平成15年度　学位論文

相対論的場の量子論の基礎的研究

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
M02185J　山本　道康

序

本論文の目的は, 量子場の理論における次の2つのテーマについて考察することである.

1. 量子場の理論が相対論的に不変であるための条件を求める.

2. その条件から場の変換性質を決定し, CPT 定理を証明する.

物理学は自然現象における法則を定式化し, それを応用する学問である.

Kepler の法則等に基づき, Newton は彼の力学法則を発見した. そのとき彼は, 粒子の空間座標を時間の関数と考えて定式化を行った.

その後, 光速度不変の原理および時間と空間座標の同等性の仮説に基づき, Einstein は特殊相対性理論を構築した。彼は, どの慣性系から見ても物理法則は不変であるべきであるという Galilei の考えを拡張した.

19 世紀まで, 光は波動であるという考えが主流であった. しかし, 19 世紀末に光電効果, Planck のエネルギー量子仮説等の発見により, 光は波動性と粒子性の両方をもつことが分かった. 一方, 電子は粒子と考えられていたが, 原子のエネルギー準位は $E = h\nu, p = h/\lambda$ を満たす振動数と波長をもつ波動と考えれば, 上手く説明がついた. 電子も波動性と粒子性を同時にもつことが分かった.

古典的物理量は全て連続的に変化すると考えられていたが, 量子論の展開の結果, 離散的な量の極限であると見なせる場合のあることが分かった. このような場合, 今までの自然現象の表現方法では, 粒子性と波動性を同時にもつ電子を記述することはできない.

そこで, Schrödinger は光学から類推し, 波動力学を構築した. また, ほぼ同時期に Heisenberg も行列力学を構築した. この二つの理論は見かけは異なるが全く同じ理論であった. 現在の量子力学である.

量子力学は, 原子内の電子分布等で大きな成功をおさめたが, その理論は相対論的に不変 (Lorentz 変換のもとで不変) ではなかった. Schrödinger の理論を Lorentz 不変な形式にした Klein-Gordon 方程式の理論では, 存在確率が負になる欠点があった. この欠点を克服するために考え出されたのが Dirac 方程式である.

この論文では, 1 粒子状態の Lorentz 変換性を定め, S 行列が Lorentz 不変であるための条件を求める. 次に, 場を粒子の生成・消滅演算子から構成する. これらの準備の後に, 斉次 Lorentz 群の既約表現に従う場が, C,P,T 変換のもとでどのように変換するかを調べる (C は荷電共役変換, P は空間反転, T は時間反転を表す). それによって, スカラー場, ベクトル場, Dirac 場の変換性質を確認し, 最後に, 相対論的局所場の理論においては, 反転の積 CPT が保存するという CPT 定理を証明する.

1 章では, 波動性と粒子性をもつ物質 (主に電子) を記述する 1 粒子状態の Lorentz 変換性について述べる.

1.1 節では量子力学の基礎的枠組について述べる.

1.2 節では可能な物理的実験の結果を変えない変換である対称変換について述べる.

1.3 節では物理状態の張る Hilbert 空間上での Lorentz 変換則を述べる.

1.4 節では非斉次 Lorentz 変換の Lie 代数について述べる.

1.5 節では非斉次 Lorentz 変換の既約表現に従って 1 粒子状態の分類を考え, 質量が正の場合に限って変換性質を述べる.

1.6 節では空間反転と時間反転の演算子を定義し, 1 粒子状態の変換性について述べる.

2 章では, 実際の物理的実験で測定されるものは遷移確率分布であるので, それを計算するための散乱理論について述べる.

2.1 節では相互作用する前の状態である in 状態と相互作用した後の状態である out 状態の定義と Lippmann-Schwinger 方程式について述べる.

2.2 節では S 行列と演算子 S を定義する.

2.3 節では「いろいろな対称変換で S 行列が不変である. 」ということの意味とその様な不変性を保証する Hamiltonian の条件について考える.

2.4 節では S 行列を計算する道具としての摂動理論について述べる.

3 章では, 「遠く離れた実験は互いに影響を及ぼしあわない. 」というクラスター分解原理を実現するための条件について考察する.

3.1 節では粒子にはボゾンとフェルミオンしかないことを述べる.

3.2 節では生成演算子を定義し, 消滅演算子はその随伴演算子であることを導く.

3.3 節では連結振幅 S^C を導入し, クラスター分解原理を満たすための条件を考察する.

3.4 節ではどのような Hamiltonian がクラスター分解原理を満たす S 行列を与えるのかを考察する.

4 章では量子力学と相対性理論の仮定から導かれる普遍的な結果 — スピンと統計の関係, 反粒子の存在, CPT 定理 — について述べる.

4.1 節では Lorentz 不変な S 行列を構成するために, 生成・消滅場を導入し, それが満たすべき条件を考察する.

4.2 節では斉次 Lorentz 群の既約表現に従って変換する一般的な場について考察する.

4.3 節では前節で述べられた既約表現に従って変換する causal 場を構築する.

4.4 節では causal 場の変換性質を具体的なスカラー場, ベクトル場, Dirac 場に適用しそれぞれの場の変換性を確認する.

4.5 節ではベクトル場に対する Lorentz 表現について述べる.

4.6 節では Lorentz 表現の $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ タイプの場に対する Dirac 形式について述べる.

4.7 節では CPT 定理を証明する.

最後に, 本研究ならびに修士論文の作成にあたり, 御指導を賜わりました矢吹治一教授に感謝します.

2003 年 12 月

山本 道康

目 次

1章　相対論的量子力学

波動性と粒子性を同時にもつ物質 (主に電子) を記述するために量子力学が構築された. しかしその形式は最初 Lorentz 不変になっていなかった. この章では相対論的量子力学について述べる.

1.1　量子力学

(i) 物理状態は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のベクトルで表される. すなわち, この空間の任意の二つのベクトル Φ, Ψ に対して内積 (Φ, Ψ) が定められ, これが次の性質をもっているとする:

$$
\begin{aligned}
(\Phi, \Psi) &= (\Psi, \Phi)^*, & (1.1.1)\\
(\Phi, \Psi_1 + \Psi_2) &= (\Phi, \Psi_1) + (\Phi, \Psi_2), & (1.1.2)\\
(\Phi, \eta\Psi) &= \eta(\Phi, \Psi), & (1.1.3)\\
(\Psi, \Psi) &\geqq 0. & (1.1.4)
\end{aligned}
$$

記号*は複素共役を表しており, η は複素数である. また, 式 (1.1.4) の等号成立は $\Psi = 0$ のときに限る. Hilbert 空間はノルム $||\Psi|| = \sqrt{(\Psi, \Psi)}$ をもっていて, このノルムに関して完備である.

ベクトル Ψ に対して因子 $e^{i\phi}$(ϕ は実数) のみ異なるベクトル Ψ' を $\Psi \sim \Psi'$ と表す. これはベクトル上の同値関係になる. この同値関係によって $\mathcal{H}$ の正規化ベクトルを類別し, その類をレイとよぶ. 物理状態はレイに対応する.

(ii) 観測可能量は, Hilbert 空間上の演算子で表されるとする. その演算子を A とすると, これは Hilbert 空間のそれ自身の中への写像 $\Psi \to A\Psi$ である. 次の意味で線形であるとする:

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi. \tag{1.1.5}$$

ξ, η は複素数である. レイ $\mathcal{R}$ に属する正規化ベクトル Ψ が演算子 A について固有値 α をもつ固有ベクトルならば, このレイのどのベクトルも固有値 α の固有ベクトルである.

線形演算子 A について, その随伴 $A^\dagger$ を次の式で定義する:

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^*. \tag{1.1.6}$$

$A^\dagger = A$ となる演算子をエルミート演算子という. 固有値が実数となる演算子はエルミート演算子なので, 実数である観測量をあらわす演算子はエルミートでなければならない.

(iii) 系がレイ $\mathcal{R}$ によって表される状態とし, $\mathcal{R}$ に属するベクトルを Ψ とする. この状態が互いに直交するレイ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots$ に対応するどの状態にあるかを調べる実験をしたとする. Ψ_n を $\mathcal{R}_n$ に属するベクトルとすると, $\mathcal{R}_n$ によって表された状態にそれを発見する確率を $P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2$ とする. 状態ベクトルの系 $\{\Psi_n\}$ が完全系であれば, 全確率は 1 である:

$$\sum_n P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = 1. \tag{1.1.7}$$

1.2 対称性

対称変換 (symmetry transformation) とは, 物理状態に対する変換であり全ての可能な実験の結果を変えない変換のことである. 観測者 O があるレイ $\mathcal{R}$ を観測してこれが $\mathcal{R}_1$ または, $\mathcal{R}_2 \cdots$ の状態にあると結論したとする. また, 別の観測者 O' が同じ観測を行いレイ $\mathcal{R}'$ が $\mathcal{R}'_1$ または, $\mathcal{R}'_2 \cdots$ の状態にあると結論したとする. $\mathcal{R}_i$ は $\mathcal{R}'_i$ に対応する状態である. このとき二人は同じ確率を観測しなければならない:

$$P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_n). \tag{1.2.1}$$

定理 1.2.1 レイに対するどんな対称変換 $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ についても, $\Psi \in \mathcal{R}$ に対して $U\Psi \in \mathcal{R}'$ となるように, ユニタリ, 線形

$$\begin{aligned} (U\Phi, U\Psi) &= (\Phi, \Psi), & (1.2.2)\\ U(\xi\Phi + \eta\Psi) &= \xi U\Phi + \eta U\Psi & (1.2.3) \end{aligned}$$

かまたは, 反ユニタリ, 反線形

$$\begin{aligned} (U\Phi, U\Psi) &= (\Phi, \Psi)^*, & (1.2.4)\\ U(\xi\Phi + \eta\Psi) &= \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi & (1.2.5) \end{aligned}$$

の演算子 U が定義できる. ∎

証明は, 参考文献 [7, 2 章 Appendix A] を参照.

反線形演算子 A の随伴を次のように定義する:

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^*. \tag{1.2.6}$$

この定義で, ユニタリまたは反ユニタリの条件は, どちらも

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{1.2.7}$$

である. 観測者の座標系の回転, 並進または, 固有順時的 (proper orthochronous) Lorentz 変換の様な対称変換は, 恒等変換と連結しているので, これらの対称変換は, 反線形, 反ユニタリではなくむしろユニタリ, 線形の演算子で表される.

対称変換に対応するユニタリまたは反ユニタリ演算子 $U(T)$ は対称変換の群の構造を反映する性質をもっている. 変換 T_1 が物理状態 $\mathcal{R}_n$ を物理状態 $\mathcal{R}'_n$ に写すならば, $U(T_1)$ は $\mathcal{R}_n$ のベクトル Ψ_n を $\mathcal{R}'_n$ のベクトル $U(T_1)\Psi_n$ に写す. そして更に T_2 がこのレイの表す物理状態を物理状態 $\mathcal{R}''_n$ に写すとき, レイ $\mathcal{R}''_n$ のベクトル $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ に写す. 一方, $U(T_2T_1)\Psi_n$ もレイ $\mathcal{R}''_n$ に存在する. つまり,

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n. \tag{1.2.8}$$

演算子 $U(T)$ の線型性 (または反線型性) から式 (1.2.8) の $\phi_n(T_2,T_1)$ は, Ψ_n によらないことが示せる. つまり,

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1). \tag{1.2.9}$$

上式で $\phi = 0$ のとき, $U(T)$ は対称変換の群の表現を与えるという. 一般的な位相 $\phi(T_2,T_1)$ の場合, 射影表現と呼ばれる. 対称群の射影表現は常に非射影表現へ拡張できる. [7, 2.7 節] 参照. 従って, 今後常に (1.2.9) で $\phi = 0$ ととる.

1.3 量子 Lorentz 変換

慣性系の等価を主張する Einstein の特殊相対性原理を量子力学でどのように実現するかを考察する. 点粒子の位置がある慣性系で座標 x^μ(空間座標 x^1, x^2, x^3, 時間座標 $x^0 = ct$. 今後光速度を 1 とする.) で表され, 他の慣性系で座標 x'^μ で表されるとする. そのとき,

$$\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{1.3.1}$$

ここで, 4×4 の実数行列 $\eta_{\mu\nu}$ は対角行列で, その 0 でない要素は,

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \eta_{00} = -1. \tag{1.3.2}$$

式 (1.3.1) の μ, ν の様に同じ項に上付きと下付きで 2 度現れる添え字については, その添字を 0,1,2,3 と変化させたときできる項の和を取ることにする.

式 (1.3.1) を満たすどんな座標変換 $x^\mu \to x'^\mu$ も線形である:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{1.3.3}$$

証明は [8, 2.1 節] 参照. ここで, a^μ は任意の定数で, $\Lambda^\mu{}_\nu$ は次の条件を満たす定数行列である:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{1.3.4}$$

計量行列 $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ とする. 式 (1.3.3) に $x' \to x''$ の Lorentz 変換を作用させる:

$$x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} x'^{\rho} + \bar{a}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\rho}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\rho}) + \bar{a}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} x^{\nu} + \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}. \tag{1.3.5}$$

変換 (1.3.3) で物理状態に引き起こされる変換を $T(\Lambda, a)$ とすると, 次の合成則を満たしている:

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \tag{1.3.6}$$

式 (1.3.4) の行列式を取ると

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \tag{1.3.7}$$

従って, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は逆行列をもつ. $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\alpha} = \delta^{\alpha}_{\rho}$ より

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\alpha} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} = ({}^{t}\Lambda)^{\alpha}{}_{\mu}. \tag{1.3.8}$$

$T(\Lambda, a)$ の逆変換は, $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ である. また, この変換 $T(\Lambda, a)$ は結合法則の成立も示すことができるので, これらは群をなす. この群を非斉次 Lorentz 群または Poincaré 群という.

変換 $T(\Lambda, a)$ を表す Hilbert 空間の変換を $U(\Lambda, a)$ で表す:

$$\Psi \xrightarrow{T(\Lambda,a)} U(\Lambda, a)\Psi.$$

この変換 $U(\Lambda, a)$ は次の合成法則を満たす:

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \tag{1.3.9}$$

この群には, $U(\Lambda, 0)$ の形の斉次 Lorentz 群という部分群がある. $\det \Lambda = +1, \Lambda^{0}{}_{0} \geqq +1$ を満たす部分群は, 固有順時的 Lorentz 群という. Λ は正則行列なので, $\det \Lambda = 1$ の行列から $\det \Lambda = -1$ の行列へ連続的に移ることはできない. また, $\Lambda^{0}{}_{0} \geqq 1$ の行列から $\Lambda^{0}{}_{0} \leqq -1$ の行列へも連続的に移ることはできない. 従って, 単位元に連結な Lorentz 変換は単位元の行列式と (0,0) 成分の符号と同符号でなければならないので, 単位元と連結する Lorentz 変換は固有順時的 Lorentz 群に属する. 非斉次固有順時的 Lorentz 群は Lie 群である. Lie 群に基づく対称群についての情報のほとんどは単位元の近傍の群要素に含まれている.

$\mathscr{P}$ を 0 でない成分が $\mathscr{P}^{0}{}_{0} = 1, \mathscr{P}^{1}{}_{1} = \mathscr{P}^{2}{}_{2} = \mathscr{P}^{3}{}_{3} = -1$ の空間反転, $\mathscr{T}$ を 0 でない成分が $\mathscr{T}^{0}_{0} = -1, \mathscr{T}^{1}_{1} = \mathscr{T}^{2}_{2} = \mathscr{T}^{3}_{3} = 1$ の時間反転とする. $\mathscr{P}, \mathscr{T}, \mathscr{P}\mathscr{T}$ の行列式と (0,0) 成分の符号はそれぞれ $(-,+), (-,-), (+,-)$ であるので, Lorentz 変換は固有順時的 Lorentz 変換かまたは, 固有順時的 Lorentz 群の要素と離散変換 $\mathscr{P}, \mathscr{T}, \mathscr{P}\mathscr{T}$ の積として書くことができる. すなわち, Lorentz 群の研究は, その固有順時的 Lorentz 群及び空間反転と時間反転の研究に帰する.

1.4 Poincaré 代数

非斉次固有順時的 Lorentz 群の場合, 単位元は $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, a^{\mu} = 0$ であるので, 次の変換

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \quad a^{\mu} = \epsilon^{\mu} \tag{1.4.1}$$

を考える. $\omega^{\mu}{}_{\nu}, \epsilon^{\mu}$ のどちらも実数の無限小とすると, 条件 (1.3.4) より

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}) \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + O(\omega^2), \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

ここで,

$$\omega_{\sigma\rho} \equiv \eta_{\mu\sigma}\omega^{\mu}{}_{\rho}.$$

条件 (1.4.2) の ω の 1 次の項のみをとると, $\omega_{\mu\nu}$ の反対称性条件になる:

$$\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}. \tag{1.4.3}$$

4 次元反対称 2 階テンソルは, ${}_4C_2 = 6$ 個の独立な成分をもち, ϵ^{μ} は 4 成分であるので, 非斉次 Lorentz 変換は 10 変数で記述される.

ユニタリ変換 $U(1,0)$ は物理状態を変化させない変換を表すので, どんなレイもそれ自身に写す. つまり, $U(1,0)$ は単位元に比例する. そして適切に位相を選ぶことによって, $U(1,0) = 1$ とできる. 無限小 Lorentz 変換 (1.4.1) の場合, 次の様に表現できる:

$$U(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho}P^{\rho} \cdots . \tag{1.4.4}$$

ここで, $J^{\rho\sigma}, P^{\rho}$ はそれぞれ ω, ϵ に独立な演算子である. 省略した項は, ω, ϵ の高次の項を表している. $U(1+\omega,\epsilon)$ をユニタリにするためには, $J^{\rho\sigma}, P^{\rho}$ はエルミートでなければならない:

$$J^{\dagger\rho\sigma} = J^{\rho\sigma}, P^{\dagger\rho} = P^{\rho}. \tag{1.4.5}$$

$\omega_{\rho\sigma}$ が反対称なので, その係数 $J_{\rho\sigma}$ も反対称に取ることができる:

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}. \tag{1.4.6}$$

$J^{\rho\sigma}$ と P^{ρ} の Lorentz 変換性を調べるために, 次の積を考える:

$$U(\Lambda, a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda, a).$$

変換則 (1.3.9) から, $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a) = U(1,0)$ となるので, $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ は $U(\Lambda, a)$ の逆変換である. 従って,

$$U(\Lambda, a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \tag{1.4.7}$$

上式の ω, ϵ の 1 次の項は,

$$U(\Lambda, a)(\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho)U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \tag{1.4.8}$$

両辺の $\omega_{\rho\sigma}, \epsilon_\rho$ の係数を等しいとおき, (1.3.8) を使うと次の式が得られる:

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu), \tag{1.4.9}$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \tag{1.4.10}$$

斉次 Lorentz 変換 ($a^\mu = 0$) の場合, これらの変換則から $J^{\rho\sigma}$ はテンソル, P^μ はベクトルであることが分かる. また, P^ρ は並進運動の元で不変であるが, $J^{\mu\nu}$ はそうではないことも分かる.

ここで $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu, a^\mu = \epsilon^\mu$ を式 (1.4.9) と (1.4.10) に代入し, $\omega^\mu{}_\nu, \epsilon^\mu$ の 1 次の項のみをとると,

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} + \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho, \tag{1.4.11}$$

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu. \tag{1.4.12}$$

$[A, B] \equiv AB - BA$ であり, これを A, B の交換子とよぶ. 両辺の $\omega_{\mu\nu}, \epsilon_\mu$ の係数を等しいとおくと,

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}, \tag{1.4.13}$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = -\eta^{\sigma\mu}P^\rho + \eta^{\rho\mu}P^\sigma = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho, \tag{1.4.14}$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \tag{1.4.15}$$

上の 3 式は Poincaré 群の Lie 環の関係式である. 量子力学では, エネルギー演算子 H と交換する演算子 (つまり保存される量の演算子) が, 特に重要である. 式 (1.4.14) より P^0 は J^{ij} と交換し, 式 (1.4.15) より P^0 は P^i とも交換するので, 3 次元運動量ベクトルが

$$\mathbf{P} = \{P^1, P^2, P^3\}, \tag{1.4.16}$$

3 次元角運動量ベクトルが

$$\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}, \tag{1.4.17}$$

エネルギーが P^0 である. 残った生成子 (Lie 環の要素) は 3 次元ブースト・ベクトルと呼ばれるものである:

$$\mathbf{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\}. \tag{1.4.18}$$

以上により, 交換関係 (1.4.13), (1.4.14), (1.4.15) は次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
[J^i, J^l] &= i\epsilon_{il\alpha} J^\alpha, && (1.4.19)\\
[J^i, K^l] &= i\epsilon_{ilm} K^m, && (1.4.20)\\
[K^i, K^l] &= -i\epsilon_{ilk} J^k, && (1.4.21)\\
[J^i, P^j] &= i\epsilon_{ijm} P^m, && (1.4.22)\\
[K^j, P^l] &= -iH\delta^{jl}, && (1.4.23)\\
[J^i, H] &= [P^i, H] = [H, H] = 0, && (1.4.24)\\
[K^i, H] &= -iP^i. && (1.4.25)
\end{aligned}
$$

ここで i, j, k は, 1,2,3 の値をとり, ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} = +1$ の完全反対称量である.

