\log|f'|) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathrm{i}\in I_k} |X_{\mathrm{i}}|^s \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathrm{i}\in I_k} \Big(\frac{1}{3^k}\Big)^s \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \Big(\frac{2}{3^s}\Big)^k \\ &= \log 2 - s\log 3 \end{aligned}$$

となる．従って，$s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ を得る．この結果は，1.9 節の間接的な次元計算による方法を用いて求めた結果と一致していることが分かる．

3.3 不変測度と移送作用素

クッキー・カッター集合 E に台をもつ測度 μ が，クッキー・カッター関数 **f の下で不変**であるとは，すべての連続関数 $g: E \to \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\int g(f(x))d\mu(x) = \int g(x)d\mu(x) \tag{3.21}$$

を満足するときにいう．このことは，すべてのボレル集合 A に対して，$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ と同値である．

$\phi: E \to \boldsymbol{R}$ を (3.12) で定義したリプシッツ関数とする．また，$\boldsymbol{C}(E)$ は E 上の実数値連続関数のなすベクトル空間とする．このとき，**移送作用素（transfer operator）** $L_\phi: \boldsymbol{C}(E) \to \boldsymbol{C}(E)$ を，

$$\begin{aligned}(L_\phi g)(x) &= g(F_1(x))e^{\phi(F_1(x))} + g(F_2(x))e^{\phi(F_2(x))} &(3.22)\\ &= \sum_{y:f(y)=x} g(y)e^{\phi(y)} &(3.23)\end{aligned}$$

で定義する．ここで，F_1, F_2 は 2 章で定義した f の 2 つの逆対応である．この作用素 L_ϕ は線形かつ正である．ここで言う，作用素 L_ϕ が正であるとは，すべての $x \in E$ に対して $g(x) > 0$ ならば，すべての $x \in E$ に対して $(L_\phi g)(x) > 0$ になっていることである．L_ϕ を k 回反復することを L_ϕ^k で表すことにすれば，(3.22) の置換を繰り返すことで，

$$\begin{aligned}(L_\phi^k g)(x) &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in I_k} g(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x))\exp\Big(\phi(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x))\\ &\qquad +\phi(F_{i_2}\circ F_{i_3}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x))+\cdots+\phi(F_{i_k}(x))\Big)\\ &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in I_k} g(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x))\exp(S_k\phi(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)))\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．

f と L_ϕ を関係付ける次の式は役立つことが多い．いま，$g_1, g_2 \in \boldsymbol{C}(E)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(L_\phi((g_1\circ f)\times g_2))(x) &= \sum_{i=1,2} g_1(f(F_i(x)))g_2(F_i(x))e^{\phi(F_i(x))}\\ &= \sum_{i=1,2} g_1(x)g_2(F_i(x))e^{\phi(F_i(x))}\\ &= g_1(x)(L_\phi g_2)(x)\end{aligned} \tag{3.25}$$

が成り立つ．

移送作用素の主な性質を定理 3.3.2 で述べる．なお，証明の中で用いられている $\|\cdot\|_\infty$ は**最大値ノルム**と呼ばれ，任意の $g \in \boldsymbol{C}(E)$ に対して，$\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| : x \in E\}$ で定義

されたものである．連続関数の最大値ノルムによるノルム空間$\boldsymbol{C}(E)$はバナッハ空間となる（大石進一 [15] 第1章第1節定理1.1）．

定理3.3.2の証明に際し，次の定理3.3.1を準備しておく．

定理 3.3.1 （シャウダー（Schauder）の不動点定理）

Xをバナッハ空間とする．Xの部分集合Kをコンパクト凸集合とする．関数$\varphi : K \to K$が連続ならばφは不動点をもつ．すなわち，$\varphi(x) = x$を満たす$x \in K$が存在する．

【証明】 ▷岡本　久，中村　周 [17] 第9章第2節定理9.5参照 □

定理 3.3.2

1) wが固有値λに対するL_ϕの固有関数となるような，$\lambda > 0$とすべての$x \in E$に対して$w(x) > 0$を満足する$w \in \boldsymbol{C}(E)$が存在する．すなわち，

$$L_\phi w = \lambda w \tag{3.26}$$

が成り立つ．

2) すべての$g \in \boldsymbol{C}(E)$に対して，

$$\int (L_\phi g) d\mu = \lambda \int g d\mu \tag{3.27}$$

となるEに台をもつボレル確率測度μが存在する．

3) すべての$g \in \boldsymbol{C}(E)$に対して，

$$\int g d\nu = \int g w d\mu \tag{3.28}$$

で定義されたE上の測度νは，fの下で不変である．なお，wは1)のもので，μは2)のものである．

【証明】 (1)の証明)　ϕはリプシッツ関数だから，$i = 1, 2$に対して，

$$\exp(|\phi(F_i(x)) - \phi(F_i(y))|) \leq \exp(a|x-y|) \quad (x, y \in E) \tag{3.29}$$

を満足する十分に大きな数$a > 0$が存在する．$c_{\max} < 1$は，(2.4)で扱ったものとする．$\alpha c_{\max} + a \leq \alpha$を満足する$\alpha > 0$を固定する．また，$|E|$を$E$の直径とし，$\beta = e^{-\alpha|E|} > 0$とする．更に，

$$B = \{g \in \boldsymbol{C}(E) : 任意の\ x, y \in E\ に対して，\beta \leq g(x) \leq 1\ かつ\ g(x) \leq g(y) e^{\alpha|x-y|}\}$$

を定義する．このとき，Bは凸集合で同程度連続な$\boldsymbol{C}(E)$の部分集合となる（付録A.2参照）．従って，集合Bはアスコリ-アルツェラ（Ascoli-Arzela）の定理（定理A.2.1参照）によって，$\boldsymbol{C}(E)$の$\|\cdot\|_\infty$-コンパクト部分集合となる．

次に，正規化されたL_ϕがBをそれ自身の中へ写すことを示し，シャウダーの不動点定理を用いて不動点が存在することを確認する．いま，$g \in B$とすれば，

$$0 < g(x) \le g(y)e^{\alpha|x-y|} \quad (x, y \in E) \tag{3.30}$$

を満足する．このとき，(2.4) より $x, y \in E$ ならば $|F_i(x) - F_i(y)| \le c_{\max}|x-y|$ となることと，(3.22)，(3.29) より，

$$\begin{aligned}
(L_\phi g)(x) &= \sum_{i=1,2} g(F_i(x))e^{\phi(F_i(x))} \\
&\le \sum_{i=1,2} g(F_i(y))e^{\alpha|F_i(x)-F_i(y)|}e^{\phi(F_i(x))} \\
&\le \sum_{i=1,2} g(F_i(y))e^{\alpha c_{\max}|x-y|}e^{\phi(F_i(x))} \\
&\le \sum_{i=1,2} g(F_i(y))e^{\alpha c_{\max}|x-y|}e^{\phi(F_i(y))}e^{a|x-y|} \\
&= (L_\phi g)(y)e^{(\alpha c_{\max}+a)|x-y|} \\
&\le e^{\alpha|x-y|}(L_\phi g)(y)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

を得る．

B 上の正規化された写像を $(T_\phi g)(x) = \dfrac{(L_\phi g)(x)}{\|L_\phi g\|_\infty}$ で定義すると，(3.31) より

$$(T_\phi g)(x) \le e^{\alpha|x-y|}(T_\phi g)(y)$$

となる．また，$\|T_\phi g\|_\infty = 1$ だから，すべての $y \in E$ に対して

$$\beta = e^{-\alpha|E|} \le (T_\phi g)(y) \le 1$$

となる．よって，T_ϕはコンパクト凸集合 B をそれ自身の中へ写している．従って，シャウダーの不動点定理により $T_\phi w = w$ となる $w \in B$ が存在する．ここで，$\lambda = \|L_\phi w\|_\infty$ とおけば結果が得られる．

(2) の証明)　w は 1) で扱ったものとする．測度の集合 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} \equiv \{\ \mu : spt(\mu) \subset E,\ \int w d\mu = 1\}$$

と定義する．$\boldsymbol{C}(E)^*$を，E 上の符号つき測度と同一視される$\boldsymbol{C}(E)$ 上の連続線形関数の空間とし，$\mathcal{M}$ をその部分集合とみなす．$\boldsymbol{C}(E)^*$上定義された L_ϕの双対写像 L_ϕ^*を $g \in \boldsymbol{C}(E)$ に対して，

$$\int g d(L_\phi^* \mu) = \int (L_\phi g) d\mu \tag{3.32}$$

で定義する．このとき，$\mu \in \mathcal{M}$ に対して，

$$\int w d(\frac{1}{\lambda}L_\phi^*\mu) = \int \frac{1}{\lambda}(L_\phi w)d\mu = \int w d\mu = 1$$

が成り立つ．従って，$\frac{1}{\lambda}L_\phi^*$ は $\mathcal{M}$ をそれ自身の中へ写す．また，$\mathcal{M}$ は凸集合となり，*弱位相で $\boldsymbol{C}(E)^*$ のコンパクト部分集合となる（付録A.2参照）．よって，シャウダーの不動点定理より，$\frac{1}{\lambda}L_\phi^*\mu=\mu$ となる測度 $\mu\in\mathcal{M}$ が存在する．従って，(3.32) を利用することで，

$$\int(L_\phi g)d\mu=\int gd(L_\phi^*\mu)=\int gd(\lambda\mu)=\lambda\int gd\mu$$

が成り立つ．

(3) の証明)　$g\in\boldsymbol{C}(E)$ とする．このとき，(3.25) から (3.28) までを利用することで

$$\begin{aligned}\int g(x)d\nu(x) &= \int g(x)w(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\lambda}\int g(x)(L_\phi w)(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\lambda}\int(L_\phi((g\circ f)\times w))(x)d\mu(x)\\ &= \int((g\circ f)(x)w(x))d\mu(x)\\ &= \int(g\circ f)(x)d\nu(x)\\ &= \int g(f(x))d\nu(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，(3.28) より定義された E 上の測度 ν は，f の下で不変である．　□

次の定理は，移送作用素が圧力 $P(\phi)$ と密接に関係していることを示している．すなわち，定理3.3.2の固有値 λ が，$\exp P(\phi)$ と等しいことを示している．また，定理3.3.2で定義した μ と ν が，ϕ に関するギップス測度となることも次の定理から分かる．

定理 3.3.3　λ，μ 並びに ν を定理 *3.3.2* で扱ったものとすれば，$\log\lambda=P(\phi)$ が成り立ち，μ，ν は，共に ϕ に関するギップス測度となる．従って，μ，ν は E 上のボレル確率測度であり，ある数 $a_0>0$ が存在して，すべての k と $\mathbf{i}\in I_k$ に対して，$x\in X_{\mathbf{i}}$ ならば

$$\frac{1}{a_0}\le\frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))},\quad\frac{\nu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))}\le a_0 \tag{3.33}$$

となる．更に，測度 ν は f の下で不変であり，測度 μ はすべてのボレル集合 $A\subset E$ と $k=1,2,\ldots$ に対して，

$$\mu(f^k(A))=e^{kP(\phi)}\int_A\exp(-S_k\phi(x))d\mu(x) \tag{3.34}$$

を満足する．

【証明】　集合 A の定義関数を 1_A と書くことにする．$\mathbf{i}=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in I_k$ とする．$F_{j_1}\circ F_{j_2}\circ\cdots\circ F_{j_k}(x)\in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ は，$j_1=i_1,j_2=i_2,\ldots,j_k=i_k$ のときに限られるのだから，

(3.24) を用いれば，$A \subset X_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \cap E$ に対して，

$$\begin{aligned} L_\phi^k(e^{-S_k\phi(x)}1_A(x)) &= \exp(-S_k\phi(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)))1_A(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)) \\ &\qquad \times\exp(S_k\phi(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x))) \\ &= 1_A(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)) \\ &= 1_{f^k(A)}(x) \end{aligned}$$

となる．従って，積分と (3.27) を k 回使用することで

$$\begin{aligned} \mu(f^k(A)) &= \int 1_{f^k(A)}(x)d\mu(x) \\ &= \int L_\phi^k(e^{-S_k\phi(x)}1_A(x))d\mu(x) \\ &= \lambda^k\int e^{-S_k\phi(x)}1_A(x)d\mu(x) \\ &= \lambda^k\int_A e^{-S_k\phi(x)}d\mu(x) \end{aligned} \tag{3.35}$$

