

ニューラルカオスシステムにおけるノイズ誘起特性に関する研究

教科・領域教育専攻

総合学習系コース

藤澤 弘典

1 はじめに

人類は、自然や社会のシステムにおける多くの複雑な現象に対して「線形近似」により理解しようとしてきた。線形システムでは、原因と結果がある意味で比例的（直線関係）であり、簡単な予測が可能である。また、2つ以上の作用がある場合、システム全体の結果は各々の作用に対して生じた結果を足し合わせたものになる。確かにこれにより取り扱いが容易になるが、それでは自然や社会における現象の複雑多様な挙動や性質は見かけ上消されてしまう。現在では、自然現象のみならず社会現象の本質をも理解するのに「非線形」という概念が大きな役割を果たすと期待され、科学技術や社会科学の世界で重要性が増しつつある。ここで、非線形とは線形以外のものを指す広い概念であり、線形での比例や重ね合わせが成り立たず、簡単な予測が困難な性質を持つ系のことをいう。中でも、システム全体の結果として不規則に変動する時系列が生成、保持される場合にカオスが出現する。この現象はこれまでに、脳、生体、気象、生態系などあらゆるところに見い出されている。

一方、我々が一般にシステムを対象とするとき、常に配慮を迫られるのがノイズの存在とその影響である。そして通常、ノイズの存在は対象システムの応答を乱すと考えられ、これまではノイズの発生や影響を抑えることに努力が払われてきた。線形システムでは、システム全体の結果にノイズはその大きさに応じた量的変化を及ぼすので、システムの応答性はそれを被った形で乱されることになる。しかし非線形システムで

は、ノイズは量的変化ではなく質的变化を全体の結果に引き起こし得るので、線形システムでは決して見られない現象が生起する可能性がある。実際、ノイズの存在による、閾値下の微弱信号の受容（検出）、システム同調化現象、結合振動子系の安定化等、非線形システムにおいてノイズが積極的な役割を果たし得ることも判りつつある。特に対象システムがカオス系である場合には、ノイズによる周期状態からカオス状態への遷移や、カオスが消えて秩序化するノイズ誘起秩序（Noise-Induced Order : NIO）と呼ばれる興味深い現象も報告されている。このノイズ誘起秩序は、Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応（化学での酸化還元過程）のモデルを用いた研究で最初に発見され、その後、電気回路やレーザー光による実験、化学反応モデルなどを対象に調べられてきた。また、神経膜興奮の Hodgkin-Huxley 方程式や神経パルスの FitzHugh-Nagumo モデルでのノイズの影響の検討など、生体现象を指向した研究も始まりつつある。

そこで本研究では、神経細胞の数理モデルであるカオスニューロンに基づく、ニューラルカオスシステムに対してノイズを印加し、その応答性の評価を通してノイズ誘起現象について詳しく検討する。ニューラルシステムは脳を含む生体神経系のモデルとして注目されており、そこでのノイズ誘起特性の解明は生体機能を理解する上でも重要であると思われる。単一ニューロンレベルでのカオスの存在は、神経軸索の生理学的知見をもとに構成された Hodgkin-Huxley 方程式の理論的考察からもほぼ定量的に裏づけられている。つまり、

脳神経系はニューロンという「カオスダイナミクスを有したカオスデバイス」で構成された大規模な非線形システムとして捉えられる。

2 論文の構成

本論文は次に示す5つの章で構成されている。

第1章 序論

第2章 ニューラルカオスシステムとノイズ誘起特性

第3章 カオスニューラルネットワークにおけるノイズ誘起現象

第4章 ネットワークサイズの拡大およびカオス性との関連性評価

第5章 結論と今後の課題

3 論文の概要

第2章では、本研究で扱うカオスニューロンモデルとその基本的性質について述べるとともに、カオスニューロンの相互結合システムによる自己想起型の連想記憶モデルについて説明する。さらに、ノイズの存在によって対象とする非線形システムの挙動が安定化するノイズ誘起秩序と呼ばれる現象について述べる。第3章では、非線形応答性を持つ単一のカオスニューロンおよび3個のカオスニューロンから構成される、自己想起型で最小サイズのカオスニューラルネットワークの場合に対して、そのノイズ誘起現象をコンピュータ実験により具体的に分析する。第4章では、自己想起型ネットワークのサイズ（ニューロン数）を拡大した場合のノイズ誘起特性について調べるとともに、カオス性の評価尺度であるリアプノフ指数に着目してノイズ誘起秩序とカオスとの関係について検討する。最後に第5章では、本研究の結論と今後の課題について述べる。

4 まとめ

本研究では、単一でカオス性を持ち得るカオスニューロン、およびその相互結合によって構成される自己想起型のカオスニューラルネットワーク

において、ノイズの存在がこれらのシステムの挙動に及ぼす影響をコンピュータ実験を通して詳しく検討した。その結果、適度な大きさ（強度）のノイズ存在下でカオスニューロンおよびそのネットワークの挙動が秩序立つ、ノイズ誘起秩序（NIO）の生起が確認された。

具体的には、ノイズを印加された単一ニューロン、3ニューロンからなる小規模な自己想起型ネットワーク、および144ニューロンからなる大規模な自己想起型ネットワークの経時挙動に対して時間自己相関と固有相関量を求め、これを尺度として挙動の秩序性の度合いを評価した。その結果、ノイズ強度が高くなると固有相関量 C_p が上がり、ある一定値を越えると再び C_p が下がっていく。つまり、適度なノイズの存在によりニューロンおよびネットワーク挙動に秩序性が誘起されることが確認できた。リアプノフ指数の評価結果を考慮すると、単一ニューロンと3ニューロンの場合はカオスから非カオスの秩序状態への転移であるが、144ニューロンの場合に出現した秩序状態は一部の次元にカオス性を残したままであると解釈できる。また以上の結果は、ノイズタイプがガウス型白色ノイズ、一様乱数ノイズのいずれであつても傾向に大差はなかった。

今後の課題としては、まず、上記で述べた小自由度と大自由度との間でノイズ誘起秩序状態の性質に差が出てくる、そのメカニズムの解明が挙げられる。そのためには中規模 ($N = 20$ 程度) のネットワークサイズで実験を行ない、その結果を分析することが考えられる。また、システム挙動の秩序性評価のための新しい尺度の検討が挙げられる。本研究では時間自己相関とそれに基づく固有相関量を用いたが、その他にエントロピーや情報量、またリアプノフ指数と関係のあるフラクタル次元などの適用が考えられる。

主任指導教官 西村 治彦
指導教官 森広浩一郎

修士論文

ニューラルカオスシステムにおける
ノイズ誘起特性に関する研究

兵庫教育大学大学院

学校教育研究科 教科・領域教育専攻

総合学習系コース

M00246D

藤澤 弘典

目次

第1章 序論	3
第2章 ニューラルカオスシステムとノイズ誘起特性	6
2.1 カオスニューロン	6
2.1.1 ニューラルカオスとカオスニューロンモデル	6
2.1.2 カオスニューロンの挙動	11
2.2 自己想起型カオスニューラルネットワーク	16
2.2.1 カオスニューラルネットワーク	16
2.2.2 ホップフィールド記憶の形成	17
2.3 非線形システムとノイズ誘起秩序	22
第3章 カオスニューラルネットワークにおけるノイズ誘起現象	25
3.1 単一ニューロンの場合	25
3.1.1 ニューロン状態の時系列変化とそのノイズ依存性	25
3.1.2 固有相関量による評価	35
3.1.3 ノイズタイプを変化させた場合	39
3.2 自己想起型最小サイズ ($N = 3$) ネットワークの場合	42
3.2.1 モデルの構成とパラメータ設定	42
3.2.2 ネットワーク状態の時系列変化とそのノイズ依存性	45
3.2.3 ノイズタイプやパラメータを変化させた場合	50
第4章 ネットワークサイズの拡大およびカオス性との関連性評価	54
4.1 大規模ネットワークサイズ ($N = 144$) の場合	54
4.1.1 モデルの構成とパラメータ設定	54

4.1.2	ノイズ誘起特性の評価	56
4.2	カオス性との関係性評価	65
4.2.1	リアプノフ指数の導入	65
4.2.2	固有相関量とリアプノフ指数の関係性	67
第5章	結論と今後の課題	76
謝辞		78
付録		79
A.	拡大分岐図 (図 3.2) 対応のリアプノフ指数	79
B.	$a = 0.613$ の場合の時間自己相関	80
C.	一様乱数ノイズ下での実験結果 ($a = 0.750$ の場合)	81
D.	逐次学習アルゴリズムのフローチャート	83
E.	実験に用いた記銘パターン	84
F.	リアプノフ指数	85
参考文献		87

第1章 序論

人類は、自然や社会のシステムにおける多くの複雑な現象に対して「線形近似」により理解しようとしてきた。線形システムでは、原因と結果がある意味で比例的（直線関係）であり、簡単な予測が可能である。また、2つ以上の作用がある場合、システム全体の結果は各々の作用に対して生じた結果を足し合わせたものになる。確かにこれにより取り扱いは容易になるが、それでは自然や社会における現象の複雑多様な挙動や性質は見かけ上消されてしまう。現在では、自然現象のみならず社会現象の本質をも理解するのに「非線形」という概念が大きな役割を果たすと期待され、科学技術や社会科学の世界で重要性が増しつつある [1]。ここで、非線形 (nonlinear) とは線形 (linear) 以外のものを指す広い概念であり、線形での比例や重ね合わせが成り立たず、簡単な予測が困難な性質を持つ系のことをいう。中でも、システム全体の結果として不規則に変動する時系列が生成、保持される場合にカオスが出現する。カオスとは、決定論的な非線形システムにおける非周期で不規則な挙動を指し、その動きは初期条件の微小な差異に敏感に依存するので、そこでの長期予測は不可能になるというものである。この現象はこれまでに、脳、生体、気象、生態系などあらゆるところに見い出されている [2] [3]。

一方、我々が一般にシステムを対象とするとき、常に配慮を迫られるのがノイズの存在とその影響である。そして通常、ノイズの存在は対象システムの応答を乱すと考えられ、これまではノイズの発生や影響を抑えることに努力が払われてきた。確かに線形システムでは、システム全体の結果にノイズはその大きさに応じた量的変化を及ぼすので、システムの応答性はそれを被った形で乱されることになる。しかし非線形システムでは、ノイズは量的変化ではなく質的变化を全体の結果に引き起こし得るので、線形システムでは決して見られない現象が生起する可能性がある。実際、ノイズの存在による、閾値下の微弱信号の受容（検出）、システム同調化現

象，結合振動子系の安定化等，非線形システムにおいてノイズが積極的な役割を果たし得ることも判りつつある．特に対象システムがカオス系である場合には，ノイズによる周期状態からカオス状態への遷移や，カオスが消えて秩序化するノイズ誘起秩序（Noise-Induced Order：NIO）と呼ばれる興味深い現象も報告されている．このノイズ誘起秩序は，ベローソフージャボチンスキー（Belousov-Zhabotinsky（BZ））反応（化学での酸化還元過程）のモデルを用いた研究で最初に発見され，その後，電気回路やレーザー光による実験，化学反応モデルなどを対象に調べられてきた．また，神経膜興奮のホジキン－ハクスレイ（Hodgkin-Huxley）方程式や神経パルスのフィッツフー－ナグモ（FitzHugh-Nagumo）モデルでのノイズの影響の検討など，生体现象を指向した研究も始まりつつある [4] [5]．

そこで本研究では，神経細胞の数理モデルであるカオスニューロンに基づく，ニューラルカオスシステムに対してノイズを印加し，その応答性の評価を通してノイズ誘起現象について詳しく検討する．ニューラルシステムは脳を含む生体神経系のモデルとして現在注目されており，そこでのノイズ誘起特性の解明は生体機能を理解する上でも重要であると思われる．単一ニューロンレベルでのカオスの存在は，神経軸索の生理学的知見をもとに構成されたホジキン－ハクスレイ（Hodgkin-Huxley）方程式の理論的考察 [6] からほぼ定量的に裏づけられている．つまり，脳神経系はニューロンという「カオスダイナミクスを有したカオスデバイス」で構成された大規模な非線形システムとして捉えられる．従来のマカロック－ピッツ（McCulloch-Pitts）型の形式ニューロンモデルでは，実際の生物のニューロンを単純化し過ぎており，そのためにカオスの生成に寄与するファクターが捨て去られていると考えられる．

ニューラルネットワークに関する研究 [7] [8] は，上記の形式ニューロンモデルがマカロック－ピッツ（McCulloch-Pitts）によって提案された 1940 年代に始まる．これは，脳を構成するニューロンを多入力 1 出力の非線形素子としてモデル化し，それらを接続してニューラルネットワークを構成したものである．以後，ヘブ（Hebb）の学習アルゴリズム，1950 年代のローゼンブラット（Rosenblatt）が提案した学習認識のできるパーセプトロン，1980 年代のホップフィールド（Hopfield）

が提案した連想記憶モデル，ヒントン（Hinton）らが提案したボルツマンマシン，ラメルハート（Rumelhart）らが提案した誤差逆伝搬法など多くの学習アルゴリズムやモデルの提案が行われ現在に至っている．その中で，記憶機能を最も簡明な形でモデル化したニューラルネットワークとしてホップフィールド・ニューラルネットワーク [9] が知られている．これは，先の形式ニューロンモデルの回路網（ニューラルネットワーク）にエネルギー関数の概念を導入し，記憶すべき対象をそのエネルギー関数の局所安定状態に対応させるというものである．記憶という機能を力学系における極小値安定問題として理論化され得ることを示した点で，このモデルは意義深いものである．

以下，第2章では，本研究で扱うカオスニューロンモデルとその基本的性質について述べるとともに，カオスニューロンの相互結合システムによる自己想起型の連想記憶モデルについて説明する．さらに，ノイズの存在によって対象とする非線形システムの挙動が安定化するノイズ誘起秩序と呼ばれる現象について述べる．第3章では，非線形応答性を持つ単一のカオスニューロンおよび3個のカオスニューロンから構成される，自己想起型で最小サイズのカオスニューラルネットワークの場合に対して，そのノイズ誘起現象をコンピュータ実験により具体的に分析する．第4章では，自己想起型ネットワークのサイズ（ニューロン数）を拡大した場合のノイズ誘起特性について調べるとともに，カオス性の評価尺度であるリアプノフ指数に着目してノイズ誘起秩序とカオスとの関係について検討する．最後に第5章では，本研究の結論と今後の課題について述べる．

第2章 ニューラルカオスシステムと ノイズ誘起特性

ここでは、本研究で扱うカオスニューロンモデルとその基本的性質について述べるとともに、カオスニューロンの相互結合システムによる自己想起型の連想記憶モデルについて説明する。さらに、ノイズの存在によって対象とする非線形システムの挙動が安定化するノイズ誘起秩序と呼ばれる現象について述べる。

2.1 カオスニューロン

2.1.1 ニューラルカオスとカオスニューロンモデル

現実の脳神経系から得られるデータの時系列解析を通して、カオスの存在が数多く観測されている [10]。しかも、イオンチャネル、イソアワモチやヤリイカの巨大神経、ラットの自己刺激時の海馬錐体細胞の活動、ウサギの嗅球脳波、ヒトの様々な状態での脳波など、神経系から取り出された神経細胞一本の電気的応答から神経回路網の集合体である脳全体の活動状態まで、いくつかの階層レベルで確認されている。これら神経系に現れるカオスは総称してニューラルカオスと呼ばれている [11]。

図 2.1 は実際の神経細胞（ニューロン）の概略を図示したものである。個々の神経細胞は、樹状突起を経て多くの神経細胞からの信号を受け取り、その信号に反応した細胞体から発せられる電気的信号（インパルス）が軸索を経て神経終末から他の細胞へ送信される構造となっている [12]。現在、この単一ニューロンレベ

ルでのカオスの存在は、神経軸索の生理学的知見をもとに構成されたホジキン-

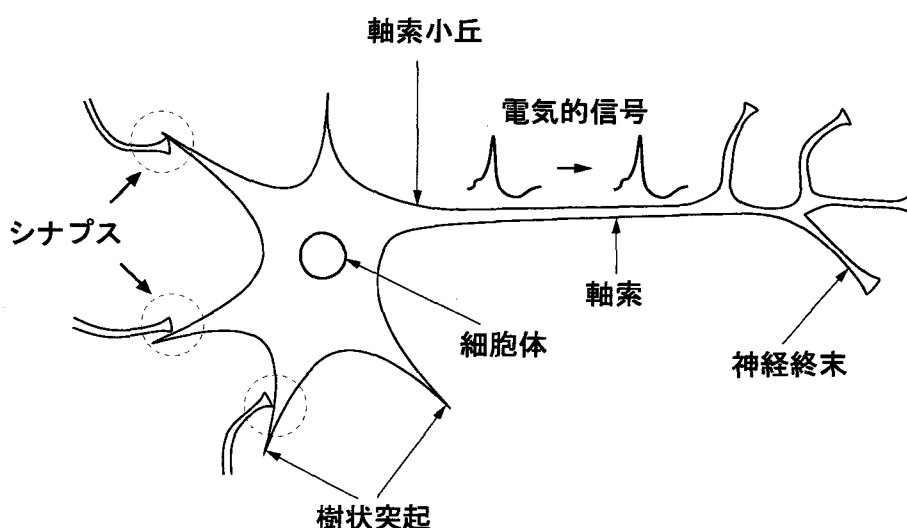


図 2.1 神経細胞（ニューロン）の基本構成

ハクスレイ (Hodgkin-Huxley) 方程式の理論的考察 [6] からほぼ定量的に裏づけられている。つまり、脳神経系はニューロンという「カオスダイナミクスを有したカオスデバイス」で構成された大規模・複雑システムとして捉えられる必要がある。従来のマカロック-ピッツ (McCulloch-Pitts) 型の形式ニューロンモデルでは、実際の生物のニューロンを単純化し過ぎており、そのためにカオスの生成に寄与するファクターが捨て去られていると考えられるからである。

合原ら [13] [14] [15] はこのような状況の中で、カオスを含む実際のニューロンの応答性を記述できる比較的単純なモデルとしてカオスニューロンモデル（以降、カオスニューロンと呼ぶ）を提案した。このカオスニューロンの関係式は、実際のニューロンにみられる不応性効果（ニューロンの発火（興奮）状態が続くと、それに応じてニューロンが発火（興奮）しにくくなる性質）とアナログ的な入出力特性、および時間に対する履歴性効果を考慮し、

$$x(t+1) = g\left(s(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r x(t-r) - \theta\right) \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし、

$x(t)$: 時刻 t におけるニューロンの状態値 ($0 \leq x \leq 1$)

$s(t)$: 時刻 t における入力刺激の大きさ

α : 不応性項のスケーリングパラメータ ($\alpha \geq 0$)

k : 不応性の時間減衰定数である履歴性パラメータ ($0 < k < 1$)

θ : しきい値

である。また、入出力関数の g は

$$g(y) = \frac{1}{1 + e^{-y/\varepsilon}} \quad (2.2)$$

で定義される。この関数は図 2.2 に示すように S 字に近い (sigmoid) 形をしており、 ε はその傾きのパラメータである。

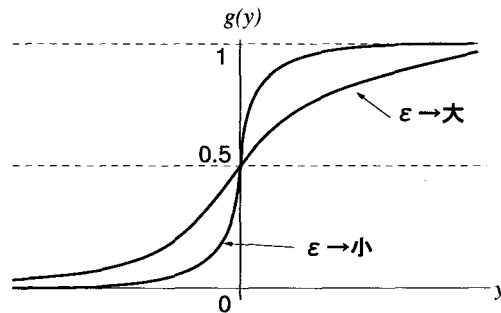


図 2.2 ニューロンの入出力関数 $g(y)$

時間とともに指数関数的に減衰 (k の r 乗で) しながらニューロン状態値 x が重ね合わされる形、 $\sum_{r=0}^t k^r x(t-r)$ での履歴効果の記述法は、南雲-佐藤の神経モデルにおいて最初に導入されたものである。そして、この性質と (2.2) 式の入出力のアナログ性がニューロンの応答特性にカオスの出現を許すことになる。

(2.1) 式右辺の関数 g の括弧内に対して

$$y(t+1) = s(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r x(t-r) - \theta \quad (2.3)$$

とおくと、 $s(t)$ が一定であるとき、(2.1) 式は

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha g(y(t)) + a \quad (2.4)$$

$$x(t+1) = g(y(t+1)) \quad (2.5)$$

に変形できる。ただし、 $a = (s - \theta)(1 - k)$ である。(2.4)式の y に対する発展方程式は、 $x(t + 1)$ の決定に $x(0) \sim x(t)$ までの全情報を要する x に対する(2.1)式と比較して、 $y(t + 1)$ の決定に1つ前の時刻の $y(t)$ のみで済むようになっている。なお、ニューロンの状態値(出力値) x に対してこの y のことを以後、ニューロンの内部状態と呼ぶことにする。

ニューロン状態 x としては、発火時には1、非発火時には0の $[0, 1]$ が対応しているが、発火時と非発火時のニューロン状態の数理モデル上の対称性に配慮し、以下では発火時には1、非発火時には-1となるように新しいニューロン状態 X を

$$X = 2x - 1 \tag{2.6}$$

に変更することを考える。このとき、新しい入出力関数 f は

$$\begin{aligned} X \equiv f(y) &= 2x - 1 \\ &= 2g(y) - 1 \\ &= \tanh(y/2\epsilon) \end{aligned} \tag{2.7}$$

で与えられる。この関係を図示すると図2.3のようになる。

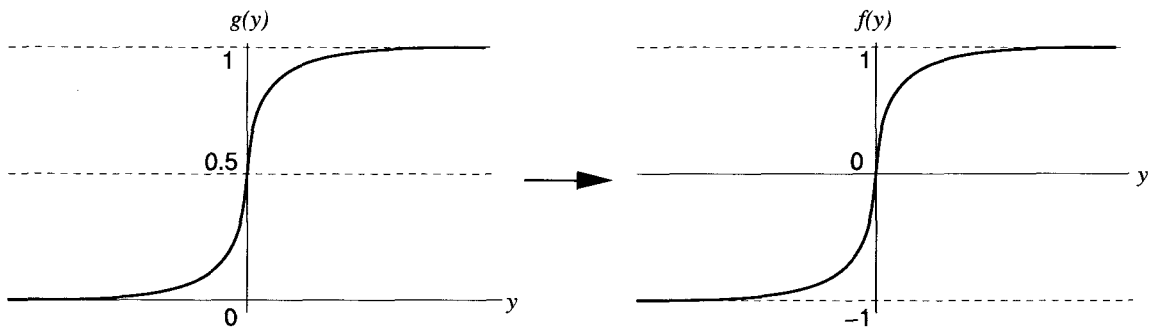


図 2.3 $x:[0,1]$ から $X:[-1,1]$ へのニューロン状態値の変更

この変更でカオスニューロンの発展方程式(2.4)がどのようなになるかを見ることにする。(2.6)式から

$$g(y) = \frac{f(y) + 1}{2} \tag{2.8}$$

であるので、これを (2.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 y(t+1) &= ky(t) - \alpha g(y(t)) + a \\
 &= ky(t) - \alpha \frac{f(y(t)) + 1}{2} + a \\
 &= ky(t) - \frac{\alpha}{2} f(y(t)) - \frac{\alpha}{2} + a \\
 &= ky(t) - \alpha' f(y(t)) + a'
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\alpha' = \alpha/2$, $a' = -\alpha/2 + a$ である。そこで、新たに α' を α , a' を a と再定義すると、

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f(y(t)) + a \quad (2.9)$$

$$X(t+1) = f(y(t+1)) \quad (2.10)$$

となる。このとき、ニューロンの状態値 X は $[-1, +1]$ の連続値をとることになる。本論文におけるシミュレーションでは (2.9) と (2.10) 式を用いることにする。

なお、(2.7) 式の入出力関数 f は図 2.4 に示すように $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で

$$f(y) = \operatorname{sgn}(y) \quad (2.11)$$

となる。ここで、 sgn は符号関数

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & (y > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (y \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。このとき、ニューロンの状態値 X は $-1, 1$ の離散値をとる。

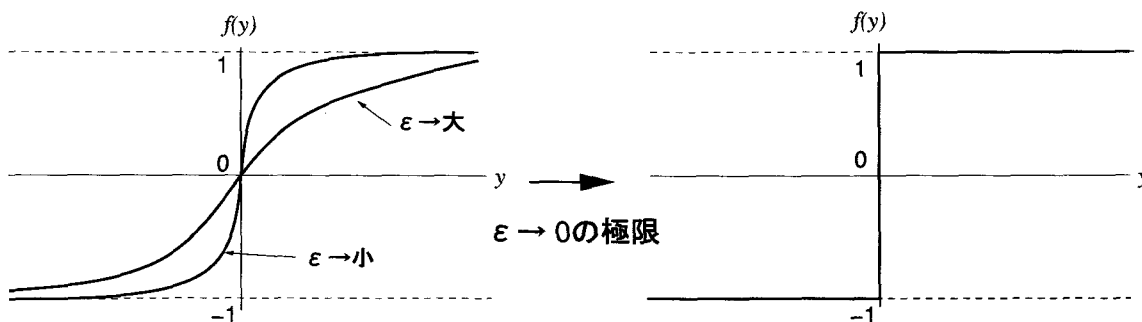


図 2.4 入出力関数 $f(y)$ の傾きパラメータ ε 依存性

2.1.2 カオスニューロンの挙動

(2.9),(2.10)式に従うカオスニューロンには k , α , a , ε の4つのパラメータが存在する．そこで，これらの値を $k = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.4$, $\varepsilon = 0.015$ と設定し， $t = 0$ での初期値 $y(0) = 0.4$ から時間発展させた後の $t = 2000 \sim 2200$ における内部状態 y の様子を時系列表示したのが図 2.5 である．時系列変化の構造としては，全体的には類似のパターンが繰り返し現れているものの，そこに周期性は存在せず非周期的なゆらぎを保持している．

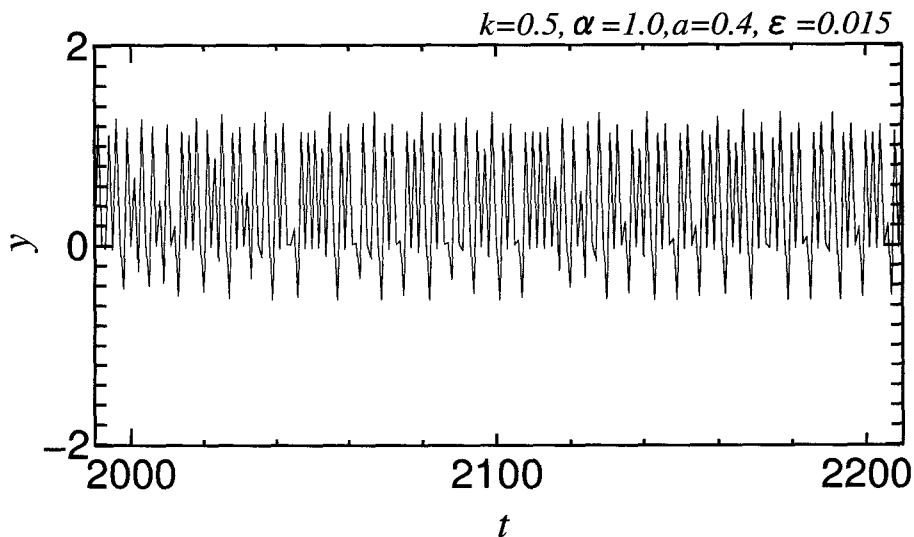


図 2.5 単一カオスニューロンの内部状態値の時系列変化（非周期挙動の例）

また，同様に $k = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.2$, $\varepsilon = 0.015$ の場合の内部状態 y の経時変化を表示したものが図 2.6 である． a 値の設定が違うだけで，時系列変化としては2つの値を振動する完全な周期挙動になっているのがわかる．この他にもカオスニューロンでは，パラメータ設定を変更することにより，複雑な非周期変化から単純な周期変化，および平衡安定収束まで様々な挙動が現れることが確認されている．そして，複雑な非周期変化の多くがカオス性を有している（カオスかどうかの厳密な確認は通常，第4章で述べるリアプノフ指数を用いて行われる．）．

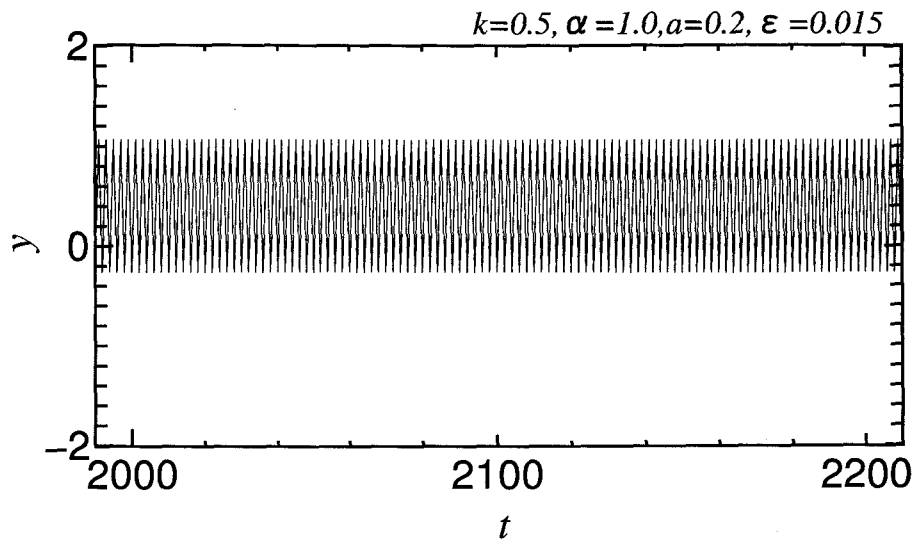


図 2.6 単一カオスニューロンの内部状態値の時系列変化（2周期挙動の例）

パラメータ a の違いがカオスニューロンの挙動に与える影響を図 2.5 と図 2.6 のように一つ一つ直接比較するのではなく、 a に対する全体的な様相を把握する方法として分岐図の作成が有効である。それについて具体的に説明すると、まず図 2.7 の上段の経時変化のデータ（図 2.5 と同じもの）約 200 点（・印）に対して、中段を経て下段のように時間軸の幅を圧縮し続けていくと、内部状態 y の 200 点余りの経時データは一垂直線上の領域に重ね打ちされた状態になる。次に、同様の操作を、異なる各 a 値のときの経時データに対して行ない、 a の値を横軸にとってその結果全体を a 依存性として示したのが分岐図となる。