並進変換 $T(1, a)$ は, 非斉次 Lorentz 群の部分群である:

$$T(1, a)T(1, \bar{a}) = T(1, a + \bar{a}). \tag{1.4.26}$$

この群は加法的であるので, 有限並進運動は物理的 Hilbert 空間において次のように表される:

$$U(1, a) = e^{-iP^\mu a_\mu}. \tag{1.4.27}$$

1.5 1粒子状態

非斉次 Lorentz 変換の変換性に基づいて, 1粒子状態の分類を考察する. 4次元エネルギー運動量ベクトルの成分は, それぞれ互いに交換する. つまり, 4次元運動量は保存されるので, 4次元運動量の固有ベクトルで物理状態を表わす. 1粒子状態の他の全ての自由度を示すためにラベル σ を導入する:

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}. \tag{1.5.1}$$

ここで σ は離散的であるとする.

式 (1.5.1) と (1.4.27) から $\Psi_{p,\sigma}$ が並進運動でどのように変換されるかが分かる:

$$U(1, a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip\cdot a}\Psi_{p,\sigma}. \tag{1.5.2}$$

式 (1.4.10) から斉次 Lorentz 変換 $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ を作用させた $\Psi_{p,\sigma}$ は, Λp を固有値とする4次元運動量の固有ベクトルとなることが分かる:

$$
\begin{aligned}
P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)((\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu P^\rho)\Psi_{p,\sigma}\\
&= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}. && (1.5.3)
\end{aligned}
$$

	Standard k^μ	Little 群
(a) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 > 0$	$(0,0,0,M)$	$SO(3)$
(b) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 < 0$	$(0,0,0,-M)$	$SO(3)$
(c) $p^2 = 0, p^0 > 0$	$(0,0,\kappa,\kappa)$	$ISO(2)$
(d) $p^2 = 0, p^0 < 0$	$(0,0,\kappa,-\kappa)$	$ISO(2)$
(e) $p^2 = N^2 > 0$	$(0,0,N,0)$	$SO(2,1)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$

図 1.1: いろいろなクラスの 4 次元運動量に対応する標準運動量と little 群

従って, $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ は, $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$ の線形結合である:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}. \tag{1.5.4}$$

$\Psi_{p,\sigma}$ の適切な線形結合により行列 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ をブロック対角化し, その線型結合を $\Psi_{p,\sigma}$ とすると, 固定したどの σ に対しても非斉次 Loretz 群の既約表現を与えるようにできる可能性がある.

この行列 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ を求めたい. 固有順時的 Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ によって不変に保たれる p^μ の関数は $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ である. また, $p^2 \leq 0$ のとき p^0 の符号も不変であるので, 標準 4 次元運動量 k^μ を表 1.1 の様に分類する. このうち (a) は質量粒子, (c) は質量ゼロの粒子, (f) は $U(\Lambda)$ によって不変である真空, に対応する 4 次元標準運動量と考えられる. k^μ で p^μ を次のように表す:

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu. \tag{1.5.5}$$

$L^\mu{}_\nu(p)$ は p^μ に依存する標準 Lorentz 変換であり, k^μ にも依存している. $L^\mu{}_\nu(k) = \delta^\mu_\nu$ とする. 運動量 p の状態 $\Psi_{p,\sigma}$ を

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \tag{1.5.6}$$

と定義する. $N(p)$ は, $\Psi_{p,\sigma}$ を $||\Psi_{p,\sigma}|| = 1$ に正規化するための数である.

式 (1.5.6) に斉次 Lorentz 変換 $U(\Lambda)$ を作用させると

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ は, k を $L(p)k = p$ に, 次にそれを Λp に, 最後にそれを k にもどす変換である. つまり,

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \tag{1.5.8}$$

とすると $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$. この変換 $W^\mu{}_\nu$ は, k^μ を不変に保つ斉次 Lorentz 変換の部分群である. この部分群を little 群という. 演算子 $U(W)$ の作用は,

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'} \tag{1.5.9}$$

であり, 係数 $D(W)$ は little 群の行列表現である. 任意の要素 $W, \bar{W}$ について,

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W) \tag{1.5.10}$$

が成り立つ. 特に, 式 (1.5.9) を式 (1.5.7) に代入すると

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k,\sigma'}.$$

p が Λp のときの式 (1.5.6) から,

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}. \tag{1.5.11}$$

つまり, 変換則 (1.5.4) の行列 $C_{\sigma'\sigma}$ を求めることは, 正規化定数を別にして little 群の表現を求める問題になる.

これからは, 質量 $M > 0$ の 1 粒子状態のみを考える. 標準運動量 k^μ, k'^μ をもつ状態が直交するように選ぶ:

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\sigma'\sigma}. \tag{1.5.12}$$

これから, little 群の表現はユニタリであることが分かる:

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W). \tag{1.5.13}$$

演算子 $U(\Lambda)$ のユニタリ性より, 任意の運動量状態間の内積は,

$$\begin{aligned}(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) &= N(p)(U^{-1}(L(p))\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) \\ &= N(p)N^*(p')D^*_{\sigma\sigma'}(W(L^{-1}(p),p'))\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}).\end{aligned}$$

但し $k' \equiv L^{-1}(p)p'$ とした. また, $k = L^{-1}(p)p$ より, $\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ は $\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ に比例する. $p = p'$ のときを考えると $W(L^{-1}(p),p) = 1$ より,

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \tag{1.5.14}$$

p についての任意のスカラー関数 $f(p)$ の $-p^2 = M^2 \geqq 0, p^0 > 0$ に対する Lorentz 不変積分は次のように書ける:

$$\begin{aligned}\int d^4p\delta(p^2 + M^2)\theta(p^0)f(p) &= \int d^3\mathbf{p}dp^0\delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p},p^0) \\ &= \int d^3\mathbf{p}\frac{f(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}.\end{aligned}$$

ここで θ は階段関数で, $x \geqq 0$ のとき, $\theta(x)=1$, $x<0$ のとき, $\theta(x)=0$ である. 質量殻 $p^2+M^2=0$ の上で積分するとき不変体積要素は,

$$d^3\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2} \tag{1.5.15}$$

であることが分かる. $F(\mathbf{p}) \equiv f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})$ とすると δ 関数を含む式

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \int F(\mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')d^3\mathbf{p}' \\ &= \int F(\mathbf{p}')[\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})]\frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}} \end{aligned}$$

から, Lorentz 不変デルタ関数は,

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = p^0\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \tag{1.5.16}$$

であることが分かる. p', p はそれぞれ Lorentz 変換 $L(p)$ によって k', k に関係づけられるので,

$$p^0\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = k^0\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}).$$

これを式 (1.5.14) に代入して,

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\frac{p^0}{k^0}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \tag{1.5.17}$$

慣習により $N(p)$ を次のようにとる:

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0}. \tag{1.5.18}$$

このとき

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \tag{1.5.19}$$

質量が正である粒子の場合の little 群は 3 次元回転群である. そのユニタリ表現は $2j+1$ 次元 ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$) のユニタリ既約表現 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}$ の直和に分解できる. 無限小回転を $R_{ik} = \delta_{ik}+\Theta_{ik}$,$\Theta_{ik}=-\Theta_{ki}$ とすると,

$$\begin{aligned} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R) &= D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(1+\Theta) = \delta_{\sigma'\sigma}+\frac{i}{2}\Theta_{ik}(J^{(j)}_{ik})_{\sigma'\sigma}, && (1.5.20)\\ (J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} &= (J^{(j)}_1 \pm iJ^{(j)}_2)_{\sigma'\sigma} && (1.5.21)\\ &= \delta_{\sigma',\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}, \\ (J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} &= (J^{(j)}_3)_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}, \quad \sigma = j, j-1, \cdots, -j. && (1.5.22) \end{aligned}$$

質量 $M>0$, スピン j の粒子の場合, 式 (1.5.18) を式 (1.5.11) に代入すると,

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}. \tag{1.5.23}$$

定理 1.5.1 $\Lambda^\mu{}_\nu$ が任意の *3* 次元回転 $\mathscr{R}$ のとき, $W(\Lambda,p)$ は全ての p について $\mathscr{R}$ と等しい. ∎

証明. little 群の要素 $W(\Lambda,p)$ を計算するため, $k^\mu=(0,0,0,M)$ を p^μ に変換する標準のブースト $L(p)$ が必要である. z 軸を運動量 $\mathbf{p}$ の方向に回転する変換を $R(\hat{\mathbf{p}})$ とし, z 軸方向のブーストを $B(|\mathbf{p}|)$ とする:

$$B(|\mathbf{p}|)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&\sqrt{\gamma^2-1}\\0&0&\sqrt{\gamma^2-1}&\gamma\end{pmatrix}.$$

但し, $\gamma=\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}/M$ である. ブースト $L(p)$ は次のように書ける:

$$L(p)=R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}). \tag{1.5.24}$$

任意の回転 $\mathscr{R}$ の場合,

$$W(\mathscr{R},p)=L^{-1}(\mathscr{R}p)\mathscr{R}L(p)=R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\mathscr{R}R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}).$$

回転 $R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\mathscr{R}R(\hat{\mathbf{p}})$ は z 軸を $\hat{\mathbf{p}}$ 方向へ回転し, さらに $\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}}$ へ, そして z 軸に戻す. 従ってこの回転は, z 軸まわりのある角 θ の回転である:

$$R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\mathscr{R}R(\hat{\mathbf{p}})=R(\theta)\equiv\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$R(\theta)$ と $B(|\mathbf{p}|)$ は交換するので,

$$W(\mathscr{R},p)=R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})=R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

である. 従って, $W(\mathscr{R},p)=\mathscr{R}$ である. **QED**

1.6 空間反転と時間反転

空間反転と時間反転の演算子を次のように定義する:

$$\mathrm{P}\equiv U(\mathscr{P},0),\mathrm{T}\equiv U(\mathscr{T},0).$$

このとき次のような変換式が成立する:

$$\mathrm{P}U(\Lambda,a)\mathrm{P}^{-1} = U(\mathscr{P}\Lambda\mathscr{P}^{-1},\mathscr{P}a), \tag{1.6.1}$$

$$\mathrm{T}U(\Lambda,a)\mathrm{T}^{-1} = U(\mathscr{T}\Lambda\mathscr{T}^{-1},\mathscr{T}a). \tag{1.6.2}$$

式 (1.6.1) と (1.6.2) において $\omega_{\mu\nu}, \epsilon_\mu$ が無限小である無限小変換

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu,\ a^\mu = \epsilon^\mu,$$

を考える. $\omega_{\rho\sigma}, \epsilon_\rho$ の係数を等しいとおくと, Poincaré 生成子の P, T の変換性質を得る:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} i J^{\rho\sigma} \mathrm{P}^{-1} &= i \mathscr{P}_\mu{}^\rho \mathscr{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, && (1.6.3)\\
\mathrm{P} i P^\rho \mathrm{P}^{-1} &= i \mathscr{P}_\mu{}^\rho P^\mu, && (1.6.4)\\
\mathrm{T} i J^{\rho\sigma} \mathrm{T}^{-1} &= i \mathscr{T}_\mu{}^\rho \mathscr{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, && (1.6.5)\\
\mathrm{T} i P^\rho \mathrm{T}^{-1} &= i \mathscr{T}_\mu{}^\rho P^\mu. && (1.6.6)
\end{aligned}$$

上式は i の因数を残している以外は, 式 (1.4.9) と (1.4.10) と同じである. 次に, P, T が線形, ユニタリか反線形, 反ユニタリかを決定する. 式 (1.6.4) で $\rho = 0$ とすると, $P^0 = H$ はエネルギー演算子である:

$$\mathrm{P} i H \mathrm{P}^{-1} = iH.$$

もし P が反ユニタリ, 反線形ならば $\mathrm{P}H\mathrm{P}^{-1} = -H$ である. しかし, $H\mathrm{P}\Psi = -\mathrm{P}H\Psi = -E\mathrm{P}\Psi$ より, エネルギー $E > 0$ のどんな状態 Ψ についても, エネルギー $E < 0$ の別の状態 $P\Psi$ が存在することになる. しかし, 負のエネルギー状態は存在しない. 従って, P は線形, ユニタリであり, P, H は交換する: $[\mathrm{P}, H] = 0$. また, 式 (1.6.6) で $\rho = 0$ とすると

$$\mathrm{T} i H \mathrm{T}^{-1} = -iH.$$

もし T がユニタリ, 線形ならば, i を消去すると $\mathrm{T}H\mathrm{T}^{-1} = -H$. エネルギー $E > 0$ の状態 Ψ に対して, 負のエネルギー状態の $\mathrm{T}\Psi$ が存在することになる. 従って, T は反線形, 反ユニタリである.

P は線形, T は反線形と分かったので, 式 (1.6.3) − (1.6.6) を生成子 (1.4.16) − (1.4.18) によって書き換えることができる:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\mathbf{J}\mathrm{P}^{-1} &= +\mathbf{J}, && (1.6.7)\\
\mathrm{P}\mathbf{K}\mathrm{P}^{-1} &= -\mathbf{K}, && (1.6.8)\\
\mathrm{P}\mathbf{P}\mathrm{P}^{-1} &= -\mathbf{P}, && (1.6.9)\\
\mathrm{T}\mathbf{J}\mathrm{T}^{-1} &= -\mathbf{J}, && (1.6.10)\\
\mathrm{T}\mathbf{K}\mathrm{T}^{-1} &= +\mathbf{K}, && (1.6.11)\\
\mathrm{T}\mathbf{P}\mathrm{T}^{-1} &= -\mathbf{P}. && (1.6.12)
\end{aligned}$$

また,

$$\mathrm{P}H\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{T}H\mathrm{T}^{-1} = H. \tag{1.6.13}$$

Pが$\mathbf{J}$の符号を変えないことは古典論と一致している. 何故ならば, 軌道角運動量はベクトル積$\mathbf{r}\times\mathbf{p}$であり, これは空間反転で不変であるからである. 一方, Tは$\mathbf{J}$を反転する. これは, 回転する物体は時間反転すると反対方向に回転することと一致する. 時間反転の角運動量の変換性 (1.6.10) は角運動量交換関係$\mathbf{J}\times\mathbf{J}=i\mathbf{J}$と矛盾しない. 何故なら, Tは$\mathbf{J}$の符号を反転させ, Tが反ユニタリであることからiの符号も反転させるからである. 同様に, 式 (1.6.7) − (1.6.13) は, 交換関係 (1.4.19) − (1.4.25) と矛盾しない.

PとTが$M>0$の1粒子状態にどのように作用するかを考える.

空間反転Pの場合, 1粒子状態$\Psi_{k,\sigma}$は$\mathbf{P},H,J_3$の固有ベクトルとして定義する. 従って, $k=(0,0,0,M)$よりその固有値はそれぞれ$0,M,\sigma$である. 式 (1.6.7), (1.6.9), (1.6.13) より$P\Psi_{k,\sigma}$の固有値もそれぞれ$0,M,\sigma$になる. そのため, 固有状態の縮退がなければこの二つの状態は物理的に同じ状態であるので位相だけ異なる:

$$\mathrm{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta_\sigma\Psi_{k,\sigma}.$$

但し, $|\eta_\sigma|=1$.

定理 1.6.1 η_σは, σに依存しない. ∎

証明. 式 (1.5.21) より,

$$(J_1^{(j)}\pm iJ_2^{(j)})\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1}. \tag{1.6.14}$$

jは粒子のスピンを表す. この両辺にPを作用させると,

$$\eta_\sigma=\eta_{\sigma\pm1}.$$

従って, ηはσに依存しない. **QED**

位相ηはσに独立なので,

$$\mathrm{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta\Psi_{k,\sigma}. \tag{1.6.15}$$

位相ηは粒子のパリティと言い, 粒子の種類のみに依存している.

式 (1.5.6) と (1.5.18) より, 有限運動量状態は,

$$\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{M/p^0}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}.$$

$\mathscr{P}L(p)\mathscr{P}^{-1}=L(\mathscr{P}p),\ \mathscr{P}p=(-\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})$ [1] を使うと上式は, [2]

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{M/p^0}U(L(\mathscr{P}p))\eta\Psi_{k,\sigma}\\ &= \eta\Psi_{\mathscr{P}p,\sigma}.\end{aligned} \tag{1.6.16}$$

時間反転Tの場合, 式(1.6.10), (1.6.12), (1.6.13) より1粒子状態$\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma}$の$\mathbf{P}, H, J_3$の固有値はそれぞれ$0, M, -\sigma$である. [3] 従って

$$\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma}.$$

ζ_σは位相因子である.

定理 1.6.2

$$\zeta_\sigma = \zeta(-1)^{j-\sigma} \tag{1.6.17}$$

∎

証明. 式(1.6.14)に演算子Tを作用させると, Tが$\mathbf{J}, i$とそれぞれ反交換するので,

$$(-J_1 \pm iJ_2)\zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{\sigma\pm1}\Psi_{k,-\sigma\mp1}.$$

式(1.6.14)から$(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \pm \sigma)(j \mp \sigma + 1)}\Psi_{k,-\sigma\pm1}$. これを上式に代入すると,

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma\pm1}.$$

つまり, jは整数か半整数でσが1変化すれば符合が変わる. 従って, $j = \sigma$のときの位相因子をζとすると$\zeta_\sigma = \zeta(-1)^{j-\sigma}$と書くことができる. **QED**

以上のことから,

$$\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}. \tag{1.6.18}$$

位相ζは粒子種のみに依存する位相である.

$\mathscr{T}L(p)\mathscr{T}^{-1} = L(\mathscr{P}p)$, $\mathscr{P}p = (-\mathrm{p}, \sqrt{\mathrm{p}^2 + M^2})$ [4] を使うと, 式(1.5.6)は, [5]

$$\mathrm{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathscr{P}p,-\sigma}. \tag{1.6.19}$$

Notes

[1] $p = L(p)k$ より $\mathscr{P}p = \mathscr{P}L(p)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}k = \mathscr{P}L(p)\mathscr{P}^{-1}k$.

[2] $\mathrm{P}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0}\mathrm{P}U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{M/p^0}\mathrm{P}U(L(p))\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{M/p^0}U(\mathscr{P}L(p)\mathscr{P}^{-1})\eta\Psi_{k,\sigma}$.

[3] $\mathbf{P}(\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma}) = -\mathrm{T}\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = 0. H(\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma}) = \mathrm{T}H\Psi_{k,\sigma} = M(\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma}). J_3(\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma}) = -\mathrm{T}J_3\Psi_{k,\sigma} = -\sigma(\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma})$.

[4] $p = L(p)k$ より $\mathscr{T}p = \mathscr{T}L(p)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}k = \mathscr{T}L(p)\mathscr{T}^{-1}(-k)$. 従って, $\mathscr{P}p = (-\mathscr{T})p = \mathscr{T}L(p)\mathscr{T}^{-1}k$.

[5] $\mathrm{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{M}{p^0}}\mathrm{T}U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{\frac{M}{p^0}}\mathrm{T}U\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(\mathscr{P}p))\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}$.

2章　散乱理論

いままでの議論は, 1粒子安定状態のみに当てはまる. 二つ以上の粒子が相互作用する状態は安定状態ではないが, 我々はそのような状態の結果に興味がある. 衝突 (相互作用) の前と後の物理状態では, 全ての粒子は相互作用できないほど遠く離れているので, その状態は1粒子安定状態の直積として記述できると考えられる. また, 実験で測定されるものは, 粒子の初期状態から最終状態への遷移確率分布である. この章では, その確率を計算するために使われる理論について述べる.

2.1　In と Out 状態

相互作用をしていない粒子からなる状態は1粒子状態の直積として表されると考えられる. その1粒子状態にラベルをつけるために, 4次元運動量 p^μ, スピンの z 成分 σ, 粒子タイプを表す n を使う. $U(1,a)U(\Lambda,0)=U(\Lambda,a)$ であるので, 式 (1.5.2) と (1.5.23) から, 非斉次 Lorentz 変換の変換則は,

$$\begin{aligned} U(\Lambda,a)\Psi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1;\cdots;\mathbf{p}_N\sigma_N n_N} &= e^{-i(\Lambda p_1)\cdot a}\cdots e^{-i(\Lambda p_N)\cdot a}\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0\cdots(\Lambda p_N)^0}{p_1^0\cdots p_N^0}} \\ &\times \sum_{\bar\sigma_1\bar\sigma_2\cdots} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))\cdots D^{(j_N)}_{\bar\sigma_N\sigma_N}(W(\Lambda,p_N)) \\ &\times \Psi_{\Lambda p_1\bar\sigma_1 n_1;\cdots;\Lambda p_N\bar\sigma_N n_N}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$W(\Lambda,p)$ は Wigner 回転 (1.5.8) であり, $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W)$ は3次元回転群の $(2j+1)$ 次元ユニタリ表現である. この状態は式 (1.5.19) と同じ様に正規化される:

$$\begin{aligned} &(\Psi_{p'_1\sigma'_1n'_1;\cdots;p'_N\sigma'_Nn'_N},\Psi_{p_1\sigma_1n_1;\cdots;p_N\sigma_Nn_N}) \\ &=\delta^3(\mathbf{p}'_1-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma'_1\sigma_1}\delta_{n'_1n_1}\cdots\delta^3(\mathbf{p}'_N-\mathbf{p}_N)\delta_{\sigma'_N\sigma_N}\delta_{n'_Nn_N}\pm\text{permutations}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

$\pm$permutations の項は, 粒子タイプ $n_1,\cdots,n_N$ の置換が $n'_1,\cdots,n'_N$ であるときを考慮するために加えた. $n_1,\cdots,n_N$ から $n'_1,\cdots,n'_N$ への置換が半整数スピンの奇数回の置換を含むなら $-$, それ以外は $+$ である.