を得る．このことは，$\mathbf{i}\in I_k$ に対して $X_{\mathbf{i}}\cap E$ に含まれた任意のボレル集合 A で成立している．従って，各小区間 $\mathbf{i}$ で定義された (3.35) を加え合わせることによって，任意のボレル集合 $A\subset E$ に対しても (3.35) は成立する．$A = X_{\mathbf{i}}\cap E$ として (3.35) を (3.4) に用いれば，すべての $y\in X_{\mathbf{i}}$に対して，

$$\frac{1}{e^b}\le\frac{\lambda^k\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(S_k\phi(y))}\le e^b \tag{3.36}$$

となる．この不等式の逆数を考え，更に$\mathbf{i}\in I_k$にわたって和をとることで，

$$\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{e^b}\le\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\frac{\exp(S_k\phi(y_{\mathbf{i}}))}{\lambda^k}\le\sum_{\mathbf{i}\in I_k}e^b\mu(X_{\mathbf{i}})$$

となり，

$$\log\lambda+\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{e^b}\le\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp(S_k\phi(y_{\mathbf{i}}))\le\log\lambda+\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}e^b\mu(X_{\mathbf{i}})$$

となる．ここで，$k\to\infty$ として (3.6) と比較すれば $P(\phi)=\log\lambda$が得られる．従って，$\lambda^k = \exp(kP(\phi))$ より，(3.35) は

$$\begin{aligned} \mu(f^k(A)) &= \lambda^k\int_A\exp(-S_k\phi(x))d\mu(x) \\ &= e^{kP(\phi)}\int_A\exp(-S_k\phi(x))d\mu(x) \end{aligned}$$

となり，(3.34) が得られる．また，(3.36) に$\lambda^k=\exp(kP(\phi))$ を用いることで，

$$\frac{1}{e^b}\le\frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(y))}\le e^b \tag{3.37}$$

が得られる．更に，(3.28) に $0 < \inf_{x\in E} w(x) \leq \sup_{x\in E} w(x) < \infty$ を用いることで，

$$(\inf_{x\in E} w(x))\mu(X_{\mathbf{i}}) \leq \nu(X_{\mathbf{i}}) \leq (\sup_{x\in E} w(x))\mu(X_{\mathbf{i}})$$

を得る．従って，μとνは同値な測度である．この不等式を $\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))$ で割って，(3.37) を利用することで，

$$\frac{\inf_{x\in E} w(x)}{e^b} \leq \frac{\nu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))} \leq e^b \sup_{x\in E} w(x)$$

を得る．よって，適当な $a_0 > 0$ が存在して，(3.33) を満足する．従って，μ，νは共に ϕに関するギッブス測度となる． □

先送りされていた定理 3.1.2 2) の証明は, 定理 3.3.3 の μで $k=1$ のときが，定理 3.1.2 2) の *a*) に該当し，また，定理 3.3.3 の νは定理 3.1.2 2) の *b*) に該当するようにとられており証明を終えている．

ギッブス測度の重要な性質にエルゴード性がある．測度 μが f に関して**エルゴード的**であるとは，f に関して $f^{-1}(A)=A$ の意味で不変となるすべての可測集合 $A\subset X$ が，$\mu(A)=0$ または $\mu(X\backslash A)=0$ のどちらかになるときにいう．

もし，A が不変集合であるならば，$A=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X) = E$ となる．従って，$A\subset E$ となる．更に，$A=\bigcup_{\mathbf{i}\in I_k} F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$ だから，$A\cap X_{\mathbf{i}} = F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$ と

$$f^k(A\cap X_{\mathbf{i}}) = A \tag{3.38}$$

が成り立つ．

系 3.3.4 *(3.7) を満足する任意のギッブス測度 μ は，f に関してエルゴード的である．*

【証明】 μを，(3.34) を満足する定理 3.3.3 の測度とする．A が不変集合であれば $A\subset E$ となる．そして，(3.38) と (3.34) によって，すべての $\mathbf{i}\in I_k$に対して，

$$\mu(A) = \mu(f^k(A\cap X_{\mathbf{i}})) = e^{kP(\phi)}\int_{A\cap X_{\mathbf{i}}} \exp(-S_k\phi(x))d\mu(x)$$

となる．この結果を，(3.4) の左側の不等式の変形に用いることで，

$$\frac{1}{e^b}e^{kP(\phi)}\int_{A\cap X_{\mathbf{i}}} \frac{1}{\exp(S_k\phi(x))}d\mu(x) \leq e^{kP(\phi)}\int_{A\cap X_{\mathbf{i}}} \frac{1}{\exp(S_k\phi(y))}d\mu(x)$$

より，

$$\frac{\mu(A)}{e^b} \leq e^{kP(\phi)-S_k\phi(y)}\int_{A\cap X_{\mathbf{i}}} d\mu(x)$$

が得られ，

$$\frac{\mu(A)}{e^b} \le e^{kP(\phi)-S_k\phi(y)}\mu(A\cap X_{\mathbf{i}})$$

となる．同様にして，A を不変集合 E に置き換えて，(3.4) の右側の不等式を変形すれば，

$$e^{kP(\phi)-S_k\phi(y)}\mu(E\cap X_{\mathbf{i}}) \le e^b\mu(E) = e^b$$

となる．従って，すべての $X_{\mathbf{i}}$に対して，

$$\begin{aligned}\mu(A)\mu(X_{\mathbf{i}}) &= \mu(A)\mu(E\cap X_{\mathbf{i}})\\ &\le e^b e^{kP(\phi)-S_k\phi(y)}\mu(A\cap X_{\mathbf{i}})\mu(E\cap X_{\mathbf{i}})\\ &\le e^{2b}\mu(A\cap X_{\mathbf{i}})\end{aligned}$$

となる．$\{X_{\mathbf{i}}\cap E : \mathbf{i}\in I_k, k=0,1,\ldots\}$ は E のボレル部分集合を生成するのだから，すべてのボレル集合 $B\subset E$ に対して，

$$\mu(A)\mu(B) \le e^{2b}\mu(A\cap B)$$

となる．いま，$B=E\backslash A$ とすることで，

$$\mu(A)\mu(E\backslash A) \le e^{2b}\mu(A\cap(E\backslash A)) = e^{2b}\mu(\emptyset) = 0$$

となる．従って，$\mu(A)=0$ または $\mu(E\backslash A)=0$ となる．更に，与えられた ϕ に関する μと異なる任意の他のギッブス測度 νは，定義 (3.7) より (1.9) の意味で μと同値になる．従って，もし A が不変集合であるならば，任意のギッブス測度 ν もまた，$\nu(A)=0$ または $\nu(E\backslash A)=0$ となる．よって，(3.7) を満足する任意のギッブス測度は f に関して，エルゴード的となる． □

この節の結果のひとつとして，ギッブス測度は f の下で不変かつエルゴード的となるように選べることが分かった．この結果は，次章エルゴード理論で特に重要となる．

3.4 エントロピーと変分原理

そもそもエントロピーという概念は，熱力学第二法則を説明するためにクラウジウス (R.Clausi により導入されたものである．エントロピーという造語は，“en” が “into” を，“tropy” はギリシャ語の “$\tau\rho o\pi\acute{\eta}$” に由来し，英語では “turn” もしくは “change” の意味を持つ．力学系のエントロピーは，1950 年代にコルモゴロフ (A.N.Kolmogorov) とシナイ (Y.G.Sinai) によって導入された．このエントロピーは，力学系の反復列の記録から得られる情報の量を測る尺度といえる．

本節においても，引き続き 2.1 節で述べた関数 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ と反発子 E を扱うクッキー・カッター系を利用していく．いま，μを f の下で不変な E 上の確率測度とする．このとき，測度 μに関する f の**エントロピー**を，

$$h_\mu \equiv h_\mu(f) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\mu(X_{\mathbf{i}})\log\mu(X_{\mathbf{i}}) \tag{3.39}$$

で定義する．もちろん，この定義は極限の存在を前提としており，次の命題によって，このエントロピーの存在は明らかにされる．なお，これ以降，不変確率測度と言えば，f の下で不変な確率測度を意味するものとする．

命題 3.4.1 μを f の反発子 E に台をもつ不変確率測度とする．このとき，*(3.39)* によって与えられたエントロピー $h_\mu(f)$ は存在する．

【証明】 列$\Big\{\sum_{\mathbf{i}\in I_k} -\mu(X_{\mathbf{i}})\log\mu(X_{\mathbf{i}})\Big\}_{k=1}^{\infty}$ が劣加法列であることを示し，命題 A.1.1 の結果より極限 (3.39) が存在することを導く．

関数 $\psi: [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を，$\psi(t) = -t\log t\ (t>0)$，$\psi(0)=0$ で定義する．このとき，ψは凹関数である．ψが凹関数とは，$-\psi$が凸関数（付録 A.1 参照）になるときにいう．正の整数 i，j 並びに各 $\mathbf{i}\in I_i$と $\mathbf{j}\in I_j$に対して，すべての $\mathbf{j}\in I_j$ で $\mu(X_{\mathbf{j}})>0$ を仮定すると，ψ が凹関数であることと，$\sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{j}})=1$ より，イエセンの不等式（命題 A.1.3）を用いることで，

$$\begin{aligned}
\psi(\mu(X_{\mathbf{i}})) &= \psi\Big(\sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{ij}})\Big)\\
&\geq \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{j}})\psi\Big(\frac{\mu(X_{\mathbf{ij}})}{\mu(X_{\mathbf{j}})}\Big)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{ij}})\log\Big(\frac{\mu(X_{\mathbf{ij}})}{\mu(X_{\mathbf{j}})}\Big)^{-1}\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{ij}})\Big(\log\mu(X_{\mathbf{j}}) - \log\mu(X_{\mathbf{ij}})\Big)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{ij}})\log\mu(X_{\mathbf{j}}) + \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\psi(\mu(X_{\mathbf{ij}}))
\end{aligned}$$

となる．もし，ある $\mathbf{j}\in I_j$で $\mu(X_{\mathbf{j}})=0$ であっても，$\mu(X_{\mathbf{j}})\neq 0$ となる $\mathbf{j}\in I_j$ の和で上述の不等式は得られるので，上に設けた仮定で一般性は失われていない．いま，$\mathbf{i}\in I_i$にわたって和をとれば，μは f の下で不変だから，$\sum_{\mathbf{i}\in I_i}\mu(X_{\mathbf{ij}})=\mu(X_{\mathbf{j}})$ となる．よって，上述の不等式は，

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{i}\in I_i}\psi(\mu(X_{\mathbf{i}})) &\geq \sum_{\mathbf{i}\in I_i}\Big(\sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{ij}})\log\mu(X_{\mathbf{j}}) + \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\psi(\mu(X_{\mathbf{ij}}))\Big)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in I_j}\mu(X_{\mathbf{j}})\log\mu(X_{\mathbf{j}}) + \sum_{\mathbf{ij}\in I_{i+j}}\psi(\mu(X_{\mathbf{ij}}))
\end{aligned}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{ij}\in I_{i+j}} \psi(\mu(X_{\mathbf{ij}})) &\le \sum_{\mathbf{i}\in I_i} \psi(\mu(X_{\mathbf{i}})) - \sum_{\mathbf{j}\in I_j} \mu(X_{\mathbf{j}}) \log \mu(X_{\mathbf{j}}) \\ &= \sum_{\mathbf{i}\in I_i} \psi(\mu(X_{\mathbf{i}})) + \sum_{\mathbf{j}\in I_j} \psi(\mu(X_{\mathbf{j}}))\end{aligned}$$

となる．よって，この不等式を

$$a_i \equiv \sum_{\mathbf{i}\in I_i} \psi(\mu(X_{\mathbf{i}})) = \sum_{\mathbf{i}\in I_i} -\mu(X_{\mathbf{i}}) \log \mu(X_{\mathbf{i}})$$

で書き換えれば，$a_{i+j} \le a_i + a_j$となる．従って，列$\Big\{\sum_{\mathbf{i}\in I_k} -\mu(X_{\mathbf{i}}) \log \mu(X_{\mathbf{i}})\Big\}_{k=1}^{\infty}$は，命題A.1.1の劣加法列の条件(A.1)を満足するので，(3.39)の極限は存在する． □

圧力とエントロピーの関係を表す変分原理を述べる際，次の積分が必要となる．

補題 3.4.2 Eをクッキー・カッター集合とする．更に，$\phi\colon E \to \boldsymbol{R}$をリプシッツ関数とし，$\mu$を$E$に台をもつ不変確率測度とする．このとき，任意の$x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$に対して，

$$\int \phi(x) d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{i}\in I_k} S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}}) \tag{3.40}$$

が成り立つ．

【証明】 μがfの下で不変であるならば，すべてのjに対して$\int \phi(x)d\mu = \int \phi(f^j(x))d\mu$となることより，

$$\int \phi(x) d\mu = \frac{1}{k} \int \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) d\mu = \frac{1}{k} \int S_k\phi(x) d\mu \tag{3.41}$$