図 2.8 は、 $k = 0.5, \alpha = 1.0, \varepsilon = 0.015$ の条件の下でカオスニューロン挙動の a に対する分岐図を求めたものである。ただし、 a 値の変更は 0.001 間隔（刻み幅：0.001）とした。経時データとしては各 a ともに $t = 2000 \sim 2200$ の 200 データである。非周期（カオス）挙動の場合にはデータ点は互いに同じ値をとらない（すなわち、重ならない）ので垂直線分上を埋める形になり、周期挙動の場合には同じ値を繰り返す（すなわち、重なる）ので、周期分の数の点だけの出現になる。先の図 2.5 の場合の $a = 0.4$ 付近では非周期性（カオス性）の領域が、先の図 2.6 の

$a = 0.2$ の前後では 2 周期振動の領域がそれぞれ確認できる。さらに、 $a = 0.6$ 付近での 3 周期振動をはじめ、 a 値の変化に対してカオスニューロンの挙動は大きく変化することがわかる。

なお、本研究にかかわるシミュレーションのために必要なコーディングは、全て C 言語を用いて行なっている。

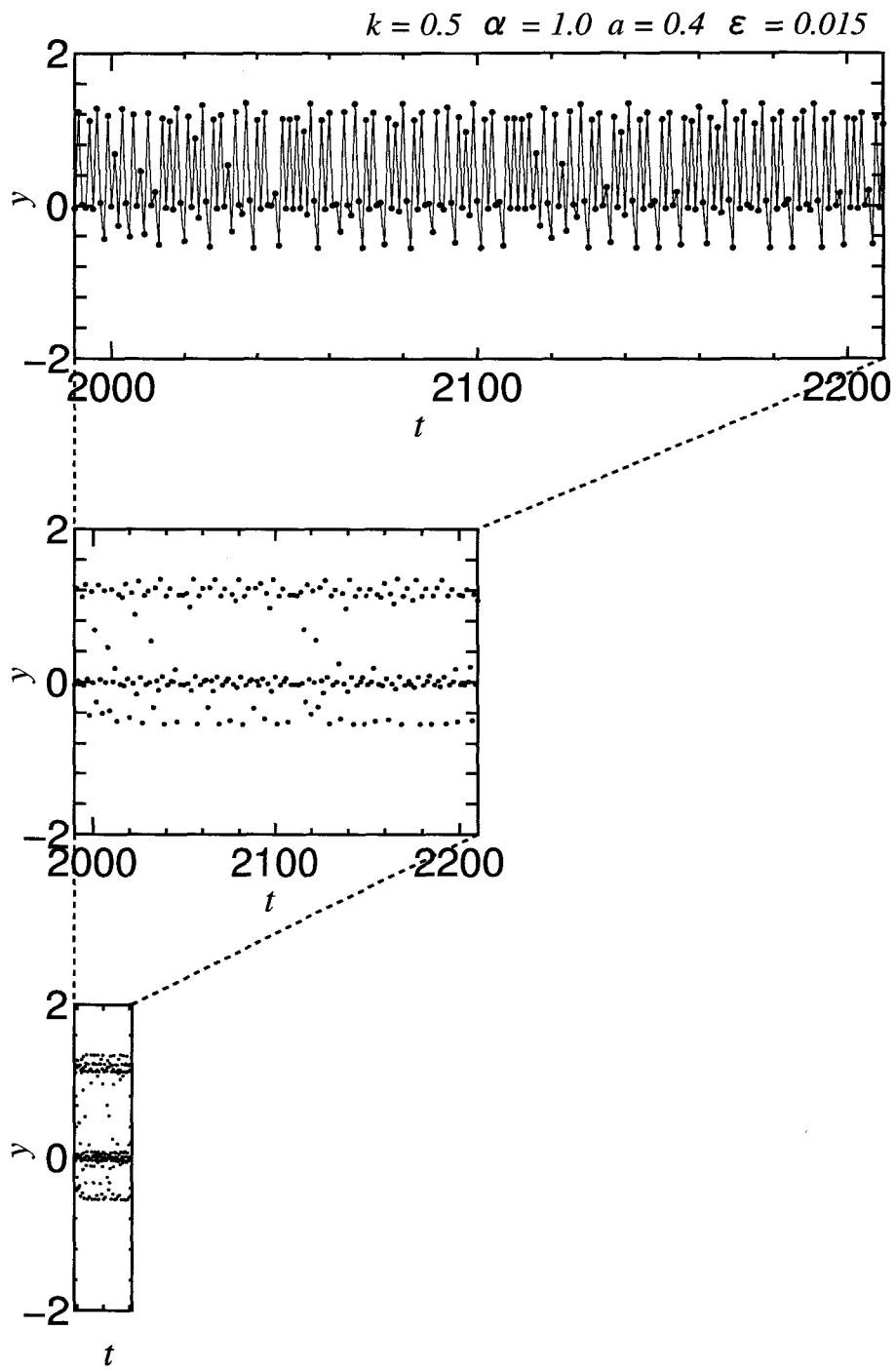


図 2.7 分岐図作成のための時系列データの重ね打ち表示の概念図

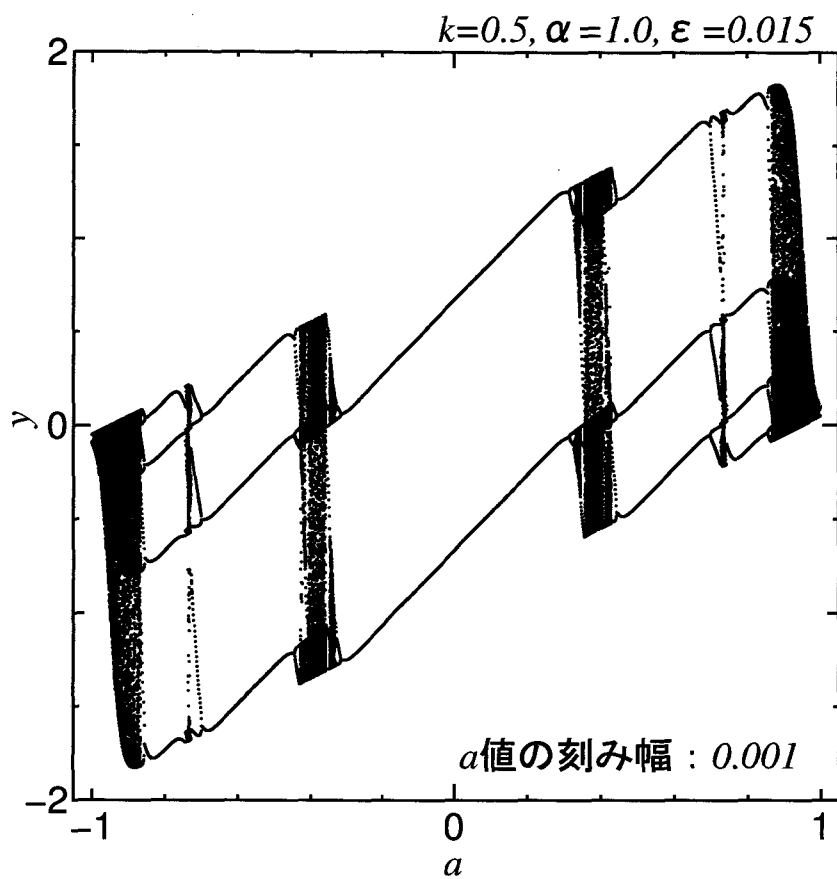


図 2.8 カオスニューロンの a に対する分岐図 (経時データ $t=2000\sim 2200$ に対する)

2.2 自己想起型カオスニューラルネットワーク

2.2.1 カオスニューラルネットワーク

前節で説明したカオスニューロン N 個の相互結合系としてのネットワークを考えると、各ニューロンへの他のニューロンからのフィードバック入力に対しても、不応性の場合と同様に指数ベキ減衰の履歴効果を認めると、 i 番目のニューロンの発展方程式は

$$X_i(t+1) = f \left(\sum_{j=1}^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_f^d X_j(t-d) - \alpha \sum_{d=0}^t k_r^d X_i(t-d) - \theta_i \right) \quad (2.12)$$

で与えられることになる。これがカオスニューラルネットワーク (Chaotic Neural Network:CNN) [13] [14] [15] である。ただし、

w_{ij} : j 番目のニューロンから i 番目のニューロンへの結合荷重

k_f : 他のニューロンからのフィードバック入力の時間減衰定数 ($0 \leq k_f < 1$)

k_r : i 番目のニューロン自身の不応性の時間減衰定数 ($0 \leq k_r < 1$)

α : 不応性項のスケーリング・パラメータ ($\alpha \geq 0$)

θ_i : i 番目のニューロンのしきい値

である。

(2.12) 式の内部状態のフィードバック入力に関する項と不応性に関する項をそれぞれ

$$\eta_i(t+1) = \sum_{j=1}^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_f^d X_j(t-d) \quad (2.13)$$

$$\zeta_i(t+1) = -\alpha \sum_{d=0}^t k_r^d X_i(t-d) - \theta_i \quad (2.14)$$

と置き、履歴効果の指数ベキ (k^d) 性に着目してその変形を行なうと

$$\eta_i(t+1) = k_f \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} X_j(t) \quad (2.15)$$

$$\zeta_i(t+1) = k_r \zeta_i(t) - \alpha X_i(t) + a \quad (2.16)$$

が得られ (ここで簡単のために $-\theta_i(1-k_r) \equiv a$ と表した.) , 結局, (2.12) 式は

$$X_i(t+1) = f(\eta_i(t+1) + \zeta_i(t+1)) \quad (2.17)$$

に帰着される。つまり、ニューロンの(外部)状態値 X_i だけでなく内部状態にも着目すれば、時刻 $t+1$ における状態値は前の時刻 t の内部状態 $\eta_i(t), \zeta_i(t)$ と(外部)状態値 $X_i(t)$ のみを用いて決定される。

(2.15), (2.16) 式において $k_f = k_r = \alpha = 0$ と設定すると (2.17) 式は,

$$X_i(t+1) = f\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} X_j(t) - \theta_i\right) \quad (2.18)$$

となる。この発展方程式は従来のホップフィールド・ニューラルネットワークに一致している。ニューロン i とニューロン j の間には結合荷重 w_{ij} と w_{ji} が双方向に存在する。この両者の結合は一般には互いに違った値を持つ ($w_{ij} \neq w_{ji}$) が、ホップフィールド (Hopfield) は両者が互いに等しい対称結合 ($w_{ij} = w_{ji}$) の場合に着目し、図 2.9 に示すようなネットワーク状態の収束性とその静的連想記憶モデルへの適用について示した [9]。

2.2.2 ホップフィールド記憶の形成

自己想起型の連想記憶モデルは学習(記憶)と想起という2つの過程からなる。その想起過程にはホップフィールド・ニューラルネットワークの性質が、また学習過程には結合荷重の決定法が、それぞれ重要な役割を果たす。これについて以下で簡単に述べる。ここでは対象を離散値ネットワーク ($\varepsilon \rightarrow 0$) の場合に限るが、同様の性質は連続値 ($\varepsilon \neq 0$) の場合にも示すことができる。

今、結合が対称 ($w_{ij} = w_{ji}$) でかつ自己結合が正またはゼロ ($w_{ii} \geq 0$) という条件の下で、各ニューロン値を逐次的に(全ニューロンが一斉にではなく、1時刻に1つのニューロンだけ)、

$$X_i(t+1) = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} X_j(t) - \theta_i\right) \quad (2.19)$$

に従って状態を更新するものとする。このとき、ネットワークの状態 $\{X_i\}$: $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, \dots, X_N)$ の関数として

$$E(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} X_i X_j - \sum_{i=1}^N \theta_i X_i \quad (2.20)$$

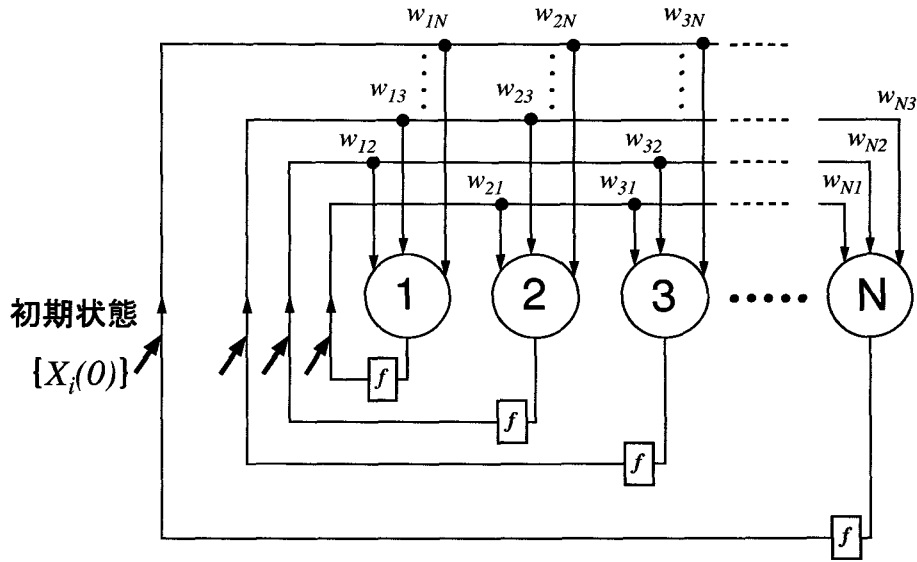


図 2.9 ホップフィールド・ニューラルネットワーク (自己結合なし ($w_{ii} = 0$) の場合)

を導入すると、この関数の値はニューロンの状態遷移とともに時々刻々単調減少し、最終的には極小値に収束することがわかる。すなわち、常に

$$E(\mathbf{X}(t+1)) \leq E(\mathbf{X}(t)), \quad (\text{等号成立は } \mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t) \text{ のとき})$$

の関係が成立することが証明できる。このような性質を持つ関数 E はネットワークのエネルギー関数と呼ばれている。極小値に落ちついたときネットワークの状態 \mathbf{X} はもう変化せず ($\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t)$)、平衡安定状態となるが、この状態を脳における記憶状態と対応させようというのがホップフィールドの考えである。

また、各ニューロン値を (2.19) 式に従って同期的に (全ニューロンを 1 時刻に一斉に) 更新する場合も、逐次の場合と同様にエネルギー関数を導入でき、その極小値への収束を示すことができる。ただ、この場合のネットワークの定常解は $\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t-1)$ で与えられ、逐次更新の場合のホップフィールド解 ($\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t)$) に加えて、2 つの異なるネットワーク状態間の周期 2 の周期 (振動) 解 ($\mathbf{X}(t+1) = -(\mathbf{X}(t))$) も存在し得る。

連想記憶における学習過程は、ネットワークに記憶させたいパターン情報 $\{\xi_i^\mu\}$:

$\xi^\mu \equiv (\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \dots, \xi_N^\mu)$ (以下, 記銘パターンと呼ぶ)に対応するネットワーク状態がちょうど(2.20)式のエネルギー関数の谷(すなわちネットワークの局所安定状態)に一致するように, 結合荷重のセット $\{w_{ij}\}$ の値を調節し, エネルギー関数の形を決定することに相当する. ここで言うパターン情報とは, 図 2.9 のネットワークを構成する各ニューロンの状態が +1 のときは黒, -1 のときは白と解釈した際の配列状態をさすが, 図 2.10 の $N=42$ の場合の具体例のようにネットワーク状態を 2 次元の配列パターンに対応させることでパターン表現等が可能となる.

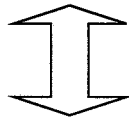
学習過程を図(図 2.11(a))を用いて説明すると, はじめ無結合 ($\{w_{ij}\} = 0$) 状態のネットワーク ($E(\mathbf{X}) = 0$) が与えられた記銘パターン情報(図中での例としては縦縞, 横縞パターンの $\{\xi_i^V\}$ と $\{\xi_i^H\}$)に基づいて $\{w_{ij}\}$ の値を変更し, 最終的に記銘パターンに対応するネットワーク状態がエネルギー関数 E の谷にくるように調整するというものである. 一方, 想起過程は, 学習過程によって形成されたエネルギー関数 E の曲面に沿って極小値である谷へ山下りするプロセスとして捉えられる. つまり, 想起過程においては $\{w_{ij}\}$ の値は固定されており, ネットワークが記銘パターンに対応するエネルギー関数の極小状態(谷)へと変化する. 図(図 2.11(b))で示すと, ネットワークはある 1 つの状態(例としてパターン $\{\xi_i^V\}$ に対してノイズを持った状態)から出発して最寄りの谷の記銘パターン対応状態(パターン $\{\xi_i^V\}$)に至るというものである.

$\{X_i(t)\}$:

$$X(t) = (-1, +1, -1, +1, \dots, -1, +1, -1, +1)$$



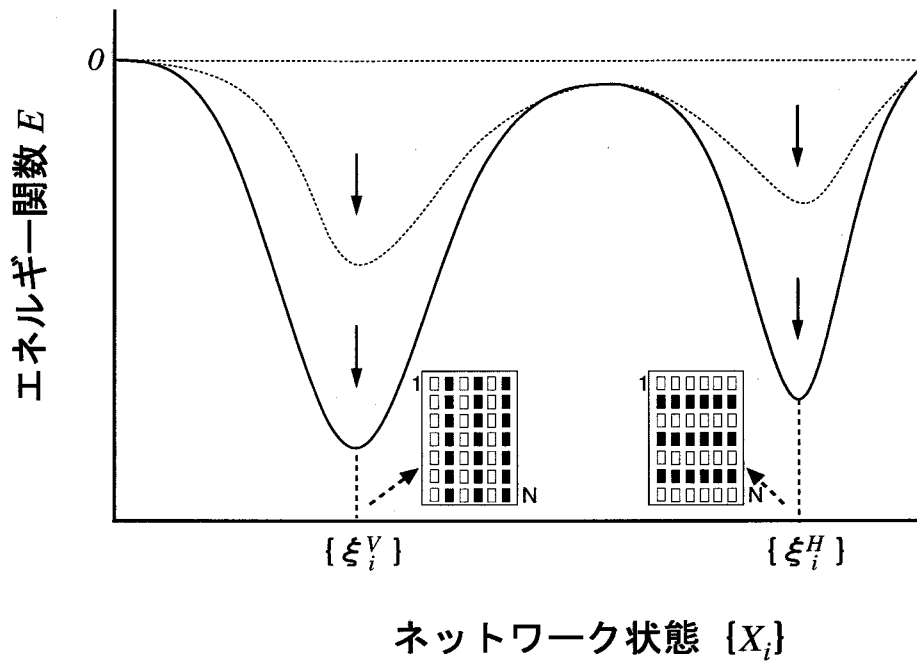
(● : +1 ○ : -1)



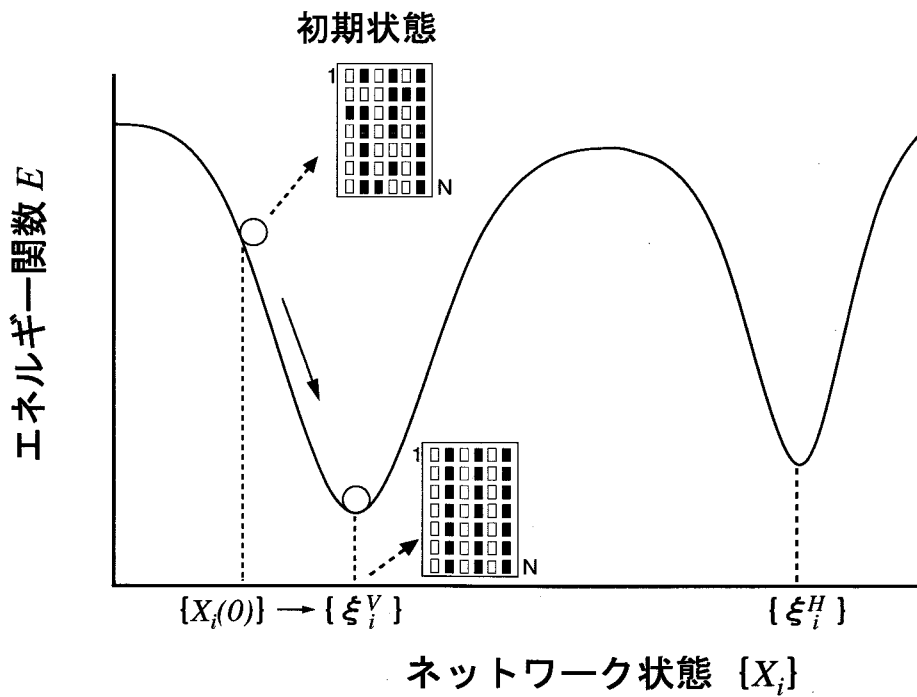
$\{\xi_i^v\}$

1	2	3	4	·	·
·	·				
				·	·
·	·	39	40	41	42

図 2.10 ネットワーク状態とパターン情報の対応 (N=42 の場合)



(a) 学習過程 ($\{w_{ij}\}$: 可変・調整)



(b) 想起過程 ($\{w_{ij}\}$: 固定)

図 2.11 学習と想起の両過程の概念図

2.3 非線形システムとノイズ誘起秩序

非線形 (nonlinear) とは文字通り線形 (linear) 以外のものを指す広い概念である。そこで線形とは何かというとその性質として、比例関係が成り立つ ($f(cx) = cf(x)$, c : 定数), 重ね合わせの原理が成り立つ ($f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$) が挙げられる。つまり、線形では原因と結果がある意味で比例的 (直線関係) であり、簡単な予測が可能である。また、2つ以上の作用がある場合、システム全体の結果は各々の作用に対して生じた結果を足し合わせたものになる。非線形システムとは、このような比例や重ね合わせが成り立たず、簡単な予測が困難な性質を持つ系のことをいう。中でも、システムが不規則に変動する時系列 (結果) を生成、保持する場合がカオスである。2.1 および 2.2 節で説明したカオスニューロンとそのネットワークモデルはこのような非線形システムの典型例である。

ところで、システムを考えると常に配慮を迫られるのがノイズの存在とその影響である。そして通常、ノイズの存在は対象システムの応答を乱すと考えられ、これまではノイズの発生や影響を抑えることに努力が払われてきた。確かに線形システムでは、ノイズはシステム全体の結果にそのノイズの強さに応じた量的変化を与えるので、システムの応答がその分、乱されることになる。しかし、非線形システムではノイズの影響は量的ではなく、むしろ質的变化を全体の結果に引き起こし得る。実際、ノイズの存在による、閾値下の微弱信号の受容 (検出)、システム同調化現象、結合振動子系の安定化等、非線形システムにおいてノイズが積極的な役割を果たし得ることもわかりつつある。特に対象システムがカオス系である場合には、ノイズによる周期状態からカオス状態への遷移や、カオスが消えて秩序化するノイズ誘起秩序 (Noise-Induced Order : NIO) と呼ばれる興味深い現象も報告されている [4]。NIO は、Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応 (化学での酸化還元過程) のモデルを用いた研究で最初に発見され、その後、電気回路やレーザー光による実験、化学反応モデルなどを対象に広く調べられてきた。また、神経膜興奮の Hodgkin-Huxley 方程式や神経パルスの FitzHugh-Nagumo モデルでのノイズの影響の検討など、生体现象への適用研究も始まりつつある [5]。

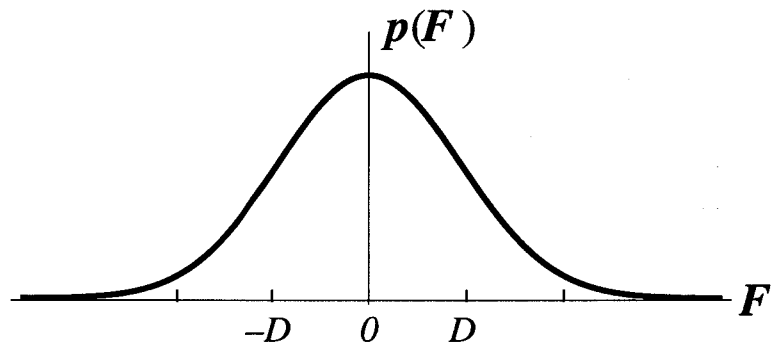
そこで第3章以降では、カオスを持ち得る非線形システムであるカオスニューロン、およびその自己想起型ネットワークに対してノイズを印加し、その応答性を詳細に調べ、ノイズ誘起秩序 (NIO) の存否とその性質について検討する。第3章 ((3.2), (3.8) 式) で登場するノイズ項 F_i に対する具体形としては、ガウス型白色ノイズおよび一様乱数ノイズの2つを採用する。ガウス型白色ノイズは

$$\begin{aligned}\langle F_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle F_i(t) F_j(t') \rangle &= D^2 \delta_{t,t'} \delta_{i,j}\end{aligned}\tag{2.21}$$

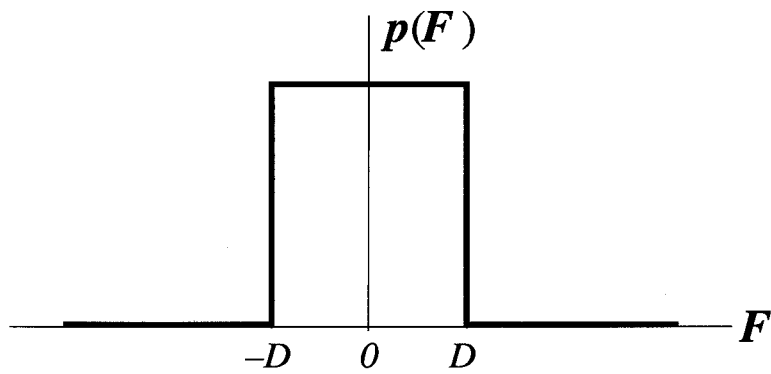
を満たす。ただし、 $\langle \quad \rangle$ は時間平均を、 $\delta_{a,b}$ はクロネッカーのデルタ記号を表しており、 $a = b$ のとき $\delta_{a,b} = 1$ 、 $a \neq b$ のとき $\delta_{a,b} = 0$ となる。 D はノイズ強度のパラメータで、ノイズ発生確率の正規分布

$$p(F_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}} \exp\left(-\frac{F_i^2}{2D^2}\right)\tag{2.22}$$

における標準偏差と一致する。各ノイズタイプの確率分布図を図 2.12 に示しておく。



ガウス型白色ノイズの場合



一様乱数ノイズの場合

図 2.12 各ノイズタイプにおけるノイズ発生の確率分布

第3章 カオスニューラルネットワークにおけるノイズ誘起現象

ここでは、非線形応答性を持つ単一のカオスニューロンおよび3個のカオスニューロンから構成される、自己想起型で最小サイズのカオスニューラルネットワークの場合に対して、そのノイズ誘起現象をコンピュータ実験により具体的に分析する。

3.1 単一ニューロンの場合

3.1.1 ニューロン状態の時系列変化とそのノイズ依存性

単一ニューロンの場合においてコンピュータ実験を具体的に進めるために、(2.9)式の各パラメータを次のように設定する。すなわち履歴性パラメータ $k = 0.7$ 、不応性項のスケーリングパラメータ $\alpha = 1.0$ 、シグモイド関数の傾きパラメータ $\varepsilon = 0.001$ とする。2.1節で述べたように a 値に対してカオスニューロンの挙動は大きく変化することから、まず図 2.8 に相当する今の場合の分岐図を作成し、その挙動が非周期であると思われる領域を明らかにする必要がある。図 3.1 がその分岐図であるが、多数の点が垂直線上を埋めている非周期領域がバンド的に多数存在している。ここでは、この中から $a = 0.6$ と $a = 0.75$ 付近のバンド（図中の矢印箇所）に着目し、以降での実験対象とする。そこで、 $a = 0.6$ と $a = 0.75$ 付近をさらに詳しく見るために a 値の刻み幅を 0.001 から 0.00002 へと変更し、図 3.1 のそれぞれの該当部分を 50 倍の精度で拡大し、検討を進めることにする。

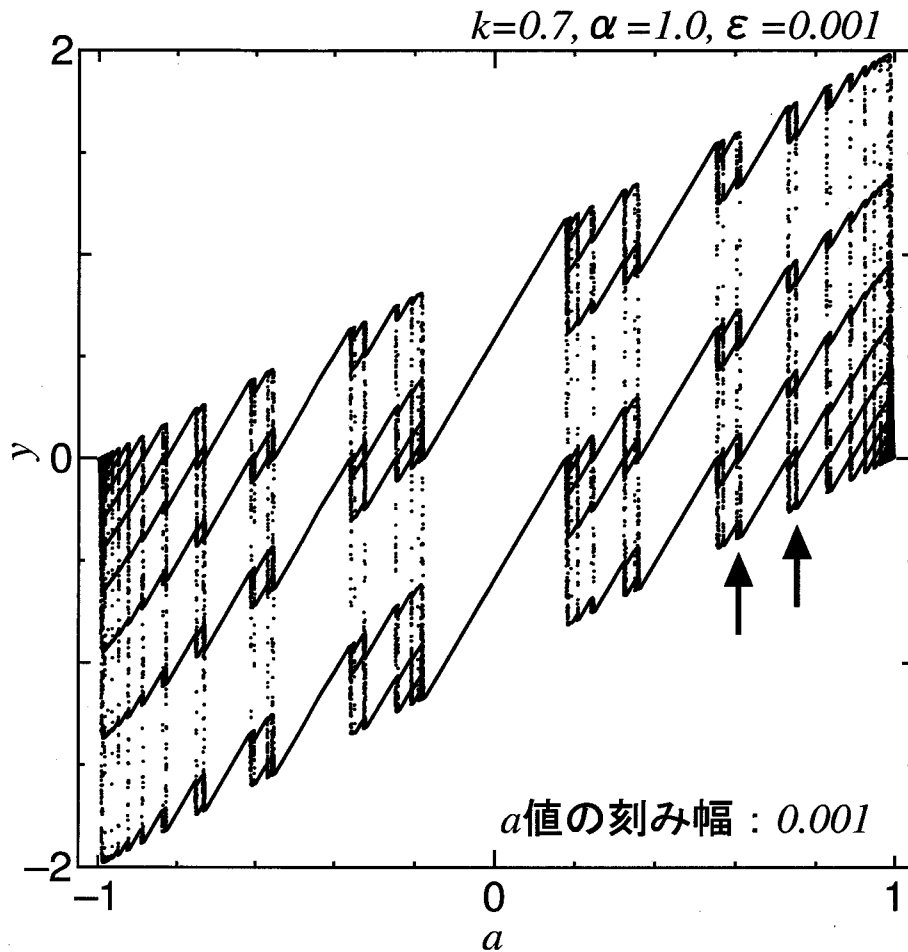


図 3.1 カオスニューロンの a に対する分岐図 ($t = 2000 \sim 2200$ に対する, $k = 0.7, \alpha = 1.0, \varepsilon = 0.001$ の場合)

(1) . $a = 0.6$ 付近の場合

図 3.2 がそのようにして得られた $a = 0.6$ 付近の拡大分岐図である. $a = 0.61$ の近傍にカオスを有する非周期の領域が存在する. 厳密なカオス性の確認はリアプノフ指数の評価によってなされるが, これについては第 4 章で説明する (付録 A に図 3.2 に対するリアプノフ指数 λ のグラフを示しておく. カオス挙動のところでは $\lambda > 0$ となっている.). 代表点として $a = 0.611, 0.612, 0.613$ の 3 点 (図中の矢印箇所) を選び, ノイズに対する特性の具体的評価に入ることにする.