下添字 $p_1\sigma_1n_1;\cdots;p_N\sigma_Nn_N$ 全体を α で表すと, 式 (2.1.2) は, 次のように簡単に書ける:

$$(\Psi_{\alpha'},\Psi_\alpha)=\delta(\alpha'-\alpha). \tag{2.1.3}$$

$\delta(\alpha-\alpha')$ は, 式 (2.1.2) の右辺に現れている δ 関数と Kronecker の δ の積の和を表している. 状態の和と積分を次のように書く:

$$\int d\alpha \equiv \sum_{n_1\sigma_1\cdots n_N\sigma_N} \int d^3p_1\cdots d^3p_N. \tag{2.1.4}$$

Ψ_α が完全系ならば,

$$\Psi = \int d\alpha\ \Psi_\alpha(\Psi_\alpha, \Psi). \tag{2.1.5}$$

式 (2.1.1) の変換則は, 相互作用をしていない粒子に適用される. $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, a^\mu = (0,0,0,\tau)$ のとき, 式 (1.4.27) から $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)$ であるので, 式 (2.1.1) から Ψ_α はエネルギーの固有状態である:

$$H\Psi_\alpha = E_\alpha\Psi_\alpha. \tag{2.1.6}$$

但し, このエネルギー E_α は 1 粒子エネルギーの和に等しい:

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \cdots + p_N^0. \tag{2.1.7}$$

散乱過程における $t \to \pm\infty$ のときの状態は式 (2.1.1) でのように変換される. ラベル α によって記述される粒子を含む入射状態つまり in 状態を Ψ_α^+ で, 射出状態つまり out 状態を Ψ_α^- で表す.

ここでは, Heisenberg 表示を扱う. 時間の平行移動演算子 H を自由粒子 Hamiltonian H_0 と相互作用 V の二つの項に分けることができると仮定する:

$$H = H_0 + V. \tag{2.1.8}$$

H_0 は全 Hamiltonian H と同じスペクトルをもつと仮定する:

$$H_0\Phi_\alpha = E_\alpha\Phi_\alpha, \tag{2.1.9}$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha). \tag{2.1.10}$$

以後複号は同順とする.

定義 2.1.1 *in* 状態と *out* 状態は, H_0 でなく H の固有状態である:

$$H\Psi_\alpha^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha^\pm. \tag{2.1.11}$$

これらの状態は $\tau \to \mp\infty$ について,

$$\int d\alpha\ e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \to \int d\alpha\ e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Phi_\alpha \tag{2.1.12}$$

を満たしているとする. $g(\alpha)$ は, エネルギーのある有限幅の ΔE で滑らかに変化する *0* でない振幅である. ∎

式 (2.1.12) を書き換えると,

$$e^{-iH\tau}\int d\alpha\ g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \to e^{-iH_0\tau}\int d\alpha\ g(\alpha)\Phi_\alpha.$$

これから, in, out の状態は次の様に書くことができる:

$$\Psi_\alpha^\pm \ = \ \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha, \tag{2.1.13}$$

$$\Omega(\tau) \ \equiv \ \exp(+iH\tau)\exp(-iH_0\tau). \tag{2.1.14}$$

定理 2.1.2 *in* 状態と *out* 状態は, 自由粒子状態と同様に正規化される. ▮

証明. Heisenberg 表示で考えているので, 状態は時間に独立である. その状態にユニタリ演算子 $e^{-iH\tau}$ を作用させることによって式 (2.1.12) の左辺が得られる. 従って, そのノルムは時間に独立であるので, $\tau \to \mp\infty$ の極限のノルムと等しい:

$$\int d\alpha\int d\beta\ e^{-i(E_\alpha-E_\beta)\tau}g(\alpha)g^*(\beta)(\Psi_\beta^\pm,\Psi_\alpha^\pm) = \int d\alpha\int d\beta e^{-i(E_\alpha-E_\beta)\tau}g(\alpha)g^*(\beta)(\Phi_\beta,\Phi_\alpha).$$

全ての滑らかな関数 $g(\alpha)$ で上式が成り立つと仮定されているので,

$$(\Psi_\beta^\pm,\Psi_\alpha^\pm) = (\Phi_\beta,\Phi_\alpha) = \delta(\beta-\alpha). \tag{2.1.15}$$

QED

次に, 式 (2.1.12) の条件を満たすエネルギー固有値方程式 (2.1.11) の形式的な解を求める. 式 (2.1.11) は次の様に書くことができる:

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha^\pm = V\Psi_\alpha^\pm.$$

演算子 $E_\alpha - H_0$ の値は, 自由粒子状態 Φ_α のときだけでなくエネルギー合計が E_α と同じエネルギーになる他の自由粒子状態 Φ_β の和のときも 0 になるので, この演算子は可逆ではない. $V\to 0$ の場合 $\Psi^\pm \to \Phi$ より, 解を「Φ_α + (V に比例する項)」の様に形式的に書く:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \frac{1}{E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon}V\Psi_\alpha^\pm. \tag{2.1.16}$$

ϵ は正の無限小量であり, $E_\alpha - H_0$ の逆数に意味をもたせるために挿入した. 自由粒子状態の完全系で展開すると,

$$\Psi_\alpha^\pm \ = \ \Phi_\alpha + \int d\beta\frac{T_{\beta\alpha}^\pm\Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}, \tag{2.1.17}$$

$$T_{\beta\alpha}^\pm \ \equiv \ (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm). \tag{2.1.18}$$

これらを Lippmann-Schwinger の式という.

定理 2.1.3 式 *(2.1.17)* は, *in* 状態または *out* 状態についての条件 *(2.1.12)* を満たす. ∎

証明. 状態の重ね合わせを考える:

$$\Psi_g^{\pm}(t) \equiv \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)\Psi_\alpha^{\pm}, \tag{2.1.19}$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)\Phi_\alpha. \tag{2.1.20}$$

式 (2.1.19) に式 (2.1.17) を代入すると,

$$\Psi_g^{\pm}(t) = \Phi_g(t) + \int d\alpha \int d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^{\pm}\Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}. \tag{2.1.21}$$

積分の順序を交換し, 次の積分を考える:

$$\mathscr{I}_\beta^{\pm} \equiv \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^{\pm}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}.$$

$t \to -\infty$ のとき, $\mathscr{I}_\beta^{+}$ の積分変数 E_α の積分路を閉じた上半円にとる. 円周上の積分は $\exp(-iE_\alpha t)$ の因数により 0 になる. 積分は上半平面にある特異点からの寄与で与えられる. 一般に $g(\alpha), T_{\beta\alpha}^{\pm}$ は虚部が正の有限値である特異点をいくつかもつかもしれないが, 上半円ではそれらの寄与は $t \to -\infty$ で指数関数的に減少し 0 になる. 従って, $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$ の特異点のみが残る. $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$ は上半円を考えるとき特異点をもたない. よって, $t \to -\infty$ のとき $\mathscr{I}_\beta^{+}$ は 0 になる. 同様に, $t \to \infty$ の場合, $\mathscr{I}_\beta^{-}$ は積分路を下半円にとることで, この極限で 0 になることが分かる. $\Psi_g^{\pm}(t)$ は, 式 (2.1.12) の定義条件と一致して $t \to \mp\infty$ の場合 $\Phi_g(t)$ に近づく. **QED**

2.2 S 行列

実験家は, 一般に $t \to -\infty$ のときにある状態を用意し, この状態が $t \to +\infty$ のときにどのような状態になるかを観測する. $t \to -\infty$ で粒子内容が α である状態を用意したとき, それは in 状態 Ψ_α^{+} であり, $t \to +\infty$ で粒子内容が β である状態を観測すれば, それは out 状態 Ψ_β^{-} である.

定義 2.2.1 状態 α から状態 β への遷移確率振幅を $S_{\beta\alpha}$ とすると,

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^{-}, \Psi_\alpha^{+}) \tag{2.2.1}$$

である. ∎

この複素振幅の行列を S 行列という. 相互作用がなければ α, β が同じになるので, $S_{\beta\alpha} = \delta(\alpha - \beta)$ となる. 従って, 遷移 $\alpha \to \beta$ の反応率は $|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha - \beta)|^2$ に比例する.

in 状態と out 状態は同じ Hilbert 空間にあるので，どんな in 状態も S 行列 (2.2.1) で与えられる展開係数で out 状態の和として展開できる:

$$\Psi_\alpha^+ = \sum_\beta (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+)\Psi_\beta^- = \sum_\beta S_{\beta\alpha}\Psi_\beta^-.$$

定理 2.2.2 $S_{\beta\alpha}$ は，ユニタリである． ▮

証明. 完全性関係 (2.1.5) を使うと，

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-)(\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+).$$

従って，式 (2.1.15) より，

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha). \tag{2.2.2}$$

つまり，$S^\dagger S = 1$. 同様に，

$$\int d\beta S_{\gamma\beta} S_{\alpha\beta}^* = \delta(\gamma - \alpha). \tag{2.2.3}$$

従って，$SS^\dagger = 1$. **QED**

定義 2.2.3 自由粒子状態に挟まれた S 演算子の行列要素が遷移確率 $S_{\beta\alpha}$ と等しくなるように S 演算子を定義する:

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \equiv S_{\beta\alpha}. \tag{2.2.4}$$

▮

in 状態と out 状態の形式的な表現 (2.1.13) から次の公式を得る．

定理 2.2.4

$$\begin{aligned} S &= \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty), & (2.2.5)\\ U(\tau, \tau_0) &\equiv \Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau - \tau_0))\exp(-iH_0\tau_0). & (2.2.6) \end{aligned}$$

▮

証明. $S_{\alpha\beta} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Omega(+\infty)\Phi_\beta, \Omega(-\infty)\Phi_\alpha) = (\Phi_\beta, \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty)\Phi_\alpha).$ **QED**

定理 2.2.5

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)T_{\beta\alpha}^+. \tag{2.2.7}$$

▮

証明. 式 (2.1.21) の in 状態について考える. E_α での積分路を閉じた下半円にとる. $T^+_{\beta\alpha}, g(\alpha)$ が特異点をもっていても下半平面でのそれらの寄与は $t \to \infty$ で指数関数的に減少し 0 になる. 従って, $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$ からの寄与のみを求めればよい. E_α での積分路は $E_\alpha = -\infty$ から $E_\alpha = +\infty$ へ向い, 大きな下半円を通り元へもどるので, E_α での積分は, (被積分関数の $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ での値)×$(-2i\pi)$ になる. すなわち $\mathscr{I}^+_\beta$ において $t \to +\infty$ の場合, $\epsilon \to 0_+$ の極限で次の様になる:

$$\mathscr{I}^+_\beta \to -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\ g(\alpha) T^+_{\beta\alpha} \delta(E_\alpha - E_\beta).$$

従って, $\mathscr{I}^+_\beta$ において $t \to +\infty$ の場合, 式 (2.1.21) は,

$$\begin{aligned} \Psi^+_g(t) &\to \int d\beta e^{-iE_\beta t} g(\beta)\Phi_\beta - 2i\pi \int d\beta \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) T^+_{\beta\alpha} \delta(E_\alpha - E_\beta) \\ &= \int d\beta e^{-iE_\beta t} \Phi_\beta [g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T^+_{\beta\alpha}]. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

式 (2.1.19) の Ψ^+_g を out 状態の完全系で展開すると,

$$\Psi^+_g(t) = \int d\alpha\ e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta\ \Psi^-_\beta S_{\beta\alpha}.$$

エネルギーは保存するので $S_{\beta\alpha}$ は因数 $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ をもつ. 従って, 上式は次のように書き換えられる:

$$\Psi^+_g(t) = \int d\beta\ \Psi^-_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\ g(\alpha) S_{\beta\alpha}.$$

out 状態についての定義 (2.1.12) により, 次の漸近的振る舞いが成立する:

$$\Psi^+_g(t) \to \int d\beta\ \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}.$$

これと式 (2.2.8) を比較すると,

$$\begin{aligned} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha} &= g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T^+_{\beta\alpha} \\ &= \int d\alpha \delta(\beta - \alpha) g(\alpha) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T^+_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

よって式 (2.2.7) が成り立つ. **QED**

この結果から S 行列の簡単な近似公式を得る. 弱い相互作用 V の場合, 式 (2.1.18) の in 状態と自由粒子状態との差は無視できる. 従って, 式 (2.2.7) は,

$$S_{\beta\alpha} \simeq \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \tag{2.2.9}$$

これは Born 近似である.

2.3 S 行列の対称性

「いろいろな対称変換でS行列が不変である.」ことの意味を考察し, その様な不変性を保証する Hamiltonian の条件を求める.

Lorentz 不変性

どのような固有順時的 Lorentz 変換 $x \to \Lambda x + a$ についても, 式 (2.1.1) のようにユニタリ演算子 $U(\Lambda, a)$ を in 状態に作用するものと out 状態に作用するものとを別々に定義できるが, Lorentz 変換で S 行列が不変であるためには, $U(\Lambda, a)$ がユニタリであるので in 状態と out 状態におなじユニタリ演算子 $U(\Lambda, a)$ が作用することが必要かつ十分である.

定義 2.3.1 *in* 状態と *out* 状態の両方に同じユニタリ演算子 $U(\Lambda, a)$ が式 *(2.1.1)* での様に作用するとき *S* 行列は *Lorentz* 不変であるという*:*

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (U(\Lambda, a)\Psi_\beta^-, U(\Lambda, a)\Psi_\alpha^+).$$

∎

上式に式 (2.1.1) を使うと S 行列の Lorentz 不変性の性質が得られる:

$$\begin{aligned}
& S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots} \\
= \;& \exp(ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (p'^\nu_1 + p'^\nu_2 + \cdots - p^\nu_1 - p^\nu_2 - \cdots)) \\
\times \;& \sum_{\bar\sigma_1\bar\sigma_2\cdots} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1\sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D^{(j_2)}_{\bar\sigma_2\sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \cdots \\
\times \;& \sum_{\bar\sigma_1'\bar\sigma_2'\cdots} D^{(j_1)*}_{\bar\sigma_1'\sigma_1'}(W(\Lambda, p_1')) D^{(j_2)*}_{\bar\sigma_2'\sigma_2'}(W(\Lambda, p_2')) \cdots \\
\times \;& S_{\Lambda p_1'\bar\sigma_1'n_1';\Lambda p_2'\bar\sigma_2'n_2';\cdots,\Lambda p_1\bar\sigma_1n_1;\Lambda p_2\bar\sigma_2n_2;\cdots}
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

上式の左辺は a^μ に独立なので右辺も a^μ に独立でなければならないので, $p'^\nu_1 + p'^\nu_2 + \cdots - p^\nu_1 - p^\nu_2 - \cdots = 0$. つまり, 4 次元運動量が保存する. 従って, S 行列の相互作用を表す部分は次の様に書くことができる:

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) = -2\pi i M_{\beta\alpha}\delta^4(p_\beta - p_\alpha). \tag{2.3.2}$$

次に, S 行列の Lorentz 不変性を保証する Hamiltonian の条件を求める. in 状態または out 状態 Ψ_α に対する変換 (2.1.1) と同じ様に自由粒子状態 Φ_α に対してもユニタリ演算子 $U_0(\Lambda, a)$ が定義できる.

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda, a)\Phi_{p_1\sigma_1n_1;\cdots;p_N\sigma_Nn_N} &= \exp(-ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (p^\nu_1 + \cdots + p^\nu_N)) \\
&\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 \cdots (\Lambda p_N)^0}{p^0_1 \cdots p^0_N}} \sum_{\sigma_1'\cdots\sigma_N'} D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) \cdots D^{(j_N)}_{\sigma_N'\sigma_N}(W(\Lambda, p_N)) \\
&\times \Phi_{\Lambda p_1\sigma_1'n_1;\cdots;\Lambda p_N\sigma_N'n_N}.
\end{aligned}$$

このユニタリ演算子 $U_0(\Lambda, a)$ が S 演算子と交換

$$U_0(\Lambda, a)^{-1} S U_0(\Lambda, a) = S \tag{2.3.3}$$

すれば, 式 (2.3.1) は成り立つ. 1.4 節でのように, $U_0(\Lambda, a)$ の生成子として運動量 $\mathbf{P}_0$, 角運動量 $\mathbf{J}_0$, ブースト $\mathbf{K}_0$, エネルギー H_0 がある. 式 (2.3.3) は変換 $U_0(\Lambda, a)$ の下で S 演算子が不変であり, S 演算子がこれらの生成子と交換することを示している:

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0. \tag{2.3.4}$$

相互作用がある場合, 運動量と角運動量は相互作用がないときの運動量と角運動量と同じにし, Hamiltonian を自由粒子 Hamiltonian H_0 に相互作用項 V を加えたものと仮定する:

$$H = H_0 + V,\ \mathbf{P} = \mathbf{P}_0,\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_0. \tag{2.3.5}$$

しかし, 相互作用がある場合のブースト演算子 $\mathbf{K}$ を自由粒子の $\mathbf{K}_0$ と等しいとおくことはできない. 何故ならば, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ のとき $H = H_0$ となるからである. [6] 従って, H_0 に V を加えたとき, ブースト生成子に補正 $\mathbf{W}$ を加えねばならない:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}. \tag{2.3.6}$$

定理 2.3.2 相互作用が自由粒子の運動量及び角運動量演算子のそれぞれと可換

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0 \tag{2.3.7}$$

かつ,

$$[\mathbf{K}_0, V] + [\mathbf{W}, H] = 0 \tag{2.3.8}$$

かつ, $\mathbf{W}$ の行列要素がエネルギーの滑らかな関数であるならば, 式 *(2.3.4)* は成り立つ. ∎

証明. 演算子 $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0, \mathbf{K}_0$ は, 自由粒子状態 Φ_α の無限小 Lorentz 変換を生成するので, それらは自動的に式 (1.4.19) − (1.4.25) の関係を満たしている:

$$[J_0^i, J_0^j] = i\epsilon_{ijk} J_0^k, \tag{2.3.9}$$

$$[J_0^i, K_0^j] = i\epsilon_{ijk} K_0^k, \tag{2.3.10}$$

$$[K_0^i, K_0^j] = -i\epsilon_{ijk} J_0^k, \tag{2.3.11}$$

$$[J_0^i, P_0^j] = i\epsilon_{ijk} P_0^k, \tag{2.3.12}$$

$$[K_0^i, P_0^j] = -iH_0\delta_{ij}, \tag{2.3.13}$$

$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0, \tag{2.3.14}$$

$$[K_0^i, H_0] = -iP_0^i. \tag{2.3.15}$$

同様に, 例えば in 状態に作用する変換 (2.1.1) を生成する生成子 $\mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, H$ は, 自由粒子状態の場合と群構造が同じであるので同じ交換関係を満たす:

$$
\begin{aligned}
[J^i, J^j] &= i\epsilon_{ijk} J^k, && (2.3.16)\\
[J^i, K^j] &= i\epsilon_{ijk} K^k, && (2.3.17)\\
[K^i, K^j] &= -i\epsilon_{ijk} J^k, && (2.3.18)\\
[J^i, P^j] &= i\epsilon_{ijk} P^k, && (2.3.19)\\
[K^i, P^j] &= -iH\delta_{ij}, && (2.3.20)\\
[J^i, H] &= [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0, && (2.3.21)\\
[K^i, H] &= -iP^i. && (2.3.22)
\end{aligned}
$$

並進, 回転を生成する演算子 $\mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ は式 (2.3.14) より H_0 と可換であるので, 仮定 (2.3.7) を使うと $\mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ は H と可換である. つまり $\mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ はそれぞれ H_0, H と交換するので, $\mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ は式 (2.2.6) で定義された演算子 $U(t, t_0)$ と交換する. 従って, S 演算子 $U(\infty, -\infty)$ と交換する. 式 (2.2.7) の右辺のどの項もエネルギー保存の δ 関数をもつので, $[H_0, S] = 0$. [7]

条件 (2.3.8), 式 (2.3.15) と $H = H_0 + V$ から, 式 (2.3.22) が成り立つ. ブースト生成子 $\mathbf{K}_0$ が S と交換可能であることを証明するために, 有限の t, t_0 について式 (2.2.6) によって定義されている演算子 $U(t, t_0)$ と $\mathbf{K}_0$ の交換子を考える. 式 (2.3.15) と $\mathbf{P}_0$ と H_0 が交換することから, [8]

$$[\mathbf{K}_0, e^{iH_0 t}] = t\mathbf{P}_0 e^{iH_0 t}.$$

式 (2.3.22) も成り立つので同様に,

$$[\mathbf{K}, e^{iHt}] = t\mathbf{P}e^{iHt} = t\mathbf{P}_0 e^{iHt}.$$

$\mathbf{K}_0$ と U との交換関係で運動量演算子は消去される:

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0) - \mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0). \tag{2.3.23}$$

ここで,

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(iH_0 t)\mathbf{W}\exp(-iH_0 t). \tag{2.3.24}$$

H_0 の固有状態に挟まれた $\mathbf{W}$ の行列要素はエネルギーの十分滑らかな関数なので, エネルギー固有状態の滑らかな重ね合わせで挟まれた $\mathbf{W}(t)$ の行列要素は, Riemann-Lebesgue の定理から $t \to \pm\infty$ で 0 になる:

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S]. \tag{2.3.25}$$

QED

式 (2.3.23) に $\tau = 0, \tau_0 = \mp\infty$ を代入すると,

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0. \tag{2.3.26}$$

式 (2.1.13) によると $\Omega(\mp\infty)$ は, 自由粒子状態 Φ_α を対応する in 状態または out 状態の $\Psi^\pm_\alpha$ に変換する演算子である. 式 (2.3.5) と (2.3.7) から運動量, 角運動量についても式 (2.3.26) と同様の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0, & (2.3.27)\\ \mathbf{J}\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0. & (2.3.28) \end{aligned}$$

また, 全ての $\Phi_\alpha, \Psi^\pm_\alpha$ は, H_0, H の同じ固有値 E_α の固有状態なので,

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0. \tag{2.3.29}$$

式 (2.3.26) − (2.3.29) より, 演算子 $\mathbf{K}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0, H_0$ からそれぞれ対応する演算子 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{J}, H$ への変換は相似変換であることが分かる. つまり, $\mathbf{K}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0, H_0$ と同じ交換関係を演算子 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{J}, H$ も満たすので, $\mathbf{K}$ を含む交換関係 (2.3.17), (2.3.18), (2.3.20) も成り立つ. 従って, 上の定理の仮定で in 状態と out 状態は自由粒子状態と同じ様に非斉次 Lorentz 変換で変換する.