を得る．従って，各$\mathbf{i} \in I_k$に対して$x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ならば，分割している積分幅の上で有界変動原理による評価(3.3)と$\mu(E) = 1$より，

$$\begin{aligned}\left|\int \phi(x)d\mu - \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k} S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}})\right| &= \left|\frac{1}{k}\int S_k\phi(x)d\mu - \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k} S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}})\right| \\ &= \left|\frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\int_{x\in X_{\mathbf{i}}} S_k\phi(x)d\mu - \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k} S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}})\right| \\ &\le \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\left|\int_{x\in X_{\mathbf{i}}} S_k\phi(x)d\mu - S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}})\right| \\ &\le \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\mu(X_{\mathbf{i}}) \max|S_k\phi(x) - S_k\phi(x_{\mathbf{i}})| \\ &\le \frac{b}{k}\end{aligned}$$

となる．よって，$k \to \infty$とすることで，

$$\int \phi(x) d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{i}\in I_k} S_k\phi(x_{\mathbf{i}})\mu(X_{\mathbf{i}})$$

が得られる． □

定理 3.4.3 （変分原理）

$\phi : E \to \boldsymbol{R}$をリプシッツ関数とする．このとき，$\phi$の圧力

$$P(\phi) = \sup\{h_\mu + \int \phi d\mu : \mu\text{は}\ E\ \text{上の不変確率測度}\}$$

となる．この上限は，定理 *3.3.3* の不変ギップス測度 ν によって与えられる．

【証明】 すべての $\mathrm{i} \in I$ に対して $x_{\mathrm{i}} \in X_{\mathrm{i}}$ を選び，$k = 0, 1, \ldots$ と E に台をもつ不変確率測度 μに対して，

$$p_k(\mu) \equiv \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \mu(X_{\mathrm{i}}) \Big(-\log \mu(X_{\mathrm{i}}) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) \Big) \tag{3.42}$$

と定義する．このとき，系 A.1.4 を用いることで，

$$\frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \mu(X_{\mathrm{i}}) \Big(-\log \mu(X_{\mathrm{i}}) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) \Big) \leq \frac{1}{k} \log \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \exp(S_k\phi(x_{\mathrm{i}}))$$

となる．更に，$k \to \infty$ とすることで，(3.39) と (3.40) から

$$h_\mu + \int \phi d\mu \leq P(\phi)$$

が得られる．

次に，定理 3.3.3 の不変ギップス測度ν に対して，(3.42) と (3.33) の右側の不等式を用いれば，

$$\begin{aligned}
p_k(\nu) &= \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) \Big(-\log \nu(X_{\mathrm{i}}) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) \Big) \\
&\geq \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) \Big(-\log \Big(a_0 \exp(-kP(\phi) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}})) \Big) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) \Big) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) (-\log a_0 + kP(\phi)) \\
&= -\frac{1}{k} \log a_0 + P(\phi)
\end{aligned}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}
P(\phi) &\leq p_k(\nu) + \frac{1}{k} \log a_0 \\
&= \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) \Big(-\log \nu(X_{\mathrm{i}}) + S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) \Big) + \frac{1}{k} \log a_0 \\
&= -\frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) \log \nu(X_{\mathrm{i}}) + \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{i} \in I_k} \nu(X_{\mathrm{i}}) S_k\phi(x_{\mathrm{i}}) + \frac{1}{k} \log a_0
\end{aligned}$$

となり，$k \to \infty$ とすることで

$$P(\phi) \leq h_\nu + \int \phi d\nu$$

が得られる．従って，等号は不変ギップス測度 νに対して成立する． □

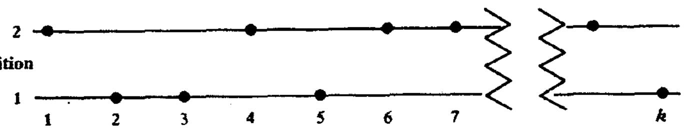

図 3.2: 1 次元粒子鎖のモデル

3.5 熱力学形式論の由来

本章で扱ってきた熱力学形式論は，物理的というよりはむしろ形式的なものであった．しかしながら，ギッブス測度の存在をはじめとするその考えの多くは，統計力学の中で発展し，その後長い年月を経て力学系へと移行してきたものである．本節の目的は，熱力学形式論と統計力学の関係を，粒子モデルを用いることによって，もう少し明確なものへとしていくことにある．

簡単のために 1 次元粒子鎖，すなわち整数点 $(1, 2, \ldots, k)$ 上に並んだ粒子を考える．各粒子は，2 つの選択可能な位置のどちらか一方に存在しているものとする（図3.2参照）．そして，各粒子には2つの選択可能な位置のうち，どちらに存在するかによって1ないし2のラベルを付けることにする．従って，系の配列は $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $i_j = 1$ または2となる k 項列 $\mathrm{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ によって表される．各配列はエネルギーと結びつけられ，$E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ で表記される．また，実数 s に対してとりうる 2^k 個すべての配列にわたって和をとったもの，

$$Z_k^s = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) \tag{3.43}$$

を**分配関数**という．なお，ここでいう実数 s とは，ボルツマン定数 k_B を乗じた系の絶対温度 T の逆数と同一視できるものである．つまり，$s = \dfrac{1}{k_B T}$ であることに注意しておく．

粒子の数が多いときは粒子が互いに影響し，その過程でエネルギーのやりとりをおこなう．このような相互関係を支配している基本的な原理が，**ボルツマン（Boltzmann）の法則**である．それは，ある配列からなる系の確率が，その配列のエネルギーの巾に比例するというものである．従って，先に述べた実数 s に対して，

$$(\text{配列}(i_1, i_2, \ldots, i_k)\,\text{の確率}) = \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \tag{3.44}$$

となる．

最も簡単な状態は，各粒子がエネルギーのやりとりをしないで各粒子自身の状態だけに依存する場合である．この場合，$E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ は粒子個々のエネルギー和となる．従って，i_1 だけに依存する最初の粒子のエネルギーを $\phi(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ と書き，j_1 は任意としたときの桁移動

を $f(i_1,i_2,\ldots,i_k)=(i_2,i_3,\ldots,i_k,j_1)$ と書くことにする．このとき，

$$E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}=\phi(\mathbf{i})+\phi(f(\mathbf{i}))+\cdots+\phi(f^{k-1}(\mathbf{i}))\equiv S_k\phi(\mathbf{i})$$

となる．従って，$\mathbf{i}\in I_k$に対して，

$$Z_k^s=\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp(-sS_k\phi(\mathbf{i}))$$

と書け，更に，

$$(\text{配列}\,\mathbf{i}\,\text{の確率})=\frac{\exp(-sS_k\phi(\mathbf{i}))}{Z_k^s}$$

となる．

$k\to\infty$ とすることで無限個の粒子鎖を考える．これは，**熱力学的極限（巨視的極限）**として知られているものである（藤田重次 [28] 第7章第8節）．もし，エネルギーがある理にかなった物理的条件を満足しているならば，力学系に対する有界変動原理やギップス測度の存在を導くために使われた類似の議論を用いることで

$$Z_k^s\asymp\exp(kP_s)$$

となる．なお，上述の記号 $\asymp$ は，$0<c_1\le\dfrac{\exp(kP_s)}{Z_k^s}\le c_2<\infty$ となる数 c_1，c_2が存在することを意味する．また，すべての有限列 $\mathbf{i}=(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ に対して，

$$(\,j_1=i_1,j_2=i_2,\ldots,j_k=i_k\text{となる配列}\,(j_1,j_2,\ldots)\,\text{の確率})\asymp\exp(-sS_k\phi(\mathbf{i})-kP_s)$$

となる．ここで，数 P_sは物理系の圧力であり，確率はその状態における**古典的ギップス分布**である（Rufus Bowen [2] 第1章第A節）．

エントロピーは統計力学の重要な概念のひとつである．ボルツマンは，このエントロピー S を，

$$S=k_B\log W \tag{3.45}$$

で定義した．ここで，k_Bはボルツマン定数，W は系のとりうるミクロな状態の数である．では，k 項列 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ からなる系のエントロピーは，(3.44) を用いて表せばどうなるだろうか．以下，このことを考えてみる．考察に当たり，いくつかの準備をおこなっておく．統計力学の重要な量に，ヘルムホルツ（Helmholtz）の自由エネルギー F がある．これは，

$$F=\overline{E}-TS \tag{3.46}$$

で定義されるもので，$\overline{E}$は対象とする系の平均エネルギー，T は系の絶対温度である．この自由エネルギー F を分配関数 (3.43) を用いて書き換えれば，

$$F=-k_BT\log Z_k^s=-\frac{1}{s}\log Z_k^s \tag{3.47}$$

となる（藤田重次 [28] 第７章第３節）．なお，s は分配関数で用いた実数 s であることに注意しておく．また，分配関数の対数微分は，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log Z_k^s}{\partial T} &= \frac{\partial \log Z_k^s}{\partial Z_k^s}\frac{\partial Z_k^s}{\partial T} \\
&= \frac{1}{Z_k^s}\frac{\partial Z_k^s}{\partial T} \\
&= \frac{1}{Z_k^s}\frac{\partial}{\partial T}\Big(\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\exp\Big(-\frac{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{k_BT}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{Z_k^s}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\Big(\frac{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{k_BT^2}\exp\Big(-\frac{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{k_BT}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{k_BT^2}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\Big(E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s}\Big) && (3.48) \\
&= \frac{1}{k_BT^2}\overline{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}} && (3.49)
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\overline{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}$ は k 項列 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ からなる系の平均エネルギーである．よって，

$$\overline{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}} = k_BT^2\frac{\partial \log Z_k^s}{\partial T} \tag{3.50}$$

となる．更に，(3.47) より $\log Z_k^s = -\dfrac{F}{k_BT}$ だから，これを (3.50) に代入することで

$$\overline{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}} = k_BT^2\frac{\partial \log Z_k^s}{\partial T} = k_BT^2\frac{\partial}{\partial T}\Big(-\frac{F}{k_BT}\Big)$$

を得る．従って，ヘルムホルツの自由エネルギー (3.46) に上式を用いることで，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\overline{E}-F}{T} \\
&= \frac{k_BT^2}{T}\frac{\partial}{\partial T}\Big(-\frac{F}{k_BT}\Big)-\frac{F}{T} \\
&= -T\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\frac{1}{T}+F\Big(-\frac{1}{T^2}\Big)\Big)-\frac{F}{T} \\
&= -\frac{\partial F}{\partial T}+\frac{F}{T}-\frac{F}{T} \\
&= -\frac{\partial F}{\partial T} && (3.51)
\end{aligned}$$

となる．よって，k 項列 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ からなる系のエントロピー S は，(3.47)，(3.48) を用いることで，

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\
&= -\frac{\partial}{\partial T}(-k_BT\log Z_k^s) \\
&= k_BT\frac{\partial}{\partial T}\log Z_k^s + k_B\log Z_k^s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k_B T \frac{1}{k_B T^2} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \Big\{ E_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \Big\} + k_B \log Z_k^s \\
&= -k_B \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \Big\{ \log\Big(\exp\Big(-\frac{E_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{k_B T}\Big)\Big) \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \Big\} + k_B \log Z_k^s \\
&= -k_B \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \Big\{ \log(\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})) \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \Big\} \\
&\qquad\qquad + k_B \Big(\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \Big) \log Z_k^s \\
&= -k_B \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s} \log \frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s}
\end{aligned}
$$

となる．従って，$\frac{\exp(-sE_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}{Z_k^s}$ が，配列 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ の確率であることに注意すれば，3.4 節で定義した力学系のエントロピーと酷似した k 項列 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ からなる系のエントロピー S の式を得る．

クッキー・カッター力学系で扱われる公式や関係のうち，統計力学と対応するものは以下の通りである．

統計力学	力学系
有限粒子配列	区間 $X_{\mathbf{i}}$
無限粒子配列	E の点
エネルギー $E_{\mathbf{i}}$	$S_k\phi(x)$
温度の逆数	次元 s
分配関数 Z_k^s	和 $\sum_{\mathbf{i}\in I_k} \exp(S_k\phi(x_{\mathbf{i}}))$
圧力 P_s	位相的な圧力 $P(\phi)$
配列のギッブス分布	E 上のギッブス測度 μ.