それぞれの場合のニューロン内部状態値 y の時系列データに対するリアプノフ

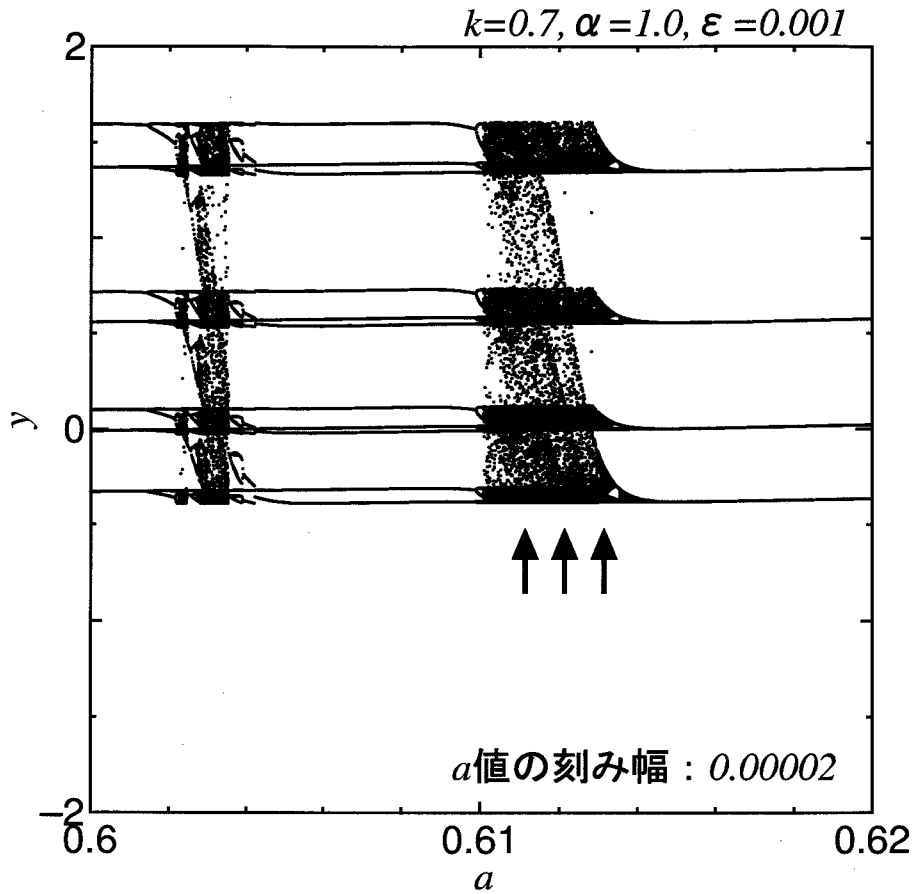


図 3.2 $a = 0.6$ 付近の拡大分岐図 (50倍精度)

指数 λ は 0.26, 0.26, 0.13 であり, λ 値が小さい $a = 0.613$ の場合はカオス性が弱まっていることがわかる. そこで, $a = 0.612$ と 0.613 を詳しく取り上げて説明する. 図 3.3 が $a = 0.612$ のときのニューロン状態の時系列変化であり, 非周期的な変化を示している. この挙動がノイズの存在によってどのような影響を受けるかを見るために, ニューロン発展の方程式 (2.9) および (2.10) に対してノイズ項 F を次のように導入する.

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha X(t) + a \quad (3.1)$$

$$X(t+1) = f(y(t+1) + F(t+1)) \quad (3.2)$$

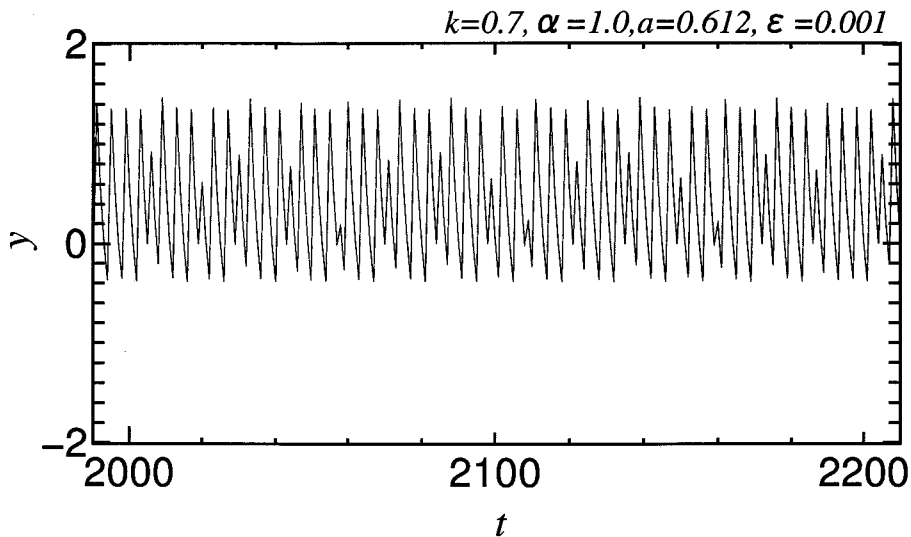


図 3.3 $a = 0.612$ のときのニューロン状態の時系列変化

ノイズ項 F のタイプとしてまず、ガウス型白色ノイズの場合を考えることにする。その場合、(2.21) 式同様 F は (3.3) 式の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0, \\ \langle F(t)F(t') \rangle &= D^2 \delta_{t,t'} \end{aligned} \quad (3.3)$$

図 3.4 は $D = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ の場合のニューロン挙動を示したものである。 $D = 0.0001$ の場合のニューロンはノイズを受けない場合 ($D = 0$) と同様に、様々な時刻で不規則に低いピークがでるといふ非周期な変化である。 $D = 0.001$ を経て $D = 0.01$ とノイズ強度が大きくなるにつれ、低いピークの出現が減って上下それぞれのピークが揃った挙動に近づいている。さらにノイズ強度を大きくした $D = 0.1$ の場合の挙動には全体にうねりがでてきており、それが長周期での不揃いを引き起こしている。 $D = 1.0$ の場合の挙動に至っては乱雑さが増して様々な値が出現しており、ノイズ項 F に挙動が支配されてしまっていることが示唆される。これらのことからニューロン挙動はノイズの大きさ (ノイズ強度 D) に応じてかなり変化することがわかる。

以上のような時系列挙動パターンの違いを定量的に捉えるために、ニューロン

状態 X に対する時間自己相関

$$C(\tau) = \frac{\langle \tilde{X}(t)\tilde{X}(t+\tau) \rangle}{\langle \tilde{X}^2 \rangle} \quad (3.4)$$

を導入する。ただし、 $\tilde{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$ であり、 $\langle \rangle$ は時間平均を示している。一般に時間差 τ を持つ $X(t)$ と $X(t+\tau)$ の間で正の相関が高いほど $C(\tau)$ は 1 に近づき、逆に負の相関が高いと -1 に近い値をとる。例えば、時系列挙動パターンが \sin 関数のような完全に周期 τ の周期運動の場合には $X(t) = X(t+n\tau)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であるので $C(n\tau) = 1$ となる。また、 $X(t) = -X(t + \frac{n}{2}\tau)$ であるので $C(\frac{n}{2}\tau) = -1$ となる。このような周期性を基準にして対象の秩序性の度合いを測ろうというのである。

図 3.5 は図 3.4 の時系列データに対応する時間自己相関のグラフである。 C 値の大きさと時間差 τ に対するその持続性を見ると $D = 0.0001$ から 0.01 へとノイズ強度が大きくなるにつれ、相関が高くなっている。つまり、ニューロン挙動の秩序性が増している。そして、 $D = 0.1$ から $D = 1.0$ へと相関が失われていく。このことは、適度なノイズが存在することによってニューロン挙動が秩序立つことを示している。

$a = 0.611$ の場合についても $a = 0.612$ と同様の結果が確認された。しかし、 $a = 0.613$ の場合については、ノイズを受けない ($D = 0$ での) 元々のニューロン挙動がカオス性が弱く周期性に近いことから、ノイズの影響としては元の秩序性を乱す方向での作用が大きく目立つ結果となっている (付録 B 参照)。

(2) . $a = 0.75$ 付近の場合

図 3.6 は図 3.1 の $a = 0.74 \sim 0.76$ の部分を 50 倍の精度で拡大した分岐図であり、 a が 0.75 付近でカオス性の領域が存在している。 $a = 0.6$ 付近の場合と同様に $a = 0.750, 0.751, 0.752$ の 3 点を代表点として選び評価の対象とする。それぞれの場合のニューロン挙動のリアプノフ指数 λ は $0.26, 0.26, 0.25$ であり、ともに同程度のカオス性を有していることがわかる。図 3.7 は $a = 0.750$ の場合の時系列変

化であるが、実際に非周期的な変化を示していることがわかる。

図 3.8 はガウス型白色ノイズの強度変化に対するニューロン挙動および時間自己相関の変容をまとめて示したものである。 $a = 0.612$ の場合の図 3.4, 図 3.5 とほぼ同様の傾向を示している。

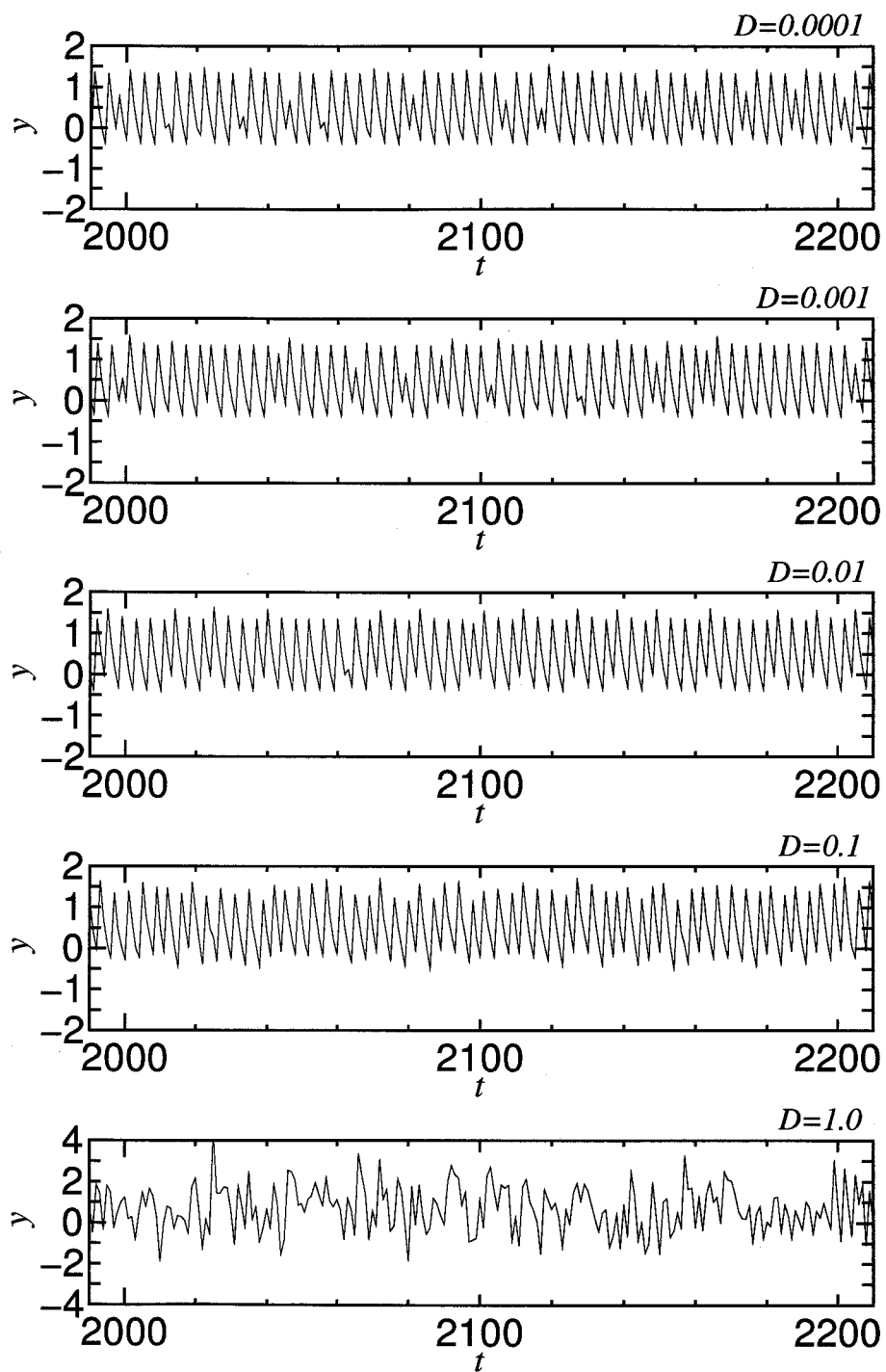


図 3.4 各ノイズ強度に対するニューロン挙動の違い ($a = 0.612$ の場合)

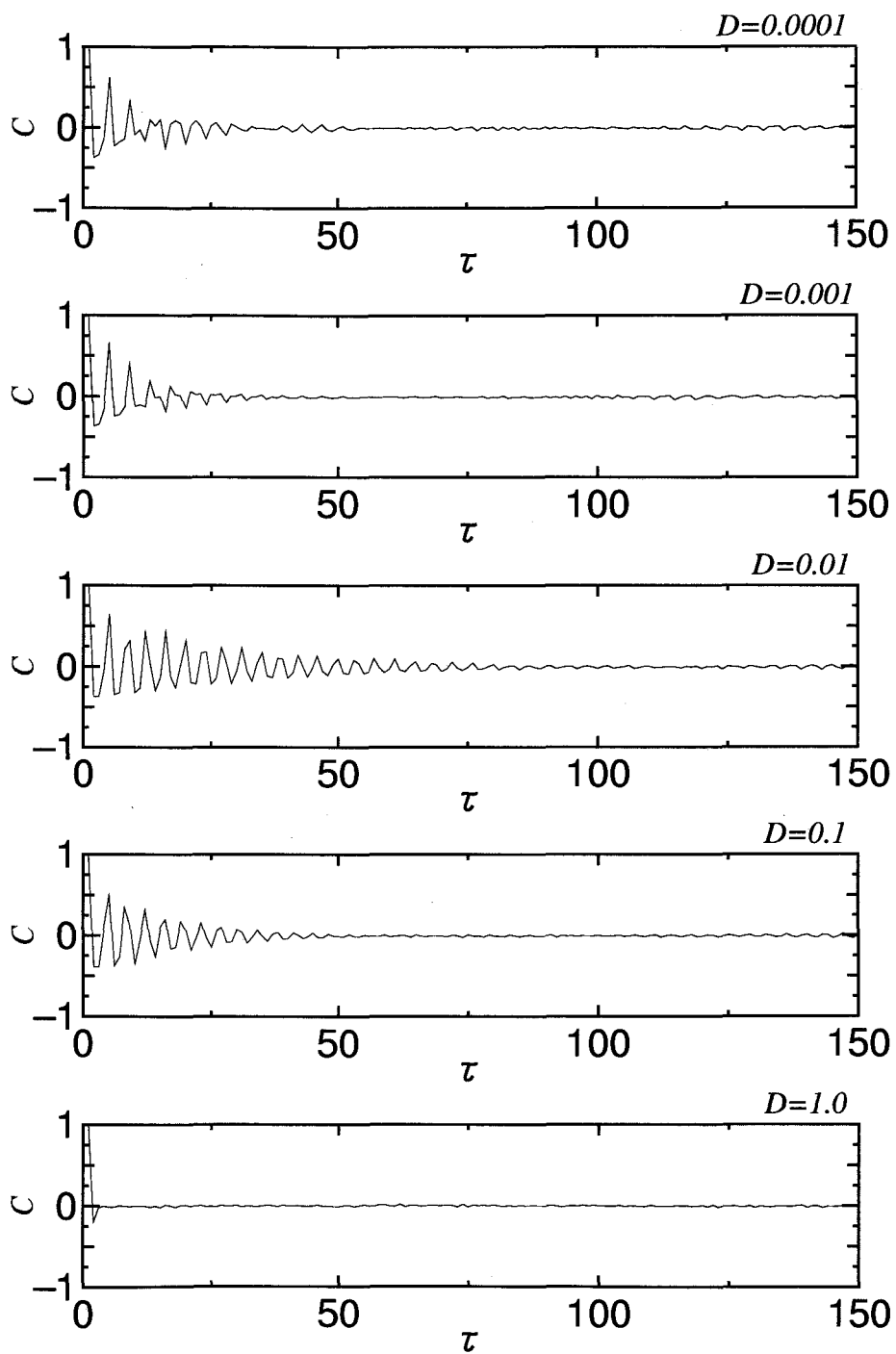


図 3.5 各ニューロン挙動 (図 3.4) に対する時間自己相関 ($a = 0.612$ の場合)

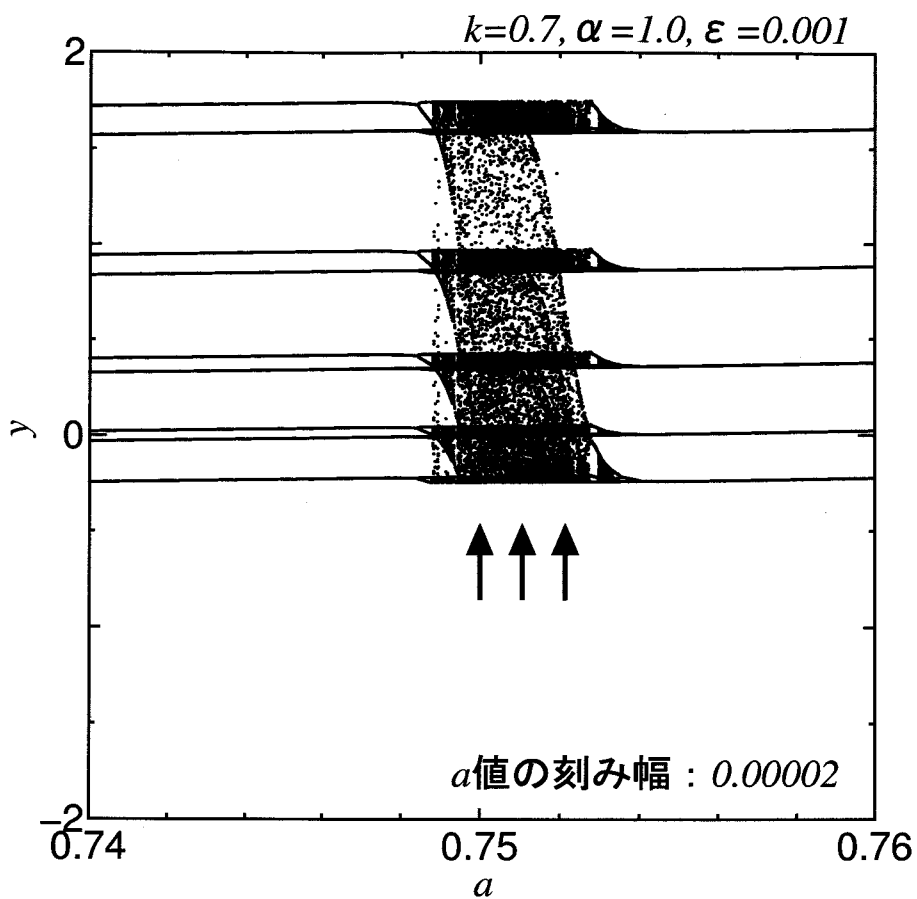


図 3.6 $a = 0.75$ 付近の拡大分岐図 (50倍精度)

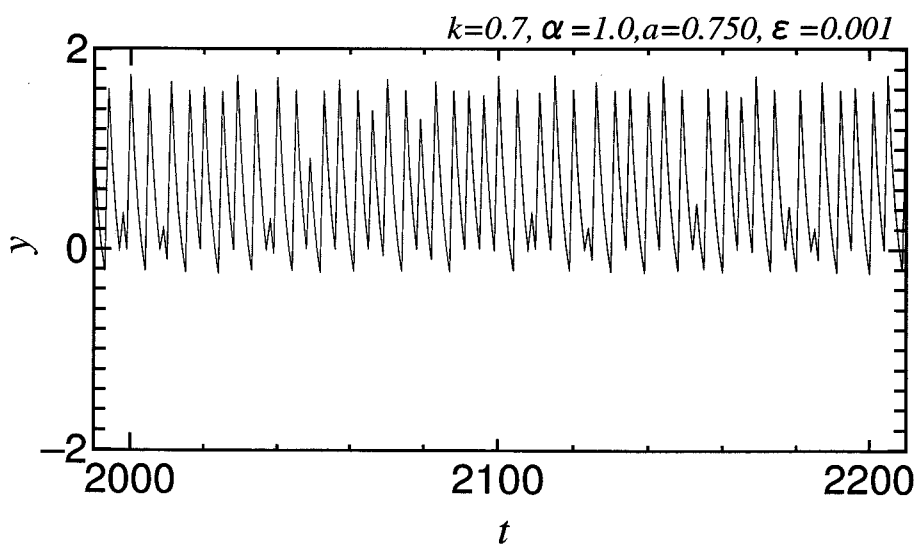


図 3.7 $a = 0.750$ の場合のニューロンの時系列変化

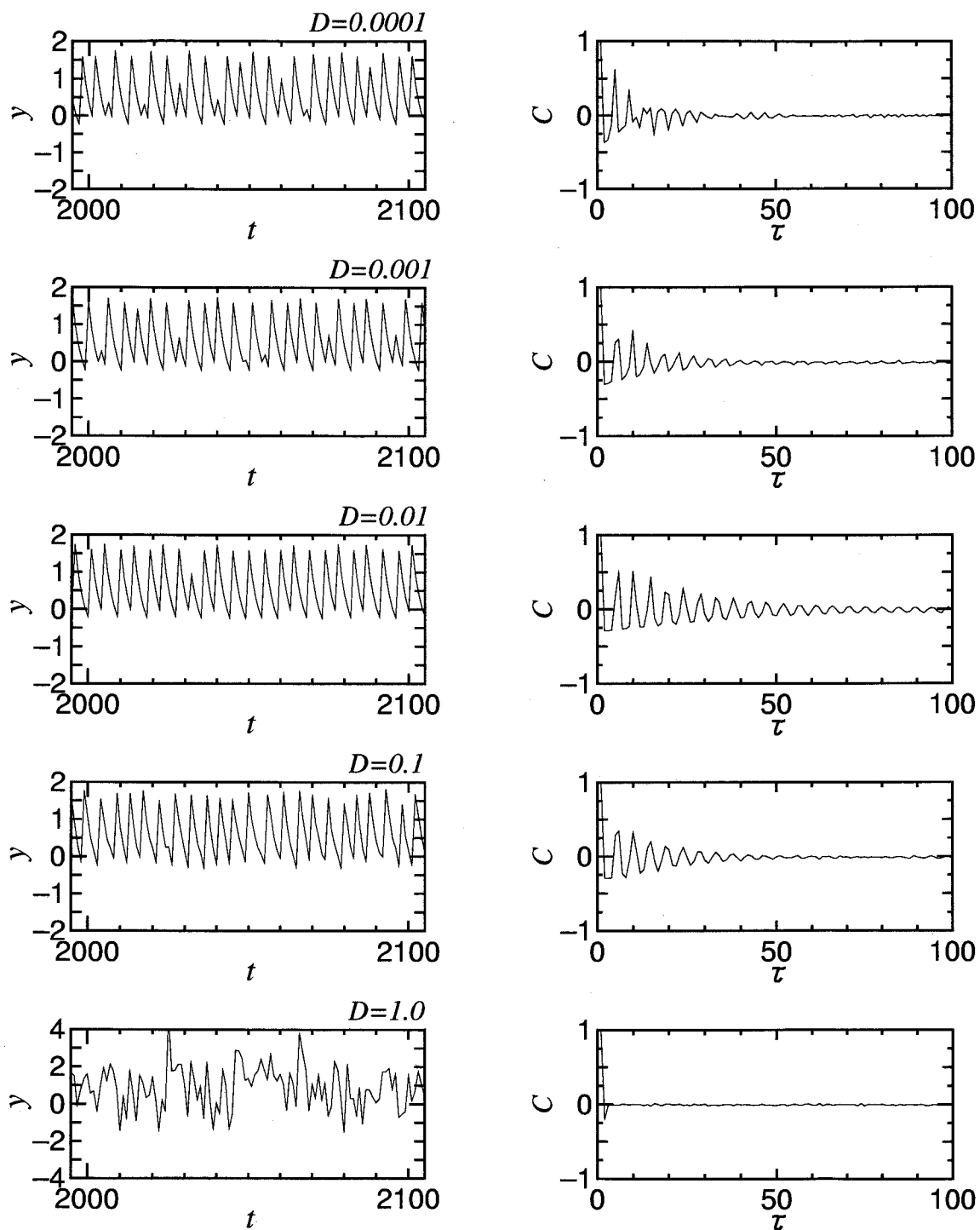


図 3.8 各ノイズ強度に対するニューロン挙動とその時間自己相関 ($a = 0.750$ の場合)

3.1.2 固有相関量による評価

図 3.5 の時間自己相関に関するグラフをさらに定量的に評価するために、 τ 毎の時間自己相関 $C(\tau)$ の自乗を足し上げた固有相関量

$$C_p = \sum_{\tau=0}^M C^2(\tau) \quad (3.5)$$

を定義する。これは大きい C 値が τ に対して持続するほど大きくなることが期待される。実際 $M = 299$ とし、先の図 3.5 の $D = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ の 5 つの場合に適用すると、 C_p はそれぞれ 3.2, 3.2, 4.4, 3.5, 2.1 となり、相関が高い（秩序性が大）とされた 3 つ目の $D = 0.01$ において一番大きい値となっている。そこで、ノイズ強度 D の値に対してさらに細かく C_p 値を求め、その結果をグラフにしたのが図 3.9 である。ノイズ強度 D が高くなると固有相関量 C_p が上がり、 D がある一定値を越えると再び C_p が下がっていく。すなわち、適度なノイズ（今の場合、 $D = 0.03$ 程度の白色ノイズ）の存在によりニューロン挙動に秩序性が大きく誘起されることが確認できる。

次に、 $a = 0.611, 0.613$ のときのニューロン挙動の時系列データに対して同様に固有相関量を求め、そのノイズ強度依存性を図示したのが図 3.10 である。 $a = 0.611$ のときは $a = 0.612$ とほぼ同様の結果になっているが、 $a = 0.613$ のときは D 値の小さい側で C_p が急激に増大している。これは前節でも触れたようにノイズの無い $D = 0$ のときのニューロン挙動自体が周期に近いからである。図からは、それにより秩序性が一度失われた後に $a = 0.611, 0.612$ の場合同様に $D = 0.03$ 付近で秩序誘起が生じていることがわかる。

$a = 0.750, 0.751, 0.752$ のそれぞれの場合の時間自己相関データに対しても同様の処理を行ない、ノイズ強度依存性を求めたのが図 3.11 である。この $a = 0.75$ 付近の場合には元のニューロン挙動のカオス性が同程度であるため、固有相関量に対しても類似した結果となっている。