内部対称性

原子核の理論において, 中性子と陽子の交換で理論が不変であるという対称性の様に自然界にはいろいろな対称性がある. これらの対称性は, Lorentz 不変性と関係なく, 全ての慣性系で同じ対称性である. その様な対称変換 T は, 物理状態の Hilbert 空間ではユニタリ演算子 $U(T)$ として作用するとする. これは, 粒子の種類を添字にした線形変換として表す:

$$U(T)\Psi_{p_1\sigma_1n_1;\cdots;p_N\sigma_Nn_N} = \sum_{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_N} \mathscr{D}_{\bar{n}_1n_1}(T)\cdots\mathscr{D}_{\bar{n}_Nn_N}(T)\Psi_{p_1\sigma_1\bar{n}_1;\cdots;p_N\sigma_N\bar{n}_N}. \tag{2.3.30}$$

1 章での一般的な議論と同様に, $U(T)$ は群の積法則を満たさなければならない:

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T). \tag{2.3.31}$$

式 (2.3.30) に $U(\bar{T})$ を作用させると行列 $\mathscr{D}$ も同じ変換則を満たすことが分かる:

$$\mathscr{D}(\bar{T})\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(\bar{T}T). \tag{2.3.32}$$

異なる in 状態に $U(T)$ を作用させて得られる状態のスカラー積をとり, 正規化条件 (2.1.2) を使うと $\mathscr{D}(T)$ はユニタリでなければならないことが分かる:

$$\mathscr{D}^\dagger(T) = \mathscr{D}^{-1}(T). \tag{2.3.33}$$

定義 2.3.3

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (U(T)\Psi_\beta^-, U(T)\Psi_\alpha^+) \tag{2.3.34}$$

であるとき, $S_{\beta\alpha}$ は内部対称性変換 T で不変であるという. ∎

式 (2.3.30) を式 (2.3.34) に代入すると,

$$\begin{aligned}\sum_{\bar N_1 \bar N_2 \cdots} \sum_{\bar N_1' \bar N_2' \cdots} & \mathscr{D}^*_{\bar N_1' n_1'}(T)\mathscr{D}^*_{\bar N_2' n_2'}(T)\cdots\mathscr{D}_{\bar N_1 n_1}(T)\mathscr{D}_{\bar N_2 n_2}(T)\cdots \\ & \times S_{p_1'\sigma_1'\bar N_1';p_2'\sigma_2'\bar N_2';\cdots,p_1\sigma_1\bar N_1;p_2\sigma_2\bar N_2;\cdots} \\ & = S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots}\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

これから, $\mathscr{D}$ は S 行列と交換することが分かる. 自由粒子状態での様に作用する変換演算子 $U_0(T)$:

$$U_0(T)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\cdots;p_N\sigma_N n_N} = \sum_{\bar N_1\cdots\bar N_N} \mathscr{D}_{\bar N_1 n_1}(T)\cdots\mathscr{D}_{\bar N_N n_N}(T)\Phi_{p_1\sigma_1\bar N_1;\cdots;p_N\sigma_N\bar N_N} \tag{2.3.36}$$

があり, かつ Hamiltonian の自由粒子部分と相互作用部分のどちらとも交換する

$$U_0^{-1}(T)H_0U_0(T) = H_0, \tag{2.3.37}$$

$$U_0^{-1}(T)VU_0(T) = V \tag{2.3.38}$$

ならば, 式 (2.3.35) は成り立つ. Lippmann-Schwinger の式 (2.1.17) かまたは式 (2.1.13) から, 演算子 $U_0(T)$ が自由粒子状態に加えて in 状態と out 状態でも同じ様に作用することが分かる. [9] 従って, そのとき $U_0(T)$ を $U(T)$ と見なすことができる.

物理的に重要な 1 変数 Lie 群の特別な場合では, T は 1 つの変数 θ の関数であり,

$$T(\bar\theta)T(\theta) = T(\bar\theta + \theta) \tag{2.3.39}$$

を満たす. この場合対応する Hilbert 空間における演算子は次のような形をとる:

$$U(T(\theta)) = \exp(iQ\theta). \tag{2.3.40}$$

演算子 Q はエルミートである. 同様に行列 $\mathscr{D}(T)$ は次の形をとる:

$$\mathscr{D}_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n}\exp(iq_n\theta). \tag{2.3.41}$$

ここで q_n は粒子のタイプに依存する実数である. 式 (2.3.41) を式 (2.3.35) に代入すると, 右辺は θ に独立である. 従って, 左辺の e の指数が 0 にならなければならない:

$$q_{n_1'} + q_{n_2'} + \cdots = q_{n_1} + q_{n_2} + \cdots. \tag{2.3.42}$$

つまり q は保存する. この様な保存則の古典的例は電荷の保存則である. 今までに知られている過程では, 陽子, 中性子, ハイペロン等のバリオンの数からその反粒子の数を引いた数と, 電子, μ 中間子, τ 粒子, ニュートリノのようなレプトンの数からそれらの反粒子の数を引いた数は保存する.

パリティ

空間反転 $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ の下での対称性が成立するとき, in 状態及び out 状態を次のように変換するユニタリ演算子 P が存在する:

$$\mathrm{P}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\cdots;p_N\sigma_N n_N} = \eta_{n_1}\cdots\eta_{n_N}\Psi^{\pm}_{\mathscr{P}p_1\sigma_1 n_1;\cdots;\mathscr{P}p_N\sigma_N n_N}. \tag{2.3.43}$$

ここで η_n は, 粒子タイプ n の粒子のパリティで, $\mathscr{P}$ は p^μ の空間成分を反転する. S 行列についてのパリティ保存の条件は

$$\begin{aligned} S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots} &= \eta^*_{n_1'}\eta^*_{n_2'}\cdots\eta_{n_1}\eta_{n_2}\cdots \\ &\times S_{\mathscr{P}p_1'\sigma_1'n_1';\mathscr{P}p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,\mathscr{P}p_1\sigma_1n_1;\mathscr{P}p_2\sigma_2n_2;\cdots}. \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

式 (2.3.43) の P と同じ様に自由粒子状態に作用する P_0 が定義され, それが H_0 に加えて V と交換するならば, 内部対称性の場合と同じように式 (2.3.43) を満たす演算子 P が存在する.

時間反転

時間が反転するので, in 状態と out 状態が交換されると考えられる. それ以外は, これまでと同様に多粒子状態は 1 粒子状態の直積のように変換されるとする. 1.6 節での結果から,

$$\mathrm{T}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\cdots;p_N\sigma_N n_N} = \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\cdots\zeta_{n_N}(-1)^{j_N-\sigma_N}\Psi^{\mp}_{\mathscr{P}p_1-\sigma_1 n_1;\cdots;\mathscr{P}p_N-\sigma_N n_N} \tag{2.3.45}$$

とする. これを簡単化して次の様に記す:

$$\mathrm{T}\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\mp}_{\mathscr{T}\alpha}. \tag{2.3.46}$$

$\mathscr{T}$ は式 (2.3.45) の位相因子をかけ, 3 次元運動量とスピンの符号を反転することを表している. T は反ユニタリであるので,

$$(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) = (\mathrm{T}\Psi^+_\alpha, \mathrm{T}\Psi^-_\beta). \tag{2.3.47}$$

従って, S 行列についての時間反転不変性は次のように書ける: [10]

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathscr{T}\alpha,\mathscr{T}\beta}. \tag{2.3.48}$$

詳しく書けば,

$$\begin{aligned} &S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots} \\ &= \zeta_{n_1'}(-1)^{j_1'-\sigma_1'}\zeta_{n_2'}(-1)^{j_2'-\sigma_2'}\cdots\zeta^*_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta^*_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\cdots \\ &\times S_{\mathscr{P}p_1-\sigma_1n_1;\mathscr{P}p_2-\sigma_2n_2;\cdots,\mathscr{P}p_1'-\sigma_1'n_1';\mathscr{P}p_2'-\sigma_2'n_2';\cdots} \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

もし自由粒子状態に時間反転の作用をする演算子 T_0

$$\mathrm{T}_0\Phi_\alpha \equiv \Phi_{\mathscr{T}\alpha} \tag{2.3.50}$$

が存在し, それが自由粒子の Hamiltonian だけでなく相互作用とも交換する,

$$\mathrm{T}_0^{-1}H_0\mathrm{T}_0 = H_0, \tag{2.3.51}$$

$$\mathrm{T}_0^{-1}V\mathrm{T}_0 = V \tag{2.3.52}$$

ならば, S 行列は変換則 (2.3.49) を満たす.

式 (2.1.13) に $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$ を作用させて式 (2.3.50) − (2.3.52) を使うと,

$$\mathrm{T}\Psi_\alpha^\pm = \mathrm{T}\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha = \Omega(\pm\infty)\mathrm{T}\Phi_\alpha = \Omega(\pm\infty)\Phi_{\mathscr{T}\alpha}.$$

T は反ユニタリであるので, $\Omega(t)$ と交換するとき指数の i の符号をかえる. つまり, $\mp\infty$ の符号を反転する. すなわち式 (2.3.46) が導かれる.

C 変換

荷電共役変換という内部対称変換がある. それは粒子と反粒子を交換する変換である. 対応するユニタリ演算子 C の作用は,

$$\mathrm{C}\Psi^\pm_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots} = \xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots\Psi^\pm_{p_1\sigma_1n_1^c;p_2\sigma_2n_2^c;\cdots}. \tag{2.3.53}$$

ここで n^c はタイプ n の粒子の反粒子であり, ξ_n は位相である. これが in 状態と out 状態で成り立つならば S 行列は不変条件を満たす:

$$\begin{aligned}&S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots}\\ &= \xi^*_{n_1'}\xi^*_{n_2'}\cdots\xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots S_{p_1'\sigma_1'n_1'^c;p_2'\sigma_2'n_2'^c;\cdots,p_1\sigma_1n_1^c;p_2\sigma_2n_2^c;\cdots}.\end{aligned} \tag{2.3.54}$$

演算子 C_0 が式 (2.3.53) の様に自由粒子状態に作用し, これが H_0 に加えて相互作用 V と交換するならば, S 行列は条件 (2.3.54) を満たす. この場合, $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0$ ととる.

2.4 摂動理論

S 行列を計算するための摂動理論は, Hamiltonian $H = H_0 + V$ の相互作用項 V の巾で S 行列を展開する方法である.

この摂動理論を導く最も簡単な方法は, 式 (2.2.5) を使う方法である. そこでは, S 演算子が次の様に与えられた:

$$S = U(\infty, -\infty),$$

$$U(\tau,\tau_0) \equiv \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau-\tau_0))\exp(-iH_0\tau_0).$$

$U(\tau,\tau_0)$ を τ に関して微分することで, 次の微分方程式が得られる:

$$i\frac{d}{d\tau}U(\tau,\tau_0) = V(\tau)U(\tau,\tau_0), \tag{2.4.1}$$

$$V(t) \equiv \exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t). \tag{2.4.2}$$

ここでの時間依存の演算子は, 相互作用表示のものである. 初期条件が $U(\tau_0,\tau_0)=1$ である微分方程式 (2.4.1) の解は, 積分方程式

$$U(\tau,\tau_0) = 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dtV(t)U(t,\tau_0) \tag{2.4.3}$$

の解である. この積分方程式を繰り返し使うことによって, V の巾での $U(\tau,\tau_0)$ の展開が得られる:

$$\begin{aligned} U(\tau,\tau_0) &= 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dt_1V(t_1) + (-i)^2\int_{\tau_0}^{\tau} dt_1\int_{\tau_0}^{t_1} dt_2V(t_1)V(t_2) \\ &+(-i)^3\int_{\tau_0}^{\tau} dt_1\int_{\tau_0}^{t_1} dt_2\int_{\tau_0}^{t_2} dt_3V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

上式に $\tau=\infty, \tau_0=-\infty$ を代入するとS演算子についての摂動展開が得られる:

$$\begin{aligned} S &= 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1V(t_1) + (-i)^2\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2V(t_1)V(t_2) \\ &+(-i)^3\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\int_{-\infty}^{t_2} dt_3V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

式 (2.4.5) をT積を使って書き換える. T積とは, 時間に依存する全ての演算子を遅い時間の引数をもったものから順に左から並べた積である. 例えば,

$$\begin{aligned} T\{V(t)\} &= V(t), \\ T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1-t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2-t_1)V(t_2)V(t_1). \end{aligned}$$

$\theta(\tau)$ は以前に導入した階段関数である. n 個の $V(t_i), (1 \leqq i \leqq n)$ のT積は, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の $n!$ 個の順列について和をとったものである. そのそれぞれの項の積分は, 同じ積分値になるので, 式 (2.4.5) は, [11]

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1dt_2\cdots dt_nT\{V(t_1)\cdots V(t_n)\}. \tag{2.4.6}$$

これはDyson級数と呼ばれている. 式 (2.4.6) を次の様に書くことがある:

$$S = T\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty} dtV(t)).$$

ここでTは, 指数の級数展開のそれぞれの項を時間の順序に並べることによって計算することを示している.

2.3節で見てきたように, S行列の成分は自由粒子状態Φ_α, Φ_βに挟まれたS演算子の行列要素であるので, これらの自由粒子状態に作用するLorentz変換の演算子$U_0(\Lambda, a)$とS演算子が交換すればLorentz不変になった. つまり, S演算子は, $U_0(\Lambda, a)$の生成子$H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0, \mathbf{K}_0$と交換しなければならない.

$V(t)$は3次元空間積分

$$V(t) = \int d^3x \mathscr{H}(\mathbf{x}, t) \tag{2.4.7}$$

で, $\mathscr{H}$は次の意味でスカラー密度

$$U_0(\Lambda, a)\mathscr{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathscr{H}(\Lambda x + a) \tag{2.4.8}$$

であるとする. このとき, Sは4次元積分の和として書くことができる:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathscr{H}(x_1) \cdots \mathscr{H}(x_n)\}. \tag{2.4.9}$$

この式は, 演算子のT積に現れる階段関数θ以外はLorentz不変である.

二つの時空点の時間順序は, $x_1 - x_2$が時間的ベクトルならば, Lorentz不変である. [12] 従って, 式(2.4.9)の時間順序は, もし$\mathscr{H}$が空間的, 光的に離れている全ての$\mathscr{H}$と交換する

$$(x - x')^2 \geqq 0 \text{の場合} \qquad [\mathscr{H}(x), \mathscr{H}(x')] = 0 \tag{2.4.10}$$

ならば, Lorentz系の選択に依存しない.

定理 2.4.1 式*(2.4.8)*と*(2.4.10)*を満たす相互作用*(2.4.7)*の密度$\mathscr{H}$がエネルギーに関して滑らかな行列要素をもつならば, この相互作用で計算されたS行列は, *Lorentz*不変である.

証明. (2.4.8)の両辺xで積分すると

$$U_0(\Lambda, a)V(t)U_0^{-1}(\Lambda, a) = V(t). \tag{2.4.11}$$

従って, 式(2.3.7)が成り立つ. 無限小ブーストの場合, 式(2.4.8)は, [13]

$$-i[\mathbf{K}_0, \mathscr{H}(\mathbf{x}, t)] = t\nabla\mathscr{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{H}(\mathbf{x}, t). \tag{2.4.12}$$

上式を両辺空間座標$\mathbf{x}$で積分し$t = 0$と置けば, [14]

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_0, V] &= [\mathbf{K}_0, \int d^3x \mathscr{H}(\mathbf{x}, 0)] = [H_0, \mathbf{W}], && (2.4.13) \\ \mathbf{W} &\equiv -\int d^3x \mathbf{x} \mathscr{H}(\mathbf{x}, 0). && (2.4.14) \end{aligned}$$

式 (2.3.22) から $[\mathbf{K}_0, V] + [\mathbf{W}, V] = [H_0, \mathbf{W}]$ となるので上記の様に W をとった. この様にとると, 条件 (2.4.10) から

$$[\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y \; \mathbf{x}[\mathscr{H}(\mathbf{x}, 0), \mathscr{H}(\mathbf{y}, 0)] = 0. \tag{2.4.15}$$

H_0 の固有状態で挟んだ $\mathscr{H}(\mathbf{x}, 0)$ の行列要素が, エネルギー固有値の滑らかな関数だから, (散乱理論の妥当性に必要であるように) V は滑らかな関数であり, $\mathbf{W}$ も滑らかである.

式 (2.4.13) と (2.4.15) から,

$$[\mathbf{K}_0, V] + [\mathbf{W}, H] = [\mathbf{W}, V] = 0. \tag{2.4.16}$$

従って, 式 (2.3.8) を満たすので S 行列は Lorentz 不変である. **QED**

Notes

[6]後に出てくる式 (2.3.20) と (2.3.13) から $H = H_0$.

[7]エネルギーが保存するので $H_0 S\Phi_\alpha = E_\alpha S\Phi_\alpha = SH_0\Phi_\alpha$.

[8]$A = e^{iH_0t}\mathbf{K}_0 e^{-iH_0t}$ とおいて A の微分方程式をつくると求まる.

[9]U_0 は H, H_0 と交換するので, 式 (2.3.36) の両辺に $\Omega(\mp\infty)$ を掛ければ式 (2.1.13) より式 (2.3.30) が導ける.

[10]$S_{\beta\alpha} = (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) = (\mathrm{T}\Psi^+_\alpha, \mathrm{T}\Psi^-_\beta) = (\Psi^-_{\mathscr{T}\alpha}, \Psi^+_{\mathscr{T}\beta}) = S_{\mathscr{T}\alpha\mathscr{T}\beta}$.

[11] $\frac{(-i)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} T(V(t_1)V(t_2))dt_1dt_2 = \frac{(-i)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1dt_2\{\theta(t_1-t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2-t_1)V(t_2)V(t_1)\}$

$= \frac{(-i)^2}{2!}\{\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_2\int_{-\infty}^{t_2} dt_1V(t_2)V(t_1)\} = (-i)^2\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2V(t_1)V(t_2)$.

[12]時間的ならば, $|t_1 - t_2| > |x_1 - x_2|$. そのとき $t_1 > t_2$ とすると, $t'_1 - t'_2 = (x_1 - x_2)\sinh\theta + (t_1 - t_2)\cosh\theta$ $= (t_1 - t_2)\cosh\theta(\frac{(x_1-x_2)\sinh\theta}{(t_1-t_2)\cosh\theta} + 1) > 0$.

[13] $(1 + i\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\sigma P^\sigma + \cdots)\mathscr{H}(x)(1 - i\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\sigma P^\sigma + \cdots) = \mathscr{H}((\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)x^\nu + \epsilon^\mu)$.

右辺 $= \mathscr{H}(x) + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^\mu}(\omega^\mu_\nu x^\nu + \epsilon^\mu) +$, $\omega_{\rho\sigma}$ の項を比較して, $i\frac{1}{2}[J^{\rho\sigma}, \mathscr{H}] = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^\mu}\eta^{\mu\rho}x^\sigma$.

$\rho = k, \sigma = 0$ のとき, $i\frac{1}{2}[J^{k0}, \mathscr{H}] = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^k}x^0$. $\rho = 0, \sigma = k$ のとき, $i\frac{1}{2}[J^{0k}, \mathscr{H}] = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^0}x^k$.

[14] 式 (2.4.2) の $V(t) = \exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t) = \int d^3x\mathscr{H}(\mathbf{x}, t)$ を両辺 t で微分して,

$i[H_0, V(t)] = \int d^3x\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}$ $\therefore$ $i[H_0, \mathscr{H}] = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}, \mathbf{x}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t} = i\mathbf{x}[H_0, \mathscr{H}] = i[H_0, \mathbf{x}\mathscr{H}], [K_0, \mathscr{H}] = it\nabla\mathscr{H} - [H_0, \mathbf{x}\mathscr{H}]$

3章　クラスター分解原理

クラスター分解原理とは,「遠く離れた実験は互いに影響を及ぼしあわない.」という原理である. Hamiltonian を生成消滅演算子の積の和として表現すれば, S 行列がクラスター分解原理を満たす様にできる. ここでは, 生成消滅演算子から Hamiltonian を構成し, それがクラスター分解原理を満たすための条件を求める.