圧力ゼロを与える反発子の次元（(3.17) 参照）が，温度の逆数に対応するというのは不適当であるが，力学系の多くの特徴は統計力学と類似点をもっている．従って，統計力学と対比することは，力学系の研究をすすめていく上で有益なものである．

第 4 章　エルゴード理論とフラクタル

エルゴード理論と呼ばれる数学分野は，19 世紀後半にオーストリアの物理学者ボルツマン（L.Boltzmann）が，統計力学を構築する際，その基礎的仮説として提唱したエルゴード仮説と呼ばれるものを，数学的に厳密に証明しようとした試みから出発している．今日では，統計力学とは直接関係があるわけではなく，可測力学系を研究の対象とする分野として位置づけられている．ちなみに，エルゴードとは，ギリシャ語のエルゴンとオードを組み合わせた造語で，前者が仕事を，後者は路を意味している．

本章では，4.1 節で確率論と力学系における最も基本的でかつ重要な結果のひとつである，エルゴード定理を証明する．4.2 節では，エルゴード定理の簡単な応用例として力学系の**リアポノフ（Liapounov）指数**について述べる．これは，力学系における初期条件のわずかな差が，時間とともに拡大（もしくは縮小）していく度合いを表すものである．このリアポノフ指数の存在を，エルゴード定理を用いて証明する．更に，4.3 節では，1992 年にベドフォード（T.Bedford）とフィッシャー（A.Fisher）によって導入された**平均密度**について述べる．フラクタル集合に対して一般には密度は存在しないが，平均密度の方はクッキー・カッター集合を含めた多くのフラクタル集合に対して，その存在が明らかにされている．本節では，平均密度を定義した後，カントール 3 進集合とクッキー・カッター集合の平均密度が存在することを，エルゴード定理を用いて証明する．

4.1　エルゴード理論

エルゴード定理を定式化するために，次のような設定をおこなっておく．集合 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ と写像 $f : X \to X$，更に X 上の有限測度 μ が与えられているものとする．また，すべての可測集合 $A \subset X$ に対して，逆像 $f^{-1}(A)$ は可測であるとして，

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \tag{4.1}$$

を仮定する．すなわち，μ は f の下で不変であると仮定する．このような f を，μ に関する**保測写像**という．このとき，条件 (4.1) は，すべての可測関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ に対して

$$\int g(x)d\mu(x) = \int g(f(x))d\mu(x) \tag{4.2}$$

と同値である．

前章で述べた通り，測度 μ が f に関してエルゴード的であるとは，f に関して $f^{-1}(A)=A$ の意味で不変となるすべての可測集合 $A\subset X$ が，$\mu(A)=0$ または $\mu(X\backslash A)=0$ のどちらかになることである．もし，μ がエルゴード的であり，関数 $\phi: X\to \boldsymbol{R}$ がすべての $x\in X$ に対して $\phi(x)=\phi(f(x))$ となる可測関数であるならば，ほとんどすべての x に対して

$$\phi(x)=\lambda \tag{4.3}$$

となる数 λ が存在する（白石謙一，青木統夫 [22] 第 8 章第 22 節注意 22.3 参照）．

$f: X\to X$ を力学系とみなせば，k 回反復 $f^k(x)$ は，時間 0 で位置 x にあった微粒子の時間 k の位置を表すことになる．関数 $\phi: X\to \boldsymbol{R}$ に対して，微粒子の最初の位置 x から数えて時間 $k-1$ までの k 個の位置によって与えられる ϕ の**時間平均**を $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x))$ として考える．エルゴード定理は，ほとんどすべての点 x に対して，これらの時間平均が，$k\to\infty$ とした極限に近づくことを主張するものである．更に，μ がエルゴード的であるならば，この極限は x に依存することなく，ϕ の**空間平均** $\int_X \phi(y)d\mu(y)$ に等しくなる．従って，エルゴード的である場合には，ほとんどすべての最初の点 x に対して，ϕ の時間平均が ϕ の空間平均に等しくなる．

定理 4.1.1 (エルゴード定理)

関数 $f: X\to X$ とする．μ を f の下で不変な X 上の有限測度とする．更に，可測関数 $\phi\in L(X)$ とする．このとき，μ-ほとんどすべての x に対して，極限

$$\Phi(x)\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x)) \tag{4.4}$$

は存在する．更に，μ がエルゴード的であるならば，μ-ほとんどすべての x に対して，

$$\Phi(x)=\frac{1}{\mu(X)}\int_X \phi(y)d\mu(y) \tag{4.5}$$

が成り立つ．

【証明】 最初に，簡単のため，ある数 M に対してすべての $x\in X$ で $|\phi(x)|\le M$ となることを前提として証明を与える．また，ϕ の時間平均を

$$\alpha_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x)) \tag{4.6}$$

と書き，更に，

$$\overline{\alpha}(x)=\limsup_{k\to\infty}\alpha_k(x)$$

と書くことにする．証明のポイントは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\int\overline{\alpha}(x)d\mu(x)\le\int\phi(x)d\mu(x)+\varepsilon \tag{4.7}$$

を示すことである．これを証明するために，

$$\tau(x) \equiv \min\{k > 0 : \alpha_k(x) \geq \overline{\alpha}(x) - \varepsilon\}$$

を定義する．そうすれば，$\overline{\alpha}$の定義からすべてのxに対して$\tau(x) < \infty$となる．もし，幸いにしてすべてのxに対して$\tau(x) \leq T$となる$T < \infty$が存在するならば，和(4.6)は各ブロックの中でjにわたった$\phi(f^j(x))$の平均が少なくとも$\overline{\alpha}(x) - \varepsilon$となる，長さが高々$T$のブロックに分割される．より正確にいえば，各$x$で，$i = 1, 2, \ldots$に対して$k_1 = \tau(x)$，$k_i = \tau(f^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}(x))$によって帰納的に列$(k_1, k_2, \ldots)$を定義する．そうすれば，すべての$k$に対して$\overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(f^k(x))$となることより，第$k_i$ブロックでは，

$$\begin{aligned}\sum_{j=k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}^{k_1+k_2+\cdots+k_i-1} \phi(f^j(x)) &= k_i \alpha_{k_i}(f^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}(x)) \\ &\geq k_i(\overline{\alpha}(f^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}(x)) - \varepsilon) \\ &= k_i(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.8}$$

が成り立つ．よって，iにわたって和をとることで，

$$\sum_{j=0}^{k_1+k_2+\cdots+k_i-1} \phi(f^j(x)) \geq (k_1 + k_2 + \cdots + k_i)(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon)$$

を得る．だから，$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_i$のときはいつでも，

$$\sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) \geq k(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon)$$

となる．一般には，任意の整数kに対して，$k_1 + k_2 + \cdots + k_i \leq k$となる最大の$i$を考え，$k_1 + k_2 + \cdots + k_i$項の和と比較すれば，$0 < k - (k_1 + k_2 + \cdots + k_i) \leq T$から，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) &= \sum_{j=0}^{k_1+k_2+\cdots+k_i-1} \phi(f^j(x)) + \sum_{j=k_1+k_2+\cdots+k_i}^{k-1} \phi(f^j(x)) \\ &\geq (k_1 + k_2 + \cdots + k_i)(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon) + \sum_{j=k_1+k_2+\cdots+k_i}^{k-1} \phi(f^j(x)) \\ &\geq (k - T)(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon) - TM \end{aligned}$$

を得る．そこで両辺を積分することで，

$$\int \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) d\mu(x) \geq \int \Big((k - T)(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon) - TM\Big) d\mu(x)$$

となる．更に(4.2)を用いることで，

$$\int \sum_{j=0}^{k-1} \phi(x) d\mu(x) \geq \int \Big((k - T)(\overline{\alpha}(x) - \varepsilon) - TM\Big) d\mu(x)$$

となり，

$$\int k\phi(x)d\mu(x) \geq \int\Big((k-T)(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)-TM\Big)d\mu(x)$$

を得る．よって，

$$\int \phi(x)d\mu(x) \geq \int(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)d\mu(x) - \frac{1}{k}\int T(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)d\mu(x) - \frac{1}{k}\int TMd\mu(x)$$

において，$k\to\infty$ を考えることで，

$$\int \phi(x)d\mu(x) \geq \int(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)d\mu(x)$$

となる．μが有限測度より，$\int \varepsilon d\mu(x)$ をεと置き直すことで，

$$\int \overline{\alpha}(x)d\mu(x) \leq \int \phi(x)d\mu(x)+\varepsilon$$

となり，この場合は (4.7) が示される．

次に，$\tau(x)$ が有界でない場合を考える．$A\equiv\{x:\tau(x)>T\}$ として，$\mu(A)<\varepsilon$となる十分に大きな$T(\geq 1)$ を選び，

$$\phi^*(x)=\begin{cases}\phi(x) & (x\notin A)\\ M & (x\in A)\end{cases}$$

で $\phi^*:X\to\boldsymbol{R}$を定義する．そうすることで，$A$ 上の ϕを修正する．α_k^*は，(4.6) で ϕを ϕ^* でおきかえたもので定義し，更に，

$$\tau^*(x)=\min\{k>0:\alpha_k^*(x)\geq\overline{\alpha}(x)-\varepsilon\}$$

を定義すれば，$x\in A$ に対して$\tau^*(x)=1$ より，すべての x に対して$\tau^*(x)\leq T$ となる．従って，前半と同様にすることで，$K=\int d\mu(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int\overline{\alpha}(x)d\mu(x) &\leq \int(\alpha^*(x)+\varepsilon)d\mu(x)\\ &= \int\phi^*(x)d\mu(x)+K\varepsilon\\ &= \int\phi(x)d\mu(x)+\int_A(\phi^*(x)-\phi(x))d\mu(x)+K\varepsilon\\ &\leq \int\phi(x)d\mu(x)+\int_A\phi^*(x)d\mu(x)+\left|\int_A\phi(x)d\mu(x)\right|+K\varepsilon\\ &\leq \int\phi(x)d\mu(x)+(2M+K)\varepsilon\end{aligned}$$

となる．εは任意に小さく取れるのだから (4.7) を得る．よって，εは任意だから，(4.7) より

$$\int\overline{\alpha}(x)d\mu(x)\leq\int\phi(x)d\mu(x)$$

が得られる．

また，$\underline{\alpha}(x)=\liminf_{k\to\infty}\alpha_k(x)$ とおき，同様にしていくことで

$$\int\phi(x)d\mu(x)\leq\int\underline{\alpha}(x)d\mu(x)$$

が得られる．この結果，

$$\int \overline{\alpha}(x)d\mu(x) \leq \int \underline{\alpha}(x)d\mu(x)$$

となり，

$$\int (\overline{\alpha}(x) - \underline{\alpha}(x))d\mu(x) \leq 0$$

が導かれる．よって，$\overline{\alpha}(x) - \underline{\alpha}(x) \geq 0$ より，ほとんどすべての x に対して $\overline{\alpha}(x) = \underline{\alpha}(x)$ となる．従って，この共通の値が極限 (4.4) と等しくなる．

最後に，

$$\begin{aligned} \alpha_k(f(x)) - \alpha_k(x) &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(f(x))) - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x)) \\ &= \frac{1}{k}\Big(\phi(f^k(x)) - \phi(x)\Big) \end{aligned}$$

より，どちらかの極限が存在するときはいつでも，$\Phi(f(x)) = \Phi(x)$ となる．従って，もし μ がエルゴード的であるならば，(4.3) より，ほとんどすべての x で $\Phi(x) = \lambda$ となるある数 λ が存在する．収束定理と μ の不変性を用いることで，

$$\begin{aligned} \lambda\mu(X) &= \int_X \Phi(x)d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x))d\mu(x) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_X \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x))d\mu(x) \\ &= \int_X \phi(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

が得られ，ほとんどすべての x に対して (4.5) が成り立つ． □

系 4.1.2 関数 $f : X \to X$ とし，μ を f の下で不変な X 上の有限測度とする．また，$n = 1, 2, \ldots$ に対して可測関数 $\phi_n \in L(X)$ とする．更に，すべての正の整数 k と n 並びにすべての $x \in X$ に対して，

$$|\phi_n(f^k(x)) - \phi_{n+k}(x)| < \varepsilon_n \tag{4.9}$$

を仮定する．ただし，$\varepsilon_n \searrow 0$ とする．このとき，μ-ほとんどすべての x に対して，極限 $\Phi(x) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_k(x)$ は存在する．更に，μ がエルゴード的であるならば，$\Phi(x)$ はほとんどいたるところ定数となる．

【証明】 $m \geq 1$，$n \geq 1$ に対して，

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m+n-1}\phi_k(x) = \frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k(x) \tag{4.10}$$

$$+\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\phi_{n+k}(x)-\phi_n(f^k(x))\Big) \tag{4.11}$$

$$+\frac{m}{m+n}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_n(f^k(x)) \tag{4.12}$$

となる．n を固定して $m\to\infty$ とすると，(4.10) はほとんどすべての x に対して 0 となる．また，(4.11) に (4.9) を用いることで，