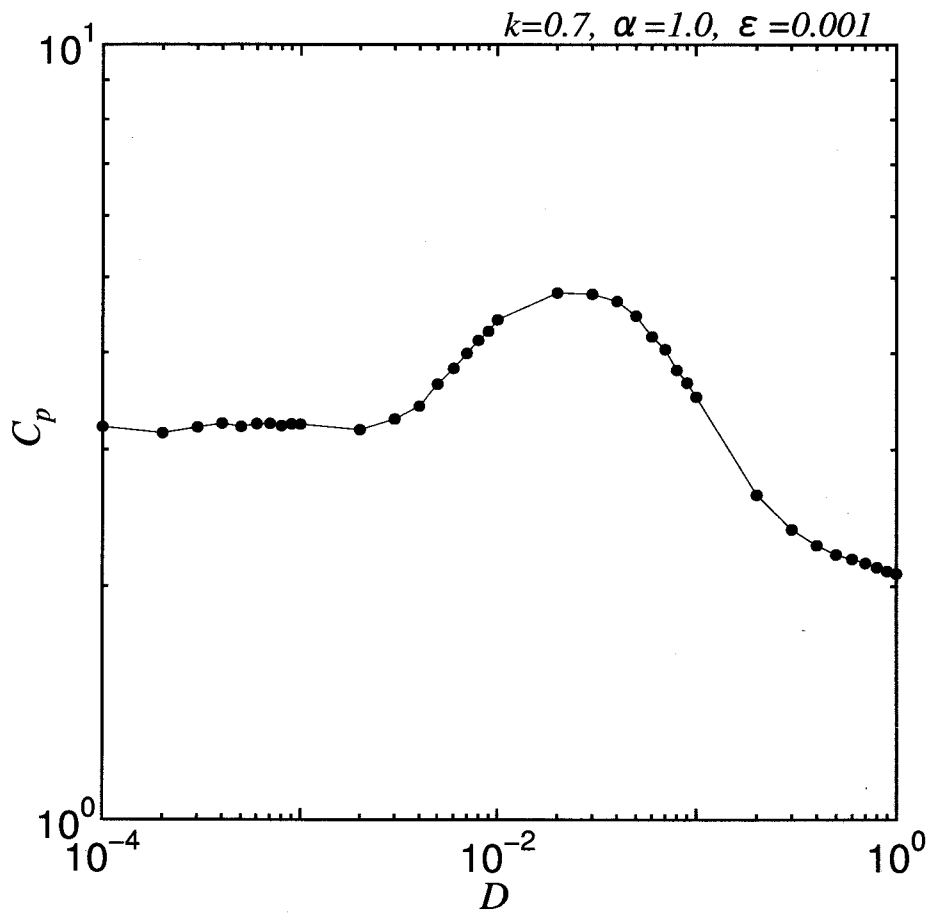


図 3.9 ニューロン挙動における固有相関量のノイズ強度依存性
($a = 0.612$ の場合)

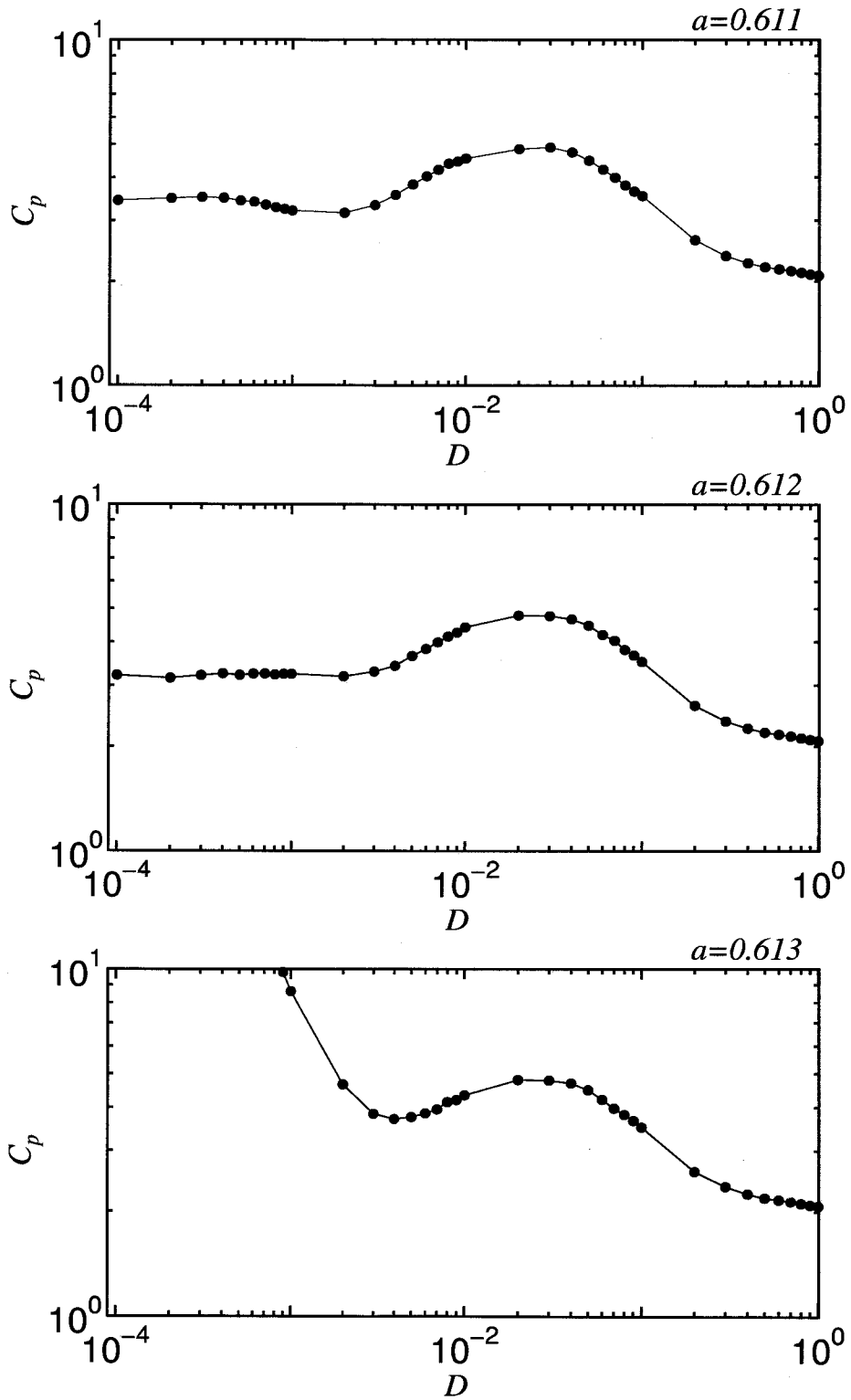


図 3.10 固有相関量のノイズ強度依存性 ($a = 0.6$ 付近の場合)

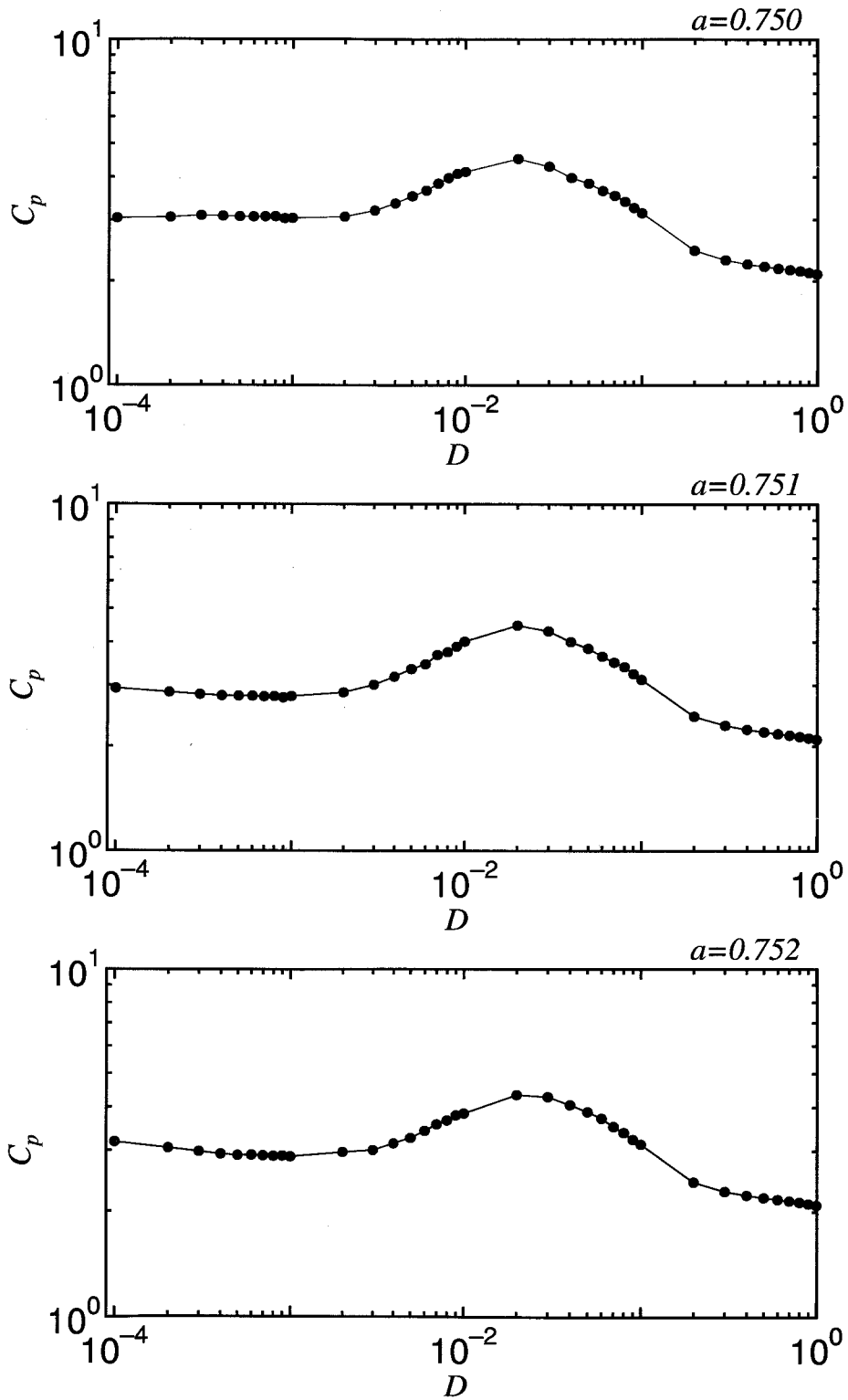


図 3.11 固有相関量のノイズ強度依存性 ($a = 0.75$ 付近の場合)

3.1.3 ノイズタイプを変化させた場合

これまでは印加するノイズタイプをガウス型白色ノイズとしてきたが、ここでは一様乱数ノイズに変更した場合について述べる。図 3.12 に $a = 0.612$ のときのニューロン挙動およびその時間自己相関の結果を示したが、ガウス型白色ノイズの場合の図 3.4, 図 3.5 と全体的に同様の傾向が見られる。さらに、図 3.13 は $a = 0.611, 0.612, 0.613$ のときの固有相関量のノイズ強度依存性の結果であるが、これも図 3.10 の白色ノイズの場合と同様の傾向が見られる。しかし、ノイズによる秩序誘起のピーク (C_p の極大点) の位置は白色ノイズの場合の $D = 0.03$ から $D = 0.05$ へと移動し、グラフ全体が D 値の大きい側へ少しシフトしていることがわかる。これはノイズ強度を D としたとき、白色ノイズでは $-D \sim D$ までのノイズが 68% でその範囲外の大きな値 (絶対値で) のノイズが 32% 発生するのに対して、一様乱数ノイズでは $-D \sim D$ のノイズに限られているからであると考えられる。

なお、 $a = 0.75$ 付近の場合の結果についても同様のことが確認されている。詳しくは付録 C を参照のこと。

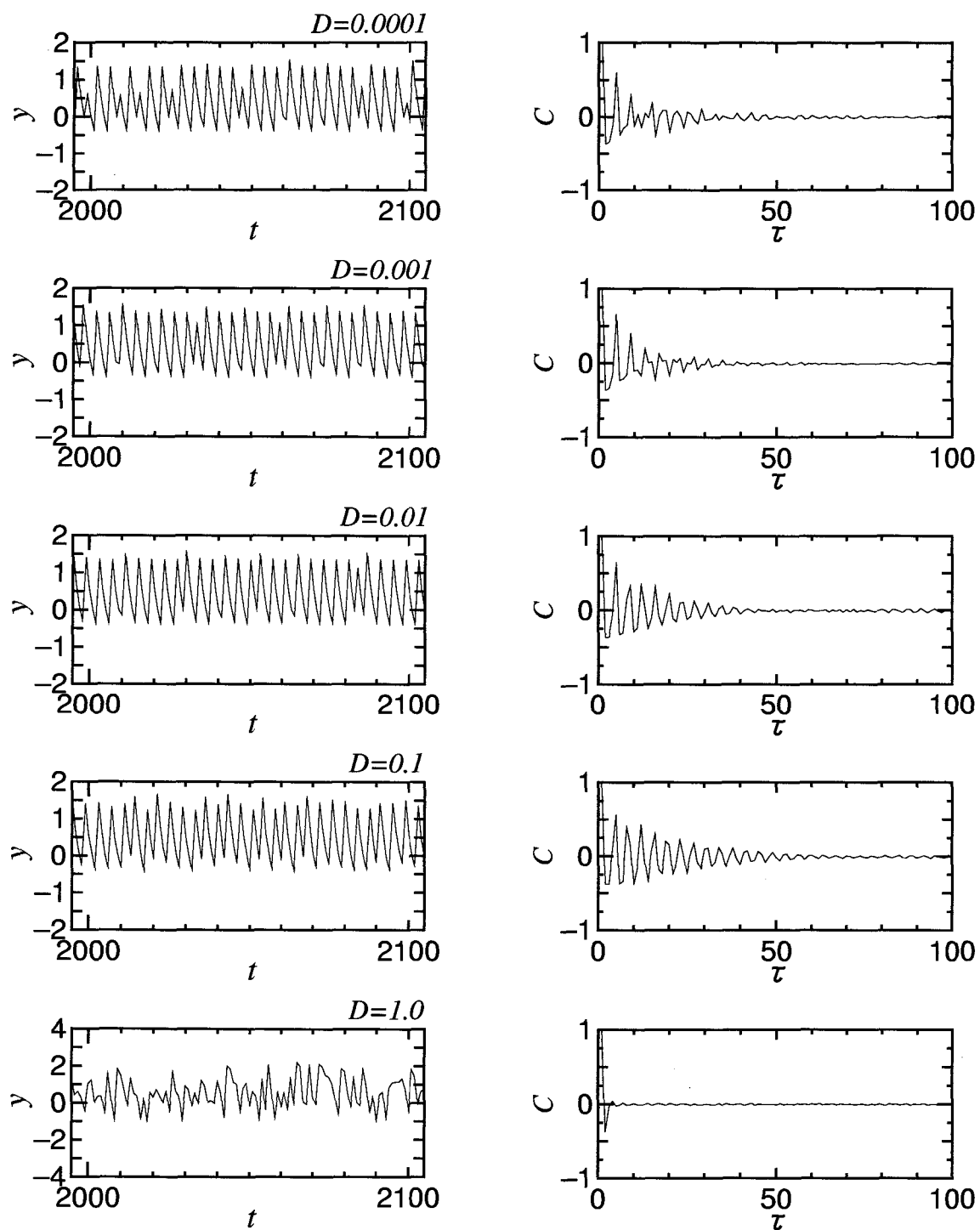


図 3.12 各ノイズ強度に対するニューロン挙動とその時間自己相関 ($a = 0.612$, 一様乱数ノイズの場合)

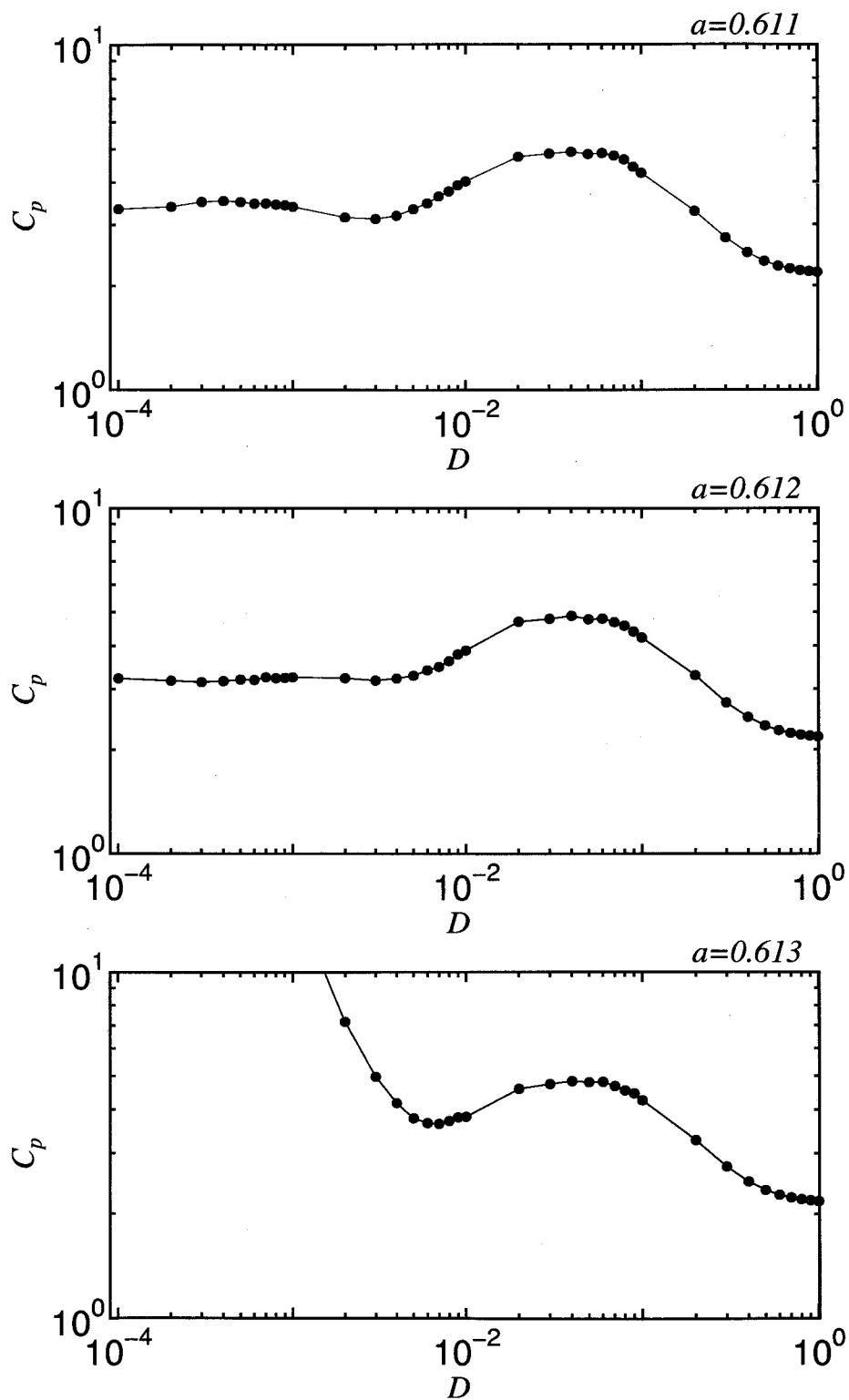


図 3.13 固有相関量のノイズ強度依存性 ($a = 0.6$ 付近, 一様乱数ノイズの場合)

3.2 自己想起型最小サイズ ($N = 3$) ネットワークの場合

3.2.1 モデルの構成とパラメータ設定

3ニューロン ($N = 3$) の場合, パターン状態 ($2^3 = 8$ 状態) 空間は図 3.14 のようになる. 記銘パターンとしての局所安定状態に $\{\xi_i^1\} = (-1, 1, -1)$, $\{\xi_i^2\} = (1, -1, 1)$ の2つのパターン (互いに反転関係) を埋め込むことにする.

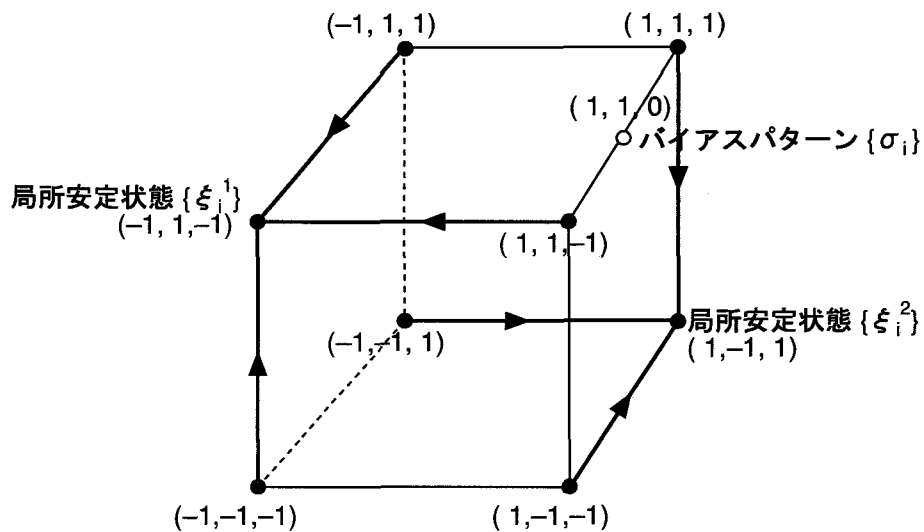


図 3.14 パターン状態空間 ($N = 3$)

結合荷重 $\{w_{ij}\}$ は, 2つの記銘パターン状態 $\{\xi_i^1\} = (-1, 1, -1)$, $\{\xi_i^2\} = (1, -1, 1)$ がホップフィールド記憶の局所安定状態に一致するよう, 逐次的学習則 [7] [16] を用いて決定した. 3ニューロンの場合, 結合荷重の関係は図 3.15 のようになる. 逐次的学習則のアルゴリズムの具体的フローについては付録 D を参照のこと. その結果, 結合荷重は

$$\{w_{ij}\} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

となった.

ニューロンがしきい値を持たない ($\theta_i = 0$) 場合における記銘パターン状態 $\{\xi_i^{\mu}\}$

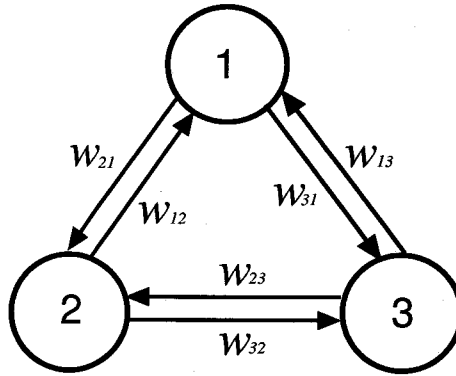


図 3.15 ニューロン間の結合荷重 ($N = 3$)

のエネルギー値は、(2.20) 式より

$$E(\xi^\mu) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N w_{ij} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (3.6)$$

となり、 $\{\xi_i^1\}$ 、 $\{\xi_i^2\}$ のエネルギー値はともに -2 である。また、その他の 6 パターン状態のエネルギー値は全て $2/3$ である。なお、2 ニューロンの場合には自由度が低すぎて複数の局所安定状態を構成できないので、3 ニューロンの場合が本研究で提案する 2.2 節のモデルスキームにおける最小サイズモデルとなっている。

以上のようにモデル化したネットワークにバイアス入力項とノイズ項を考慮する。バイアス入力項としては、2 つの記憶パターンの中間状態の 1 つである $\{\sigma_i\} = (1, 1, 0)$ をバイアスパターンとし、

$$S_i = s\{\sigma_i\} = s(1, 1, 0) \quad (3.7)$$

と設定する。ただし、 s はバイアス強度である。また、バイアスパターン $\{\sigma_i\}$ のエネルギー値は $2/3$ である。ネットワークの発展方程式 (2.17) は

$$X_i(t+1) = f(\eta_i(t+1) + \zeta_i(t+1) + S_i + F_i(t+1)) \quad (3.8)$$

に拡張される [17]。 F_i はノイズ項であり、(2.21) 式を満たす。ノイズ存在下での今の場合の自己想起型ニューラルネットワークを図示すると図 3.16 のように表される。

ネットワークの状態を評価するための尺度量として、重なり度、時間自己相関および固有相関量の 3 つを用いることにする。時間自己相関、固有相関量については

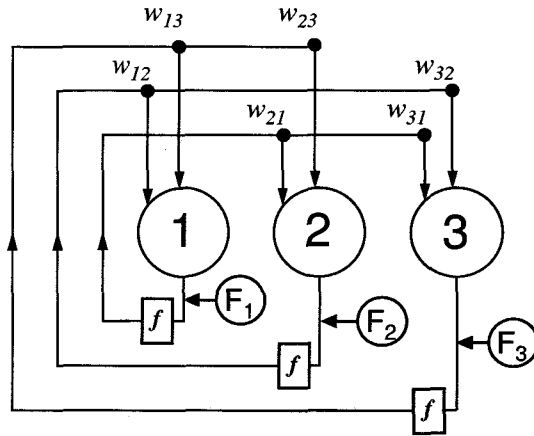


図 3.16 ノイズ存在下での自己想起型ニューラルネットモデル ($N = 3$)

3.1節での単一ニューロンのところで導入したものと同様であるが、それらを求めるためのネットワーク状態の時系列データについては外部状態ベクトル (X_1, X_2, X_3) 自体ではなく、重なり度と呼ばれるスカラー量を用いることにする。重なり度とは、一般に、時刻 t におけるネットワーク状態 $\{X_i(t)\}$ と記銘パターン $\{\xi_i^\mu\}$ との内積量

$$m^\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) \xi_i^\mu \quad (3.9)$$

で与えられる。ネットワーク状態 $\{X_i\}$ が記銘パターン $\{\xi_i^\mu\}$ と一致 ($\{X_i\} = \{\xi_i^\mu\}$) しているときには $m^\mu = 1$ 、反転の関係 ($\{X_i\} = -\{\xi_i^\mu\}$) にあるときには $m^\mu = -1$ となる。ここでの3ニューロンの場合には $\{\xi_i^1\}$ との重なり度 $m^1(t)$ を用いることとし、以降その添字1を省略して $m(t)$ と記す。

そこで、時間自己相関については重なり度に対して

$$C(\tau) = \frac{\langle \tilde{m}(t) \tilde{m}(t + \tau) \rangle}{\langle \tilde{m}^2 \rangle} \quad (3.10)$$

で与えられる。ただし、 $\tilde{m}(t) = m(t) - \langle m(t) \rangle$ であり、 $\langle \quad \rangle$ は時間平均を意味する。固有相関量は単一ニューロンの場合と同様に、この $C(\tau)$ に対して

$$C_p = \sum_{\tau=0}^M C^2(\tau) \quad (3.11)$$

である。

3.2.2 ネットワーク状態の時系列変化とそのノイズ依存性

コンピュータ実験を具体的に進めるうえでのネットワークに対する基本的なパラメータを次のように設定する。履歴性パラメータ $k_f = 0.5$, $k_r = 0.8$, 不応性項のスケーリングパラメータ $\alpha = 0.46$, 全ニューロンのしきい値 $\theta_i = 0$ (すなわち, $a = 0$) , シグモイド関数の傾きパラメータ $\varepsilon = 0.015$, バイアス強度パラメータ $s = 0.59$ である [18]。

図 3.17 の上図はノイズを印加する前 (すなわち, $D = 0$) のネットワーク状態の時系列変化である。ネットワークの挙動は, 一方の記銘パターン状態にしばらく停留した後他方の記銘パターン状態に ($m \simeq 1$ の $\{\xi_i^1\}$ 状態と $m \simeq -1$ の $\{\xi_i^2\}$ 状態の間を) 切り替わり, そしてまたそこにしばらく停留した後切り替わるということを繰り返している。一方の記銘パターン状態から他方の記銘パターン状態への切り替わりの時間間隔は一定せず非周期である。また, 複数回の切り替わりに渡る長い時間間隔で見ても周期的な繰り返しは見られず, 記銘パターン状態に停留中の小さな ($\Delta m \simeq 0.1$ 程度の) 非周期的ゆらぎの存在も考慮すると, かなり秩序性の低いものになっている。図 3.17 の下図は, このネットワーク挙動に対する (3.10) 式による時間自己相関のグラフであるが, 時間差 τ の増加にともなって速やかに相関が失われていくのがわかる。

次に, ネットワークにノイズを印加し, その影響を見たのが図 3.18 である。上から順にノイズ強度 D が 0.001, 0.01, 0.1, 1.0 のときのネットワーク挙動とそれそれぞれに対する時間自己相関のグラフを示している。 $D = 0.001$ のときはネットワークの状態はノイズ無し ($D = 0$) のときとほとんど変わらない。 $D = 0.01$ のときは, 記銘パターン状態間の切り替わりの頻度が増えており, 一方の記銘パターン状態での停留時間が短くなっている。時間自己相関はそれを反映し, 時間差 τ に対してやや短い間隔 ($\Delta \tau \simeq 50$) でピークを形成し, その値もやや高くなっている。 $D = 0.1$ においては, 時間自己相関のピークはさらに高くなり, それが τ の大きい側でかな

り繰り返し持続している。ネットワークの時系列挙動を見ても、かなり整った切り替わりであることがわかる。切り替わりの周期としては約 $33step$ 時間と見受けられ、時間自己相関グラフでのピーク間隔 ($\Delta\tau \simeq 33$) に対応している。ただし、ネットワーク挙動が完全な周期性を持つというわけではないので、時間差 τ が大きくなれば相関は減衰していく。 $D = 1.0$ になるとノイズが強すぎて、ネットワーク挙動はノイズに支配されてしまっており、時間自己相関が時間差 τ に対して急激に失われている。