3.1　ボゾンとフェルミオン

物理状態の Hilbert 空間は, $0, 1, 2, \cdots$ 個の自由粒子を含む状態によって構成されている. これらは自由粒子状態または in 状態または out 状態である. ここでは, 自由粒子状態 $\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1,\cdots,\mathbf{p}_N\sigma_N n_N}$ (σ はスピン z 成分, n は粒子タイプを表す.) を扱うが, その結果は in 状態, out 状態においても成り立つ.

定義 3.1.1 運動量, スピンがそれぞれ $\mathbf{p}, \sigma$ と $\mathbf{p}', \sigma'$ の二つの粒子が同じ粒子タイプ n に属し, 状態ベクトル $\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots}$ と $\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots}$ が同じ物理状態を表すならば, この二つの粒子は同種粒子である. $\cdots$ の省略記号はこの状態に存在する他の粒子を表している. ∎

定理 3.1.2 粒子にはボゾンとフェルミオンしかない. つまり, 同種粒子の交換で符号が不変かまたは反転する二つの場合しかない:

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots} = \pm\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots}. \tag{3.1.1}$$

複号はボゾンの場合は $+$, フェルミオンの場合は $-$ である. ∎

証明.　運動量, スピンがそれぞれ $\mathbf{p}, \sigma$ と $\mathbf{p}', \sigma'$ の二つの同種粒子を交換すれば, 状態ベクトル $\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots}$ と $\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots}$ は同じ物理状態を表すので, この二つの状態は同じレイに属する:

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots} = \alpha_n\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots}, \quad \text{但し}\ |\alpha_n| = 1. \tag{3.1.2}$$

位相因子 α_n が粒子タイプのみに依存するならば, 式 (3.1.2) の右辺の状態の二つの同種粒子を交換することにより同じ位相因子 α_n が再び右辺に掛かる:

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots} = \alpha_n^2\Phi_{\cdots\mathbf{p}\sigma n\cdots\mathbf{p}'\sigma' n\cdots}.$$

すなわち $\alpha_n^2 = 1$ で $\alpha_n = \pm 1$. つまり式 (3.1.1) が導かれる.

α_n が式 (3.1.2) で省略されている他の粒子の数や種類に依存するならば, 状態ベクトルがその二つの粒子の交換で対称であることが, その粒子から遠くにある他の粒子の存在に依存することになる. 従って, この仮定は現実的ではない. 位相 α_n が交換される二つの粒子のスピンに依存するならば, これらのスピン依存位相因子 α_n は回転群の表現を与えなければならない. しかし, 1 次元すなわち位相因子による 3 次元回転群の自明でない表現はない. 位相 α_n が交換される 2 粒子の運動量 p, p' に依存すれば, Lorentz 不変の要求から α_n はスカラー $p \cdot p'$ のみに依存しなければならない. これは二つの粒子の交換で不変である. **QED**

異なる粒子タイプの粒子の交換については, 全ての光子の運動量とヘリシティ[15] をまず並べ, 次に全ての電子の運動量とスピン z 成分を並べる等により状態ベクトルをラベルづけすると決める. つまり, 異種同士の交換は並べ直せば同じになるように定める. 従って, 状態ベクトルは, フェルミオン同士の交換に関して反対称に, それ以外の交換では対称にとることにする.

状態の正規化は, 定理 3.1.2 の対称条件と一致するように定義する. 一つの粒子の全ての量子数 (運動量 $\mathbf{p}$, スピン z 成分 σ と粒子タイプ n 等) をラベル q で表すとすると, N 個の粒子状態は $\Phi_{q_1 \cdots q_N}$ となる. $N=0$ の状態は真空状態 Φ_0 を表す. $N=0, N=1$ の場合,

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1, \tag{3.1.3}$$

$$(\Phi_{q'}, \Phi_q) = \delta(q' - q). \tag{3.1.4}$$

$\delta(q'-q)$ は粒子の全ての量子数についての δ 関数とクロネッカーの δ の積である:

$$\delta(q' - q) \equiv \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}. \tag{3.1.5}$$

$N=2$ の場合, 状態 $\Phi_{q_1'q_2'}, \Phi_{q_2'q_1'}$ は物理的に同じ状態であるので, 次の様に取る:

$$(\Phi_{q_1'q_2'}, \Phi_{q_1q_2}) = \delta(q_1' - q_1)\delta(q_2' - q_2) \pm \delta(q_2' - q_1)\delta(q_1' - q_2). \tag{3.1.6}$$

複号はどちらの粒子もフェルミオンのとき $-$, それ以外の場合は $+$ である.

一般的に書くと,

$$(\Phi_{q_1'q_2'\cdots q_M'}, \Phi_{q_1q_2\cdots q_N}) = \delta_{NM} \sum_{\mathscr{P}} \delta_{\mathscr{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathscr{P}i}). \tag{3.1.7}$$

整数 $1, 2, \cdots, N$ の全ての置換 $\mathscr{P}$ で和を取り, $\mathscr{P}$ がフェルミオンの奇数回の交換を含むならば $\delta_{\mathscr{P}}$ は -1, それ以外は $+1$ とする.

3.2 生成演算子と消滅演算子

定義 3.2.1 生成演算子 $a^\dagger(q)$(または詳細に $a^\dagger(\mathrm{p},\sigma,n)$)は, 状態に量子数 q の粒子を加える演算子として定義する:

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N} \equiv \Phi_{qq_1q_2\cdots q_N}. \tag{3.2.1}$$

∎

N 粒子状態は, N 個の生成演算子を真空に作用させることによって得ることができる:

$$a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\cdots a^\dagger(q_N)\Phi_0 = \Phi_{q_1\cdots q_N}. \tag{3.2.2}$$

$a^\dagger(q)$ の随伴 $a(q)$ は, 式 (3.1.7) から求めることができる. $a(q)$ はそれが作用する任意の状態から量子数 q の粒子を取り去るので, 消滅演算子と呼ばれる.

定理 3.2.2 量子数 $q, q_1, \cdots, q_N$ で表される粒子が全てボゾンまたは全てフェルミオンのとき,

$$a(q)\Phi_{q_1\cdots q_N} = \sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+1}\delta(q-q_r)\Phi_{q_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}. \tag{3.2.3}$$

複号はボゾンの場合 $+$, フェルミオンの場合 $-$ である. ∎

証明. 式 (3.2.1) を使うと,

$$(\Phi_{q'_1q'_2\cdots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}) \equiv (a^\dagger(q)\Phi_{q'_1q'_2\cdots q'_M}, \Phi_{q_1q_2\cdots q_N}) = (\Phi_{qq'_1q'_2\cdots q'_M}, \Phi_{q_1q_2\cdots q_N}).$$

式 (3.1.7) における $1, 2, \cdots, N$ の置換 $\mathscr{P}$ についての和を, r 以外の順番を変えずに r との互換をくり返し, r を順列の 1 番左に移動し, 残りの整数 $1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, N$ の置換 $\bar{\mathscr{P}}$ での和として書き変える. 符号因子は次のようになる:

$$\delta_{\mathscr{P}} = (\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathscr{P}}}.$$

上下の符号はそれぞれボゾンとフェルミオンの場合の符号である. 従って,

$$\begin{aligned}(\Phi_{q'_1\cdots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1\cdots q_N}) &= \delta_{N,M+1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{\bar{\mathscr{P}}}(\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathscr{P}}}\delta(q-q_r)\prod_{i=1}^{M}\delta(q'_i - q_{\bar{\mathscr{P}}i}) \\ &= \sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r-1}\delta(q-q_r)(\Phi_{q'_1\cdots q'_M}, \Phi_{q_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}).\end{aligned}$$

式 (3.2.3) の両辺のそれぞれの式と任意の状態 $\Phi_{q'_1\cdots q'_M}$ との行列要素が等しくなるので, 式 (3.2.3) は成り立つ. **QED**

ボゾンとフェルミオンのどちらの場合も, $a(q)$ は真空を消去する:

$$a(q)\Phi_0 = 0. \tag{3.2.4}$$

定理 3.2.3 生成・消滅演算子は交換または反交換関係を満たしている:

$$
\begin{aligned}
[a(q'), a^\dagger(q)]_\mp &\equiv a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = \delta(q'-q), \\
[a^\dagger(q'), a^\dagger(q)]_\mp &\equiv a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') = 0, \\
[a(q'), a(q)]_\mp &\equiv a(q')a(q) \mp a(q)a(q') = 0.
\end{aligned}
$$

∎

証明. 演算子 $a(q')$ を左から式 (3.2.1) に作用させ, 式 (3.2.3) を使うと,

$$
\begin{aligned}
a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N} &= a(q')\Phi_{qq_1q_2\cdots q_N} \\
&= \delta(q'-q)\Phi_{q_1\cdots q_N} + \sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+2}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}.
\end{aligned}
$$

q_r は $qq_1\cdots q_N$ の前から $(r+1)$ 番目にあるので, 第 2 項の符号は $(\pm)^{r+2}$ である. 次に, 演算子 $a^\dagger(q)$ を左から式 (3.2.3) に作用させると,

$$
a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1q_2\cdots q_N} = \sum_{r=1}^{N}(\pm 1)^{r+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}.
$$

上式の両辺を辺々加減することによって次の式を得る:

$$
[a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q')]\Phi_{q_1\cdots q_N} = \delta(q'-q)\Phi_{q_1\cdots q_N}.
$$

複号はボゾンの場合 $-$, フェルミオンの場合 $+$ である. これらの式は任意の状態 $\Phi_{q_1\cdots q_N}$ について成り立つので, 次の演算子関係が成り立つ:

$$
a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = \delta(q'-q). \tag{3.2.5}
$$

さらに, 式 (3.2.2) と (3.1.1) から直接,

$$
a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') = 0. \tag{3.2.6}
$$

式 (3.2.6) から,

$$
a(q')a(q) \mp a(q)a(q') = 0. \tag{3.2.7}
$$

上下の符号は, それぞれボゾンとフェルミオンに対応している. 異なる粒子のどちらかがボゾンの場合, それらの生成と消滅演算子, それらの生成演算子, それらの消滅演算子は交換する. 両方ともフェルミオンの場合, 反交換する. **QED**

定理 3.2.4 物理的意味のある演算子 $\mathscr{O}$ は係数 C_{NM} を適切に選ぶことによって, その演算子を生成・消滅演算子の積の和として表わすことができる:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{O} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int dq_1'\cdots dq_N' dq_1\cdots dq_M a^\dagger(q_1')\cdots a^\dagger(q_N')a(q_M)\cdots a(q_1) \\
\times C_{NM}(q_1'\cdots q_N' q_1\cdots q_M).
\end{aligned} \tag{3.2.8}
$$

∎

証明. 式 (3.2.8) の真空期待値を式 (3.2.4) を使い計算すると,

$$(\Phi_0, \mathscr{O}\Phi_0) = C_{00}.$$

従って, C_{00} 以外の C_{NM} 値に関係なく, $(\Phi_0, \mathscr{O}\Phi_0)$ の値を C_{00} に選ぶことができる.

$N < L, M \leqq K$ または $N \leqq L, M < K$ である全ての N 粒子状態と M 粒子状態間の $\mathscr{O}$ の行列要素 $(\Phi_{q'_1\cdots q'_N}, \mathscr{O}\Phi_{q_1\cdots q_M})$ は C_{NM} を適切に選択することによって望む値に設定できると仮定する. L 粒子状態と K 粒子状態間の $\mathscr{O}$ の行列要素は, 式 (3.2.8) から, [16]

$$\begin{aligned}(\Phi_{q'_1\cdots q'_L}, \mathscr{O}\Phi_{q_1\cdots q_K}) &= L!K!C_{LK}(q'_1\cdots q'_L q_1\cdots q_K) \\ &\quad +(N < L, M \leqq K \text{ または } N \leqq L, M < K \text{ の } C_{NM}\text{を含む項}).\end{aligned}$$

$N < L, M \leq K$ または $N \leq L, M < K$ の C_{NM} を含む項がどんな値でも, この行列要素が望む値になる様に C_{LK} を選ぶことができる. **QED**

例えば, 加法的演算子 F

$$F\Phi_{q_1 q_2\cdots q_N} = (f(q_1) + f(q_2) + \cdots + f(q_N))\Phi_{q_1 q_2\cdots q_N} \tag{3.2.9}$$

を考える. この様な演算子は, 式 (3.2.8) の $N = M = 1$ の場合として書くことができる:

$$F = \int dq\ a^\dagger(q)a(q)f(q). \tag{3.2.10}$$

特に, 自由粒子 Hamiltonian は常に,

$$H_0 = \int dq\ a^\dagger(q)a(q)E(q). \tag{3.2.11}$$

ここで $E(q)$ は1粒子エネルギーである:

$$E(q) = E(\mathbf{p}, \sigma, n) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_n^2}.$$

次に生成・消滅演算子の変換性を決定する. まず, 非斉次固有順時的 Lorentz 変換を考える. 式 (2.1.1) より, N 粒子状態は次の Lorentz 変換性をもつ:

$$\begin{aligned}U_0(\Lambda, \alpha)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1,\cdots,\mathbf{p}_N\sigma_N n_N} &= e^{-i(\Lambda p_1)\cdot\alpha}\cdots e^{-i(\Lambda p_N)\cdot\alpha}\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0\cdots(\Lambda p_N)^0}{p_1^0\cdots p_N^0}} \\ &\times \sum_{\bar\sigma_1\cdots\bar\sigma_N} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1\sigma_1}(W(\Lambda, p_1))\cdots D^{(j_N)}_{\bar\sigma_N\sigma_N}(W(\Lambda, p_N))\Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda}\bar\sigma_1 n_1,\cdots,\mathbf{p}_{N\Lambda}\bar\sigma_N n_N}.\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$\mathbf{p}_\Lambda$ は Λp の空間部分であり, $D^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}(R)$ は, 1.5 節で使われたものと同じ3次元回転のスピン j のユニタリ表現である. $W(\Lambda, p)$ は little 群の要素

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$

である. $L(p)$ は質量 m の静止状態の粒子の 4 次元運動量を運動量 p^μ に変換する標準ブーストである. 質量 m とスピン j は粒子タイプ n に依存している. これらの状態は, 式 (3.2.2) の様に表すことができる:

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1,\cdots,\mathbf{p}_N\sigma_N n_N} = a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}_N\sigma_N n_N)\Phi_0. \tag{3.2.13}$$

真空 Φ_0 は Lorentz 不変な状態である:

$$U_0(\Lambda,\alpha)\Phi_0 = \Phi_0.$$

状態 (3.2.13) が式 (3.2.12) の様に変換されるためには, 生成演算子が次のように変換さることが必要かつ十分である:

$$U_0(\Lambda,\alpha)a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda,\alpha) = e^{-i(\Lambda p)\cdot\alpha}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\bar\sigma} D^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}(W(\Lambda,p))a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda\bar\sigma n). \tag{3.2.14}$$

同様に, 自由粒子状態の荷電共役変換, 空間反転, 時間反転をそれぞれ起こす C, P, T 演算子も式 (2.3.43), (2.3.45), (2.3.53) より次のようになる: [17]

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{C}^{-1} &= \xi_n a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n^c), && (3.2.15)\\
\mathrm{P}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{P}^{-1} &= \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p},\sigma,n), && (3.2.16)\\
\mathrm{T}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{T}^{-1} &= \zeta_n(-1)^{j-\sigma}a^\dagger(-\mathbf{p},-\sigma,n). && (3.2.17)
\end{aligned}$$

以上, 自由粒子状態の粒子を生成消滅する演算子を扱ったが, 今までの議論は in 状態と out 状態にも当てはまる. このとき演算子 $a_{\mathrm{in}}, a_{\mathrm{out}}$ を導入し, 自由粒子演算子 $U_0(\Lambda,\sigma)$ の代わりに Lorentz 変換演算子 $U(\Lambda,\alpha)$ を用いると, 式 (3.2.14) と同様の Lorentz 変換則が満たされる.

3.3 クラスター分解原理と連結振幅

「空間的に十分離れた実験の結果は互いに独立である.」は物理学の基本的原理の一つである. これをクラスター分解原理という.

この原理によると, S 行列理論において多粒子過程 $\alpha_1\to\beta_1, \alpha_2\to\beta_2,\cdots,\alpha_{\mathscr{N}}\to\beta_{\mathscr{N}}$ が $\mathscr{N}$ 箇所のとても離れた実験室で観測されたならば, 全体の過程の S 行列要素は個々の過程の S 行列要素に因数分解できることを意味する. すなわち状態 α_i,β_i [18] にある全ての粒子が, $j\neq i$ の状態 α_j,β_j の全ての粒子から大きく空間的に離れているならば,

$$S_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{\mathscr{N}},\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\mathscr{N}}} \to S_{\beta_1\alpha_1}S_{\beta_2\alpha_2}\cdots S_{\beta_{\mathscr{N}}\alpha_{\mathscr{N}}}. \tag{3.3.1}$$

式 (3.3.1) をもっと分かりやすい方法で書き直すことができる. S 行列連結部分 $S^C_{\beta\alpha}$ を次の式で定義する:

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{PART}(\pm)\prod_{i=1}^{\nu} S^C_{\beta_i\alpha_i}. \tag{3.3.2}$$

PART は状態 α にある粒子をクラスター $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ に分配する全ての異なる分け方で和をとることを示す．β についても同様である．クラスター内の粒子の並び方だけ異なる分け方またはクラスターの並び方だけ異なる分け方は同じ分け方と見做す．$\alpha \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu$ と $\beta \to \beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu$ への再整理が奇数回のフェルミオンの交換を含めば符号は $-$，それ以外は $+$ である．また, 連結真空・真空 S 行列要素は 0 と定める: $S^C_{0,0} = 0$.

クラスター分解原理は, α, β のどれかの粒子が他の粒子から空間的に遠く[19] 離れていれば $S^C_{\beta\alpha}$ が 0 になることを要求する.

例えば, 状態 α, β が 1 粒子状態でそれぞれ量子数 q, q' をもつとすると, 式 (3.3.2) の右辺の唯一の項は, $S^C_{\beta\alpha}$ それ自身である:

$$S^C_{q'q} \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q). \tag{3.3.3}$$

($S_{q'q}$ が $\delta(q'-q)$ に比例するのは, 量子数が保存するからである．式 (3.3.3) の比例定数が 1 であるのは, in と out 状態の位相を適切に選ぶことができるからである．）ここでは, 1 粒子状態は他の状態 (例えば真空等) への遷移がない安定な状態であると仮定する.

2 粒子状態間の遷移の場合, 式 (3.3.2) は式 (3.3.3) を使うと,

$$\begin{aligned} S_{q_1'q_2',q_1q_2} &= S^C_{q_1'q_2',q_1q_2} + S^C_{q_1',q_1}S^C_{q_2',q_2} \pm S^C_{q_1',q_2}S^C_{q_2',q_1} \\ &= S^C_{q_1'q_2',q_1q_2} + \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2) \pm \delta(q_1'-q_2)\delta(q_2'-q_1). \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

複号はどちらもフェルミオンならば $-$, それ以外は $+$ である.

3 粒子状態間の遷移の場合は, 式 (3.3.2) は,

$$\begin{aligned} S_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} = S^C_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} &+ \delta(q_1'-q_1)S^C_{q_2'q_3',q_2q_3} \pm \text{permutations} \\ &+\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3) \pm \text{permutations}. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

4 粒子状態間の遷移の場合は,

$$\begin{aligned} S_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} = S^C_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} &+ S^C_{q_1'q_2',q_1q_2}S^C_{q_3'q_4'q_3q_4} \pm \text{permutations} \\ &+\delta(q_1'-q_1)S^C_{q_2'q_3'q_4',q_2q_3q_4} \pm \text{permutations} \\ &+\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)S^C_{q_3'q_4'q_3q_4} \pm \text{permutations} \\ &+\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3)\delta(q_4'-q_4) \pm \text{permutations}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

全ての置換を考慮すると, 式 (3.3.5) の場合, $1 + {}_3C_2 \times {}_3C_2 + 3! = 16$ 項, 式 (3.3.6) の場合, $1 + \dfrac{{}_4C_2 \times {}_4C_2}{2} + {}_4C_3 \times {}_4C_3 + 2! \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 + 4! = 131$ 項ある.

β, α の状態にある粒子は, クラスター $\beta_1, \beta_2, \cdots$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ に分けられていて, $\alpha_i + \beta_i$ のセットにある全ての粒子は, $j \neq i$ の $\alpha_j + \beta_j$ のセットにある全ての粒子から遠いと仮定する．そのとき, β_i または α_i のどれかの粒子が β_i または α_i の他の粒子と遠く離れていて $S^C_{\beta_i\alpha_i}$

が0になるならば, β_i または α_i の状態にあるどれかの粒子は異なるクラスターにあってそれは0になると考えられる. 従って, 式 (3.3.2) は,

$$S_{\beta\alpha} \to \sum\nolimits^{(1)}(\pm)S^C_{\beta_{11}\alpha_{11}}S^C_{\beta_{12}\alpha_{12}}\cdots \times \sum\nolimits^{(2)}(\pm)S^C_{\beta_{21}\alpha_{21}}S^C_{\beta_{22}\alpha_{22}}\cdots \times \cdots \tag{3.3.7}$$

となる. $\sum^{(j)}$ はクラスター β_j, α_j を $\beta_{j_1}\beta_{j_2}\cdots, \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots$ の部分クラスターへ分配するとき, すべての異なる分け方で和をとることを示すとする.