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\phi_{n+k}(x)-\phi_n(f^k(x))\Big)<\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_n=\frac{m}{m+n}\varepsilon_n\to\varepsilon_n \quad (m\to\infty)$$

と

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\phi_{n+k}(x)-\phi_n(f^k(x))\Big)>\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1}(-\varepsilon_n)=\frac{m}{m+n}(-\varepsilon_n)\to-\varepsilon_n \quad (m\to\infty)$$

が得られる．更に，エルゴード定理（定理 4.1.1）より，$m\to\infty$ とすると (4.12) は，ほとんどすべての x である数に収束する．いま，このある数を $\Phi_n^*(x)$ で表すことにすれば，

$$\frac{m}{m+n}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_n(f^k(x))\to\Phi_n^*(x) \quad (m\to\infty)$$

となる．従って，ほとんどすべての x に対して，

$$\Phi_n^*(x)-\varepsilon_n<\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_k(x)\le\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_k(x)<\Phi_n^*(x)+\varepsilon_n$$

となる．ここで，$n\to\infty$ とすれば，ほとんどすべての x に対して

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_k(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n^*(x)\equiv\Phi(x)$$

が成り立つ．また，μがエルゴード的であるならば，エルゴード定理（定理 4.1.1）によって $\Phi_n^*(x)$ は，ほとんどいたるところ定数となるのだから，$\Phi(x)$ もまた，ほとんどいたるところ定数となる． □

4.2 リアポノフ指数

エルゴード定理の簡単な応用に力学系のリアポノフ指数がある．リアポノフ指数とは，初期条件のわずかな差が，時間 t の指数関数 $\exp(at)$ で増幅するときの係数 a のことである．

いま，$X\subset\boldsymbol{R}$を閉区間，$f:X\to X$ を C^1-写像とする．このとき，点 $x\in X$ における f の**リアポノフ（Liapounov）指数** $\lambda(x)$ を

$$\lambda(x) \equiv \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log|(f^k)'(x)| \tag{4.13}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\log|f'(f^j(x))| \tag{4.14}$$

で定義する．ここで，第 2 式から第 3 式の変形は連鎖律 (2.15) を使用している．従って，x で中心化された小区間 J に対して，

$$|f^k(J)| \simeq \exp(k\lambda(x))|J|$$

となる．もちろん，この定義は極限 (4.13) が存在することを仮定している．次の命題は，エルゴード性に関する条件の下で，この極限 (4.13) が存在することを導くものである．

命題 4.2.1 $X \subset \boldsymbol{R}$を閉区間とし，μを C^1-写像 $f : X \to X$ に関して不変かつエルゴード的な有限測度であるとする．更に，$\int \log|f'(x)|d\mu(x) > -\infty$ を仮定する．このとき，リアポノフ指数 $\lambda(x)$ は存在し，$\lambda(x)$ は μ-ほとんどすべての x に対して，ある数 λに等しくなる．

【証明】 $\phi(x) = \log|f'(x)|$ とすれば，エルゴード定理（定理 4.1.1）よりある数 λが存在して，μ-ほとんどすべての x に対して，

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j(x)) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\log|f'(f^j(x))| \\ &\equiv \lambda(x)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

4.3 密度と平均密度

本節では，自己相似集合やクッキー・カッター集合が，それらを定義する関数に関して不変かつエルゴード的となる，自然な測度の台になることを用いて，エルゴード定理の利用をする．

最初に，次の補題 4.3.1 1) を述べるに際し，必要となる知識を復習しておく．集合 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ 上の反復関数系を $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ とする．このとき，$E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E)$ となる唯一つの空でないコンパクト集合 $E \subset X$ が存在する（定理 1.8.3）．この E をアトラクターという．反復関数系 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ が相似変換からなる，アトラクター E を自己相似という．また，和集合 $E = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(E)$ において，各 $F_i(E)$ が互いに素であるとき，反復関数系 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ は強分離条件を満足するという．いま，反復関数系 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ において，$F_1(X), F_2(X), \ldots, F_m(X)$ は互いに素であるとする．このとき，$f : \bigcup_{i=1}^{m} F_i(X) \to X$ を

$$x \in F_i(X) \text{ ならば } f(x) = F_i^{-1}(x) \tag{4.15}$$

で定義することができる．

補題 4.3.1

1) $E \subset \boldsymbol{R}^n$を強分離条件を満足し，次元が$s$となる自己相似集合とする．さらに，$\mu = \mathcal{H}^s|_E$を$s$次元ハウスドルフ測度の$E$への制限とする．このとき，$f$を *(4.15)* で定義された関数とすれば，$\mu$は$f : E \to E$に関して不変かつエルゴード的となる．

2) 次元sのクッキー・カッター集合Eは，$\mathcal{H}^s|_E$と同値であり，不変かつエルゴード的である確率測度μの台となる．

【証明】 (1) の証明) 集合$A \subset E$に対して，互いに素となる和集合を用いることで

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(A)$$

と書ける．ここで，反復関数系$\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$の各$F_i$の相似比を$r_i$で表すことにすれば，$\mathcal{H}^s$の比率性質 (1.24) と (1.48) により，

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu\Bigl(\bigcup_{i=1}^{m} F_i(A)\Bigr) = \sum_{i=1}^{m} \mu(F_i(A)) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s \mu(A) = \mu(A)$$

となる．従って，測度μはfの下で不変である．次に，集合$A \subset E$が可測として，$A = f^{-1}(A)$を仮定すれば，すべてのkと$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$に対して，

$$A = f^{-k}(A) = \bigcup_{\mathbf{i} \in I_k} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$$

となる．よって，$A \cap E_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$ と$\mathcal{H}^s$の比率性質より，

$$\mu(A \cap E_{\mathbf{i}}) = \mu(F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)) = (r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_k})^s \mu(A) = \frac{\mu(E_{\mathbf{i}})}{\mu(E)} \mu(A)$$

となる．いま，$\mathcal{C}$をEの部分集合Uからなる族で

$$\mu(A \cap U) = \frac{\mu(U)}{\mu(E)} \mu(A) \tag{4.16}$$

を満足するものとする．そうすれば，上述の結果より，すべての$\mathbf{i} \in I$に対して$E_{\mathbf{i}} \in \mathcal{C}$であり，測度の加法性から，このような集合の任意の可算個の集合もまた$\mathcal{C}$に属する．更に，任意の可測集合$U \subset E$に対しても，μの正則性によってUに減少する$\mathcal{C}$の元からなる集合列を見つけることができる．その結果，(4.16) は任意の可測集合Uに対しても成立することになる．特に，$U = A$とおくことによって，

$$\mu(A) = \mu(A \cap A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)} \mu(A)$$

となるので，$\mu(A) = 0$または$\mu(A) = \mu(E)$が得られる．従って，μはエルゴード的である．

(2) の証明) 定理 3.2.2 において，$\mathcal{H}^s$のEへの制限がギップス測度となることを示した．また，定理 3.3.3 では，ギップス測度と同値な不変ギップス測度の存在を証明した．更には，

系 3.3.4 でこれらの測度がエルゴード的であることを示しているので，2) の主張が従うことになる． □

補題 4.3.1 2) と命題 4.2.1 の結果を用いることで，クッキー・カッター系のリアポノフ指数は存在し，それは E 上 $\mathcal{H}^s$-ほとんどいたるところ定数となることを導くことができる．

次に，1.7 節で述べた s 集合の密度について思い起こす．そのために，$E \subset \boldsymbol{R}^n$ を，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ となるハウスドルフ次元が s のボレル集合とする．また，s 次元ハウスドルフ測度の E への制限を $\mu = \mathcal{H}^s|_E$ とすれば，

$$\mu(A) = \mathcal{H}^s(E \cap A) \tag{4.17}$$

となる．(1.26) と (1.27) で，s 集合 E の点 x における下密度と上密度をそれぞれ，

$$\underline{D}^s(x) = \underline{D}^s(E, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s} = \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^s} \tag{4.18}$$

と

$$\overline{D}^s(x) = \overline{D}^s(E, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s} = \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^s} \tag{4.19}$$

で定義した．これらの下密度，上密度は，自己相似集合やクッキー・カッター集合の場合には，ほとんどいたるところ定数となることが，次の命題により示される．

命題 4.3.2 E を強分離条件を満足する自己相似集合，あるいはクッキー・カッター集合のどちらかであるとする．また，$s = \dim_H E$ とする．このとき，$\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての $x \in E$ に対して，

$$\underline{D}^s(x) = \underline{d}, \quad \overline{D}^s(x) = \overline{d}$$

となる，$0 < \underline{d} \leq \overline{d} \leq 1$ を満たす数 $\underline{d}$，$\overline{d}$ が存在する．

【証明】 E を自己相似集合またはクッキー・カッター集合とし，$f : X \to X$ は集合 E を定義するような関数とする．また，E が X の内部に含まれているように仮定する．そうすれば，(1.28) によって，すべての $x \in E$ に対して $\underline{D}^s(x) = \underline{D}^s(f(x))$ となる．補題 4.3.1 より，$\mathcal{H}^s$ の E への制限と同値となるエルゴード的な測度 μ が存在する．一方，$\underline{D}^s$ は x の可測関数である（*K.J.Falconer*（畑　政義訳）[5] 第 2 章第 2 節補題 2.1）のだから，(4.3) より，$\underline{D}^s(x)$ は μ-ほとんどいたるところ定数となる．この定数を $\underline{d}$ と書くことにすると，$\underline{D}^s(x)$ は $\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての $x \in E$ に対して定数 $\underline{d}$ となる．同様の論法が $\overline{D}^s$ にも成り立ち，ここで得られる定数を $\overline{d}$ とする．

次に，(4.18) に (3.20) を用いれば，すべての $x \in E$ に対して $0 < \underline{D}^s(x)$ となる．また，定理 1.7.1 2) より $\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての x に対して $\overline{D}^s(x) \leq 1$ であるので，$0 < \underline{D}^s(x) \leq \overline{D}^s(x) \leq 1$

となり，$0 < \underline{d} \leq \overline{d} \leq 1$ が得られる． □

密度理論の古典的な結果の 1 つは，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ かつ s が非整数ならば，$\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての x に対して $\underline{D}^s(x) < \overline{D}^s(x)$ となることである．このことは，集合 E に密度が存在しないことを意味している（$K.J.Falconer$（畑　政義訳）[5] 第 4 章）．つまり，命題 4.3.2 より $\underline{d} < \overline{d}$ となり，r が十分に小さいところでは，

$$\frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^s} = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{(2r)^s} \tag{4.20}$$

が，程度の差こそあれ $\underline{d}$と $\overline{d}$ の間を揺れ動くことを意味している．そこで，十分に小さい r に対して，この振動，特に (4.20) の平均の値に着目し，議論をおこなっていく．

まず，集合 E の点 x における**対数平均**を

$$A^s(x,T) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x,e^{-t}))}{(2e^{-t})^s}dt = \frac{1}{2^sT}\int_{t=0}^{T} \mu(B(x,e^{-t}))e^{st}dt \tag{4.21}$$

で定義する．次に，集合 E の点 x における**下平均密度**と**上平均密度**をそれぞれ

$$\underline{A}^s(x) = \liminf_{T\to\infty} A^s(x,T)$$

と

$$\overline{A}^s(x) = \limsup_{T\to\infty} A^s(x,T)$$

で定義する．$\underline{A}^s(x) = \overline{A}^s(x)$ が成り立つとき，この値を E の**平均密度**といい，$A^s(x)$ で表す．すなわち，

$$A^s(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x,e^{-t}))}{(2e^{-t})^s}dt \tag{4.22}$$

となる．また，すべての点 x に対して

$$\underline{D}^s(x) \leq \underline{A}^s(x) \leq \overline{A}^s(x) \leq \overline{D}^s(x) \tag{4.23}$$

が成り立つ．密度と平均密度は，任意の $r > 0$ に対して μの $B(x,r)$ への制限によって決定される局所的な定義である．従って，密度と平均密度は，点 x における E の局所構造を表している．

フラクタル集合 E に対して，密度 $D^s(x)$ は一般には存在しない．しかしながら，自己相似集合やクッキー・カッター集合を含めた多くのフラクタル集合に関しては，平均密度 $A^s(x)$ が存在し，ほとんどすべての x で同じ値をとる．このことを，エルゴード定理を用いて確かめていく．最初に，簡単な例として，カントール 3 進集合を取り上げこのことを確認する．

定理 4.3.3　E をカントール 3 進集合とする．更に，$s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$，$\mu = \mathcal{H}^s|_E$（$E$ 上自然で一