さらに時間自己相関 $C(\tau)$ を用いて (3.11) 式から固有相関量 C_p を求めることにする。先の図 3.18 の $D = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ の 4 つの場合には、 C_p 値はそれぞれ 13.5, 18.1, 40.1, 4.1 となり、時間自己相関の関する図 3.18 の結果が反映されている。ノイズ強度 D の値に対してさらに細かく C_p 値を求め、その結果をグラフにしたのが図 3.19 である。ノイズ強度 D が大きくなるにつれて固有相関量 C_p が上昇し、 D がある一定値を越えると再び C_p が下がっていく。すなわち、3.1 節での単一ニューロンの場合と同様、適度なノイズ (今の場合、 $D = 0.1$ 程度の白色ノイズ) の存在によりネットワーク挙動に秩序性が大きく誘起されることが確認できた。

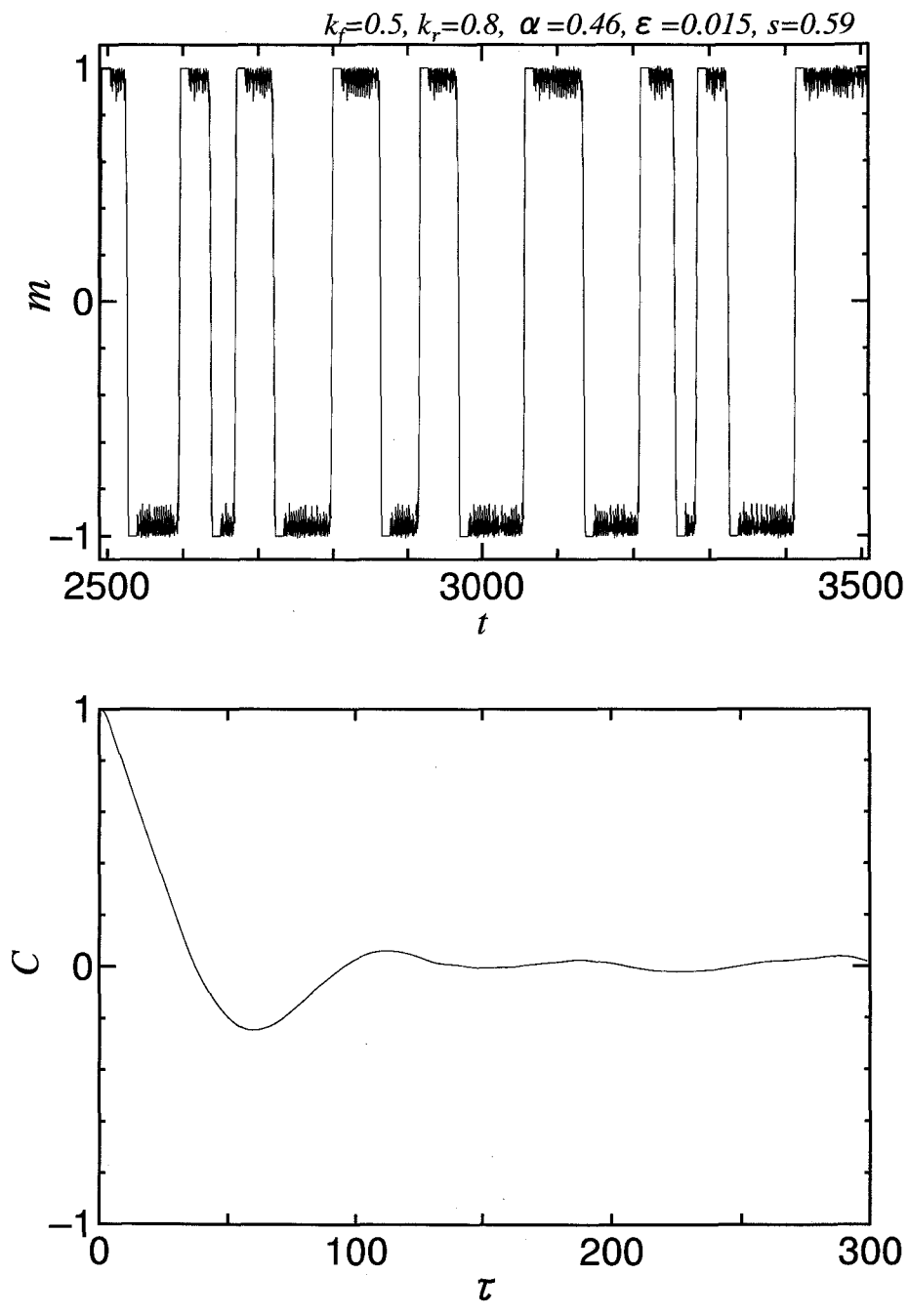


図 3.17 ノイズ無し ($D=0$) の場合のネットワーク挙動とその時間自己相関 ($N=3$ の場合)

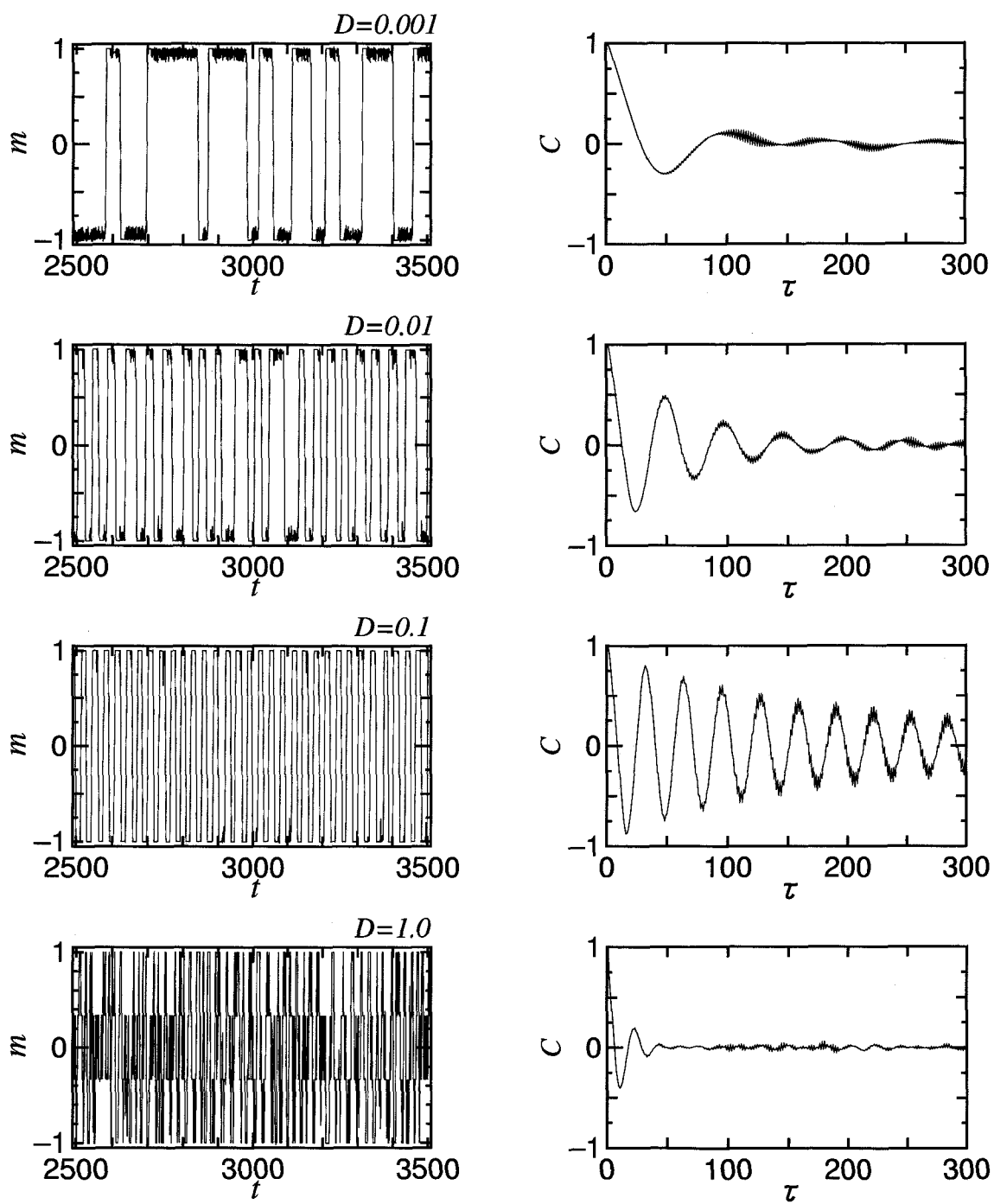


図 3.18 各ノイズ強度に対するネットワーク挙動とその時間自己相関 ($N=3$ の場合)

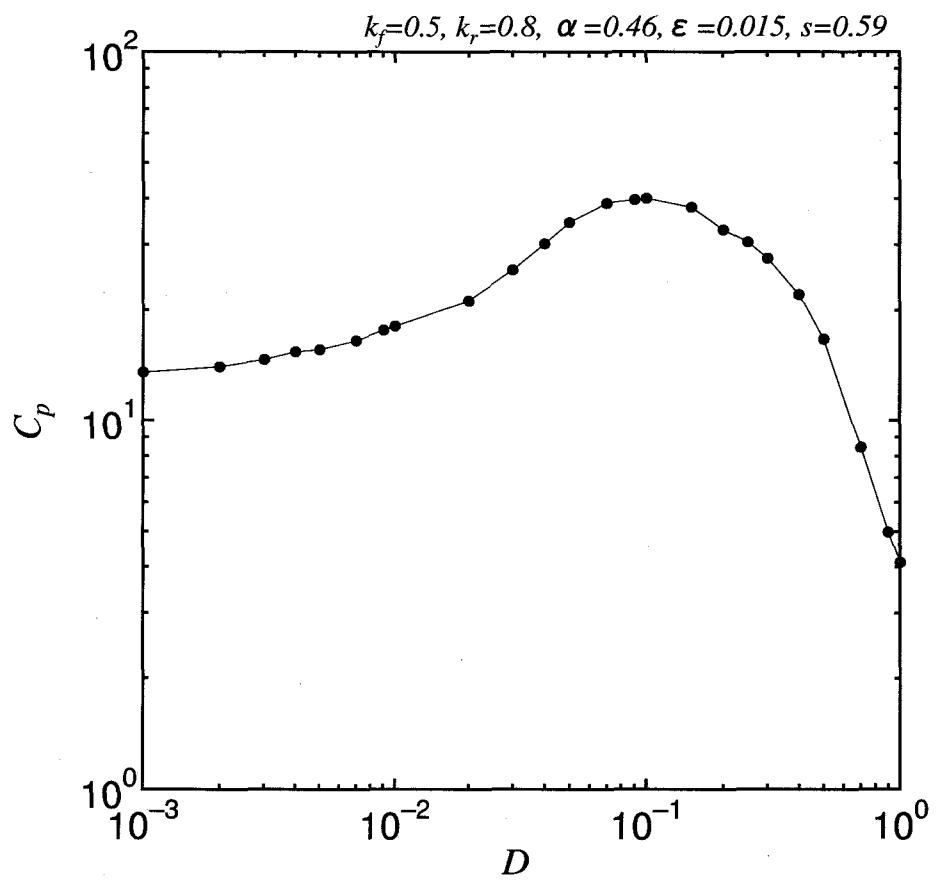


図 3.19 ネットワーク挙動における固有相関量のノイズ強度依存性 ($N = 3$ 場合)

3.2.3 ノイズタイプやパラメータを変化させた場合

ここではまず、ノイズタイプを一様乱数ノイズに変更した場合について述べる。図 3.20 にそのときのネットワーク挙動およびその時間自己相関の結果を示したが、白色ノイズの場合の図 3.18 と全体的に同様の傾向が見られる。図 3.21 は固有相関量のノイズ強度依存性であるが、3.1 節での単一ニューロンの場合と同様、ノイズによる秩序誘起のピーク (C_p の極大点) の位置が白色ノイズの場合の $D = 0.1$ から $D = 0.2$ へと移動し、グラフ全体が D 値の大きい側へ少しシフトしていることがわかる。これはノイズ強度を D としたとき、白色ノイズでは $-D \sim D$ までのノイズが 68% でその範囲外の大きな値のノイズが 32% 発生するのに対して、一様乱数ノイズでは $-D \sim D$ に限定されているからであると考えられる。

次に不応性項のスケーリングパラメータ α を 0.46 から 0.5 に、バイアス強度パラメータ s を 0.59 から 0.25 に変更した場合について述べる。ただし、ノイズタイプとしてはガウス型白色ノイズを用いている。図 3.22 はそのときの固有相関量 C_p のノイズ強度 D 依存性のグラフである。図 3.19 の $\alpha = 0.46$, $s = 0.59$ の場合と比べると C_p のピーク付近の様子はほぼ同じであるが、 D 値の低い側で C_p が高くなっていることがわかる。これは、ノイズ無し ($D = 0$) のときのネットワーク挙動において周期的傾向が少々高いために生じたことであると考えられる。しかし、全体としては図 3.19 と同様に、ノイズ強度 D が大きくなるにつれて固有相関量 C_p が上昇し、 D がある一定値を越えると再び C_p が下がっていくという傾向を保持している。

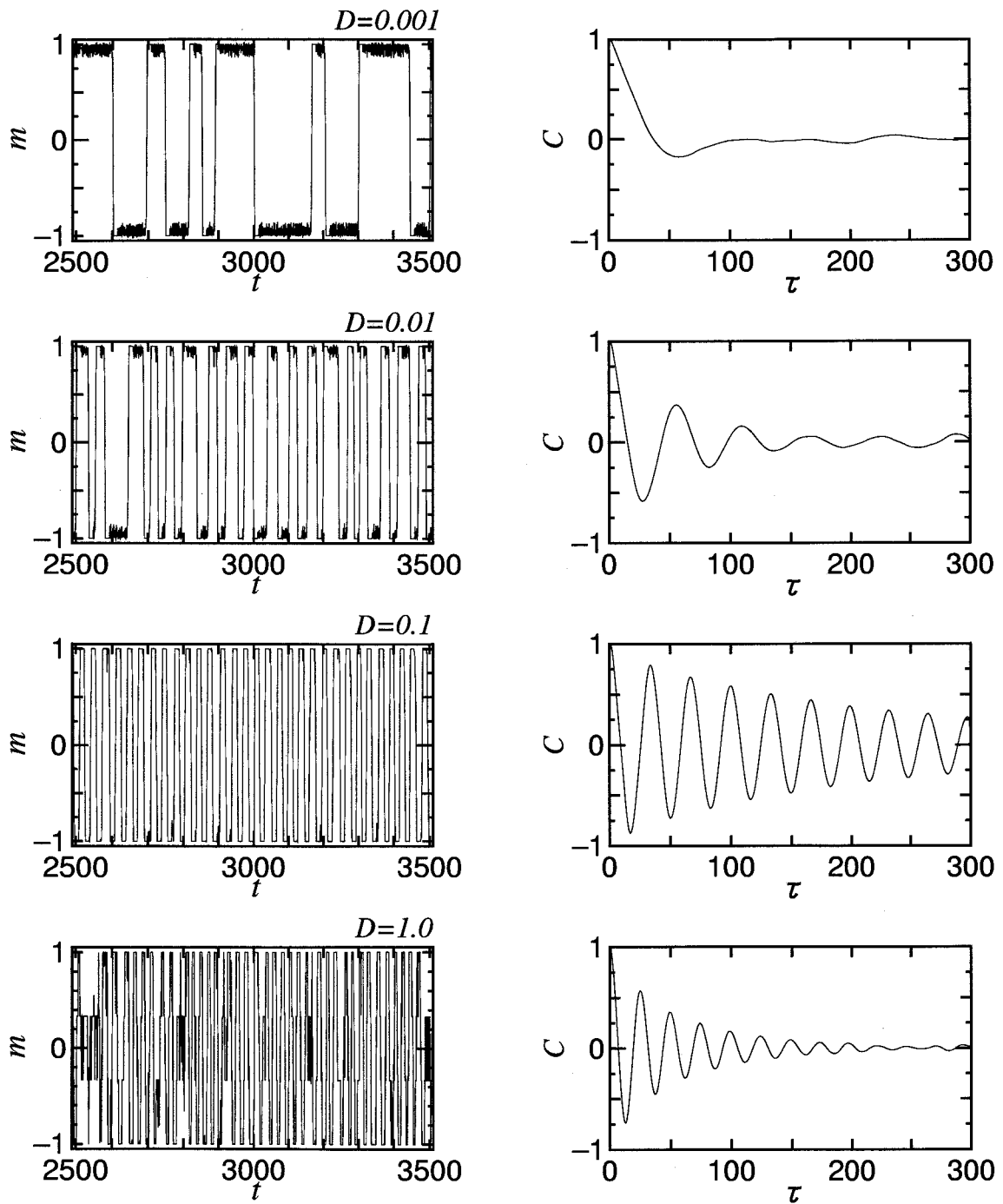


図 3.20 各ノイズ強度に対するネットワーク挙動とその時間自己相関 ($N = 3$, 一様乱数ノイズの場合)

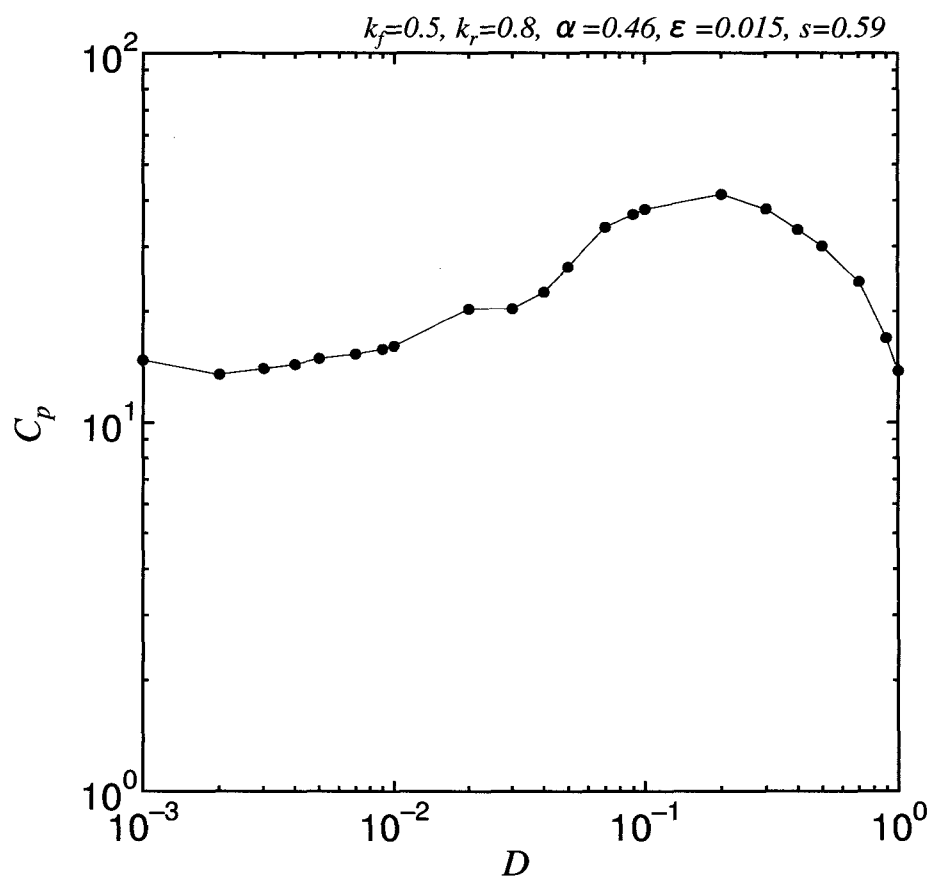


図 3.21 ネットワーク挙動における固有相関量のノイズ強度依存性 ($N = 3$, 一様乱数ノイズの場合)

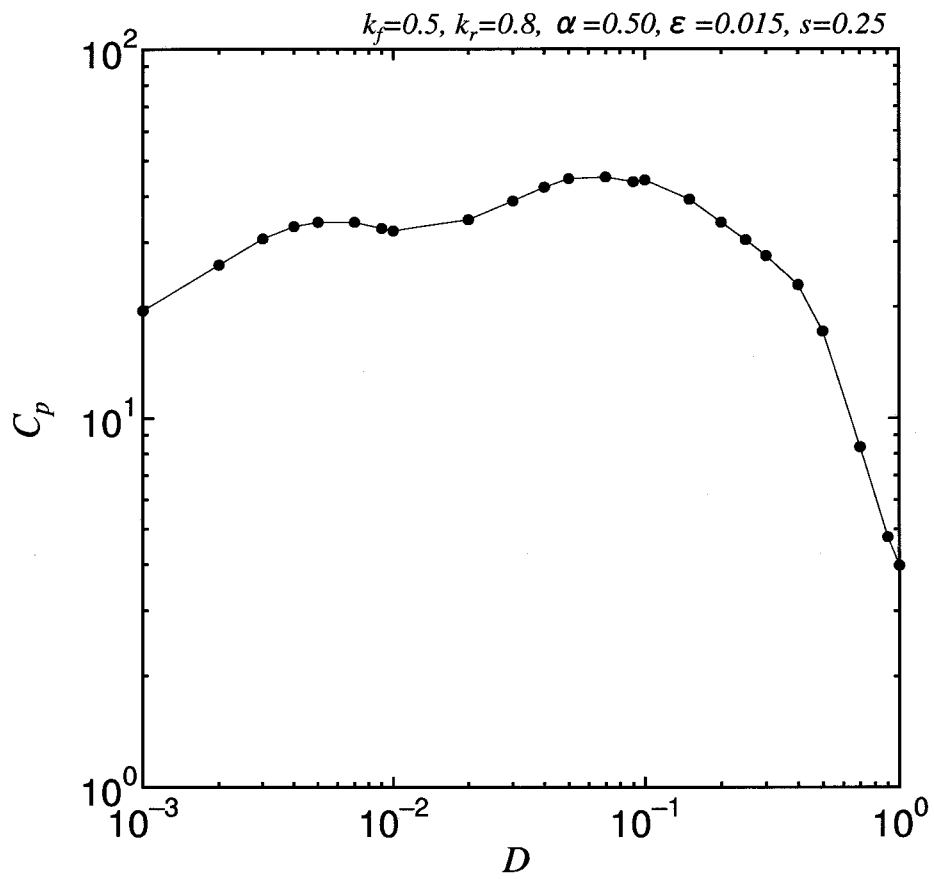


図 3.22 ネットワーク挙動における固有相関量のノイズ強度依存性 ($N = 3$, $\alpha = 0.50$, $s = 0.25$, ガウス型白色ノイズの場合)

第4章 ネットワークサイズの拡大およびカオス性との関連性評価

ここでは、自己想起型ネットワークのサイズ（ニューロン数）を拡大した場合のノイズ誘起特性について調べるとともに、カオス性の評価尺度であるリアプノフ指数に着目してノイズ誘起秩序とカオスとの関係について検討する。

4.1 大規模ネットワークサイズ ($N = 144$) の場合

4.1.1 モデルの構成とパラメータ設定

3.2節の3ニューロンによる自己想起型ネットワークの場合と同様の検討をもつと大規模なネットワークサイズで行なうために、全ニューロン数を $N = 144 (= 12 \times 12)$ とする。これに応じて、記銘パターンとしては図4.1に示すようなパターン $R_1 \sim R_{20}$ (いずれも 12×12) を用意し、これらがネットワークの局所安定状態 (ホップフィールド記憶) に一致するよう、逐次的学習則 [7] [16] を用いて結合荷重 $\{w_{ij}\}$ を決定した。学習則のアルゴリズムのフローについては付録Dを、全20の記銘パターンについては付録Eを参照のこと。なお、各記銘パターンの安定度パラメータ γ_i^μ の設定については、全パターン ($\mu = 1 \sim 20$) に対して $\gamma_i^\mu > 1$ (すなわち、 $\kappa = 1$) とした。また、 R_1 と R_2 に $R_3 \sim R_{20}$ のランダムパターンとは違う縦縞と横縞を採用しているのは、実験の際にシミュレーション画面上で実験者がパターン同定しやすいためのものである。従って、 R_3 以降と同様のランダムパターンに設定したとしても結果の大勢に影響は及ぼさない。

上記で決定された結合荷重 $\{w_{ij}\}$ から各記銘パターン状態のエネルギーを (3.6) 式より求めると、 $E(\xi^{R_1})$ から $E(\xi^{R_{20}})$ までの値はそれぞれ -110.2 , -112.5 , -107.4 , -109.9 , -107.8 , -114.4 , -111.0 , -110.9 , -112.5 , -110.4 , -111.0 , -113.5 ,

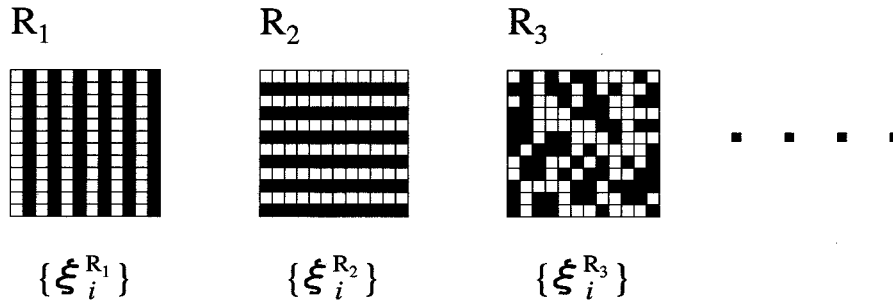


図 4.1 実験で用いた記録パターンの例 ($\xi_i = 1$ が黒, $\xi_i = -1$ が白に対応)

-107.7, -108.5, -109.6, -110.5, -112.7, -109.6, -109.3, -109.7となっている。つまり, $E = -114 \sim -107$ のほぼ同じ深さをもつ局所安定状態としてそれぞれが形成されている。バイアス入力のパターン情報としては記録パターン R_1 と R_2 の中間状態にあたる図 4.2 の縦縞と横縞を重ね合わせたパターンを採用する。このパターン $\{\sigma_i\}$ にバイアス強度パラメータ s を乗じたものがバイアス入力 S_i となり, 3ニューロンの場合と同様に (3.8) 式の形でネットワークの発展に寄与する。

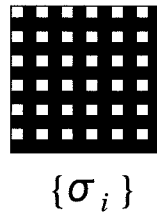


図 4.2 実験で用いたバイアス入力のパターン

ノイズ誘起特性を定量的に評価するための評価尺度として, 3ニューロン場合と同様に重なり度, 時間自己相関 ((3.10) 式) および固有相関量 ((3.11) 式) の3つを用いる。このとき, 時刻 t における重なり度は, ネットワーク状態 $\{X_i(t)\}$ とパターン R_1 (成分表示: $\xi_i^{R_1}$) との内積による

$$m^{R_1}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) \xi_i^{R_1} \quad (4.1)$$

で見ることとする。ネットワーク状態 $\{X_i\}$ が記録パターン R と一致しているときには $m^R=1$, 反転の関係 ($\{X_i\} = -\{\xi_i^R\}$) にあるときには $m^R = -1$ となるという

ことは前章でも触れたが、本章の実験の場合、ネットワーク状態がパターン R_1 と半分一致しているような R_2 との重なり度は $m^{R_1}=0$ となる。以降、 m^{R_1} における添字 R_1 を省略して $m(t)$ と記すことにする。

4.1.2 ノイズ誘起特性の評価

コンピュータ実験を進めるうえで、ネットワークに対する基本的なパラメータ設定を履歴性の時間減衰定数 $k_f = 0.5$, $k_r = 0.8$, 不応性項のスケーリングパラメータ $\alpha = 0.4$, 全ニューロンのしきい値 $\{\theta_i\} = 0$ (すなわち, $a = 0$), シグモイド関数の傾きパラメータ $\varepsilon = 0.015$, バイアス強度パラメータ $s = 0.70$ とする。また、ネットワークの初期状態はパターン R_1 とする。

図 4.3 上図はノイズを印加する前 (すなわち, $D = 0$) のネットワーク挙動の時系列変化である。ネットワークの挙動は、一方の記録パターン状態にしばらく停留した後に他方の記録パターン状態に ($m \simeq 1$ の R_1 状態と $m \simeq 0$ の R_2 状態の間を) 切り替わり、そしてまたそこにしばらく停留した後に切り替わるということを繰り返している。一方の記録パターン状態から他方の記録パターン状態への切り替わりの時間間隔は一定せず非周期である。また、複数回の切り替わりに渡る長い時間間隔で見ても周期的な繰り返しは見られず、記録パターン状態に停留中の小さな ($\Delta m \simeq 0.15$ 程度の) 非周期的ゆらぎの存在も考慮すると、かなり秩序性の低いものになっている。図 4.3 下図は、このネットワーク挙動に対する (3.10) 式による時間自己相関のグラフであるが、時間差 τ の増加にともなって速やかに相関が失われていくのがわかる。

上記のノイズ無し ($D = 0$) のときのネットワーク挙動は 3.2 節の 3 ニューロンの場合とよく似ており、ノイズ印加の影響も 3 ニューロンの場合と同様の結果が期待される。図 4.4 はガウス型白色ノイズを印加したときの固有相関量 C_p のノイズ強度依存性である。ノイズ強度 D がある程度大きく (今の場合, $D = 0.2$ 程度に) なるまで C_p 値にあまり変化がなく, $D = 0.3$ 付近で C_p 値が一度少し下がってからその後急激に上昇し, $D = 0.7$ で最大となった後は急激に下降していく。 $D = 0.7$ 付近でのピークの出現は、適当なノイズレベルで誘起秩序現象が生じている証拠

として理解でき、これまでの単一ニューロンや3ニューロンの場合と同様の傾向であると言える。しかし、 $D = 0.3$ 付近での下がりについてはにわかには解釈し難い。