例えば, 4粒子反応 $1234 \to 1'2'3'4'$ において, 粒子 $1,2,1',2'$ は $3,4,3',4'$ からとても遠いと仮定する. そのとき, 式 (3.3.6) で残る項は,

$$\begin{aligned} S_{1'2'3'4'1234} \to\ & S^C_{1'2'12}S^C_{3'4'34} + (\delta_{11'}\delta_{22'} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})S^C_{3'4'34} \\ & +(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3})S^C_{1'2'12} \\ & +(\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}). \end{aligned}$$

式 (3.3.4) と比較すると, これは要求された因数分解条件 (3.3.1) であることが分かる: [20]

$$S_{1'2'3'4',1234} \to S_{1'2',12}S_{3'4',34}.$$

クラスター分解原理を運動量空間で再表現するために, 座標空間行列要素を Fourier 変換として定義する:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^C_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots} \equiv \int & d^3\mathbf{p}'_1 d^3\mathbf{p}'_2\cdots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2\cdots S^C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} \\ & \times e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1}e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_2}\cdots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1}e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}\cdots \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

一時的にスピンと粒子タイプのラベルを省略する. S行列の並進不変性から, S行列自身と同様にS行列の連結部分は, 座標ベクトルの差のみに依存することが分かる. 従って, $|S^C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}|$ が Lebesgue 積分可能であれば, どれか二つの座標ベクトルの差が無限大になるとき Riemann-Lebesgue の定理により, 積分 (3.3.8) は0になる. また, 運動量基底での S^C の要素 $S^C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ は, 散乱理論で要求されるエネルギー保存の δ 関数に加えて運動量を保存するための3次元 δ 関数に比例しなければならないことが分かる. [21] すなわち, 次のように書ける:

$$\begin{aligned} S^C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} &= \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \cdots) \\ & \quad \times\delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots)C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

クラスター分解原理から, ある $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ の間の差が大きくなるとき, 式 (3.3.8) は0にならなければならない. しかし, $\tilde{S}^C_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ は座標ベクトルの差のみに依存するので x_i, x'_j の全てが互いの距離を同じに保ちながら変化しても $\tilde{S}^C_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ は全く変わらない. 従って, 式 (3.3.9) の C が3次元運動量の線型結合が引数である δ 関数をさらに含むならば, クラスター分解原理は満たされなくなる. 例えば, 粒子のある部分集合についての $\mathbf{p}'_i$ と $-\mathbf{p}_j$ の和を0にする δ

関数が C にあると仮定すると, その部分集合の粒子の $\mathbf{x}'_i$ と $\mathbf{x}_j$ の全てがその互いの差が一定で一緒に全ての他の $\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}_\ell$ から離れていくならば, クラスター分解原理に反して式 (3.3.8) の値は変化しない. [22]クラスター分解原理はS行列の連結部分 S^C が丁度一つのエネルギー運動量保存 δ 関数を含むことを要求する.

3.4 相互作用の構造

ここでは, どの様な Hamiltonian がクラスター分解原理を満たすS行列を与えるのか考える.

S行列は式 (2.4.6) から[23]

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \cdots V(t_n)\} \Phi_\alpha). \tag{3.4.1}$$

Hamiltonian H を自由粒子部分 H_0 と相互作用 V に分け,

$$V(t) \equiv \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t) \tag{3.4.2}$$

とした. 状態 Φ_α, Φ_β は式 (3.2.2) のような生成演算子の積を作用させた真空 Φ_0 であり, $V(t)$ は生成・消滅演算子の積の和であるので, 和 (3.4.1) のそれぞれの項は生成・消滅演算子の積の真空期待値の和になる.

式 (3.2.5) を次の様に変形する:

$$a(q')a^\dagger(q) = \pm a^\dagger(q) a(q') + \delta(q' - q).$$

上式から, 消滅演算子を生成演算子の右に一つ移動すると二つの項を得ることが分かる. つまり, 消滅演算子を生成演算子の右に移動すると項が二つになり, その消滅演算子をさらに次の生成演算子の右に移動するとさらに項が増す. 上式を繰り返し使うことによって, その消滅演算子を右端に移動することができる. その消滅演算子が真空 Φ_0 に作用すれば式 (3.2.4) から 0 になるので, 生成・消滅演算子の積の真空期待値は, 結局 δ 関数と交換または反交換による符号 $\pm$ の積の和になる.

この様にして生成されたそれぞれの項を次の手順で図に表す. まず, n 個の $V(t)$ 演算子に対して n 個の頂点を描く.

1. $V(t)$ に含まれる消滅演算子の一つが始状態 Φ_α に含まれる生成演算子と交換することによって δ 関数が生成されたとき, 図 3.1 の (1) の様に, 対応する頂点に下から入る線を描く.

図 3.1: 対応する Feynman 図

2. 終状態 Φ_β の随伴に含まれる消滅演算子が $V(t)$ に含まれる一つの生成演算子と交換することによって δ 関数が生成されたとき, 図 3.1 の (2) の様に対応する頂点から上に出ていく線を描く.

3. $V(t)$ に含まれる消滅演算子の一つが他の $V(t)$ の生成演算子と交換することによって δ 関数が生成されるとき, 図 3.1 の (3) の様に対応する二つの頂点間に線を描く.

4. 終状態の随伴に含まれる消滅演算子の一つが始状態の生成演算子と交換することによって δ 関数が生成されるとき, 図 3.1 の (4) の様に下から上へ行く線を描く.

これらの一本の線に対応する δ 関数は, 対応する生成・消滅演算子の対の運動量引数を等しくする働きがある.

この様に描かれた図は, 全ての頂点が線によって連結しているか, または, いくつかの連結部分に分かれている. この個々の連結部分をクラスター (連結成分) という. ある連結成分の頂点に対応する $V(t)$ に含まれる演算子は, 他の連結成分にある $V(t)$ に含まれるどの演算子とも δ 関数を生成することなしに交換する. 何故ならこの場合, ある連結成分の頂点の消滅演算子は, もう一方の連結成分の頂点の生成演算子で生成された粒子を消滅させる項をもたないからである. もしその連結成分が消滅させる項をもつならば, その二つの頂点は同じ連結成分にあることになる. 同様の議論が始状態と終状態に含まれる演算子と $V(t)$ に含まれる演算子についても適用できるので, 式 (3.4.1) の行列要素はそれぞれの連結成分からの寄与の積の和として表すことができる:

$$(\Phi_\beta, T\{V(t_1)\cdots V(t_n)\}\Phi_\alpha) = \sum_{\text{clusterings}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1})\cdots V(t_{jn_j})\}\Phi_{\alpha_j})_C. \tag{3.4.3}$$

ここで, 入射粒子, 放射粒子, $V(t)$ 演算子を ν 個のクラスターに分ける全ての分け方で和をとる. j 番目のクラスターは, 始状態粒子 α_j, 終状態粒子 β_j, n_j 個の演算子 $V(t_{j_1})\cdots V(t_{jn_j})$ で構成されているとする. 従って, $n = n_1 + \cdots + n_\nu$.

始状態 α は, 部分集合 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ の和集合である. 終状態も同様である. 式 (3.4.3) のあるクラスターが頂点を全くもたないならば, 式 (3.4.3) の行列要素因子 $(\Phi_{\beta_j}, \Phi_{\alpha_j})_C$ は α_j, β_j のどちらかが 1 粒子状態でないならば0 とする. 何故ならば, 頂点がない連結している唯一の図は, 下から上へ行く一本の直線になるからである. つまり, 式 (3.4.3) の添字 C は, 連結している図に対応する寄与のみを考慮することを意味している. クラスターでの和をとると, n 個

の頂点を ν 個のクラスターにそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ 個ずつ分ける方法の数 $n!/n_1!n_2!\cdots n_\nu!$ だけ同じ項ができるので,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1)\cdots V(t_n)\}\Phi_\alpha)\\&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{PART} (\pm) \sum_{\substack{n_1\cdots n_\nu \\ n_1+\cdots+n_\nu=n}} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_\nu!} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1}\cdots dt_{j_{n_j}}\\&\qquad\times(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})\}\Phi_{\alpha_j})_C.\end{aligned}$$

上式の PART で示す和は始・終状態 α, β をそれぞれ ν 個のクラスター $\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ と $\beta_1, \cdots, \beta_\nu$ に分ける全ての方法での和を意味する.

上式を式 (3.4.1) に代入する. 因数 $n!$ は, 式 (3.4.1) の $1/n!$ と相殺される. また, 式 (3.4.3) の摂動級数の因数 $(-i)^n$ は積 $(-i)^{n_1}\cdots(-i)^{n_\nu}$ と書けるので, $n_1+\cdots+n_\nu = n$ の制限の下で $n_1, \cdots, n_\nu$ で和を取り, それを n で和をとる代わりに, それぞれの $n_1, \cdots, n_\nu$ で独立に和を取ることができる:

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{PART} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1}\cdots dt_{j_{n_j}} (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})\}\Phi_{\alpha_j})_C.$$

これと連結 S 行列要素 $S^C_{\beta\alpha}$ の定義式 (3.3.2) を比較すると, これらの行列要素 S^C は, 上式の積の因数によって与えられることが分かる:

$$S^C_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\cdots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1)\cdots V(t_n)\}\Phi_\alpha)_C. \tag{3.4.4}$$

(t_j と n_j は積分と和の変数であるので t と n の添字 j は落とした.) つまり, $S^C_{\beta\alpha}$ は S 行列への連結成分の寄与の和である.

定理 3.4.1 *Hamiltonian* が

$$\begin{aligned}H &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1\cdots dq'_N dq_1\cdots dq_M \\&\quad\times a^\dagger(q'_1)\cdots a^\dagger(q'_N)a(q_M)\cdots a(q_1) h_{NM}(q'_1\cdots q'_N, q_1\cdots q_M),\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$h_{NM} = \delta^3(\mathbf{p}'_1+\cdots+\mathbf{p}'_N-\mathbf{p}_1-\cdots-\mathbf{p}_M)\tilde{h}_{NM} \tag{3.4.6}$$

と表され, かつ $\tilde{h}_{NM}$ が δ 関数を含まないならば, S 行列はクラスター分解原理を満たす. ∎

証明. 生成・消滅演算子で表された Hamiltonian の展開 (3.4.5) の係数関数 h_{NM} が 3 次元運動量の保存を保証するただ一つの δ 関数を因数にもつならば, 自由粒子 Hamiltonian H_0 についても, V についてもただ一つその様な δ 関数を因数にもつ. つまり, 一つの頂点に対し一つの 3 次元 δ 関数が定まっている. 任意の線を一本切ることで連結している図が分離すると

き, その線がもつ運動量は, 線の両端のどちらかの頂点に入る線の運動量と出ていく線の運動量の線型結合で表すことができるので, 入射粒子の運動量と放射粒子の運動量で表すことができる. 図を分離することなしに同時に最大 L 本の線を切ることができるならば, 図は L 個の独立なループをもつという. ループのない連結している図形に一本線を追加することでループが一つできたとする. 追加した線のもつ運動量を k とし, ループにそって運動量保存の等式を作る. その等式の $k=0$ のときがループのない場合であり, そのとき全ての線のもつ運動量が定まる。つまり, 未知数が一つ増えて式の数がそのままであるので, ループが一つあれば運動量が一つ不定になる. 従って, L 個の独立なループをもてば, 運動量保存によって定まらない L 個の運動量がある. V 個の頂点, I 本の内線, L 個のループがある図の場合, 図は V 個の δ 関数をもち, そのうちの $I-L$ が内部運動量を決め, 入射・放射粒子の運動量と関係づけられる. 従って, $V-(I-L)=V-I+L$ 個の δ 関数が残される. しかし有名なトポロジーの恒等式から C 個の連結成分からなるどんなグラフについても, 点, 内線, ループの数の間に次の関係式が成り立つ: [24]

$$V-I+L=C. \tag{3.4.7}$$

$S^C_{\beta\alpha}$ の様な連結行列要素の場合, 連結成分は一つなので $C=1$, 残っている δ 関数の数は 1 である. よって, $\delta(\mathbf{p}_\beta-\mathbf{p}_\alpha)$ 一つしかない. 従って, $S^C_{\beta\alpha}$ は運動量保存の δ 関数を一つしかもたないのでクラスター分解原理を満たす. **QED**

Notes

[15] 光子の運動量方向のスピンの成分をヘリシティという.

[16] $\mathscr{O}$ は q,q' の積分であるので $C_{LK}(q'_1\cdots q'_L,q_1\cdots q_K)$ の項は $q'_1\cdots q'_L,q_1\cdots q_K$ の順列の数だけ残る. また式 (3.2.8) から $C_{LK}(\mathscr{P}(q'_1\cdots q'_L,q_1\cdots q_K))=\delta_{\mathscr{P}}C_{LK}(q'_1\cdots q'_L,q_1\cdots q_K)$ であることが分かる. 右辺第 2 項は, C_{NM} の項が残るためには生成演算子の数の和と消滅演算子の数の和が等しいことが必要であるので $K+N=L+M$. 従って, $L-N=K-M\geq 0$ より $N\leq L, M\leq K$ の項が残る.

[17] これらの演算子の添字 0 を取り除く. 何故ならば, C,P,T が保存される場合, これらの変換を in 状態と out 状態に引き起こす演算子は, 自由粒子状態に作用するものと同じであるからである.

[18] 2 章で使われた表記に帰る. ギリシャ文字 α,β は, それぞれの粒子についての運動量, スピン, 粒子タイプ等の詳細をまとめて表すラベルである.

[19]「遠い」に意味を与えるために S^C を Fourier 変換し, $\mathbf{p}$ を空間座標ベクトル $\mathbf{x}$ と置き換える.

[20] 式 (3.3.4) から $S_{1'2',12}S_{3'4',34}=(S^C_{1'2',12}+\delta_{1'1}\delta_{2'2}\pm\delta_{1'2}\delta_{2'1})(S^C_{3'4',34}+\delta_{3'3}\delta_{4'4}\pm\delta_{3'4}\delta_{4'3})$.

[21] 例えば, $\mathbf{x'}_1,\mathbf{x'}_2,\cdots,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\cdots$ と $\mathbf{x}_1$ との相対位置ベクトルを $\mathbf{r'}_1,\mathbf{r'}_2,\cdots,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\cdots$ として式 (3.3.8) の逆変換に代入すると $S^C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ が運動量に関する δ 関数を因数にもつことが分かる.

[22]例えば，C が $\delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ を含めば (3.3.8) より

$$\tilde{S}^C_{\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots} = \int d^3\mathbf{p}_1' d^3\mathbf{p}_2' \cdots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \cdots \delta^3(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' + \cdots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \cdots)$$
$$\times\, \delta(E_1' + E_2' + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots)\delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) C'_{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2'\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} e^{i\mathbf{p}_1'\cdot\mathbf{x}_1'} e^{i\mathbf{p}_2'\cdot\mathbf{x}_2'} \ldots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2} \ldots$$
$$= \int d^3\mathbf{p}_1' d^3\mathbf{p}_2' \cdots d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \cdots \delta^3(\mathbf{p}_3' + \mathbf{p}_4' + \cdots - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 + \cdots)$$
$$\times\, \delta(E_1' + E_2' + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots) C_{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2'\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} e^{i\mathbf{p}_1'(\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_1)} e^{i\mathbf{p}_2'(\mathbf{x}_2'-\mathbf{x}_1)} \ldots e^{-i\mathbf{p}_2(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} \ldots$$

但し，$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2$ を使った。もしある部分集合内の粒子の座標が $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'$ で，その部分集合内の相対位置は変化させずに他の粒子から遠ざかっていくとしたら，$\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1$ は不変なので S^c は 0 にならない。

[23]式 (3.4.1) の右辺の $n = 0$ の時間順序積は, 単位演算子となる. 従って和の $n = 0$ の項は, $S_{\beta\alpha}$ で $(\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha)$ となる.

[24]一つの点からなるグラフは $V = 1, L = 0, C = 1$ である. もしこの図に $V - 1$ 個の頂点を加えたとき, 十分な内線を加え連結するグラフを作ると, $I = V - 1, L = 0, C = 1$ を得る. 新しい点を加えることなしに, 同じ連結グラフに内線を追加すると, 追加した数だけループの数が増える. 従って, $I = V + L - 1, C = 1$. 全体の図形が C 個の連結部分からなるならば, それぞれの連結部分の I, V, L の和は, $\sum I = \sum V + \sum L - C$.

4章　量子場と反粒子

量子力学と特殊相対性理論の結合から導かれる普遍的な結果について述べる．特に，スピンと統計の関係，CPT 定理について述べる．

4.1　自由場

相互作用が，

$$V(t)=\int d^3x\mathscr{H}(\mathbf{x},t) \tag{4.1.1}$$

と表され，$\mathscr{H}$ がスカラー密度

$$U_0(\Lambda,a)\mathscr{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda,a)=\mathscr{H}(\Lambda x+a), \tag{4.1.2}$$

かつ，

$$(x-x')^2\geqq 0\text{ の場合}\quad [\mathscr{H}(x),\mathscr{H}(x')]=0 \tag{4.1.3}$$

ならば，S 行列は Lorentz 不変であることを第 2 章で見た．クラスター分解原理を容易に満たすようにするために，$\mathscr{H}(x)$ を生成・消滅演算子から構築したい．しかし，式 (3.2.14) より，生成・消滅演算子を Lorentz 変換すると，演算子が運ぶ運動量に依存する行列がその演算子に掛かることが分かり，演算子は式 (4.1.2) の様な変換をしない．その様な変換性をもつ演算子から式 (4.1.2) の様なスカラー $\mathscr{H}(x)$ を構築するために，消滅場 ψ_ℓ^+ と生成場 $\psi_\ell^-(x)$ を導入する: [25]

$$\begin{aligned}\psi_\ell^+(x) &= \sum_{\sigma n}\int d^3p\ u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)a(\mathbf{p},\sigma,n), &(4.1.4)\\ \psi_\ell^-(x) &= \sum_{\sigma n}\int d^3p\ v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n). &(4.1.5)\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}U_0(\Lambda,a)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) &= \sum_{\bar\ell}D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^+(\Lambda x+a), &(4.1.6)\\ U_0(\Lambda,a)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) &= \sum_{\bar\ell}D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^-(\Lambda x+a) &(4.1.7)\end{aligned}$$

を満たすように $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$, $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ を定める．上式に更に別の Lorentz 変換 $\bar\Lambda$ をすると,

$$D(\Lambda^{-1})D(\bar\Lambda^{-1}) = D((\bar\Lambda\Lambda)^{-1})$$

である．$\Lambda_1=(\Lambda)^{-1}, \Lambda_2=(\bar\Lambda)^{-1}$ とすると, D 行列は斉次 Lorentz 群の表現を与える:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{4.1.8}$$

スカラー, ベクトル, テンソル, スピノル等についてそれぞれ Lorentz 変換 Λ の表現がある．

係数関数 $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n), v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ を考える．式 (3.2.14) とその随伴は消滅・生成演算子についての変換則を与える: [26]

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,b)a(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b) &= \exp(i(\Lambda p)\cdot b)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ &\quad\times\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n), \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,b)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b) &= \exp(-i(\Lambda p)\cdot b)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ &\quad\times\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

ここで j_n は粒子タイプ n のスピン, $\mathbf{p}_\Lambda$ は Λp の空間部分である．1.5 節で見たように, d^3p/p^0 は Lorentz 不変である: $d^3p/p^0 = d^3(\Lambda p)/(\Lambda p)^0$. 従って, 式 (4.1.4) と (4.1.5) の d^3p に $d^3(\Lambda p)p^0/(\Lambda p)^0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,b)\psi^+_\ell(x)U_0^{-1}(\Lambda,b) &= \sum_{\sigma\bar\sigma n}\int d^3(\Lambda p)u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \\ &\quad\times\exp(i(\Lambda p)\cdot b)D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n), \\ U_0(\Lambda,b)\psi^-_\ell(x)U_0^{-1}(\Lambda,b) &= \sum_{\sigma\bar\sigma n}\int d^3(\Lambda p)v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \\ &\quad\times\exp(-i(\Lambda p)\cdot b)D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n). \end{aligned}$$

場が Lorentz 変換性 (4.1.6) と (4.1.7) を満たすためには次の条件が必要十分である:

$$\begin{aligned} &\sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})u_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ &\qquad\times\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))\exp(+i(\Lambda p)\cdot b)u_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n), \\ &\sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})v_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ &\qquad\times\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}(W^{-1}(\Lambda,p))\exp(-i(\Lambda p)\cdot b)v_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n). \end{aligned}$$

従って,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)}_{\bar{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \times \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)\exp(i(\Lambda p)\cdot b)u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n), \tag{4.1.11}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)*}_{\bar{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \times \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)\exp(-i(\Lambda p)\cdot b)v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n). \tag{4.1.12}$$

式(4.1.11) と (4.1.12) を 3 つの異なるタイプの固有順時的 Lorentz 変換で考える.