様に分布した測度）とする．このとき，μ-ほとんどすべての点 $x \in E$ に対して平均密度は

$$A^s(x) = \frac{1}{2^s \log 2} \int \int_{|x-y| \geq \frac{1}{3}} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x) d\mu(y) = 0.62344\ldots \tag{4.24}$$

となり存在する．

【証明】 $k = 0, 1, \ldots$ に対して，

$$\phi_k(x) = \int_{t=k}^{k+1} \frac{\mu(B(x, 3^{-t}))}{2^{-t}} dt \tag{4.25}$$

とする．$f : E \to E$ を，$f(x) = 3x(\bmod\ 1)$ で与える．このとき，f は集合 E の自己相似変換となる（$r \leq \dfrac{1}{3}$ に対して，$f(E \cap B(x,r))$ の図は，因子 3 によって拡大された $E \cap B(x,r)$ の図となる）．このことと，$\mathcal{H}^s$ の比率性質を用いることで，(4.25) は，

$$\begin{aligned}
\phi_k(x) &= \int_{t=k}^{k+1} \frac{\mu(B(x, 3^{-t}))}{2^{-t}} dt \\
&= \int_{t=k}^{k+1} \frac{3^{-s} \mu\Big(f(B(x, 3^{-t}))\Big)}{2^{-t}} dt \\
&= \int_{t=k}^{k+1} \frac{2^{-1} \mu(B(f(x), 3^{-t+1}))}{2^{-t}} dt \\
&= \int_{t=k-1}^{k} \frac{\mu(B(f(x), 3^{-t}))}{2^{-t}} dt \\
&= \phi_{k-1}(f(x))
\end{aligned}$$

となる．この結果を反復利用することで，

$$\phi_k(x) = \phi_{k-1}(f(x)) = \ldots = \phi_0(f^k(x))$$

を得る．補題 4.3.1 1) より，μ は f に関して不変かつエルゴード的となるのだから，エルゴード定理（定理 4.1.1）より，μ-ほとんどすべての $x \in E$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_E \phi_0(y) d\mu(y) &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi_0(f^j(x)) \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j(x) \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \int_{t=0}^{k} \frac{\mu(B(x, 3^{-t}))}{2^{-t}} dt \\
&= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x, 3^{-t}))}{2^{-t}} dt \qquad (T : \text{実数}) \\
&= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x, e^{-t}))}{2^{-t} 3^{ts} e^{-ts}} dt \\
&= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x, e^{-t}))}{e^{-ts}} dt \\
&= 2^s \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x, e^{-t}))}{(2e^{-t})^s} dt \\
&= 2^s A^s(x)
\end{aligned}$$

となる．なお，離散的な自然数 k を連続的な実数 T に置き換える操作は，エルゴード定理(定理 4.1.1) より極限の存在が保証されているため可能となる．従って，μ-ほとんどすべての x に対して平均密度 $A^s(x)$ が存在し，

$$a = \frac{1}{2^s}\int_E \phi_0(y)d\mu(y)$$

となる定数 a と等しくなる．よって，

$$\begin{aligned}
2^s a &= \int_E \phi_0(x)d\mu(x) \\
&= \int_E \int_{t=0}^1 2^t \mu(B(x,3^{-t}))dtd\mu(x) \\
&= \int_E \int_{t=0}^1 2^t \int_E 1_{\{|x-y|\le\frac{1}{3^t}\}} d\mu(y)dtd\mu(x) \\
&= \int_E \int_E \int_{t=0}^1 2^t 1_{\{|x-y|\le\frac{1}{3^t}\}} dtd\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_E \int_E \int_{t=0}^{\min\{1,-\frac{\log|x-y|}{\log 3}\}} e^{t\log 2}dtd\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int\int_{|x-y|<\frac{1}{3}} \frac{1}{\log 2}d\mu(x)d\mu(y) + \int\int_{|x-y|\ge\frac{1}{3}} \frac{1}{\log 2}\Big(\frac{1}{|x-y|^s}-1\Big)d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \frac{1}{\log 2}\Big(\int\int_{|x-y|<\frac{1}{3}} 1d\mu(x)d\mu(y) - \int\int_{|x-y|\ge\frac{1}{3}} 1d\mu(x)d\mu(y)\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{\log 2}\int\int_{|x-y|\ge\frac{1}{3}} \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \frac{1}{\log 2}\int\int_{|x-y|\ge\frac{1}{3}} \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(x)d\mu(y)
\end{aligned}$$

となる．従って，$a = A^s(x)$ より (4.24) が得られる． □

E を，元の区間の λ倍の長さの m 個の小区間が等間隔に並ぶ，単位区間から得られた m-区間カントール集合とする．この場合にも，上の証明が適用できる．つまり，E は $i = 1,2,\ldots,m$ に対して相似変換

$$F_i(x) = \lambda x + \frac{(i-1)(1-\lambda)}{m-1} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

からなる反復関数系の不変集合となる．このとき，$\mathcal{H}^s(E) = 1$ （$K.J.Falconer$ [6] 第 4 章第 1 節）となり，$s = \dim_H E = -\dfrac{\log m}{\log\lambda}$ となる．そして，定理 4.3.3 の証明と同様にすることで，μ-ほとんどすべての点 $x \in E$ に対して

$$A^s(x) = \frac{1}{2^s\log m}\int\int \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(x)d\mu(y)$$

が得られる．ここで μ は $\mathcal{H}^s$ の E への制限であり，重積分は $(x,y) \in \bigcup_{i\ne j} E_i \times E_j$ で評価される．しかし，異なった相似比からなる反復関数系によって得られる自己相似集合に対する，$A^s(x)$ の存在性とそれがほとんどいたるところ定数となることの証明は，より複雑になる．また，

一般のクッキー・カッター集合に対しても，それらのことを証明するには，系 4.1.2 を用いることが必要になる．しかしながら，定理 4.3.3 の証明は，これらの一般化における証明のひな形となっている．

クッキー・カッター集合 E の平均密度を扱っていくために，必要となる内容をまとめておく．$f: X_1 \cup X_2 \to X$ を，X の内部に含まれる反発子 E を伴う C^2-クッキー・カッター系とする．また，$s = \dim_H E$ として，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ かつ $\mu = \mathcal{H}^s|_E$ とする．このとき，もし，$0 < r \leq r_0$ で $x \in E$ であるならば，

$$B(x, r) \subset X \tag{4.26}$$

となるような r_0 をみつけることができる．従って，$F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}$ は，すべての k とすべての $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ に対して，上述の区間 $B(x, r) \subset X$ 上で定義できる．一方，任意の $x \in E$ に対して，すべての k で $x \in X_{\mathbf{i}} \cap E$ となる $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ が必ず存在する．よって，$B(x, r) \cap E \subset X_{\mathbf{i}} \cap E$ となる $r > 0$ をとることができることになる．この結果，(3.18) より，すべての $x \in E$ と $r > 0$ に対して，

$$\frac{\mu(B(x, r))}{r^s} \leq d \tag{4.27}$$

となるある数 $d > 0$ が存在する．また，$x, y \in X_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ に対して，(3.1) と (3.2) を用いることで，

$$\begin{aligned}
|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| &= \left|\sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(y))\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \left|\phi(f^j(x)) - \phi(f^j(y))\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} a|f^j(x) - f^j(y)| \\
&\leq ka|f^k(x) - f^k(y)|
\end{aligned}$$

となる．更に，連鎖律 (2.16) より，

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| = \left|\log|(f^k)'(x)| - \log|(f^k)'(y)|\right|$$

なのだから，

$$\left|\log|(f^k)'(x)| - \log|(f^k)'(y)|\right| \leq ka|f^k(x) - f^k(y)| \tag{4.28}$$

が成り立つ．

定理 4.3.4 E をクッキー・カッター集合とし，ν を E に台をもつ不変かつエルゴード的な確率測度とする．このとき，平均密度 $A^s(x)$ は存在し，$A^s(x)$ は ν-ほとんどすべての $x \in E$ に対して，ある数 a に等しくなる．

【証明】 この証明の道筋は定理4.3.3と本質的に同じである．いま，$n=0,1,\ldots$と$x \in E$に対して，

$$\phi_n(x)=\int_{\log|(f^n)'(x)|}^{\log|(f^{n+1})'(x)|} e^{st}\mu(B(x,e^{-t}))dt \tag{4.29}$$

とする．ただし，$\mu=\mathcal{H}^s|_E$である．このとき，このϕ_nが系4.1.2の条件(4.9)を満足することを示す．まず，$x \in E$を固定し，n，kを整数とする．また，

$$t_n=\log|(f^n)'(f^k(x))| \tag{4.30}$$

とし，nは上述のr_0に対し$e^{-t_n}\le r_0$を満足する十分に大きな整数と仮定する．更に，$F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}$を$F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(f^k(x))=x$となる$f^{-k}$の枝とする．そして，

$$I=F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(B(f^k(x),e^{-t_n})) \tag{4.31}$$

となる区間において，x_-，x_+をそれぞれ

$$|(f^k)'(x_-)|=\inf_{z\in I}|(f^k)'(z)|$$

と

$$|(f^k)'(x_+)|=\sup_{z\in I}|(f^k)'(z)|$$

を満足する区間Iの点とする．このとき，リプシッツ写像に関するハウスドルフ測度の性質(1.22)より，$t\ge t_n$に対して，

$$\begin{aligned}
\mu(B(f^k(x),e^{-t})) &= \mu\Big(f^k(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(B(f^k(x),e^{-t})))\Big)\\
&\le |(f^k)'(x_+)|^s\mu\Big(F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}(B(f^k(x),e^{-t}))\Big)\\
&\le |(f^k)'(x_+)|^s\mu\Big(B\Big(x,\frac{e^{-t}}{|(f^k)'(x_-)|}\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

となる．

次に，(4.28)－(4.30)と(4.32)を用い，更に$u=t+\log|(f^k)'(x_-)|$と置くことで，

$$\begin{aligned}
\phi_n(f^k(x)) &= \int_{\log|(f^n)'(f^k(x))|}^{\log|(f^{n+1})'(f^k(x))|} e^{st}\mu(B(f^k(x),e^{-t}))dt\\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{st}\mu(B(f^k(x),e^{-t}))dt\\
&\le \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{st}\mu\Big(B\Big(x,\frac{e^{-t}}{|(f^k)'(x_-)|}\Big)\Big)|(f^k)'(x_+)|^s dt\\
&= \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|} e^{su}\mu(B(x,e^{-u}))\Big|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\Big|^s du\\
&\le \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x,e^{-u}))du+\varepsilon_n
\end{aligned}$$

を得る（最後の不等式の変形は付録 A.3 参照）．ここで，ε_nは$n \to \infty$とすればkとxに依存することなく一様に$\varepsilon_n \to 0$となる．また，(4.30) と連鎖律 (2.15) より，

$$\begin{aligned} t_n + \log|(f^k)'(x)| &= \log|(f^n)'(f^k(x))| + \log|(f^k)'(x)| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \log|f'(f^j(f^k(x)))| + \sum_{j=0}^{k-1} \log|f'(f^j(x))| \\ &= \sum_{j=k}^{n+k-1} \log|f'(f^j(x))| + \sum_{j=0}^{k-1} \log|f'(f^j(x))| \\ &= \sum_{j=0}^{n+k-1} \log|f'(f^j(x))| \\ &= \log|(f^{n+k})'(x)| \end{aligned}$$

となる．従って，上の不等式は，

$$\phi_n(f^k(x)) \le \int_{\log|(f^{n+k})'(x)|}^{\log|(f^{n+k+1})'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))du + \varepsilon_n$$

となる．これは，示したい不等式 (4.9) の半分であり，残りの$\phi_n(f^k(x)) \ge \phi_{n+k}(x) - \varepsilon_n$も同様にして導くことができる．従って，$\nu$は不変かつエルゴード的な確率測度であることより，系 4.1.2 から，ν-ほとんどすべてのxに対して，

$$\frac{1}{m}\int_0^{\log|(f^m)'(x)|} e^{st}\mu(B(x, e^{-t}))dt = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x) \to a_0 \quad (m \to \infty)$$

となる定数$a_0 > 0$が存在する．更に，命題 4.2.1 よりν-ほとんどすべてのxに対して，

$$\frac{1}{m}\log|(f^m)'(x)| = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \log|f'(f^j(x))| \to \lambda \quad (m \to \infty)$$

となる定数λが存在する．従って，ν-ほとんどすべてのxに対して，

$$\frac{1}{\log|(f^m)'(x)|}\int_0^{\log|(f^m)'(x)|} e^{st}\mu(B(x, e^{-t}))dt \to \frac{a_0}{\lambda} \quad (m \to \infty)$$