そこで、図 4.4 中の代表点として $D = 0.001, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0$ のときの 8 点（図中の矢印箇所）を選び、これらの点に対応したネットワーク挙動およびその時間自己相関を図 4.5 で具体的に見ることとする。 $D = 0.001, 0.01, 0.1$ の場合において C_p 値はほとんど同じであるが、ネットワークの時系列挙動を見ると、 D が大きくなるにつれて記録パターン状態 R_1 付近 ($m \simeq 1$) に停留している機会が減少し、 R_2 付近 ($m \simeq 0$) に停留している時間が長くなってきている。切り替わりの時間間隔が長くなる（つまり、切り替わりの頻度が減る）ことは、時間差 τ の小さい側での時間自己相関 $C(\tau)$ を大きくし、 τ の大きい側での $C(\tau)$ を小さくするように作用する。実際、 $\tau < 50$ での $C(0) = 1$ からの落ちが少し緩やかになり、その一方で $\tau > 50$ での $C(\tau)$ の上下動が消失していく。これらの差し引きによる影響がこのノイズレベル範囲での C_p 値の微増減に反映している。 $D = 0.5 \sim 2.0$ の 4 つの場合は、局所安定状態である R_1 と R_2 の両パターン状態間の切り替わりを担える程度にノイズレベルが達した状況での振舞いであり、3ニューロンの場合と同等のノイズ誘起秩序が生じていると考えられる。

ところで、 C_p 値が下がっている $D = 0.3$ の場合についてであるが、ネットワーク挙動としては R_2 付近 ($m \simeq 0$) への停留が大部分を占めている。 R_1 ではなく R_2 への停留時間が長くなるのは R_2 状態のエネルギー ($E(\xi^{R_2}) = -112.5$) が R_1 状態のそれ ($E(\xi^{R_1}) = -110.2$) より低い ($\Delta E = 2.3$) ためであると考えられる。 $D = 0.1$ のときよりも $D = 0.3$ のときの方が C_p が低い理由を明らかにするために両者の場合の R_2 付近 ($m \simeq 0$) のリターンマップに着目する。リターンマップとは、ある時刻 t の重なり度 $m(t)$ を x 座標、次の時刻の重なり度 $m(t+1)$ を y 座標として平面上にプロットした時差座標表示のことである。図 4.6 がその様子であるが、上図の $D = 0.1$ のときの軌跡に比べて $D = 0.3$ のときの軌跡の方が乱雑さが増して複雑になっていることがわかる。なお、両者とも R_2 付近で非周期的にゆらいている共通の期間 ($t = 2844 \sim 3098$) をトレースしたものである。この挙動の差

が原因で、 $\tau < 50$ での $D = 0.3$ のときの $C(\tau)$ の落ち方が $D = 0.1$ のときより急になり、その結果 C_p 値が下がることになる。

図 4.7 はノイズタイプを一様乱数ノイズに変更した場合の、固有相関量のノイズ強度依存性である。白色ノイズの場合の図 4.4 と全体的に同様の傾向が見られる。ただ、第 3 章での単一ニューロンおよび 3 ニューロンの場合と同様の理由で、ノイズによる秩序誘起のピーク (C_p の極大点) の位置が白色ノイズの場合の $D = 0.7$ から $D = 1.0$ へと移動し、グラフ全体が D 値の大きい側へ少しシフトしている。

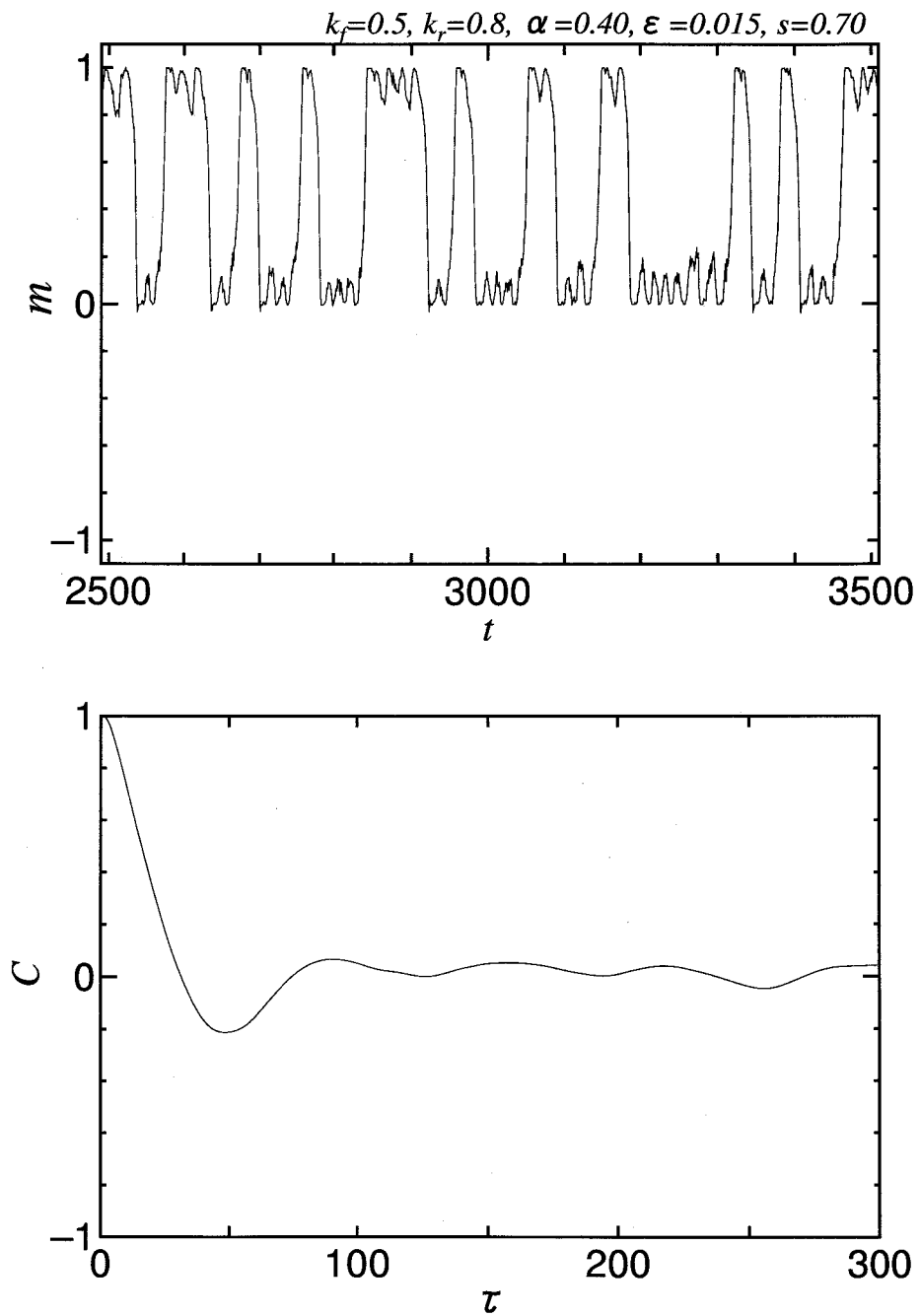


図 4.3 ノイズ無し ($D=0$) の場合のネットワーク挙動とその時間自己相関 ($N=144$ の場合)

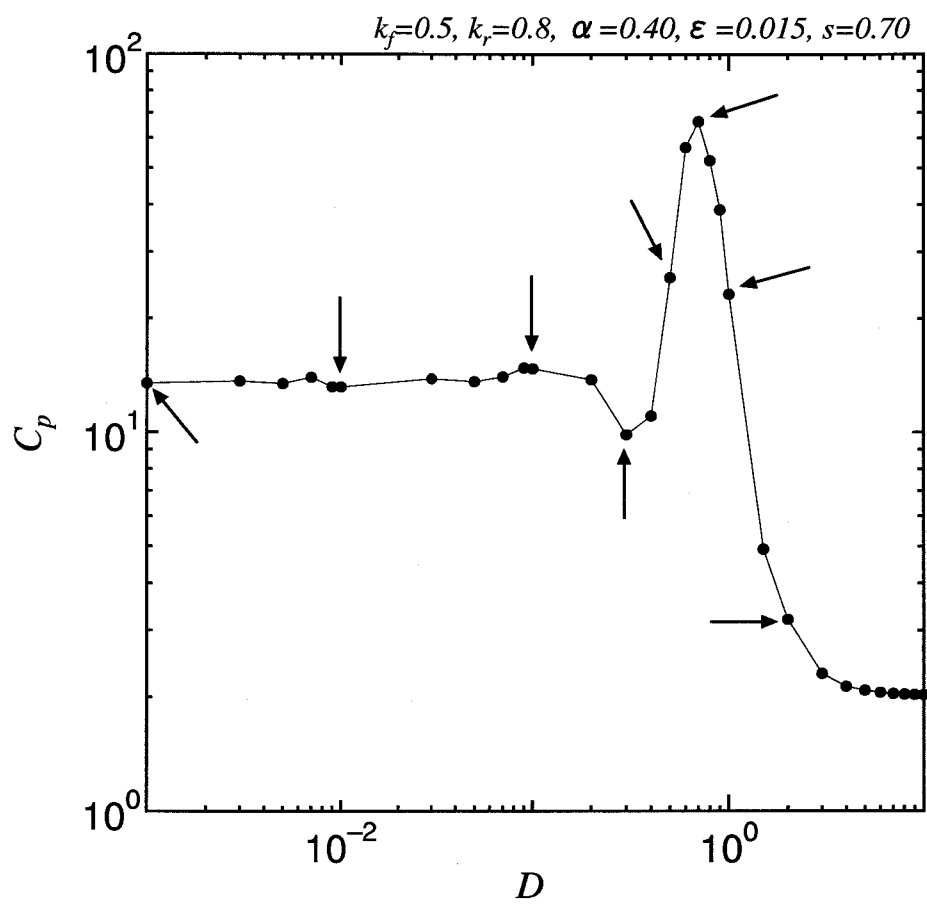
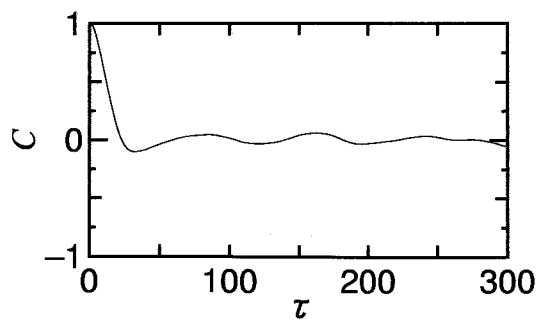
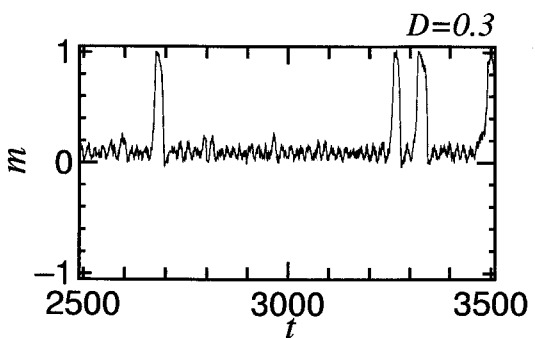
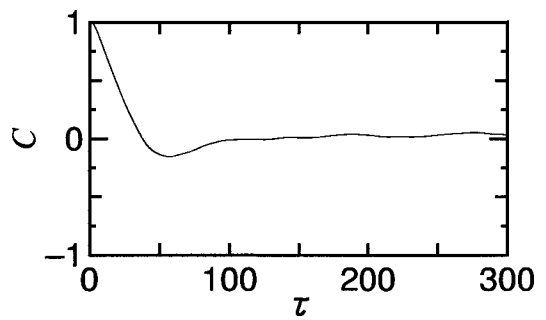
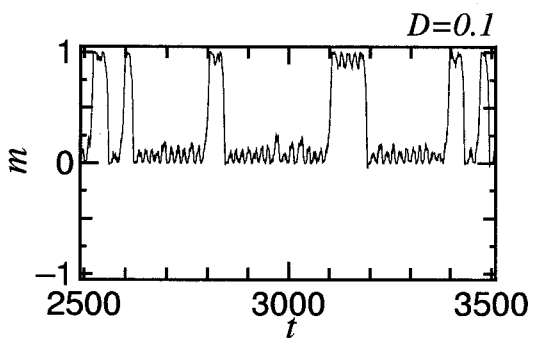
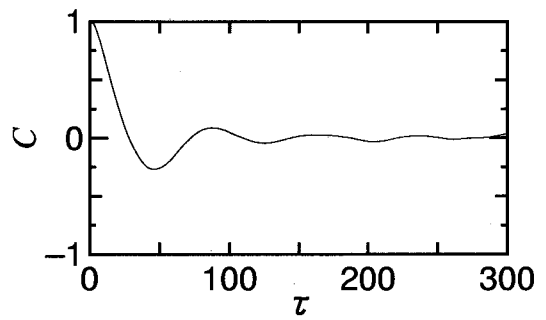
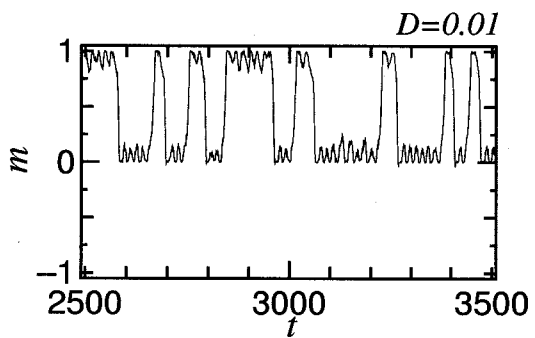
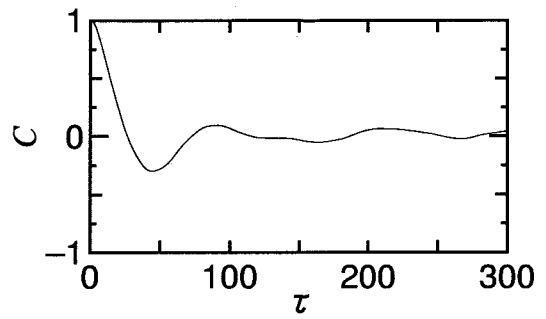
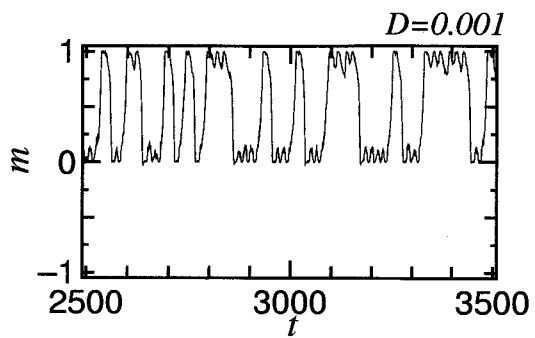


図 4.4 ネットワーク挙動における固有相関量のノイズ強度依存性 ($N = 144$ の場合)。(矢印箇所：図 4.5 への選択ポイント)



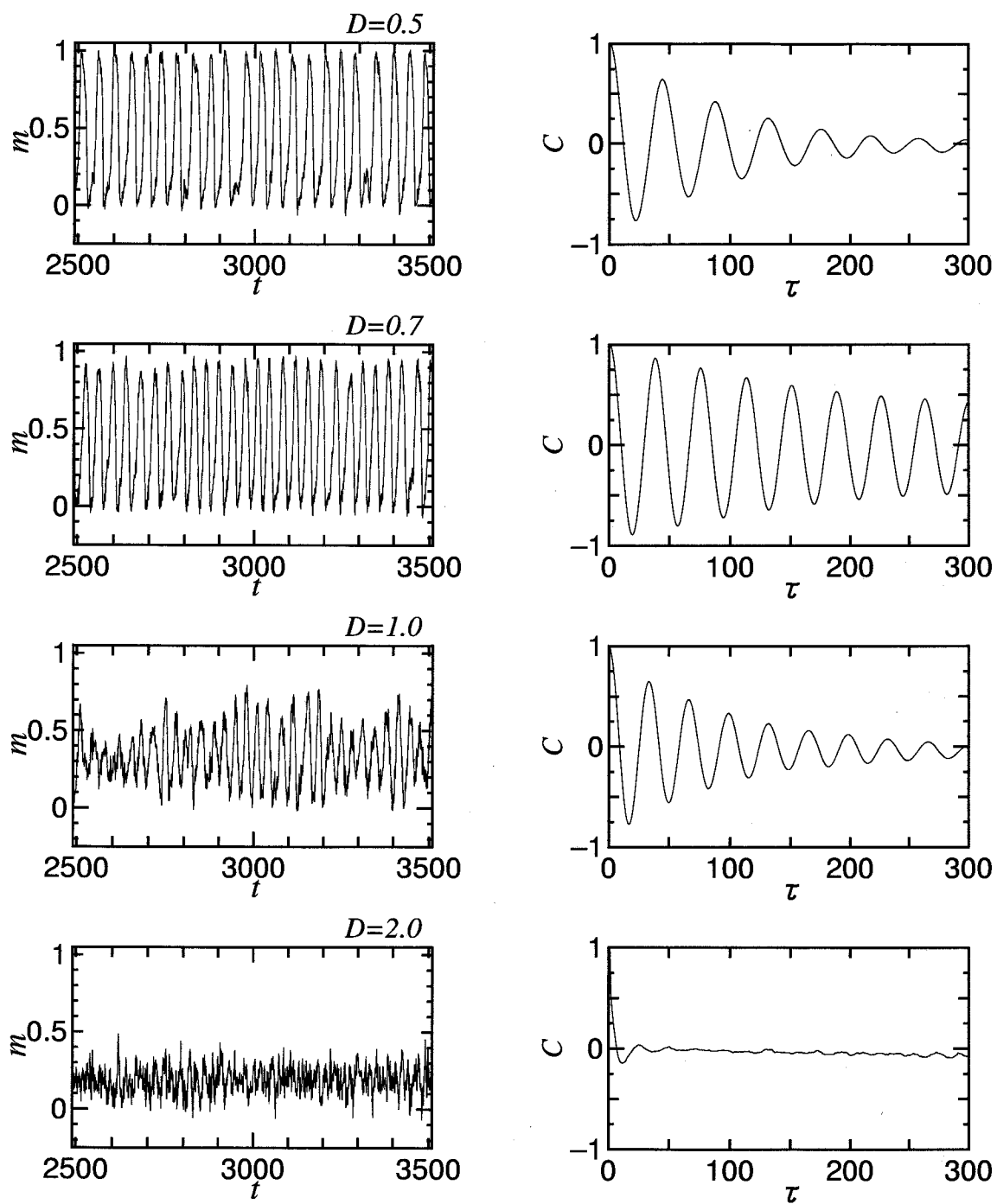


図 4.5 各ノイズ強度に対するネットワーク挙動とその時間自己相関 (図 4.4 中の矢印 8 箇所に対する, $N = 144$ の場合)

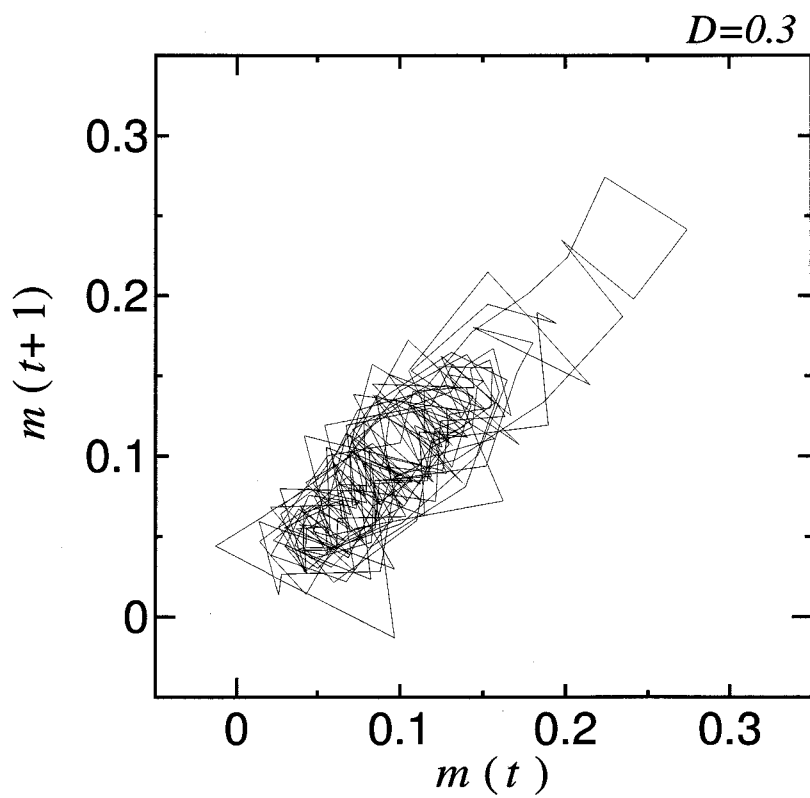
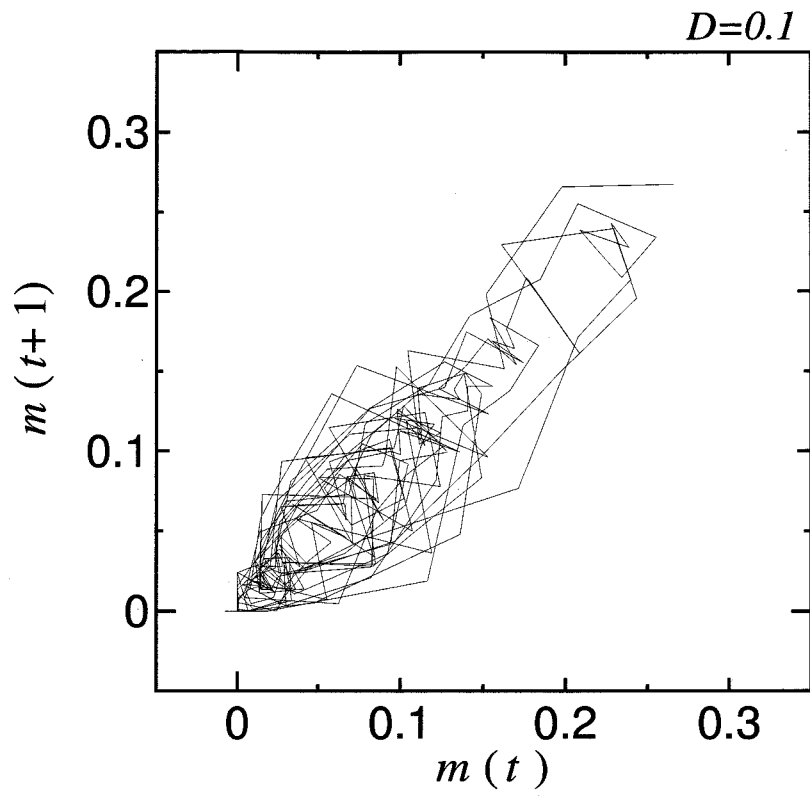


図 4.6 ネットワーク挙動のリターンマップ ($t = 2844 \sim 3098$ に対する
上図 $D = 0.1$, 下図 $D = 0.3$ の場合)

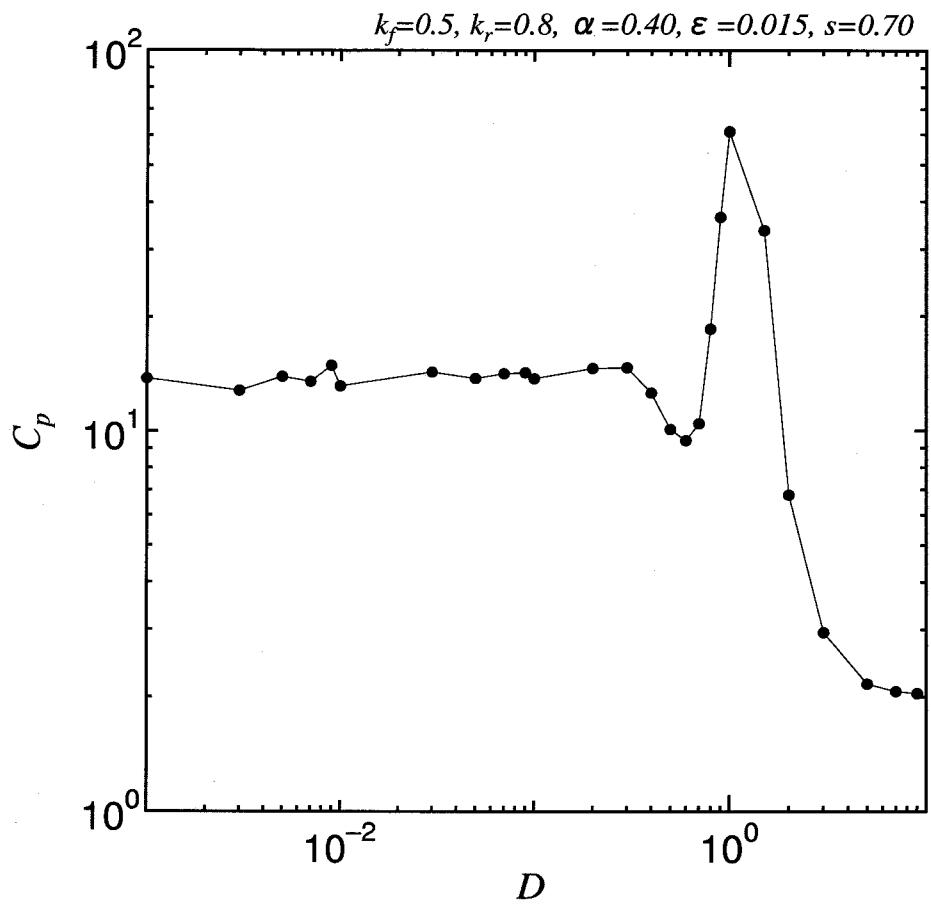


図 4.7 ネットワーク挙動における固有相関量のノイズ強度依存性
($N = 144$, 一様乱数ノイズの場合)

4.2 カオス性との関係性評価

4.2.1 リアプノフ指数の導入

ニューロンの状態がカオス性を有するかどうかを定量的に評価するためにはリアプノフ指数 [19] [20] の導入が必要になる。この指標は、カオスの特徴である初期値敏感性（決定論的に発展する系に対する初期条件の微少な差異が、時間とともに指数関数的に拡大される性質）を検出できる。図 4.8 は微少な差異の存在が、基準とする軌道のその後どのような変化を及ぼす可能性があるかを図示したものである。時刻 t_0 において、対象とする系の発展方程式の基準軌道 $y(t)$ に微少な差異 $dy[t_0]$ を加える。時間発展にともなって、差異が減少し基準軌道に戻る場合には $y(t)$ は平衡安定であり、差異が増加し基準軌道から大きく離れていく場合には差異敏感なカオス性を持つ。そして、差異の増減がない場合には周期性を持つ。

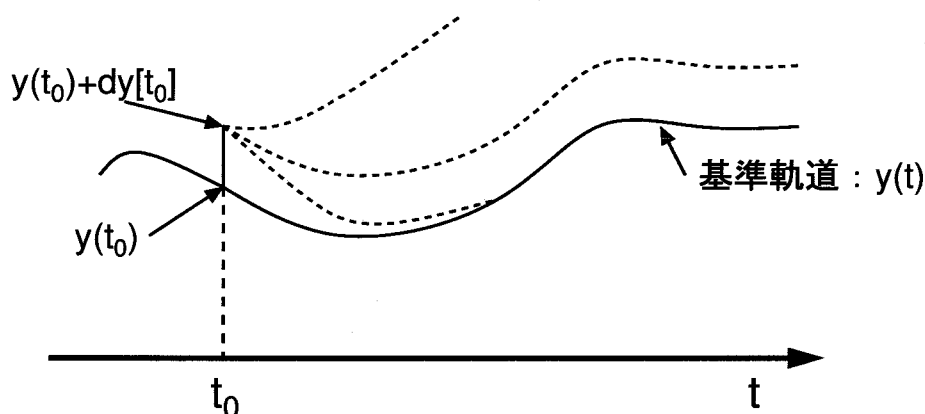


図 4.8 微少差異によるその後の軌道変化の概念図

この性質を定式化するために、微少差異 $dy[t_0]$ の時刻 t での発展形をパラメータ λ を用いて

$$dy[t] = dy[t_0]e^{\lambda(t-t_0)} \quad (4.2)$$

の形に表現すると、時間発展 ($t \rightarrow$ 大) とともに、 $\lambda < 0$ のとき $dy \rightarrow 0$ (平衡安定性)、 $\lambda > 0$ のとき $dy \rightarrow$ 増大 (カオス性)、そして $\lambda = 0$ のとき $dy = dy[t_0]$ (周期性)

)となり、 λ の正負によって系の挙動の特性が評価できる。このパラメータ λ がリアプノフ指数と呼ばれる評価尺度であり、(4.2)式を λ に対して解くと

$$\lambda = \frac{1}{t - t_0} \log_e \frac{dy[t]}{dy[t_0]} \quad (4.3)$$

が得られる。系が離散時間系の場合は $t = t_0 + n$ と記述できるので

$$\lambda = \frac{1}{n} \log_e \frac{dy[n]}{dy[0]} \quad (4.4)$$

となる。

単一のカオスニューロンモデルでの実際の計算手順としては、ニューロンの内部状態 $y(t)$ に対して $y(t) + dy[0]$ を考え、それを(2.9)式に代入すると

$$y'(t+1) = k(y(t) + dy[0]) - \alpha f(y(t) + dy[0]) + a \quad (4.5)$$

$$f(y + dy) = \tanh((y + dy)/2\varepsilon) \quad (4.6)$$

となり、1step時間後($n = 1$)の $dy[1] = |y'(t+1) - y(t+1)|$ が得られる。コンピュータ実験では、この1stepごとの評価を経時的に繰り返し T 回行ない、その平均から(4.4)式に相当するリアプノフ指数

$$\lambda = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log_e \frac{dy[1]}{dy[0]} \quad (4.7)$$