並進

並進である場合, $\Lambda = 1$ かつ b は任意であるので, $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n), v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ は, 式(4.1.11) と (4.1.12) から

$$\begin{aligned} u_{\bar{\ell}}(x+b;\mathbf{p},\sigma,n) &= e^{ip\cdot b}u_{\bar{\ell}}(x;\mathbf{p},\sigma,n) \\ v_{\bar{\ell}}(x+b;\mathbf{p},\sigma,n) &= e^{-ip\cdot b}v_{\bar{\ell}}(x;\mathbf{p},\sigma,n). \end{aligned}$$

従って, $u_\ell(0;\mathbf{p},\sigma,n) \equiv (2\pi)^{-\frac{3}{2}}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n), v_\ell(0;\mathbf{p},\sigma,n) \equiv (2\pi)^{-\frac{3}{2}}v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ とすると,

$$u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ip\cdot x}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n), \tag{4.1.13}$$

$$v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-ip\cdot x}v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n). \tag{4.1.14}$$

これと式(4.1.4) と (4.1.5) に代入すると, 場は Fourier 積分変換の形で表現されることが分かる:

$$\psi^+_\ell(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma,n}\int d^3p\, u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma,n), \tag{4.1.15}$$

$$\psi^-_\ell(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma,n}\int d^3p\, v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n). \tag{4.1.16}$$

式(4.1.13) と (4.1.14) を式(4.1.11) と (4.1.12) に代入すると, [27]任意の斉次 Lorentz 変換 Λ について, $(\Lambda p)\cdot(\Lambda x) = p\cdot x$ より,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)}_{\bar{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n), \tag{4.1.17}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)*}_{\bar{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n). \tag{4.1.18}$$

ブースト

Λ が標準ブースト $L(q)$ かつ $\mathbf{p}=0$ のとき, 式 (4.1.17) と (4.1.18) を考える. $L(q)$ は, 静止している質量 m の粒子の標準運動量を運動量 q^μ に変換する. $\mathbf{p}=0$ より $p=(0,0,0,m)$ である. p は標準ベクトルであるので, $L(p)=1$. 従って,

$$W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)=L^{-1}(q)L(q)=1.$$

式 (4.1.17) と (4.1.18) は,

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{q},\sigma,n)=(m/q^0)^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}(L(q))u_\ell(0,\sigma,n), \tag{4.1.19}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{q},\sigma,n)=(m/q^0)^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}(L(q))v_\ell(0,\sigma,n). \tag{4.1.20}$$

つまり, $u_\ell(0,\sigma,n),v_\ell(0,\sigma,n)$ が求まれば, 全ての $\mathbf{p}$ についての関数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n),v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ が計算できる.

回転

Λ は $\mathbf{p}=0$ のとき $\mathbf{p}_\Lambda=0$ となる斉次 Lorentz 変換であるとする. すなわち, Λ は固有順次的 Lorentz 変換であるので, Λ は回転 R である. 定理 1.5.1 より $W(\Lambda,p)=R$ であるので, 式 (4.1.17) と (4.1.18) は,

$$\sum_{\bar{\sigma}}u_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)}_{\bar{\sigma}\sigma}(R) = \sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}(R)u_\ell(0,\sigma,n), \tag{4.1.21}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}}v_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)D^{(j_n)*}_{\bar{\sigma}\sigma}(R) = \sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}(R)v_\ell(0,\sigma,n). \tag{4.1.22}$$

つまり, [28]

$$\sum_{\bar{\sigma}}u_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)\mathbf{J}^{(j_n)}_{\bar{\sigma}\sigma} = \sum_{\ell}\mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell}u_\ell(0,\sigma,n), \tag{4.1.23}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}}v_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)\mathbf{J}^{(j_n)*}_{\bar{\sigma}\sigma} = -\sum_{\ell}\mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell}v_\ell(0,\sigma,n). \tag{4.1.24}$$

$\mathbf{J}^{(j)},\mathcal{J}$ は表現 $D^{(j)}(R),D(R)$ の角運動量行列である. Λ が回転 R のとき, 斉次 Lorentz 変換の表現 $D(\Lambda)$ は回転表現である. 式 (4.1.23) と (4.1.24) から, 場 $\psi^\pm_\ell(x)$ が特定のスピン j の粒子を表すならば, この表現 $D(R)$ は既約成分の中にスピン j 表現 $D^{(j)}(R)$ を含まなければならない. それぞれの固有順時的 Lorentz 群の既約表現は, どれかの回転群の既約表現をせいぜい **1** つ含む. すなわち, 場 $\psi^+_\ell(x),\psi^-_\ell(x)$ が既約に変換するならば, 全体のスケールを除いて場は一意に決まる. 従って, 一般に消滅場または生成場の自由変数の数は, 場に含まれる既約表現の数に等しい.

Lorentz 変換則 (4.1.6) と (4.1.7) を満たす場が構築できれば, 式 (4.1.2) を満たす相互作用密度を構築できる:

$$\mathscr{H}(x) = \sum_{NM} \sum_{\ell'_1 \cdots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \cdots \ell_M} g_{\ell'_1 \cdots \ell'_N, \ell_1 \cdots \ell_M} \psi^-_{\bar{\ell}'_1}(x) \cdots \psi^-_{\bar{\ell}'_N}(x) \psi^+_{\ell_1}(x) \cdots \psi^+_{\ell_M}(x). \tag{4.1.25}$$

但し, 定数係数 $g_{\ell'_1 \cdots \ell'_N, \ell_1 \cdots \ell_M}$ は全ての Λ について次の条件を満たすものとする: [29]

$$\sum_{\ell'_1 \cdots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \cdots \ell_M} D_{\ell'_1 \bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1}) \cdots D_{\ell'_N \bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1}) D_{\ell_1 \bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1}) \cdots D_{\ell_M \bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) \times g_{\ell'_1 \cdots \ell'_N, \ell_1 \cdots \ell_M} = g_{\bar{\ell}'_1 \cdots \bar{\ell}'_N, \bar{\ell}_1 \cdots \bar{\ell}_M}. \tag{4.1.26}$$

また, これはクラスター分解原理を満たす. [30]

S 行列が Lorentz 不変であるためには, 相互作用密度が交換条件 (4.1.3) を満たすことも必要である. ところが,

$$[\psi^+_\ell(x), \psi^-_{\bar{\ell}}(y)]_\mp = (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma n} \int d^3p \; u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip\cdot(x-y)} \tag{4.1.27}$$

より, これは $x-y$ が空間的であっても一般に 0 にならない. 複号は, 成分 $\psi^+_\ell, \psi^-_{\bar{\ell}}$ によって消滅・生成される粒子がボゾンのとき $-$, フェルミオンのとき $+$ である. 消滅場同士, 生成場同士の交換・反交換子は 0 になるので, 相互作用密度を生成場のみ, または消滅場のみから作れば, この問題を避けることができる様に思える. しかし, そのとき一般に相互作用はエルミートではない. この困難を回避するために場を消滅・生成場の線形結合で表す:

$$\psi_\ell(x) \equiv \kappa_\ell \psi^+_\ell(x) + \lambda_\ell \psi^-_\ell(x). \tag{4.1.28}$$

そして, $x-y$ が空間的なとき, 定数 κ, λ を,

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}(y)]_\mp = [\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\ell'}(y)]_\mp = 0 \tag{4.1.29}$$

が成り立つようにとる. フェルミオンの場合は, 偶数個のその様な場とその随伴の成分で Hamiltonian 密度 $\mathscr{H}$ が構築されるならば, それは交換関係 (4.1.3) を満たす.

条件 (4.1.29) は, causality 条件といわれる. 何故なら $x-y$ が空間的ならば x から y へ信号は届かない. 従って, x の ψ_ℓ の測定は, y の $\psi_{\ell'}$ または $\psi^\dagger_{\ell'}$ の測定に影響を与えないからである. しかし, 条件 (4.1.29) は, 因果律についての仮定がなくても, S 行列の Lorentz 不変性のために必要である.

これらの場で消滅・生成する粒子が電荷の様な量子数をもつ場合, 式 (4.1.29) を満たす場 (4.1.28) をうまく構築できない. 例えば, 粒子タイプ n の粒子が電荷演算子 Q に対して固有値 $q(n)$ をもつならば, a により電荷 $q(n)$ が減り, $a^\dagger$ により電荷 $q(n)$ が増えるので, [31]

$$\begin{aligned} [Q, a(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= -q(n) a(\mathbf{p}, \sigma, n), \\ [Q, a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= +q(n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \end{aligned}$$

つまり,

$$
\begin{aligned}
[Q,\psi_\ell^+] &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma,n}\int d^3p\ (-q(n))u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma,n),\\
[Q,\psi_\ell^-] &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma,n}\int d^3p\ (+q(n))v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n).
\end{aligned}
$$

ところで電荷は保存されるので, $\mathscr{H}(x)$ が電荷演算子 Q と交換しなければならない.

さて,

$$[Q,\psi_\ell(x)] = -q_\ell\psi_\ell(x) \tag{4.1.30}$$

の様に Q と交換する場 $\psi_{\ell_1}\psi_{\ell_2}\cdots$ と $\psi^\dagger_{m_1}\psi^\dagger_{m_2}\cdots$ がある場合, $\mathscr{H}(x)$ を

$$q_{\ell_1}+q_{\ell_2}+\cdots-q_{m_1}-q_{m_2}-\cdots=0 \tag{4.1.31}$$

を満たすその様な場の積の和として構築するならば, $\mathscr{H}$ は Q と交換する.[32] 式 (4.1.30) に $\psi_\ell=\kappa\psi_\ell^+ + \lambda\psi_\ell^-$ を代入すると,

$$[Q,\kappa\psi_\ell^+ + \lambda\psi_\ell^-] = -q_\ell\kappa\psi_\ell^+ - q_\ell\lambda\psi_\ell^-.$$

従って, タイプ n の消滅場の成分 $\psi_\ell^+(x)$ によって消滅される粒子がすべて同じ電荷 $q(n)=q_\ell$ をもち, かつ生成場の成分 $\psi_\ell^-(x)$ によって生成される粒子がすべて同じ電荷 $q(\bar{n})=-q_\ell$ をもつときのみ式 (4.1.30) は満たされる. 従って, 電荷の様な量子数を保存する理論において 0 でない量子数をもつ粒子のタイプは, 2 つ導入せねばならない:

$$\psi_\ell(x) = \kappa\psi_\ell^+ + \lambda\psi_\ell^{-c}. \tag{4.1.32}$$

消滅場のある成分が粒子を消滅するならば, 生成場の対応する成分はその粒子が保存する全ての量子数と反対の値をもつ粒子を生成しなければならない. このように生成される粒子をその粒子の反粒子と呼ぶ.

式 (4.1.32), (4.1.15), (4.1.16) を調べると, 質量 m の場のすべての成分は, Klein-Gordon 方程式を満たすことが分かる:

$$(\Box - m^2)\psi_\ell(x) = 0. \tag{4.1.33}$$

4.2 斉次 Lorentz 群の既約表現

斉次 Lorentz 群の既約表現に従って変換する場について考える.

固有順時的斉次 Lorentz 群の一般的表現は, 群の生成子と同じ交換関係 (1.4.13)

$$[\mathscr{J}_{\mu\nu},\mathscr{J}_{\rho\sigma}] = i(\mathscr{J}_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + \mathscr{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \mathscr{J}_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - \mathscr{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \tag{4.2.1}$$

を満たす行列 $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ の集合によって与えられる (但し, $\mathscr{J}_{\mu\nu}=-\mathscr{J}_{\nu\mu}$). その様な行列を構築するために, $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ の 6 つの独立な成分を角運動量

$$\mathcal{J}_1=\mathscr{J}_{23},\quad \mathcal{J}_2=\mathscr{J}_{31},\quad \mathcal{J}_3=\mathscr{J}_{12} \tag{4.2.2}$$

とブースト

$$\mathcal{K}_1=\mathscr{J}_{10},\quad \mathcal{K}_2=\mathscr{J}_{20},\quad \mathcal{K}_3=\mathscr{J}_{30} \tag{4.2.3}$$

の二つの 3 次元ベクトルに分ける. 式 (4.2.1) は, 式 (1.4.13) から式 (1.4.19), (1.4.20), (1.4.21) を導いたのと同様にすると,

$$[\mathcal{J}_i,\mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \tag{4.2.4}$$

$$[\mathcal{J}_i,\mathcal{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k, \tag{4.2.5}$$

$$[\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k. \tag{4.2.6}$$

式 (4.2.4) から, 行列 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ は Lorentz 群の回転部分群の表現を生成することが分かる.

行列 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ を二つの 3 次元ベクトルに置き換える:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{J}}+i\boldsymbol{\mathcal{K}}), \tag{4.2.7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{J}}-i\boldsymbol{\mathcal{K}}). \tag{4.2.8}$$

交換関係 (4.2.4) − (4.2.6) は次の式と同値である: [33]

$$[\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}_k, \tag{4.2.9}$$

$$[\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_k, \tag{4.2.10}$$

$$[\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_j] = 0. \tag{4.2.11}$$

一対の相互作用をしない粒子のスピンを表す行列を求めるときと同じ方法で, 式 (4.2.9) − (4.2.11) を満たす行列をその直和として求めることができる. つまり, これらの行列の行と列に

$$a=-A,-A+1,\cdots,+A, \tag{4.2.12}$$

$$b=-B,-B+1,\cdots,+B \tag{4.2.13}$$

の値をとる整数または半整数の対 a,b でラベルをつけ,

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}})_{a'b',ab} = \delta_{b'b}\mathbf{J}^{(A)}_{a'a}, \tag{4.2.14}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{B}})_{a'b',ab} = \delta_{a'a}\mathbf{J}^{(B)}_{b'b} \tag{4.2.15}$$

とする. $\mathbf{J}^{(A)}, \mathbf{J}^{(B)}$ はスピン A, B の標準スピン行列である:

$$(\mathbf{J}_3^{(A)})_{a'a} = a\delta_{a'a}, \tag{4.2.16}$$

$$(\mathbf{J}_1^{(A)} \pm i\mathbf{J}_2^{(A)})_{a'a} = \delta_{a',a\pm 1}\sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}. \tag{4.2.17}$$

$\mathbf{J}^{(B)}$ も同様である. この表現は正の整数または半整数 A, B の値でラベルづけされる. また, (A, B) 表現は $(2A+1)(2B+1)$ の次元をもっている.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は固有値が実数なのでエルミートでなければならない. 回転群はエルミート行列によって表される生成子

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{4.2.18}$$

でユニタリに表されている. 斉次 Lorentz 群の (A, B) 表現に従って変換する場は, ベクトルの加法則によって,

$$j = A + B, A + B - 1, \cdots, |A - B|$$

の成分をもつ. これから, (A, B) 表現をテンソルやスピノルと見做すことができる. 例えば, $(0, 0)$ 場は明らかに $j = 0$ の成分のみのスカラーである. $(\frac{1}{2}, 0)$ または $(0, \frac{1}{2})$ 場は, $j = \frac{1}{2}$ しかもたない. これらは, Dirac スピノルの二つの成分になる. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 場は, $j = 1, j = 0$ の成分をもち, 4 次元ベクトル v^μ の空間部分 $\mathbf{v}$ と時間成分 v^0 に対応している. 一般的に (A, A) 場は, 整数スピン $j = 2A, 2A - 1, \cdots, 0$ の成分しかもたない. そして, それはトレース 0 の $2A$ 階の対称テンソルに対応する. [34]

固有順時的 Lorentz 群の表現のみを考えてきたが, これからは空間反転を含む Lorentz 群の表現を考える. 空間反転を含む Lorentz 群の表現においては, 空間添え字の奇数個のテンソルの符号を反転させる行列がなければならない. それを β とすると, 式 (4.2.2) と (4.2.3) から

$$\beta \boldsymbol{\mathcal{J}} \beta^{-1} = +\boldsymbol{\mathcal{J}}, \quad \beta \boldsymbol{\mathcal{K}} \beta^{-1} = -\boldsymbol{\mathcal{K}}. \tag{4.2.19}$$

行列 (4.2.7) と (4.2.8) で表せば,

$$\beta \boldsymbol{\mathcal{A}} \beta^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{B}}, \quad \beta \boldsymbol{\mathcal{B}} \beta^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{A}}. \tag{4.2.20}$$

すなわち, 固有順時的斉次 Lorentz 群の既約 (A, B) 表現は, $A = B$ でないかぎり空間反転を含む Lorentz 群の表現を与えない. (A, A) 表現はスカラー, ベクトル, 対称トレース 0 のテンソルであることをみてきた. $A \neq B$ の場合, 空間反転を含む Lorentz 群の既約表現は, 次元が $2(2A+1)(2B+1)$ の直和 $(A, B) \oplus (B, A)$ である. その 1 つの例は, $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$Dirac 表現である.

4.3 一般 Causal 場

前節で述べられた既約 (A,B) 表現に従って変換する causal 場を構築する. 場 (4.1.32) の添え字 ℓ は, ここでは a,b の対であり, a,b は式 (4.2.12) と (4.2.13) の値をとる. 従って, 場は,

$$\psi_{ab}(x)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma}\int d^3p\,\left[\kappa a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)+\lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right] \tag{4.3.1}$$

と書ける. κ,λ は任意の定数である.

まず運動量が 0 の場合の係数関数 $u_{ab}(0,\sigma),v_{ab}(0,\sigma)$ を求める. $u(0,\sigma),v(0,\sigma)$ に関する基本的条件 (4.1.23) と (4.1.24) は,

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a,b}\mathcal{J}_{\bar a\bar b,ab}u_{ab}(0,\sigma),$$
$$-\sum_{\bar\sigma}v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a,b}\mathcal{J}_{\bar a\bar b,ab}v_{ab}(0,\sigma).$$

式 (4.2.14) と (4.2.15) を使うと $\mathcal{J}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ より,

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a}\mathbf{J}^{(A)}_{\bar aa}u_{a\bar b}(0,\sigma)+\sum_{b}\mathbf{J}^{(B)}_{\bar bb}u_{\bar ab}(0,\sigma), \tag{4.3.2}$$
$$-\sum_{\bar\sigma}v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a}\mathbf{J}^{(A)}_{\bar aa}v_{a\bar b}(0,\sigma)+\sum_{b}\mathbf{J}^{(B)}_{\bar bb}v_{\bar ab}(0,\sigma). \tag{4.3.3}$$

式 (4.3.2) は Clebsch-Gordan 係数 $C_{AB}(j\sigma;ab)$ についての定義条件と同等である. [35] 式 (4.3.2) から, $u_{ab}(0,\sigma)$ は $C_{AB}(j,\sigma;ab)$ に比例することが分かる. 従って, 慣習で次のようにとる:

$$u_{ab}(0,\sigma)=(2m)^{-\frac{1}{2}}C_{AB}(j\sigma;ab). \tag{4.3.4}$$

斉次 Loretz 群の既約 (A,B) 表現は多くても 1 度しか与えられたスピン j の回転群の表現を含まないからこれ以外の解はない. 式 (4.2.16) と (4.2.17) を調べると角運動量行列の複素共役は, [36]

$$-\mathbf{J}^{(j)*}_{\sigma\sigma'}=(-1)^{\sigma-\sigma'}\mathbf{J}^{(j)}_{-\sigma,-\sigma'}. \tag{4.3.5}$$

式 (4.3.3) を $(-1)^{j-\sigma}v_{ab}(\mathbf{p},-\sigma)$ で表すならば, 式 (4.3.2) と同じ形になる. [37] 従って, 定数因子を適切にとると $v(0,\sigma)$ の一意の解は,

$$v_{ab}(0,\sigma)=(-1)^{j+\sigma}u_{ab}(0,-\sigma). \tag{4.3.6}$$

有限運動量の係数関数を計算するために, 固定した方向 $\hat{\mathbf{p}}\equiv\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ についてのブースト (1.5.24) を変数 θ の関数

$$\cosh\theta=\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}{m},\qquad \sinh\theta=\frac{|\mathbf{p}|}{m} \tag{4.3.7}$$

を使って表す. 従って, $L^{\mu}{}_{\nu}$ は,

$$\begin{aligned} L^{i}{}_{k}(\theta) &= \delta_{ik} + (\cosh\theta - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^{i}{}_{0}(\theta) &= L^{0}{}_{i}(p) = \hat{p}_i \sinh\theta, \\ L^{0}{}_{0}(\theta) &= \cosh\theta. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

この様に $L^{\mu}{}_{\nu}$ を変数化すると,

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta} + \theta). \tag{4.3.9}$$

無限小 θ について, $[L(\theta)]^{\mu}{}_{\nu} \to \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ とすると, $\omega^{i}{}_{0} = \omega^{0}{}_{i} = \hat{p}_i\theta,\ \omega^{i}{}_{j} = \omega^{0}{}_{0} = 0$. 従って,

$$D(L(p)) = \exp(-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}\theta). \tag{4.3.10}$$

これは斉次 Lorentz 群の全ての表現について成り立つ. 既約 (A, B) 表現 (4.2.7) と (4.2.8) から,

$$i\boldsymbol{\mathcal{K}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}}. \tag{4.3.11}$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は交換するので,

$$D(L(p)) = \exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}\theta)\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}\theta). \tag{4.3.12}$$

式 (4.2.14) と (4.2.15) を使いさらに詳しく書くと,

$$D(L(p))_{a'b',ab} = (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{a'a}(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{b'b}. \tag{4.3.13}$$

式 (4.3.4) と (4.3.6) は, 式 (4.1.19) より有限運動量の係数関数を与える:

$$\begin{aligned} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{aa'}(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{bb'} \\ &\quad \times C_{AB}(j\sigma; a'b'), \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

$$v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma). \tag{4.3.15}$$

これらの結果は, 変換タイプ (A, B) の既約場を具体的に与えるので, このタイプの場 (4.1.32) は, 定数因子の κ, λ の選び方を除いて一意である.