となる．この結果，$m \to \infty$で極限が存在することより，$m \to \infty$とした離散的な極限から$T \to \infty$とした連続的な極限に置き換えた (4.22) が得られる．よって，ν-ほとんどすべてのxに対して，

$$A^s(x) = \frac{a_0}{2^s\lambda}$$

となり，$a = \dfrac{a_0}{2^s\lambda}$と置くことで求めたい結果が得られる． □

系 4.3.5　Eを，ハウスドルフ次元がsのクッキー・カッター集合とする．このとき，$\mathcal{H}^s$-ほとんどすべての$x \in E$に対して，

$$A^s(x) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x, e^{-t}))}{(2e^{-t})^s}dt = a \tag{4.33}$$

となる数$a > 0$が存在する．

【証明】 補題 4.3.1 2) より，$\mathcal{H}^s|_E$と同値となる，E に台をもつ不変かつエルゴード的な確率測度 νが存在する．従って，(4.33) は定理 4.3.4 より直ちに従う． □

密度と違って平均密度は，広い範囲のフラクタル集合の族を対象にできる．しかしながら，残念なことに平均密度を求める計算は，一般に複雑となる．カントール3進集合に関して述べた定理 4.3.3 と同様の方法を用いることで，クッキー・カッター集合の平均密度を評価することができるが，これはかなり複雑なものである．

次の命題では，ある条件を満足するときに限り，計算が複雑な平均密度 $A^s(x)$ の定義に代わって，積分$\displaystyle\int \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(y)$ の振る舞いを調べることで代用できることを示す．

命題 4.3.6 μを$\boldsymbol{R}^n$上の有限測度とする．また，$x \in \boldsymbol{R}^n$を，$x \in E$ のときには $r > 0$ に対して，

$$\mu(B(x,r)) \le dr^s \tag{4.34}$$

を満足し，更に，集合 E の平均密度 $A^s(x)$ がこの点 x で存在するような点とする．このとき，

$$A^s(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2^s s|\log\varepsilon|} \int_{|x-y|\ge\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) \tag{4.35}$$

が成立する．

【証明】 (4.21) を $\mu(B(x,r)) = m(r)$ で書き換えれば，$A^s(x,T) = \dfrac{1}{2^sT}\displaystyle\int_{t=0}^T e^{st}m(e^{-t})dt$ となる．そこで，$r = e^{-t}$，$\varepsilon = e^{-T}$で置き換え，部分積分を用いることで

$$\begin{aligned}
A^s(x,-\log\varepsilon) &= \frac{1}{2^s|\log\varepsilon|}\int_{r=1}^{\varepsilon}\frac{1}{r^s}m(r)\Big(-\frac{1}{r}\Big)dr \\
&= \frac{1}{2^s|\log\varepsilon|}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{1}{r^{s+1}}m(r)dr \\
&= \frac{1}{2^s s|\log\varepsilon|}\Big\{\frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon^s} - m(1) + \int_{r=\varepsilon}^{1} r^{-s}dm(r)\Big\}
\end{aligned}$$

となる．ところが，

$$\int_{r>1} r^{-s}dm(r) \le \int_{r>1} 1dm(r) \le \mu(\boldsymbol{R}^n) < \infty$$

より，上述の等式は更に変形できて，

$$\begin{aligned}
A^s(x,-\log\varepsilon) &= \frac{1}{2^s s|\log\varepsilon|}\Big\{\frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon^s} - m(1) - \int_{r>1} r^{-s}dm(r) + \int_{r=\varepsilon}^{\infty} r^{-s}dm(r)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^s s|\log\varepsilon|}\Big\{\frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon^s} - m(1) - \int_{r>1} r^{-s}dm(r) + \int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^s}d\mu(y)\Big\}
\end{aligned}$$

となる．よって，(4.34) より $\dfrac{m(\varepsilon)}{\varepsilon^s} - m(1) < \infty$ だから，$\dfrac{m(\varepsilon)}{\varepsilon^s} - m(1) - \displaystyle\int_{r>1} r^{-s}dm(r) < \infty$ となる．従って，$A^s(x,-\log\varepsilon)$ において $T \to \infty$ をとれば，$\varepsilon = e^{-T}$の関係より，$\varepsilon \to 0$ をとることになり，(4.35) が得られる． □

付録 A

ここでは，第3章，第4章で利用したが，詳しく取り扱わなかった事項をまとめて述べておく．A.1節では，**劣加法列**と**凸関数**を定義し，それらに関係するいくつかの不等式に証明を与える．A.2節では，3.3節定理3.3.2の証明についての補足をおこなう．そして，A.3節では，4.3節定理4.3.4の証明において，式の変形が煩雑となることを避けるために省略した内容について補足説明を与える．

A.1 劣加法列とイエセンの不等式

実数の列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が**劣加法列**であるとは，すべての $k, m \in \mathbf{Z}^+$（正の整数）に対して，不等式

$$a_{k+m} \leq a_k + a_m \tag{A.1}$$

が成り立つときにいう．

命題 A.1.1 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を劣加法列とする．このとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k}$ は存在し，$\displaystyle\inf_{k\geq 1}\frac{a_k}{k}$ に等しい．これは，実数または$-\infty$ である．

【証明】 正の整数 m を与えたとき，任意の整数 k は，式

$$k = qm + r \quad (q \in \mathbf{Z},\ 0 \leq r \leq m-1)$$

で表すことができる．いま，$k \geq m$ に対して，(A.1) を利用すれば，

$$a_k = a_{qm+r} \leq qa_m + a_r$$

より，

$$\frac{a_k}{k} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qa_m + a_r}{qm} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{qm} \quad (k \geq m)$$

となる．従って，

$$\sup\{\frac{a_k}{k} : k \geq m\} \leq \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{qm}$$

となる．更に，$k \to \infty$ で $q \to \infty$ となることに注意すれば，

$$\limsup_{k\to\infty}\{\frac{a_k}{k} : k \geq m\} \leq \frac{a_m}{m} \tag{A.2}$$

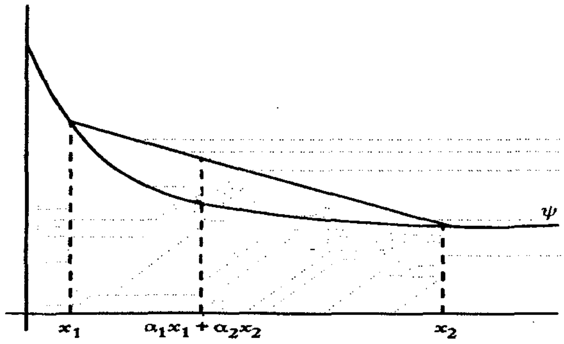

図 A.1: 凸関数ψのグラフの例

が得られる．よって，(A.2) は，すべての $m \in \mathbf{Z}^+$ に対して成立するのだから，列$\left\{\frac{a_k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少列である．従って，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k} = \inf_{k\geq 1}\frac{a_k}{k}$ が成立する． □

系 A.1.2　b を，列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$が，すべての k，$m = 1, 2, \ldots$に対して $a_{k+m} \leq a_k + a_m + b$ を満足するような実数とする．このとき，$a \equiv \displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k}$ は存在し，すべての k に対して $a_k \geq ka - b$ が成り立つ．

【証明】　仮定 $a_{k+m} \leq a_k + a_m + b$ の両辺に b を加えれば，$a_{k+m} + b \leq (a_k + b) + (a_m + b)$ となる．従って，列 $\{a_k + b\}_{k=1}^{\infty}$ は劣加法列である．よって，命題 A.1.1 より，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{a_k + b}{k} = \inf_{k\geq 1}\frac{a_k + b}{k}$$

を得る．ここで，$a \equiv \displaystyle\inf_{k\geq 1}\frac{a_k + b}{k}$ とおけば，すべての k に対して $a \leq \dfrac{a_k + b}{k}$ が得られる． □

次に，凸関数の定義をおこない，**イエセンの不等式（Jensen's inequality）**を示す．いま，$X \subset \mathbf{R}$ を区間とする．関数$\psi : X \to \mathbf{R}$ が**凸関数**であるとは，$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ となるすべての数$\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$ に対して

$$\psi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1\psi(x_1) + \alpha_2\psi(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X) \tag{A.3}$$

が成立するときにいう（図 A.1 参照）．更に，ψが**狭義の凸関数**であるとは，すべての $x_1 \neq x_2$ に対して，等号を含まない (A.3) が成立するときにいう．

命題 A.1.3 （イエセンの不等式）

$\psi : X \to \mathbf{R}$ を凸関数とする．更に，$x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ とし，数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m > 0$ は，

$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$ を満足するものとする．このとき，

$$\psi\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi(x_i) \tag{A.4}$$

が成立する．更に，ψ が狭義の凸関数であれば，等号は $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$ のときに限られる．

【証明】 $m = 1$ は明らか．$m = 2$ も (A.3) より明らかである．

$m \geq 3$ において帰納法を用いて示す．従って，$m-1$ 以下のときには，(A.4) が成立していると仮定する．m のときには，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$ より，一般性を失うことなく $\alpha_m \neq 1$ と仮定してよい．(A.3) を利用することで，

$$\begin{aligned}
\psi\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\Big) &= \psi\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i x_i + \alpha_m x_m\Big) \\
&= \psi\Big((1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i x_i}{1-\alpha_m} + \alpha_m x_m\Big) \\
&\leq (1-\alpha_m)\psi\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i x_i}{1-\alpha_m}\Big) + \alpha_m\psi(x_m) \qquad (A.5)
\end{aligned}$$

を得る．ところが，$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} = 1$ より，帰納法の仮定を用いて (A.4) が示される．

次に，ψが狭義の凸関数ならば，(A.5) の等号が成り立つとき，$x_m = \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i x_i}{1-\alpha_m}$ となる．よって，

$$(1-\alpha_m)x_m = \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i x_i$$

だから，$1-\alpha_m = \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i$ より，

$$\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i x_m = \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i x_i$$

となる．従って，$\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(x_m - x_i) = 0$ を得る．これが，任意の $\alpha_i > 0$ に対して成り立つことより，$x_1 = x_2 = \ldots = x_m$ となる． □

次の系は，エントロピーに関係して特に重要となる．

系 A.1.4 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ を，すべての i に対して $p_i \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{m}p_i = 1$ となる確率とする．また，$q_1, q_2, \ldots, q_m$ を実数とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{m}p_i(-\log p_i + q_i) \leq \log\sum_{i=1}^{m}e^{q_i} \tag{A.6}$$

が成立し，等号は，すべての i に対して $p_i = \dfrac{e^{q_i}}{\sum_{j=1}^m e^{q_j}}$ のときに限られる．

【証明】 関数 $\psi : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を，$\psi(x) = x\log x \ (x>0)$，$\psi(0)=0$ と定義すると，連続な狭義の凸関数となる．簡単のために，$S = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m e^{q_i}}$ とおく．

命題 A.1.3 の (A.4) において，$\alpha_i = Se^{q_i}$，$x_i = \dfrac{p_i}{e^{q_i}}$ とみなすことにより，

$$\begin{aligned}\psi(S) = \psi\Big(S\sum_{i=1}^m p_i\Big) &= \psi\Big(\sum_{i=1}^m Se^{q_i}\frac{p_i}{e^{q_i}}\Big)\\ &\le \sum_{i=1}^m Se^{q_i}\psi\Big(\frac{p_i}{e^{q_i}}\Big) \qquad (A.7)\end{aligned}$$

となる．従って，$\psi(x) = x\log x$ より，

$$S\log S \le \sum_{i=1}^m Se^{q_i}\frac{p_i}{e^{q_i}}\log\frac{p_i}{e^{q_i}} = \sum_{i=1}^m Sp_i(\log p_i - q_i)$$

を得る．更に，$S = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m e^{q_i}}$ より，

$$\log\Big(\frac{1}{\sum_{i=1}^m e^{q_i}}\Big) \le \sum_{i=1}^m p_i(\log p_i - q_i)$$

となり，

$$\log\Big(\sum_{i=1}^m e^{q_i}\Big) \ge \sum_{i=1}^m p_i(-\log p_i + q_i)$$

が得られる．

次に，関数$\psi(x)$ は狭義の凸関数だから，命題 A.1.3 より (A.7) において，等号が成立するのは，すべての$\dfrac{p_i}{e^{q_i}}$ が定数 c に等しいときである．よって，

$$1 = \sum_{j=1}^m p_j = \sum_{j=1}^m e^{q_j}\frac{p_j}{e^{q_j}} = c\sum_{j=1}^m e^{q_j}$$

となる．従って，$c = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^m e^{q_j}}$ より，等号条件は $p_i = \dfrac{e^{q_i}}{\sum_{j=1}^m e^{q_j}}$ となる． □