を求める。

また、複数のニューロンからなるニューラルネットワークモデルにおけるリアプノフ指数は、対象とする系の自由度数だけ存在する。その中で最も大きい値を与えるリアプノフ指数を最大リアプノフ指数といい、その最大リアプノフ指数は

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|d_i(\tau)|}{|d_i(0)|} \quad (4.8)$$

ただし

$$d_i(0) = d_{i-1}(\tau) \cdot \frac{|d_0(0)|}{|d_{i-1}(\tau)|}$$

で定義される。ここで、 τ は時間間隔、 d_i は基準軌道からのズレのベクトル、 $|\quad|$ はベクトルの大きさを表す。(4.8)式は、基準軌道に与えられたズレ $d_i(0)$ が時間 τ

の間に $d_i(\tau)$ に発展したとすると、その離れ方を両者の比の対数の時間平均で評価するものである。リアプノフ指数の詳細については付録 F を参照のこと。そして、対象とする系が正の最大リアプノフ指数を有する場合には、基準軌道からのズレが時間とともに指数関数的に増大することとなり、カオスの特徴である初期値敏感性が存在することになる。

ニューラルネットワークモデルでの実際の計算手順としては、ネットワークを構成する N 個のニューロンの内部状態 η_i, ζ_i を成分とする N 次元ベクトル基準軌道

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\zeta}(t)) \equiv (\eta_1(t), \dots, \eta_N(t), \zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t))$$

に対して (4.8) 式を適用する。そのとき、1 ステップ時間ごとにズレを評価する ($\tau=1, l=t$) ことにすると、基準軌道からのズレのベクトルの逐次変化は

$$(\boldsymbol{\eta}(0), \boldsymbol{\zeta}(0)) + \mathbf{d}_0(0) \rightarrow (\boldsymbol{\eta}(1), \boldsymbol{\zeta}(1)) + \mathbf{d}_0(1),$$

⋮

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\zeta}(t)) + \mathbf{d}_t(0) \rightarrow (\boldsymbol{\eta}(t+1), \boldsymbol{\zeta}(t+1)) + \mathbf{d}_t(1),$$

⋮

$$(\boldsymbol{\eta}(t+1), \boldsymbol{\zeta}(t+1)) + \mathbf{d}_{t+1}(0) \rightarrow (\boldsymbol{\eta}(t+2), \boldsymbol{\zeta}(t+2)) + \mathbf{d}_{t+1}(1),$$

を (2.15), (2.16) 式を通して具体的に計算することにより与えられる。計算では、基準軌道に与える初期のズレベクトル $\mathbf{d}_0(0) = (\delta\eta_1, \dots, \delta\eta_N, \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_N)$ の成分は全ニューロンとも同じ $\delta\eta_i = \delta\zeta_i = 10^{-8}$ とした。

4.2.2 固有相関量とリアプノフ指数の関係性

3.1 節の単一ニューロン ($a = 0.612$) の場合における固有相関量のノイズ強度依存性のグラフ (図 3.9) に対応させて、各ノイズ強度ごとにそれぞれのニューロン挙動のリアプノフ指数を求め、一緒に図示したものが図 4.9 である。両者を比較すると、ノイズ強度が 5×10^{-3} 付近でリアプノフ指数 λ が正から負へと変化し、そ

れと呼応するように固有相関量 C_p が上昇し始める．そして， C_p のピークのところでは λ は負となっている．このことは，ノイズの印加による誘起秩序はカオス状態から秩序状態への転移の出現であることを示唆している．図 4.10 の上図は図 4.9 の C_p と λ を共通の D によって結び付け，その相関図を構成したものである．この図からも C_p の高い領域が $\lambda < 0$ において存在するのが確認できる．下図はノイズタイプが一様乱数ノイズの場合のものであるが，上図のガウス型白色ノイズの場合とほぼ同じ結果を示している．また図 3.11 の $a = 0.750$ の場合についても同様の結果を得ている．

ところで，ここで一つ注意しておかねばならないことがある．それは，ノイズ存在下でのリアプノフ指数の計算結果を元々決定論的系に対して定義された指数と同じものとして受け取ることはできないということである [21]．というのは，4.2.1 節でも述べたようにリアプノフ指数は基準軌道に対する安定性の指標であるので，軌道の概念がノイズの存在によって失われると意味を持たなくなるからである．つまり，ノイズの印加が元の決定論的方程式に従う軌道をたとえその程度は小さくても，切れ切れに壊す役割を果たすことになるからである．とは言うものの，コンピュータ実験の下では使用する乱数系列の管理によって，本来再現不可能なノイズ時系列のパターンを再構成することができるので，ノイズを含めた形で基準軌道を設定し，形式的に (4.7) 式の λ を計算することができるわけである．

次に，3.2 節の 3 ニューロンからなる自己想起型ネットワークの場合 (図 3.19) に対する結果が図 4.11 である．この場合にも単一ニューロンの場合と同様，最大リアプノフ指数 λ_1 が正から負に転ずる $D = 2 \times 10^{-2}$ 付近から C_p が立ち上がっていくのがわかる．図 4.12 には $\lambda_1 - C_p$ 相関図を示したが， $\lambda_1 < 0$ において C_p の高い領域が得られている様子は単一ニューロンの場合と同様である．

さらに，4.1 節の 144 ニューロンからなる自己想起型ネットワーク場合 (図 4.4) について最大リアプノフ指数 λ_1 を求めたのが図 4.13 である．この場合は単一ニューロン，3 ニューロンの場合の上記の結果と異なり， C_p 値の高いノイズ強度 D の値域においても λ_1 は正から負に転ずることもなく正值を保持している．この場合の $\lambda_1 - C_p$ 相関図の図 4.14 からも C_p の高い領域が $\lambda_1 > 0$ において成立しているの

がわかる．このようにニューロン数（すなわち，系の自由度）の大小によって傾向が大きく異なる理由としては以下のことが考えられる．一般にリアプノフ指数は対象とする系の自由度数分（自由度が n のとき， $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ ）あるが，実験では最大リアプノフ指数 λ_1 （全部の中で最大のもの）1個だけを評価尺度として採用している．したがって，ノイズの存在によって大部分のリアプノフ指数（ $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots$ ）が正から負へ転じても幾つかのもの（ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ）はなお正を保持している可能性がある．つまり，ノイズの印加によりネットワーク全体としてはカオス性が弱まっているが，それが λ_1 からだけでは見えてこないという可能性がある．これらの点については，ノイズの入った系でのリアプノフ指数概念の不明確さに関する先の議論も踏まえて，さらなる検討が必要である．

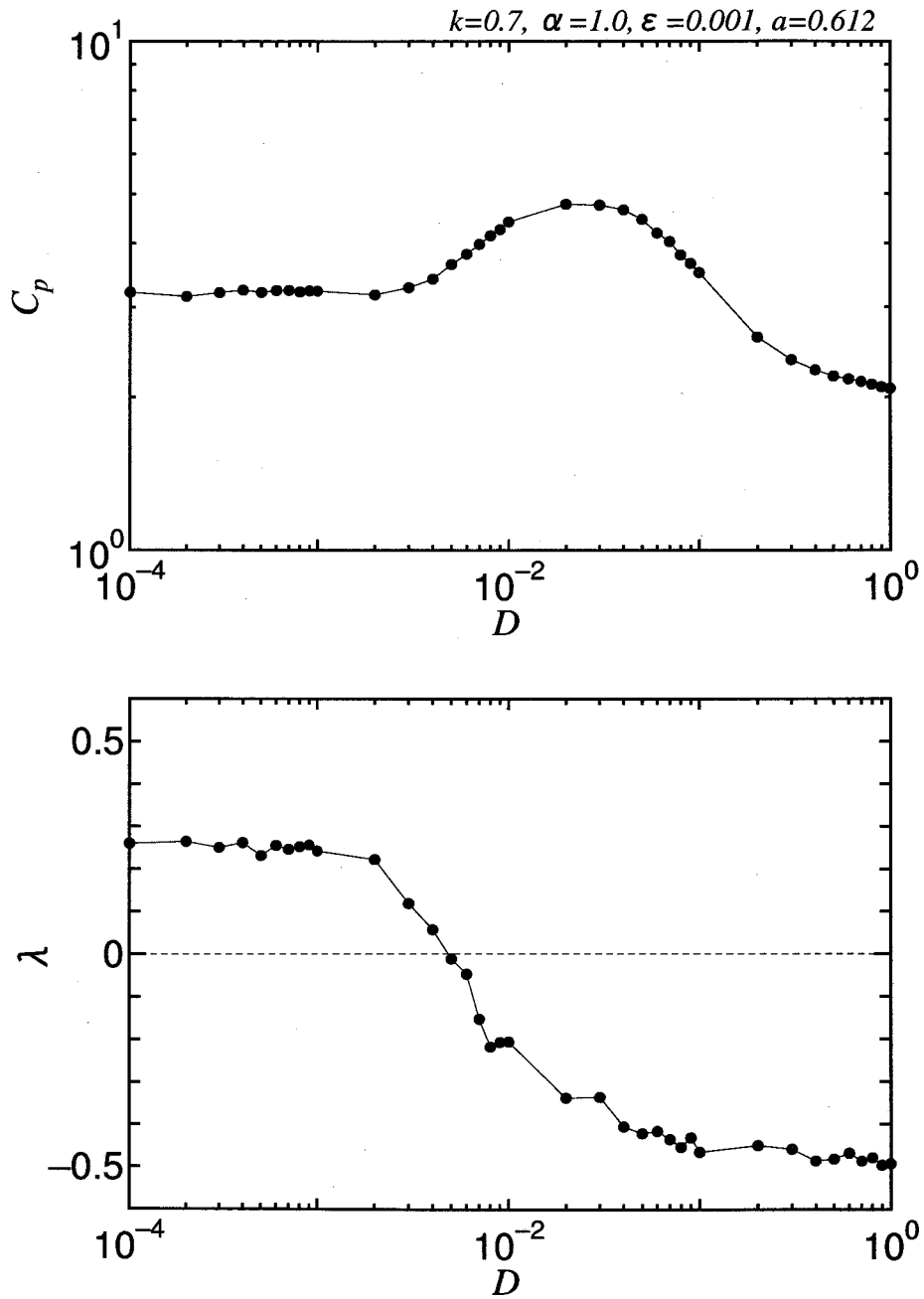


図 4.9 ニューロン挙動における固有相関量およびリアプノフ指数のノイズ強度依存性 (単一ニューロン, $a = 0.612$, ガウス型白色ノイズの場合)

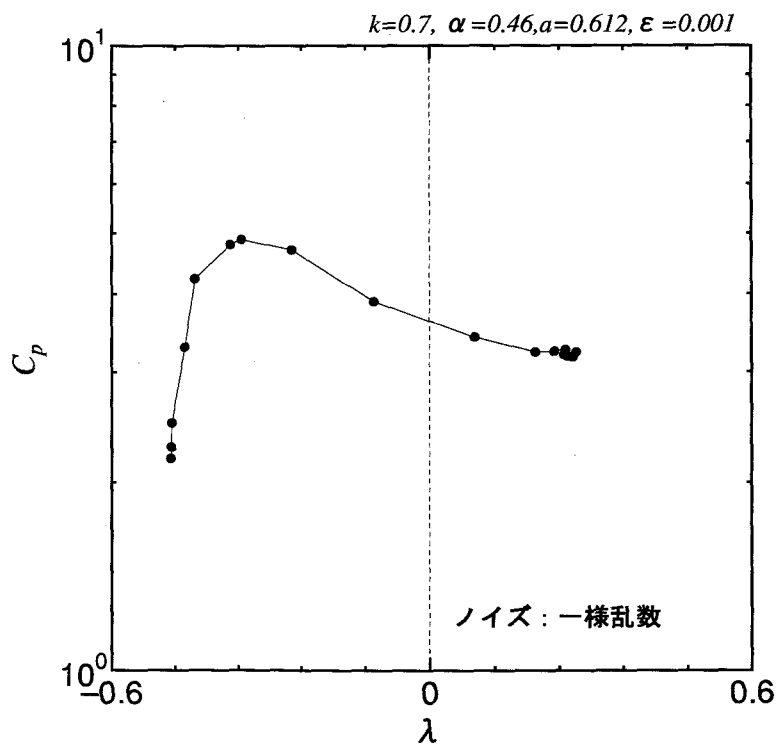
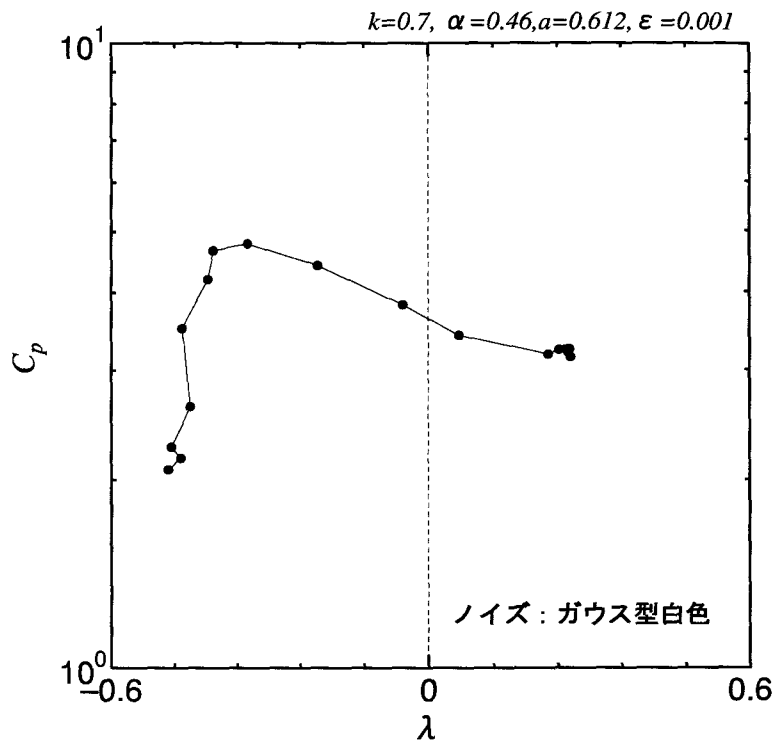


図 4.10 固有相関量とリアプノフ指数の相関図 (単一ニューロン, $a = 0.612$ の場合)

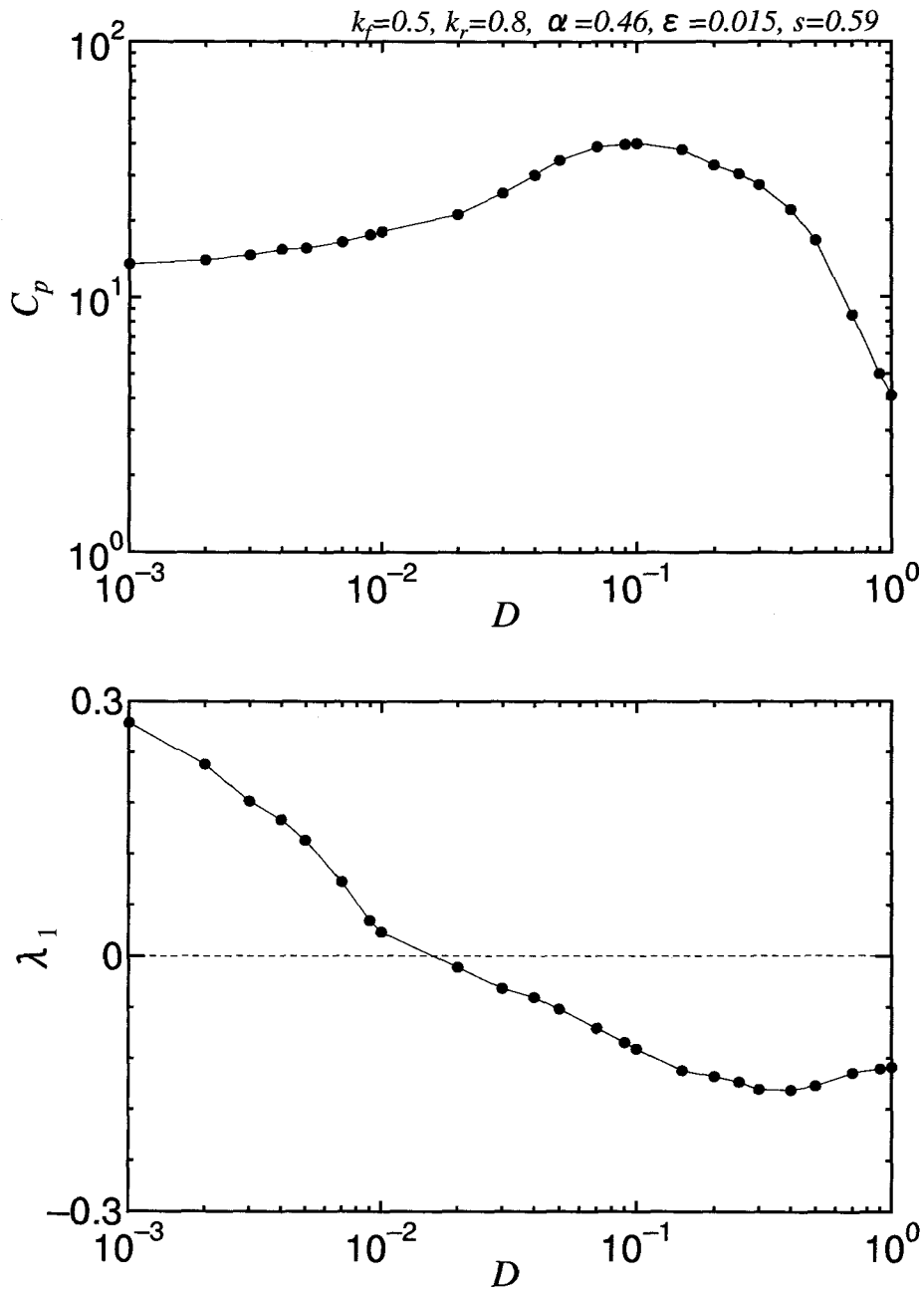


図 4.11 ネットワーク挙動における固有相関量および最大リアプノフ指数のノイズ強度依存性 ($N=3, \alpha=0.46, s=0.59$, ガウス型白色ノイズの場合)

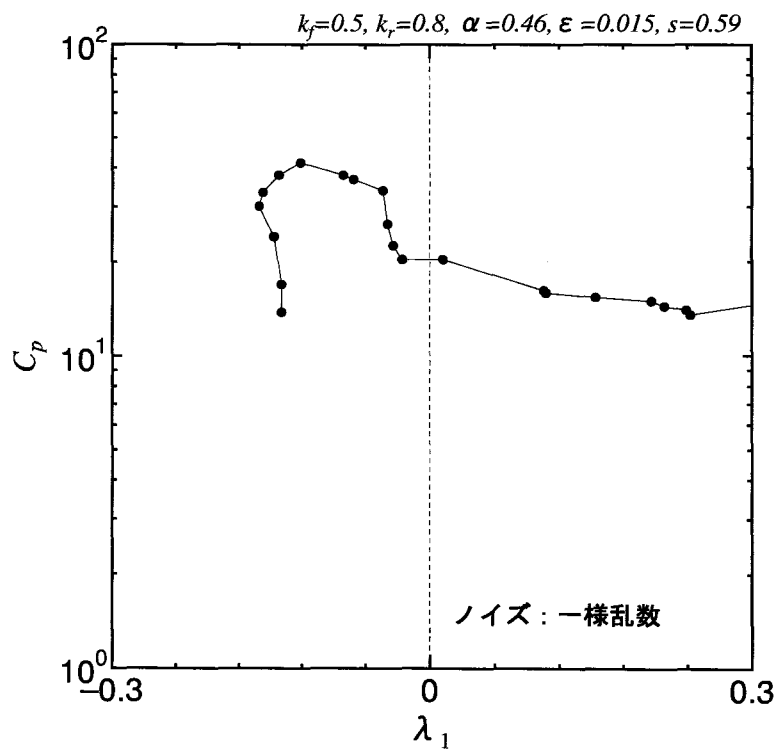
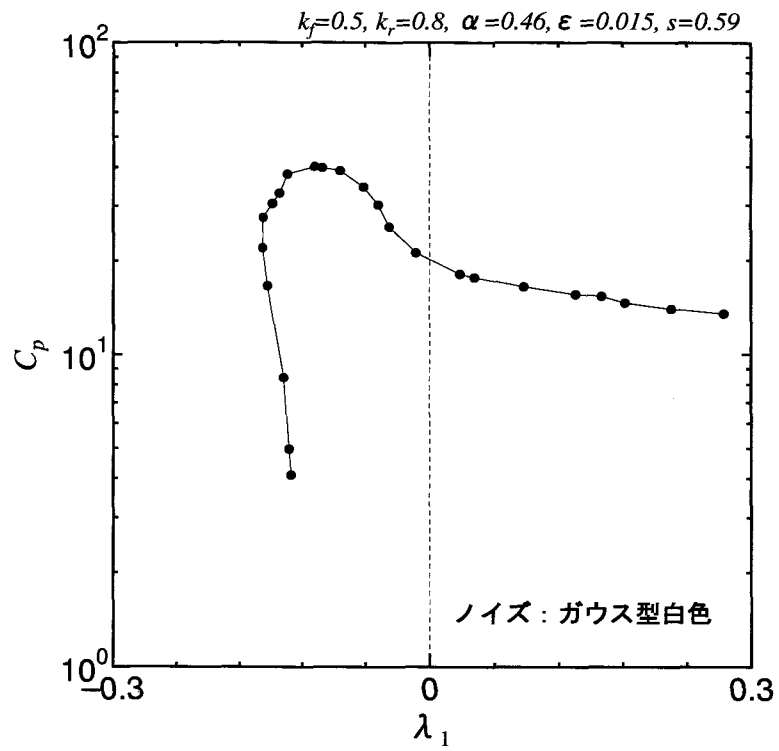


図 4.12 固有相関量と最大リアプノフ指数の相関性 ($N = 3, \alpha = 0.46, s = 0.59$ の場合)

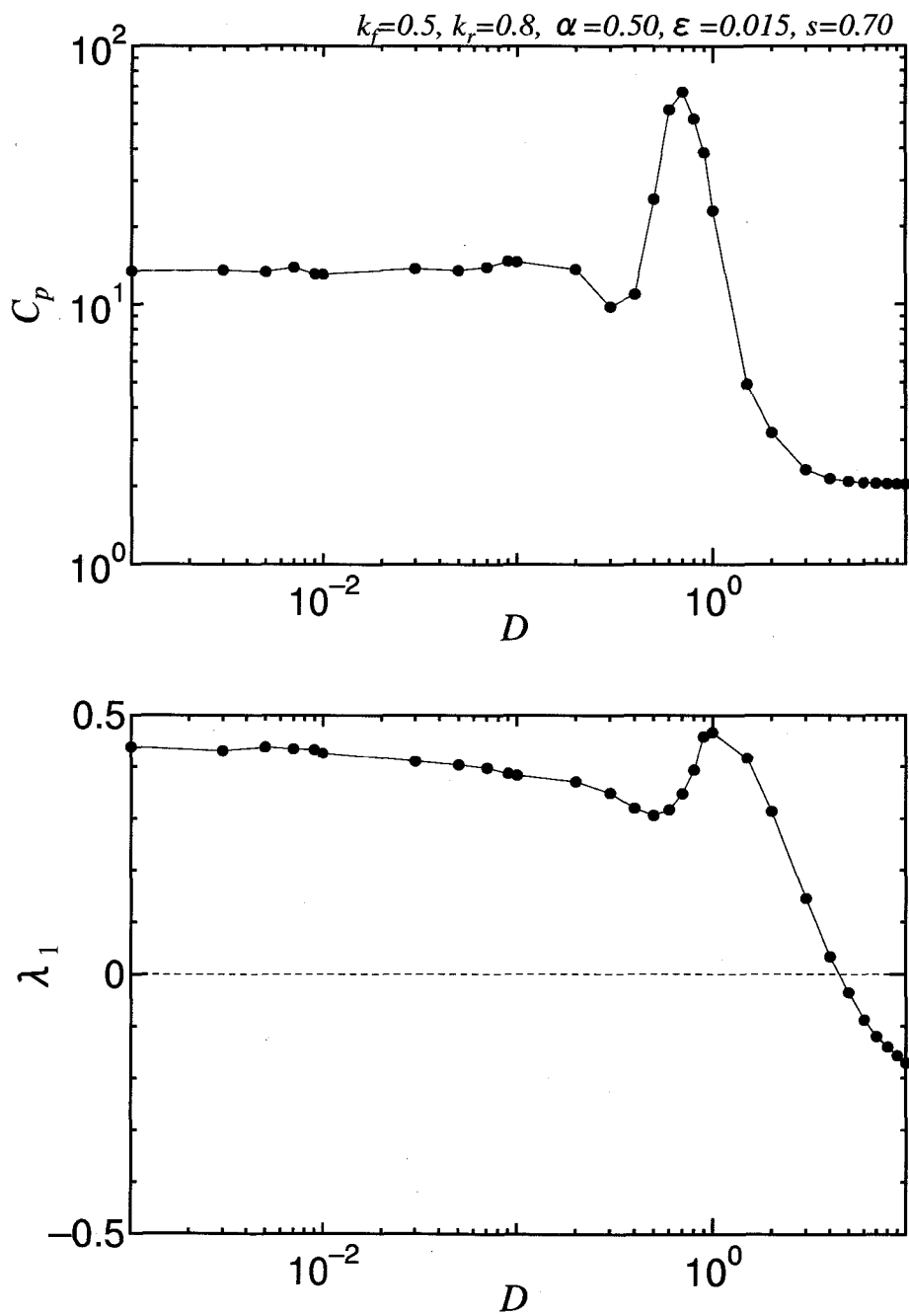


図 4.13 ネットワーク挙動における固有相関量および最大リアプノフ指数のノイズ強度依存性 ($N = 144$, ガウス型白色ノイズの場合)

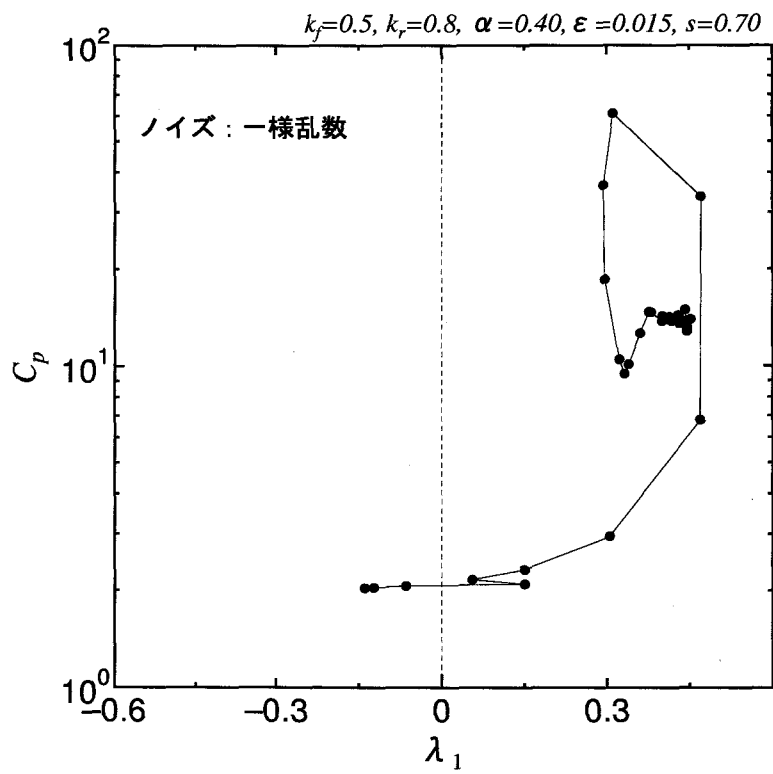
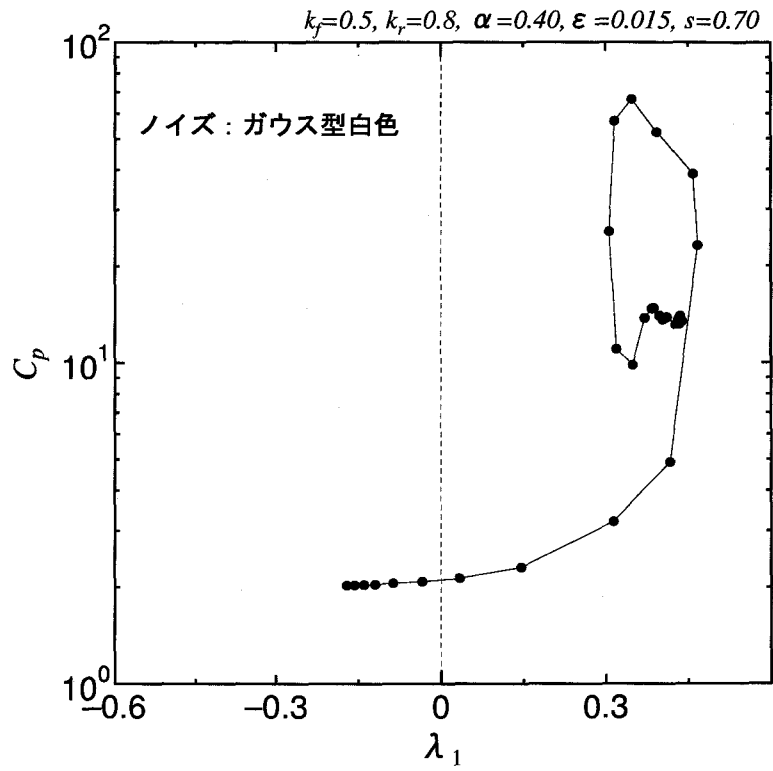


図 4.14 固有相関量と最大リアプノフ指数の相関性 ($N = 144$ の場合)

第5章 結論と今後の課題

本研究では，単一でカオス性を持ち得るカオスニューロン，およびその相互結合によって構成される自己想起型のカオスニューラルネットワークにおいて，ノイズの存在がこれらのシステムの挙動に及ぼす影響をコンピュータ実験を通して詳しく検討した．その結果，適度な大きさ（強度）のノイズ存在下でカオスニューロンおよびそのネットワークの挙動が秩序立つ，ノイズ誘起秩序（NIO）の生起が確認された．

具体的には，ノイズを印加された単一ニューロン，3ニューロンからなる小規模な自己想起型ネットワーク，および144ニューロンからなる大規模な自己想起型ネットワークの経時挙動に対して時間自己相関と固有相関量を求め，これを尺度として挙動の秩序性の度合いを評価した．その結果，ノイズ強度が高くなると固有相関量が上がり，ある一定値を越えると再び C_p が下がっていく．つまり，適度なノイズの存在によりニューロンおよびネットワーク挙動に秩序性が誘起されることが確認できた．リアプノフ指数の評価結果を考慮すると，単一ニューロンと3ニューロンの場合はカオスから非カオスの秩序状態への転移であるが，144ニューロンの場合に出現した秩序状態は一部の次元にカオス性を残したままであると解釈できる．また以上の結果は，ノイズタイプがガウス型白色ノイズ，一様乱数ノイズのいずれであっても傾向に大差はなかった．

今後の課題としては，まず，上記で述べた小自由度と大自由度との間でノイズ誘起秩序状態の性質に差が出てくる，そのメカニズムの解明が挙げられる．そのためには中規模（ $N = 20$ 程度）のネットワークサイズで実験を行ない，その結果を分析することが考えられる．また，最大リアプノフ指数だけではなく，リアプノフスペクトルとして複数のリアプノフ指数を見るのも有効である．その際，ノイズの入った系でのリアプノフ指数概念の不明確さにも留意する必要がある．次

に，システム挙動の秩序性評価のための新しい尺度の検討が挙げられる．本研究では時間自己相関とそれに基づく固有相関量を用いたが，その他にエントロピーや情報量，またリアプノフ指数と関係のあるフラクタル次元などの適用が考えられる．最後に，実際の神経細胞や脳内の神経細胞集団の活動も，熱的あるいは電氣的擾乱によるノイズに常にさらされていると考えられる．本研究でのノイズ誘起秩序の現象が脳の情報処理において積極的に機能している可能性についての検討も将来の課題として挙げておく．

謝 辞

兵庫教育大学大学院（総合学習系コース）での2年間の研究におきまして，懇切丁寧にご指導いただきました西村治彦先生，森広浩一郎先生の両先生に深く感謝し，心よりお礼を申し上げます。また，研究を遂行するにあたりご協力いただきました長尾夏樹先生に深く感謝し，お礼申し上げます。

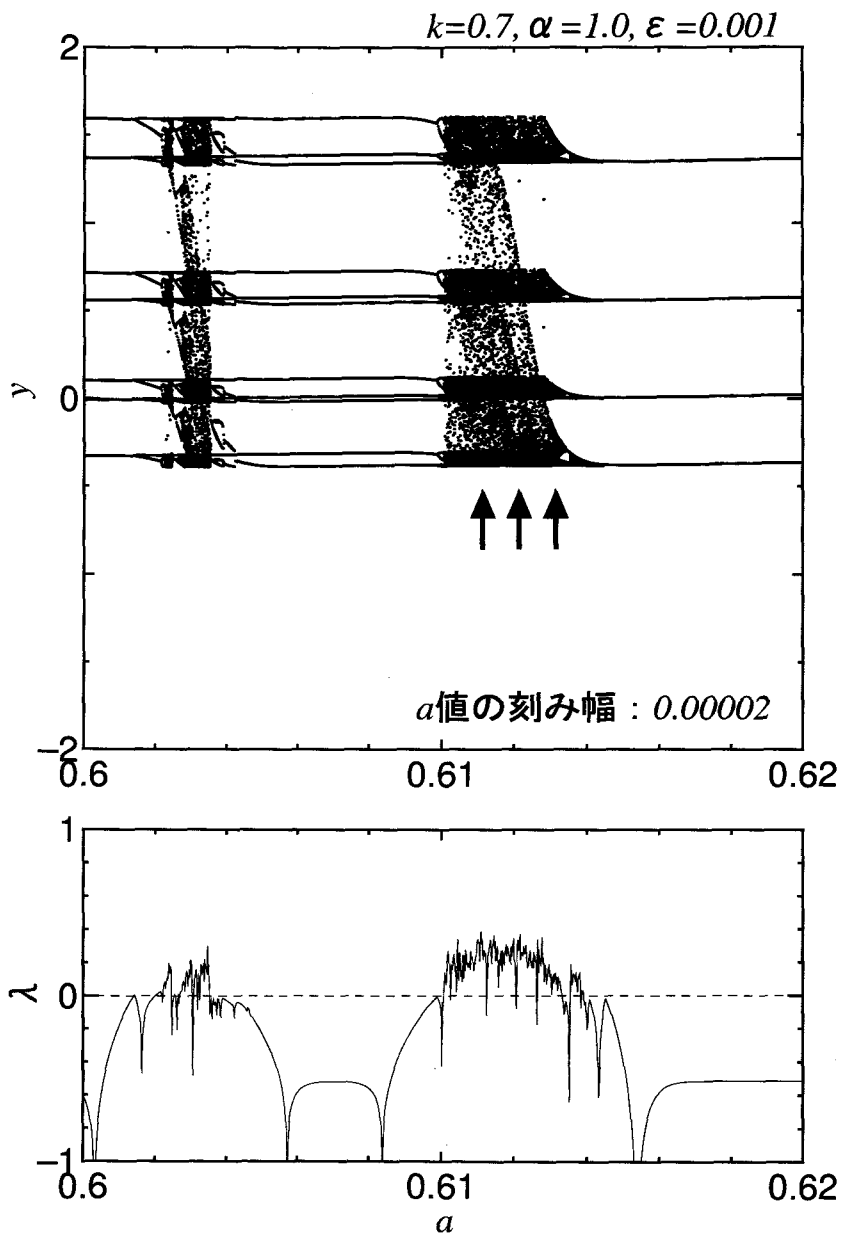
さらに，いろいろな場におきまして，貴重なご助言と暖かい励ましをいただきました総合学習系コースの先生方に感謝いたします。

加えて，総合学習系コースの院生の皆様方からは多くのことを学びました。皆様の姿はとても励みになり，教師を目指す私としましては大変充実した時間を過ごすことができました。本当にありがとうございました。

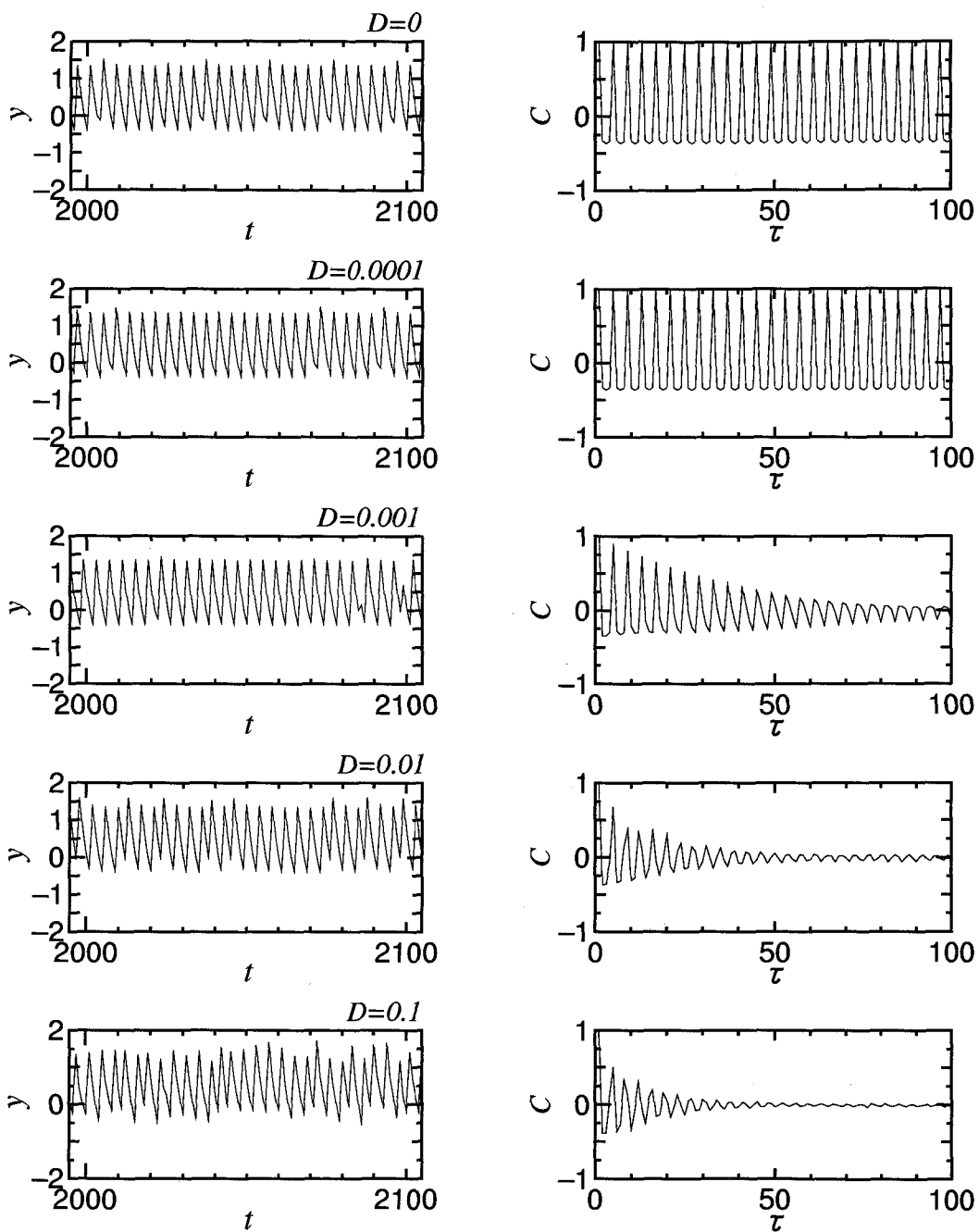
最後に，この貴重な2年間で皆様方から学ばせていただいたことは，今後の人生に役立つものになることと思います。ありがとうございました。

平成 13(2001) 年 12 月 20 日 藤澤 弘典

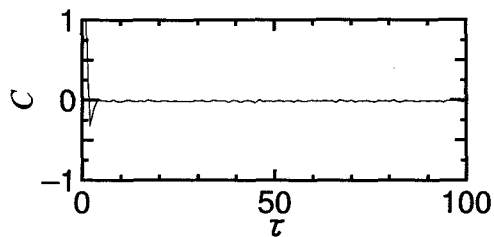
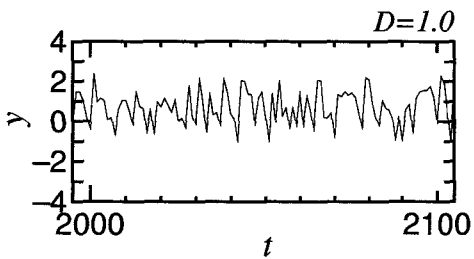
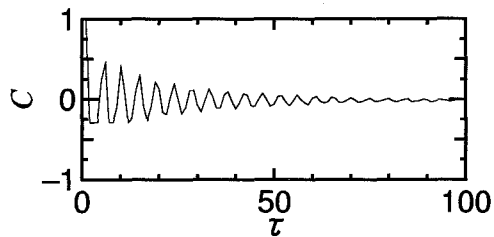
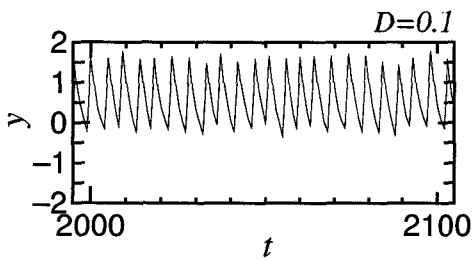
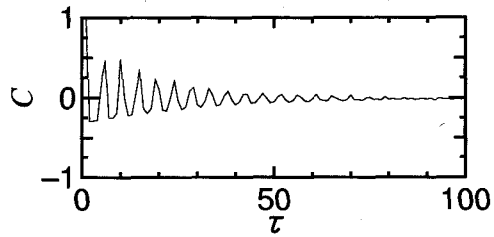
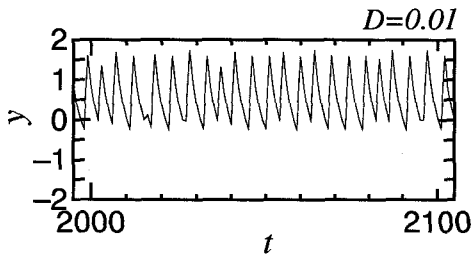
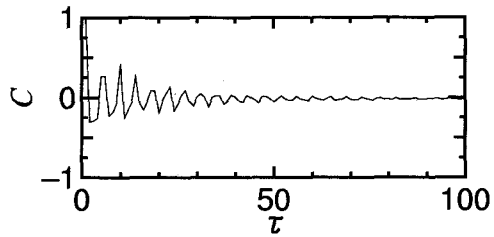
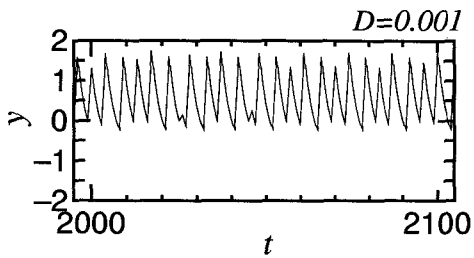
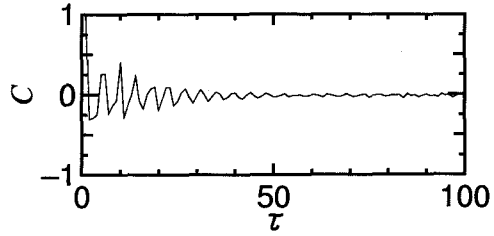
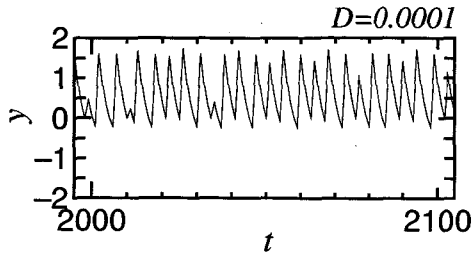
付録 A. $a = 0.6$ 付近の拡大分岐図およびリアプノフ指数

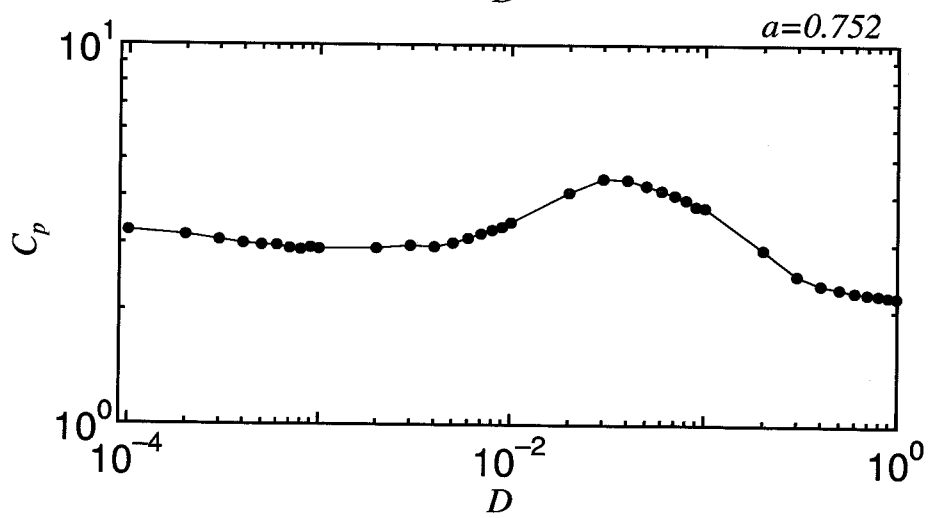
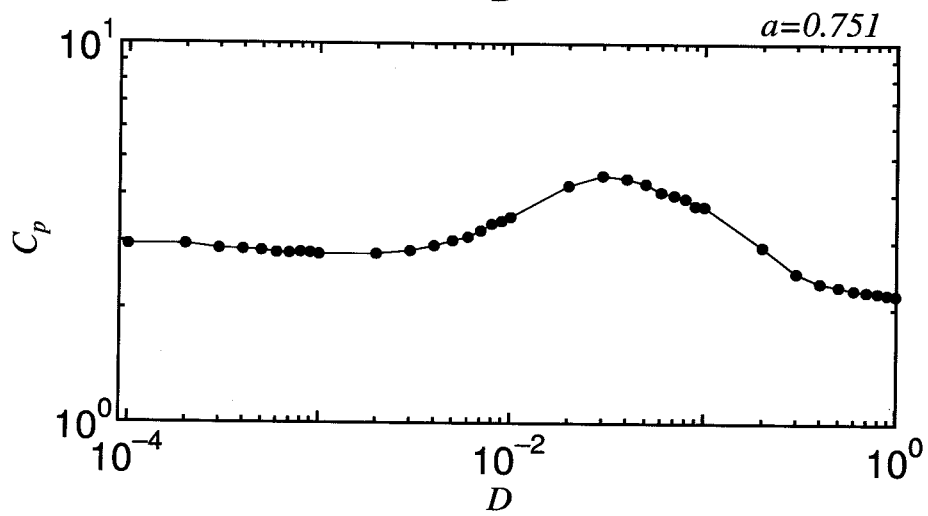
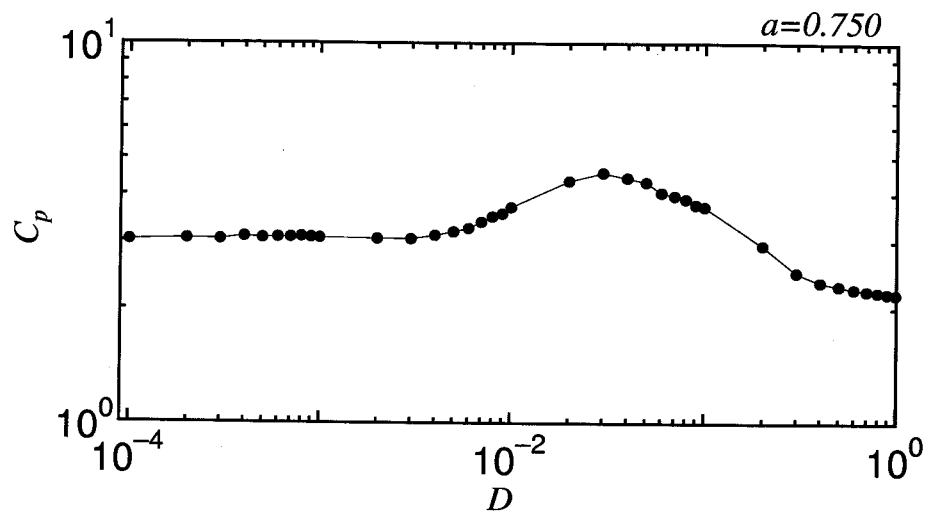


付録B. $a = 0.613$ の場合の時間自己相関

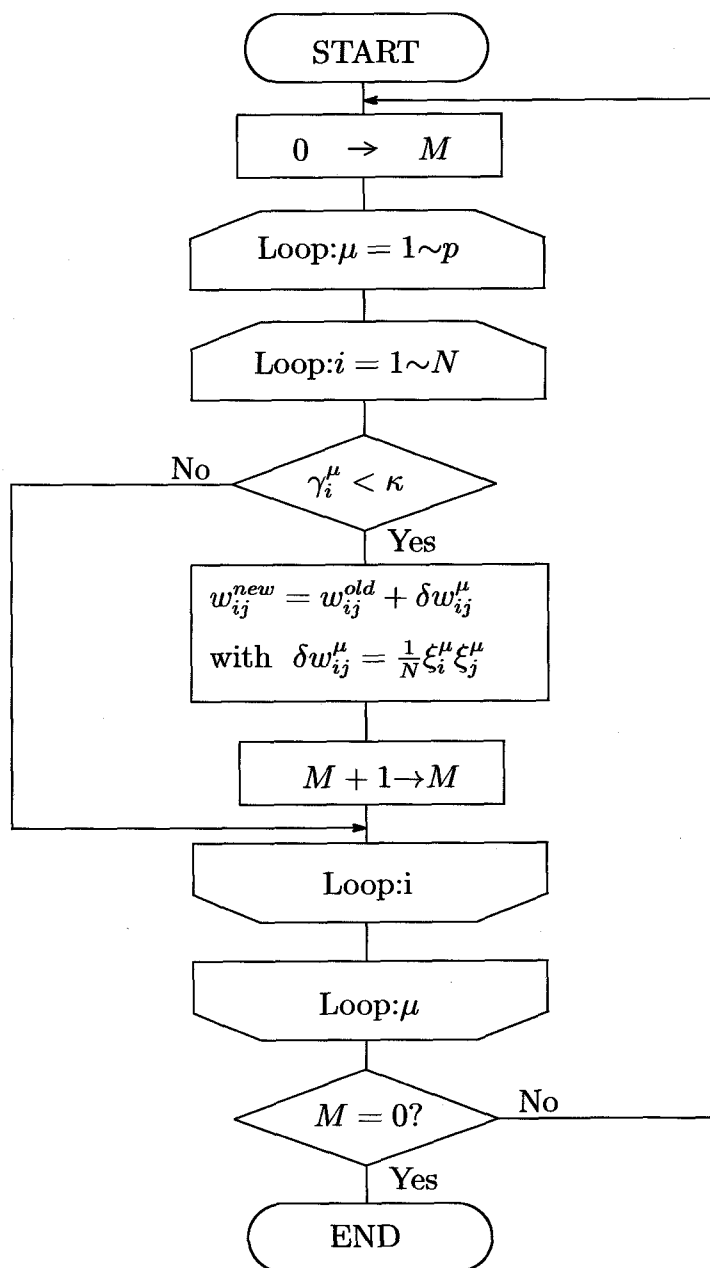


付録C. 一様乱数ノイズ下での実験結果 ($a = 0.750$ の場合)



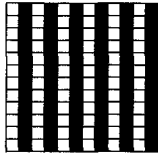


付録D. 逐次学習アルゴリズムのフローチャート

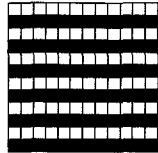


付録E. 実験に用いた記銘パターン

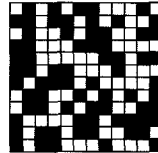
R₁



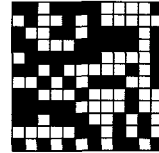
R₂



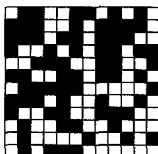
R₃



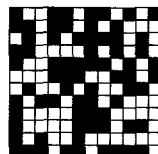
R₄



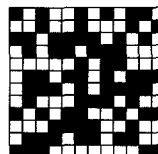
R₅



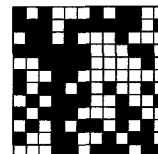
R₆



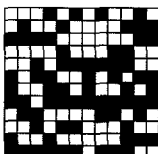
R₇



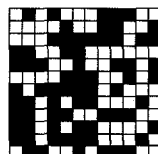
R₈



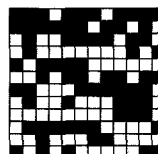
R₉



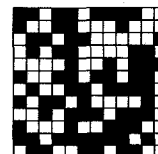
R₁₀



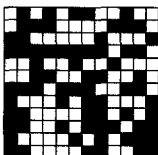
R₁₁



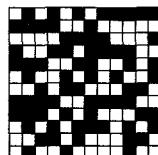
R₁₂



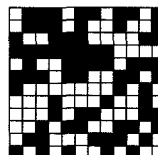
R₁₃



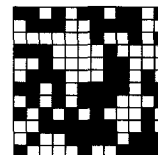
R₁₄



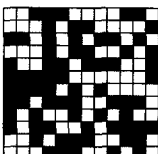
R₁₅



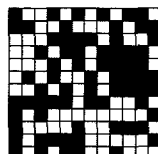
R₁₆



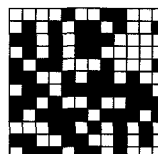
R₁₇



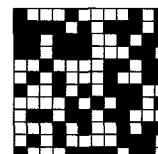
R₁₈



R₁₉



R₂₀



付録F. リアプノフ指数

カオスにおいては，決定論的な方程式に対する初期条件の微少なズレが時間とともに指数関数的に拡大される初期値敏感性が存在する．リアプノフ指数は方程式によって決定される軌道の安定度を特徴づける量であり，カオスかどうかを判定する有効な尺度の1つである [19] [20]．

自由度が n の系の発展方程式として

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{F.1})$$

を考える．この常微分方程式の解を $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ と表し，解の振舞いを軌道と呼ぶことにする．いま，一つの軌道 $\mathbf{X}_0(t)$ に対して $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \delta\mathbf{X}(t)$ を考える．(F.1) 式に代入して基準となる軌道 $\mathbf{X}_0(t)$ からの微小変位 $\delta\mathbf{X}(t)$ に関して線形化した式は

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{X}_0(t)} \delta x_j \quad (\text{F.2})$$

となる．

ここで $\mathbf{d}(t) = (\delta x_1(t), \delta x_2(t), \dots, \delta x_n(t))$ ， $|\mathbf{d}(t)| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t)}$ を導入すると， $|\mathbf{d}(t)|$ は基準となる軌道 $\mathbf{X}_0(t)$ と初期条件 $\mathbf{X}_0(0) + \delta\mathbf{X}(0)$ から出発した軌道との時刻 t におけるズレを表わす．このとき，軌道の指数関数的なズレの割合は

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty, \mathbf{d}(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{|\mathbf{d}(t)|}{|\mathbf{d}(0)|} \quad (\text{F.3})$$

で与えられ，これをリアプノフ指数という． λ は基準軌道からのズレの距離の指数関数的な増幅率を表しており， $\lambda > 0$ なら解軌道は $\mathbf{X}_0(t)$ から離れていくので $\mathbf{X}_0(t)$ は不安定， $\lambda < 0$ なら安定である．

リアプノフ指数を実際に求めるときには，数值的に発散してしまわないような適当な時間ステップごとに初期のズレを1に規格化することを繰り返してズレを計算し，その平均をとった

$$\lambda = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|\mathbf{d}_i(\tau)|}{|\mathbf{d}_i(0)|} \quad (\text{F.4})$$

を用いる。ズレを1に規格化するとき、

$$\mathbf{d}_{i+1}(0) = \mathbf{d}_i(\tau) \cdot \frac{|\mathbf{d}_0(0)|}{|\mathbf{d}_i(\tau)|} \quad (\text{F.5})$$

によって $\mathbf{d}_i(\tau)$ の方向はそのままに保って行なう場合、(F.4) 式は最大リアブノフ指数 λ_1 を与える。

参考文献

- [1] 森義仁, 中田聡: 非線形現象, 吉川研一 (監修), 産業図書 (1994).
- [2] 井上政治義, 秦浩起: カオス科学の基礎と展開—複雑系の理解に向けて—, 共立出版 (1999).
- [3] 合原一幸: カオスの数理と技術, 日本放送出版協会 (1997).
- [4] 金子邦彦, 津田一郎: 複雑系のカオス的シナリオ, 朝倉書店 (1996).
- [5] A.S.Pikovsky and J.Kurths: Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System, *Physical Review Letters*, Vol.78, pp.775-778(1997).
- [6] 高橋智晴, 合原一幸, 松本元: ホジキン—ハクスレイ方程式のパルス列刺激に対する応答性, *電子情報通信学会論文誌*, J71-A, No.3, pp.744-750(1988).
- [7] B.Müller and J.Reinhardt: *Neural Networks An Introduction*, Springer-Verlag(1990).
- [8] 中野馨: 人間情報工学—バイオニクスからロボットまで—, コロナ社 (1996).
- [9] J.J.Hopfield: Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol.79, pp.2554-2558(1982).
- [10] M. A. Arbib(Ed.): *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press (1995).
- [11] 合原一幸 (編著): ニューラルシステムにおけるカオス, 東京電気大学出版局 (1993).

- [12] 松村道一：ニューロサイエンス入門，サイエンス社 (1995).
- [13] K.Aihara, T.Takabe and M.Toyoda : Chaotic Neural Networks, Physics Letters A, Vol.144, pp.333-340(1990).
- [14] M.Adachi and K.Aihara : Associative Dynamics in a Chaotic Neural Network, Neural Networks, Vol.10, No.1, pp.83-98(1997).
- [15] 安達雅春, 合原一幸：カオスニューロンモデルとそのネットワークダイナミクス, ニューラルシステムにおけるカオス (合原 編著), 東京電気大学出版局, pp.158-188(1993).
- [16] S.Diederich and M.Opper : Learning of Correlated Patterns in Spin-Glass Networks by Local Learning Rules, Physical Review Letters, Vol.58, pp.949-952(1987).
- [17] 西村治彦, 合原一幸：ニューラルネットワークとカオスの共働, 計測と制御, Vol.39, No.3, pp.162-168(2000).
- [18] 藤澤弘典, 森広浩一郎, 西村治彦：自己想起型ニューラルネットにおけるカオス応答想起の特性, 第44回日本産業技術教育学会講演要旨集, p.109(2001).
- [19] 川原琢治：ソリトンからカオスへ, 朝倉書店, pp.104-112(1993).
- [20] 長島弘幸, 馬場良和：カオス入門, 培風館, pp.105-110(1992).
- [21] G.Paladin, M.Serva and A.Vuipiani : Complexity in Dynamical Systems with Noise, Physical Review Letters, Vol.74, pp.66-69(1995).