A.2 定理3.3.2の補足

本節は，3.3 節定理 3.3.2 の証明で詳しく述べなかった内容を補足することを目的とする．なお，本節で使用される記号等はすべて定理 3.3.2 で扱ったものと同じものとする．

X をバナッハ空間とする．X の部分集合 K が**相対コンパクト集合**であるとは，K の閉包 $\overline{K}$がコンパクト集合となるものをいう．最初に，アスコリ-アルツェラ（Ascoli-Arzela）の定理を思い起こす．

定理 A.2.1 （アスコリ-アルツェラの定理）

$[a,b] \subset \boldsymbol{R}$を有界閉区間とする．$\boldsymbol{C}([a,b])$ の集合 B が相対コンパクトであるための必要十分条件は次の 2 つの条件が成立することである．

1) **（一様有界性）**　ある定数$k \geq 0$が存在して，すべての $g \in B$ に対して $\|g\|_\infty \leq k$ が成り立つ．

2) **（同程度連続性）**　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，どの $g \in B$ に対しても，$|t - t'| < \delta$を満たす任意の $t, t' \in [a,b]$ に対して $|g(t) - g(t')| < \varepsilon$が成り立つ．

【証明】　▷大石進一 [15] 第 2 章第 2 節定理 2.11 参照 □

まず，定理 3.3.2 の 1) の証明において

$$B = \{g \in \boldsymbol{C}(E) : 任意の\ x, y \in E\ に対して，\beta \leq g(x) \leq 1\ かつ\ g(x) \leq g(y)e^{\alpha|x-y|}\}$$

と定義した際，この集合 B が凸集合で，アスコリ-アルツェラの定理の条件を満たすことを見る．

一様有界性については集合 B の定義から明らかに成り立つ．次に，B が同程度連続性を満足することを示す．B の定義から任意の $x, y \in E$ に対して，$g(x) \leq g(y)e^{\alpha|x-y|}$が成り立つ．この各辺から $g(y)$ を減ずることで，$g(x) - g(y) \leq g(y)\{e^{\alpha|x-y|} - 1\}$ を得る．ところが，$0 < \beta \leq g(y) \leq 1$ であるから $g(x) - g(y) \leq \{e^{\alpha|x-y|} - 1\}$ となる．x と y は任意だから，x と y を入れ換えることで，$g(x) - g(y) \geq -\{e^{\alpha|x-y|} - 1\}$ となる．従って，この 2 つの不等式から

$$|g(x) - g(y)| \leq e^{\alpha|x-y|} - 1$$

を得る．ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して$\delta = \dfrac{\log(\varepsilon + 1)}{\alpha}$ とおくと，どの $g \in B$ に対しても $|x - y| < \delta$を満足する任意の $x, y \in E$ に対して，$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$が成り立つ．よって，$B$ は同程度連続性を満足する．更に，B はその定義から閉集合となる．従って，集合 B は$\boldsymbol{C}(E)$ の $\|\cdot\|_\infty$ -コンパクト部分集合となる．

B が凸集合であることを示す．任意の $g_1, g_2 \in B$ と $0 \leq t \leq 1$ に対して，$tg_1 + (1-t)g_2 \in \boldsymbol{C}(E)$ であることは明らかである．また，B の条件から $t\beta \leq tg_1(x) \leq t$ が成り立つ．同様に $(1-t)\beta \leq (1-t)g_2(x) \leq (1-t)$ も成り立つ．この 2 つの不等式の辺々を加えあわせることで $\beta \leq tg_1(x) + (1-t)g_2(x) \leq 1$ となる．更に，B のもう 1 つの条件から，$tg_1(x) \leq tg_1(y)e^{\alpha|x-y|}$ と $(1-t)g_2(x) \leq (1-t)g_2(y)e^{\alpha|x-y|}$が成り立つ．そこで，この 2 つの不等式の辺々を加えあわせることで，$tg_1(x) + (1-t)g_2(x) \leq (tg_1(y) + (1-t)g_2(y))e^{\alpha|x-y|}$ となる．従って，$tg_1 + (1-t)g_2 \in B$ となり，B は凸集合である．

定理 3.3.2 の 2) の証明の補足をおこなう．まず，用語について説明しておく．

X を線形空間として，写像 $f: X \to \boldsymbol{R}$が線形性をもっているとき，すなわち

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad (u, v \in X)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad (\alpha \in \boldsymbol{R}, u \in X)$$

が成り立つとき，f は X における**線形汎関数**という．更に，X を線形位相空間とするとき，X 上の連続な線形汎関数の全体を X^*で表し，X の**共役空間**あるいは**双対空間**という．

また，X をノルム空間，X^*をその共役空間とするとき，0 の基本近傍系として，任意に有限個の X の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$および $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\{f \in X^* : |f(x_k)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

で得られる集合全体を考える．これによって導入される X^*の位相を***弱位相**という．

補足すべき内容を確認しておく．w は 1) で扱ったものとして，測度の集合 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} \equiv \{\ \mu : spt(\mu) \subset E,\ \int w d\mu = 1\}$$

で定義する．$\mathcal{M}$ を$\boldsymbol{C}(E)^*$の部分集合とみなす．このとき，$\mathcal{M}$ が凸集合で，*弱位相で$\boldsymbol{C}(E)^*$のコンパクト部分集合であることを示す．

コンパクト性については，1) と同様にアスコリ-アルツェラの定理を利用して証明をおこなう．一様有界性については，$w \in B$ であるから，B の条件より $0 < \beta \leq w(x) \leq 1$ が成り立つ．また，$\mu \in \mathcal{M}$ より$\int w d\mu = 1$ となる．よって，$\|\mu\|_\infty \leq k$ を満足する $k \geq 0$ は明らかに存在する．従って，$\mathcal{M}$ は一様有界性を満足する．次に，同程度連続性については，コンパクト集合 E 上の連続関数である$\mu \in \mathcal{M} \subset \boldsymbol{C}(E)^*$は一様連続であり，明らかに同程度連続性を満足する．また，$\mathcal{M}$ はその作り方より閉集合でもある．従って，$\mathcal{M}$ は*弱位相で$\boldsymbol{C}(E)^*$のコンパクト部分集合となる．

次に，$\mathcal{M}$ が凸集合であることは，$0 \leq t \leq 1$ と任意の$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ に対して，$t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathcal{M}$ が証明できればよい．可測関数の積分の定義に立ち返ることで$\int wd(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) = 1$ が成り立ち，$t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathcal{M}$ が得られる．

A.3 定理4.3.4の補足

本節では，4.3 節定理 4.3.4 の証明において，煩雑となるために省略した式変形を述べる．なお，本節で使用される記号等はすべて定理 4.3.4 で扱ったものと同じものとする．

残された内容は，不等式

$$\int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du \leq \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))du + \varepsilon_n$$

を示すことである．いま，(4.31) より， $x_+, x_- \in F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(B(f^k(x), e^{-t_n}))$ に対して，(4.28) を用いることで，

$$\log\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s \leq kas\Big(|f^k(x_+) - f^k(x)| + |f^k(x) - f^k(x_-)|\Big)$$

となり，

$$\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s \leq \exp\Big\{kas\Big(|f^k(x_+) - f^k(x)| + |f^k(x) - f^k(x_-)|\Big)\Big\} \tag{A.8}$$

を得る．従って，$f^k(x), f^k(x_+) \in B(f^k(x), e^{-t_n})$ より，$\lim_{n\to\infty} |f^k(x_+) - f^k(x)| = 0$ となることに注意すれば，

$$\lim_{n\to\infty} \exp\Big\{kas\Big(|f^k(x_+) - f^k(x)| + |f^k(x) - f^k(x_-)|\Big)\Big\} = 1$$

となる．そこで，$\varepsilon'_n > 0$ として，

$$\exp\Big\{kas\Big(|f^k(x_+) - f^k(x)| + |f^k(x) - f^k(x_-)|\Big)\Big\} = 1 + \varepsilon'_n$$

とおけば，$n \to \infty$ で x と k に依存することなく一様に $\varepsilon'_n \searrow 0$ となる．従って，(A.8) より，

$$\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s \leq 1 + \varepsilon'_n \tag{A.9}$$

を得る．また，

$$\int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du \tag{A.10}$$

$$\leq \left|\int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_n+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du\right| \tag{A.11}$$

$$+ \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du \tag{A.12}$$

$$+ \left|\int_{u=t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du\right| \tag{A.13}$$

となる．ここで，(A.11) と (A.13) は，$n \to \infty$ で k と x に依存することなく一様に 0 に収束することに注意しておく．更に，(A.12) は (A.9) を用いることで，

$$\begin{aligned}
\int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du &\leq \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))(1 + \varepsilon'_n)du \\
&= \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))du \\
&\quad + \varepsilon'_n \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))du
\end{aligned}$$

となる．従って，上式の後ろの項と (A.11)，(A.13) をまとめて ε_n とおけば，(A.10) は

$$\int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s du \leq \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))du + \varepsilon_n$$

となる．

附 記

本論文に使用した図の出典は次の通りである.

1) 図 1.2 : 文献 $K.J.Falconer$ [6] より引用

2) 図 1.2 を除くすべての図 : 文献 $K.J.Falconer$ [7] より引用

なお, 図 2.1 に関しては, 筆者の判断により, 文献 $K.J.Falconer$ [7] の原図に補助線を書き加えたものを用いた.

参考文献

[1] Tim Bedford and Albert M. Fisher: Analogues of the Lebesgue density theorem for fractal sets of reals and integers, Proc. London Math. Soc., (3) **64**, (1992), 95-124

[2] Rufus Bowen: Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Differmorphisms, Lecture Notes in Mathematics, **470**, Springer-Verlag, 1975

[3] Colleen D. Cutler: Strong and weak duality principles for fractal dimension in Euclidean space, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **118**, (1995), 393-410

[4] Robert L. Devaney: A First Course in Chaostic Dynamical Systems: Theory and Experiment, Addison-Wesley Publishing Company, 1992. : ロバート・L・デバニー : カオス力学系の基礎 (重本和泰他一訳), 星雲社, 1997

[5] Kenneth J. Falconer: The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, 1985: K.J. ファルコナー: フラクタル集合の幾何学 (畑　政義訳), 近代科学社, 1989

[6] Kenneth J. Falconer: Fractal Geometry ⟨Mathematical Foundations and Applications⟩, John Wiley & Sons, 1990

[7] Kenneth J. Falconer: Techniques in Fractal Geometry, John Wiley & Sons, 1996

[8] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow, J.Atmospheric Sciences, **20**, (1963), 130-141

[9] Benoit B.Mandelbrot: The fractal Geometry of Nature, W.H.Freeman and Company, N.Y., 1982: B.B. マンデルブロー: フラクタル幾何学 (広中平祐監訳), 日経サイエンス, 1985

[10] David Ruelle: Thermodynamic Formalism : the Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics, Addison-Wesley, 1978

[11] 猪狩　惺: 実解析入門, 岩波書店, 1996

[12] 石村貞夫, 石村園子: フラクタル数学, 東京図書, 1990

[13] 伊藤清三: ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963

[14] 伊藤清三，黒田成俊，藤田　宏: 関数解析, 岩波書店, 1991

[15] 大石進一: 非線形解析入門, コロナ社, 1997

[16] 岡本　久，中村　周: 岩波講座　現代数学の基礎７　関数解析１, 岩波書店, 1997

[17] 岡本　久，中村　周: 岩波講座　現代数学の基礎７　関数解析２, 岩波書店, 1997

[18] 釜江哲朗，高橋　智: エルゴード理論とフラクタル，シュプリンガー・フェアラーク, 1993

[19] 木下雅仁: 幾何学的測度論とフラクタル集合, 平成７年度 兵庫教育大学大学院修士論文

[20] 久保　泉: 岩波講座　現代数学の基礎８　力学系１, 岩波書店, 1997

[21] 志賀浩二: ルベーグ積分 30 講, 朝倉書店, 1990

[22] 白石謙一，青木統夫: 力学系とエントロピー, 共立出版, 1985

[23] 鈴木増雄　他: 統計力学の進歩（久保亮五教授還暦記念事業実行委員会）, 裳華房, 1981

[24] 高橋　渉: 非線形関数解析学　「不動点定理とその周辺」, 近代科学社, 1988

[25] 竹之内　脩: ルベーグ積分, 現代数学レクチャーズＢ－７, 培風館, 1980

[26] 都筑卓司: 統計力学入門, 総合科学出版, 1969

[27] 西尾真喜子: 確率論, 実教出版, 1978

[28] 藤田重次: 統計熱物理学, 裳華房, 1989

[29] 矢野公一: 共立講座　２１世紀の数学４ 距離空間と位相空間,共立出版, 1997