この形式で Lorentz スカラーの相互作用密度を構築する. 斉次 Lorentz 群の (A, B) 表現は, $(A, 0), (0, B)$ 表現の直積なので, 一般 Lorentz 変換則 (4.1.6) と (4.1.7) は,

$$U_0(\Lambda)\psi_{ab}(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \sum_{a'b'} D^{A0}_{a,a'}(\Lambda^{-1})D^{0B}_{b,b'}(\Lambda^{-1})\psi_{a'b'}(\Lambda x). \tag{4.3.16}$$

式 (4.2.14) と (4.2.15) は, $(A, 0)$ 表現と $(0, B)$ 表現の生成子が丁度スピン A, B のスピン行列であることを示している. 従って, 次の形のスカラーを構築できる:

$$\sum_{a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{b_1 b_2 \cdots b_n} g_{a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n} \psi^{(1)}_{a_1 b_1}(x)\psi^{(2)}_{a_2 b_2}(x) \cdots \psi^{(n)}_{a_n b_n}(x). \tag{4.3.17}$$

但しここで, $g_{a_1a_2\cdots a_n;b_1b_2\cdots b_n}$ は, スピン $A_1, A_2, \cdots, A_n$ がスカラーを作るための係数とスピン $B_1, B_2, \cdots, B_n$ がスカラーを作るための係数の積にとる．ここでは (A, B) タイプの場の導関数は, 常に微分のない他のタイプの場に分解できるので, 導関数を含んだ相互作用を考えないことにする．例えば, 変換タイプ (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) の 3 つの場の積から作ることができる最も一般的な Lorentz スカラーは, 1 つの自由変数 g を用いて,

$$g \sum_{a_1a_2a_3} \sum_{b_1b_2b_3} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \psi^{(1)}_{a_1b_1} \psi^{(2)}_{a_2b_2} \psi^{(3)}_{a_3b_3}. \tag{4.3.18}$$

式 (4.3.18) の括弧は Wigner 3j 記号である:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{m'_3} C_{j_1j_2}(j_3m'_3, m_1m_2) C_{j_3j_3}(00, m'_3m_3).$$

スカラーを作るために, j_1m_1, j_2m_2 を合成して $j'_3m'_3$ をつくり, $j'_3m'_3, j_3m_3$ を合成してスカラーを作る．$j'_3 = j_3$ のときしかスカラーは作れないので, 上式のようになる．

S 行列が Lorentz 不変であるためには, 相互作用密度 $\mathscr{H}(x)$ が式 (4.3.18) の様なスカラーであるだけでなく, $\mathscr{H}(x)$ が空間的に隔たっている $\mathscr{H}(y)$ と交換することも必要である．同じ粒子タイプの (A, B) 場 ψ と $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 場 $\tilde{\psi}$ の随伴 $\tilde{\psi}^\dagger$ との交換子または反交換子

$$[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}^\dagger_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_\mp = (2\pi)^{-3} \int d^3p (2p^0)^{-1} \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) [\kappa\tilde{\kappa}^* e^{ip\cdot(x-y)} \mp \lambda\tilde{\lambda}^* e^{-ip\cdot(x-y)}] \tag{4.3.19}$$

を考える．ここで, $\pi(\mathbf{p})$ はスピンの和である: [38]

$$(2p^0)^{-1} \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{u}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_\sigma v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{v}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sigma). \tag{4.3.20}$$

また, 上と下の符号は, それぞれボゾンとフェルミオンについてのものである．式 (4.3.14) から,

$$\begin{aligned} \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_\sigma C_{AB}(j\sigma; a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{aa'} (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{bb'} \\ &\times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{A})}\theta))^*_{\tilde{a}\tilde{a}'} (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{B})}\theta))^*_{\tilde{b}\tilde{b}'}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

関数 $\pi(\mathbf{p})$ は具体的に計算されている.[9] 参照.

定理 4.3.1 $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}$ は, ある $\mathbf{p}$ と p^0 の多項式関数 $P(p)$ の質量殻の値である:

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}). \tag{4.3.22}$$

また, P は $2A + 2\tilde{B}$ が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数である:

$$P(-\mathbf{p}, -p^0) = (-)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}, p^0). \tag{4.3.23}$$

∎

説明. 一つの特別な方向$\mathbf{p}$についてこれを確認する. $\mathbf{p}$をz軸方向にとると, 式(4.3.21)は,

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma;ab)C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma;\tilde{a}\tilde{b})\exp([-a+b-\tilde{a}+\tilde{b}]\theta).$$

$\sigma = a+b,\ \sigma = \tilde{a}+\tilde{b}$でない限りClebsch-Gordan係数は0になるので, 指数部分は,

$$-a+b-\tilde{a}+\tilde{b} = -2a+\sigma+2\tilde{b}-\sigma = 2\tilde{b}-2a.$$

$\exp(\pm\theta)$を$(p^0 \pm p^3)/m$と書くことができるので, [39]

$$\begin{aligned}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma;ab)C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma;\tilde{a}\tilde{b}) \\ &\quad \times \begin{cases} [(p^0+p^3)/m]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b} \geqq a) \\ [(p^0-p^3)/m]^{2a-2\tilde{b}} & (a \geqq \tilde{b}) \end{cases}.\end{aligned}$$

但し, $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. 従って, $\pi(\mathbf{p})$は多項式$P(\mathbf{p},p^0)$の質量殻の値である. $2\tilde{b}-2a = 2\tilde{B}+2A-$(偶数)より, [40] 多項式は条件(4.3.23)を満たす. ∎

$\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$の偶数巾を$\mathbf{p}$で表すことによって, $\mathbf{p}$と$\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$の多項式は$\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$の一次式の形に書くことができる:

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\,Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}). \tag{4.3.24}$$

ここで, 多項式P, Qは$\mathbf{p}$のみの多項式である. 従って, 式(4.3.23)より, [41]

$$P(-\mathbf{p}) = (-)^{2A+2\tilde{B}}P(\mathbf{p}), \tag{4.3.25}$$
$$Q(-\mathbf{p}) = -(-)^{2A+2\tilde{B}}Q(\mathbf{p}). \tag{4.3.26}$$

$x-y$が空間的である場合, $x^0 = y^0$であるLorentz系を採用できるので, 式(4.3.19)は次の様に書ける: [42]

$$\begin{aligned}[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}^{\dagger}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_{\mp} &= [\kappa\tilde{\kappa}^* \mp (-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^*]P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla)\Delta_+(\mathbf{x}-\mathbf{y},0) \\ &\quad + [\kappa\tilde{\kappa}^* \pm (-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^*]Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

ここで, Δ_+は次の関数である:

$$\Delta_+(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0}e^{ip\cdot x}. \tag{4.3.28}$$

この積分は, 明らかにLorentz不変である. 空間的xについて,

$$x^0 = 0, |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}$$

と座標系を選ぶことができるので, [43] 式 (4.3.28) は, [44]

$$\begin{aligned}\Delta_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{p^2dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}.\end{aligned}$$

従って, x が空間的な場合, $\Delta_+(x)$ は不変な自乗 $x^2(>0)$ のみに依存することが分かる. 積分変数を $u \equiv p/m$ に変えると,

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}\int_0^\infty \frac{udu}{\sqrt{u^2+1}}\sin(m\sqrt{x^2}u). \tag{4.3.29}$$

Hankel 関数で表せば,

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}K_1(m\sqrt{x^2}). \tag{4.3.30}$$

[1, 9.6.21,9.6.27] 参照. 従って, $x^2>0$ の場合 $\Delta_+(x)$ は常に 0 ではなく, x^μ について偶関数である.

$\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ のときに式 (4.3.27) が 0 になるためには,

$$\kappa\tilde{\kappa}^* = \pm(-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^* \tag{4.3.31}$$

が成り立つことが必要十分である.

ここで $\psi=\tilde{\psi}$ のとき, つまり $A=\tilde{A}, B=\tilde{B}$ の場合を考える (このような交換子または反交換子は, 必ず $[\mathscr{H}(x),\mathscr{H}(y)]$ に現れる. 何故ならば, Hamiltonian のエルミート性から, $\mathscr{H}(x)$ が ψ を含めば, $\psi^\dagger$ も含むからである). この場合, 式 (4.3.31) は,

$$|\kappa|^2 = \pm(-)^{2A+2B}|\lambda|^2.$$

$\lambda\neq0, \kappa\neq0$ のとき, これが成り立つのは,

$$\pm(-1)^{2A+2B} = +1 \tag{4.3.32}$$

かつ,

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2 \tag{4.3.33}$$

のときだけである. $2A+2B$ は $2j$ と偶数だけ異なるので, [45] 式 (4.3.32) は, $2j$ が偶数ならば粒子がボゾン, 奇数であればフェルミオンになることを示している. これがスピンと統計の間の一般的な関係である.

次に場 $\psi,\tilde{\psi}$ が異なる一般的な場合を考える. 式 (4.3.31) の両辺を $|\tilde{\kappa}|^2=|\tilde{\lambda}|^2$ で割る: [46]

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = (-1)^{2B+2\tilde{B}}\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}.$$

つまり，$\tilde{\lambda}/\tilde{\kappa}(-1)^{2\tilde{B}} = \lambda/\kappa(-1)^{2B}$ は場に依存しない定数であることが分かる．それを c とおくと，

$$\lambda = (-)^{2B} c\ \kappa. \tag{4.3.34}$$

式 (4.3.33) から $|c| = 1$ であることが分かる．そのため，演算子 $a(\mathbf{p},\sigma), a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)$ の相対的位相を再定義することによって，全ての場に対して因数 c を 1 とできる: $\lambda = (-)^{2B}\kappa$. また，因数 κ は，場の全体のスケールを再定義することによって消去できる．以上のことから与えられた粒子の (A,B) 場は，

$$\psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int d^3p\ [u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + (-)^{2B} v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}]. \tag{4.3.35}$$

式 (4.3.15) を使うと，

$$\psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int d^3p\ u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)[a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + (-)^{2B+j-\sigma} a^{c\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}]. \tag{4.3.36}$$

この表し方は，全体のスケールを除いて一意である．

一般的に，与えられたスピン j の粒子の (A,B) 場は，$2B$ 階の微分演算子を作用させたタイプ $(j,0)$ の場 $\varphi_\sigma(x)$ としても表現できる: [47]

$$\{\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2B}}\}\varphi_\sigma. \tag{4.3.37}$$

これは，表現 (B,B) と $(j,0)$ の直積として変換する．この場 (4.3.37) はベクトルの加法則によって，$|j-B| \leqq A \leqq j+B$ の全ての既約表現 (A,B) に従って変換する場に分解できる．[48] 式 (4.3.35) はスピン j の粒子のタイプ (A,B) 場の唯一の表現であるので，それは導関数 (4.3.37) から得られる (A,B) 場と同じものである．

次にこの場の空間反転，荷電共役変換，時間反転での性質を求める．

補題 4.3.2 式 *(4.3.35), (4.3.36)* の係数 u, v について，次の等式が成り立つ．

$$u^{AB}_{ab}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j} u^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.3.38}$$
$$v^{AB}_{ab}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j} v^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.3.39}$$
$$u^{BA*}_{-b,-a}(\mathbf{p},-\sigma) = (-)^{a+b-\sigma} u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.3.40}$$
$$u^{AB*}_{ab}(-\mathbf{p},-\sigma) = (-)^{a+b+\sigma+A+B-j} u^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{p},\sigma). \tag{4.3.41}$$

∎

証明. Clebsch-Gordan 係数は次の対称性をもつ: [49]

$$C_{AB}(j\sigma;ab) = (-)^{A+B-j} C_{BA}(j\sigma;ba). \tag{4.3.42}$$

式 (4.3.14) より

$$u_{ab}^{AB}(-\mathbf{p},\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(e^{+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta})_{aa'}(e^{-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta})_{bb'}C_{AB}(j\sigma;a'b').$$

また,

$$u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(e^{-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta})_{bb'}(e^{+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta})_{aa'}C_{BA}(j\sigma;b'a').$$

従って, 式 (4.3.38) が成り立つ. 式 (4.3.15) と (4.3.38) より,

$$v_{ab}^{AB}(-\mathbf{p},\sigma)=(-)^{j+\sigma}u_{ab}(-\mathbf{p},-\sigma)=(-)^{j+\sigma}(-)^{A+B-j}u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},-\sigma) \tag{4.3.43}$$

従って, 再び式 (4.3.15) を使うと (4.3.39) が成り立つ.

次に, u^* を計算するために式 (4.3.5) を書き換える: [50]

$$\mathbf{J}^{(j)*}=-\mathscr{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathscr{C}^{-1},\quad \mathscr{C}_{\bar{\sigma}\sigma}\propto(-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma},-\sigma}.$$

式 (4.3.14) の Clebsch-Gordan 係数は実数であり, $a-a', b-b'$ は整数であるので, [51]

$$\begin{aligned} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)^* &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta))_{-a,-a'}(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta))_{-b,-b'} \\ &\quad\times(-)^{a'-a}(-)^{b'-b}C_{BA}(j\sigma;b'a'). \end{aligned} \tag{4.3.44}$$

従って,

$$u_{-b-a}^{BA}(\mathbf{p},-\sigma)^*=\frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta))_{a,a'}(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta))_{b,b'}(-)^{-a'+a}(-)^{-b'+b}C_{BA}(j-\sigma;-b'-a')$$

Clebsch-Gordan 係数の性質

$$C_{BA}(j,-\sigma;-b',-a')=C_{AB}(j,\sigma;a',b') \tag{4.3.45}$$

と $a'+b'=\sigma$ でない限りそれらの係数は 0 になる事実を使うと式 (4.3.40) は成り立つ.

次に, 式 (4.3.44) より

$$\begin{aligned} u_{ab}^{AB*}(-\mathbf{p},-\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta))_{-b,b'}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta))_{-a,a'} \\ &\quad\times(-)^{-a'-a}(-)^{-b'-b}C_{AB}(j-\sigma;-a'-b'). \end{aligned} \tag{4.3.46}$$

係数関数の複素共役を計算するために Clebsch-Gordan 係数の性質

$$C_{AB}(j,\sigma;a,b)=(-)^{A+B-j}C_{AB}(j,-\sigma;-a,-b) \tag{4.3.47}$$

と $a+b=\sigma$ のときのみこの係数は 0 にならないことから, 式 (4.3.41) が成り立つ. **QED**

定理 4.3.3 C, P, Tをそれぞれ荷電共役変換, 空間反転, 時間反転とすると,

$$\begin{aligned} P\psi_{ab}^{AB}(x)P^{-1} &= \eta^*(-)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x},x^0), &(4.3.48)\\ C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1} &= \xi^*(-)^{-2A-a-b-j}\psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x), &(4.3.49)\\ T\psi_{ab}^{AB}(x)T^{-1} &= (-)^{a+b+A+B-2j}\zeta^*\psi_{-a,-b}^{AB}(\mathbf{x},-x^0). &(4.3.50)\end{aligned}$$

∎

証明. 3.2 節の結果を使うと粒子消滅演算子と反粒子生成演算子の空間反転の性質は:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{P}^{-1} &= \eta^* a(-\mathbf{p},\sigma), &(4.3.51)\\ \mathrm{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{P}^{-1} &= \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma). &(4.3.52)\end{aligned}$$

位相η,η^cはそれぞれ粒子, 反粒子の内部パリティである. 一般 causal (A,B) 場 (4.3.35) はパリティ演算子 P で次のように変換される:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathrm{P}^{-1} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_\sigma\int d^3p[\eta^* a(-\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma) &(4.3.53)\\ &+\eta^c(-)^{2B}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}v_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma)]. \end{aligned}$$

積分変数を $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ に変え, 式 (4.3.38) と (4.3.39) を使うと,

$$\mathrm{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathrm{P}^{-1} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_\sigma\int d^3p(-)^{A+B-j} \quad (4.3.54)$$
$$\times[\eta^* a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot\mathscr{P}x}u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)+\eta^c(-)^{2B}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot\mathscr{P}x}v_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)].$$

これは, $\mathscr{P}x$ における causal 場 ψ_{ba}^{BA} である. 全体のスケールを除いて場 (4.3.35) は, このタイプの唯一の causal 場であるので, この場の係数は場 (4.3.35) の係数と全体の定数因子を除いて同じでなければならない. 従って, 式 (4.3.54) の二つの項の係数の比は (4.3.35) の A と B を入れ換えた場 (4.3.35) の係数比と同じである:

$$\eta^c(-)^{2B}/\eta^* = (-)^{2A}. \quad (4.3.55)$$

$A-B$ はスピン j と整数だけ異なるので, [52]

$$\eta^c = \eta^*(-)^{2j}. \quad (4.3.56)$$

これから, 粒子と反粒子対の内部パリティ$\eta^c\eta$は, ボソンについては $+1$, フェルミオンについては -1 であることが分かる. 式 (4.3.54) に式 (4.3.56) を代入し, $2B+2j\equiv 2A \mod 2$ に注意すると,

$$\mathrm{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathrm{P}^{-1} = \eta^*(-)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x},x^0).$$

荷電共役変換の場合, 粒子消滅演算子と反粒子生成演算子の変換性質は,

$$\mathrm{C}a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{C}^{-1}=\xi^{*}a^{c}(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.3.57}$$

$$\mathrm{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{C}^{-1}=\xi^{c}a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma). \tag{4.3.58}$$

位相 ξ,ξ^{c} はそれぞれ粒子と反粒子の荷電共役パリティである. 場 (4.3.36) にこの変換をすると,

$$\begin{aligned}\mathrm{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathrm{C}^{-1} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma}\int d^{3}p\; u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad\times[\xi^{*}a^{c}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}+\xi^{c}(-)^{2B+j-\sigma}a^{\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}].\end{aligned} \tag{4.3.59}$$

ところで, (B,A) 場の随伴は, 場 (4.3.36) の A,B を入れ換えて,

$$\begin{aligned}\psi_{ba}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma}\int d^{3}p\; u_{ba}^{BA*}(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad\times[(-1)^{2A+j-\sigma}a^{c}(\mathbf{p},-\sigma)e^{ip\cdot x}+a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}].\end{aligned} \tag{4.3.60}$$

これを, $a\to -a, b\to -b, \sigma\to -\sigma$ と置き換えて, 式 (4.3.40) を使うと,

$$\begin{aligned}\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma}\int d^{3}p(-)^{a+b-\sigma}u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad\times[(-)^{2A+j+\sigma}a^{c}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}+a^{\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}].\end{aligned}$$

$A+B-(\text{整数})=j$ より, $(-)^{-2A-j}=(-)^{2B+j}$. 従って,

$$\begin{aligned}(-)^{-2A-a-b-j}\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{\sigma}\int d^{3}p\; u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad\times[a^{c}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}+(-)^{j-\sigma+2B}a^{\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}].\end{aligned} \tag{4.3.61}$$

$\mathrm{C}\psi_{ab}^{AB}\mathrm{C}^{-1}$ が空間的に隔ったすべての場と交換または反交換するためには, これが $\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x)$ に比例することが必要である. 何故ならこれは, (B,A) タイプの変換をする唯一の causal 場の随伴であるからである. 式 (4.3.61) と式 (4.3.59) と比較すると, 荷電共役パリティが,

$$\xi^{*}=\xi^{c} \tag{4.3.62}$$

となることが必要である. 従って,

$$\mathrm{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathrm{C}^{-1}=\xi^{*}(-)^{-2A-a-b-j}\psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x).$$

特に, 粒子がそれ自身の反粒子である場合, 式 (4.3.49) は,

$$\psi_{ab}^{AB}(x)=(-)^{-2A-a-b-j}\psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x) \tag{4.3.63}$$

である.

時間反転の場合, 粒子の消滅演算子と反粒子の生成演算子の変換性質は,

$$\mathrm{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{T}^{-1} = \zeta^*(-1)^{j-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma), \tag{4.3.64}$$

$$\mathrm{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{T}^{-1} = \zeta^c(-1)^{j-\sigma}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma). \tag{4.3.65}$$

この変換で既約場 (4.3.36) は,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathrm{T}^{-1} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_\sigma\int d^3p\ u^{AB*}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)(-)^{j-\sigma} \\ &\quad\times[\zeta^*a(-\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}+\zeta^c(-)^{2B+j+\sigma}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}].\end{aligned} \tag{4.3.66}$$

この積分の変数と和の変数を $\mathbf{p}\to-\mathbf{p},\sigma\to-\sigma$ と変えると上式の右辺は,

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_\sigma\int d^3p\ u^{AB*}_{ab}(-\mathbf{p},-\sigma)(-)^{j+\sigma}[\zeta^*a(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot\mathscr{P}x}+\zeta^c(-)^{2B+j-\sigma}a^{c\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{ip\cdot\mathscr{P}x}].$$

(A,B) 場が時間反転によって別の (A,B) 場に比例するものに変換されるためには,

$$\zeta^c=\zeta^* \tag{4.3.67}$$

が必要である. そのとき (4.3.41) より[53]

$$\mathrm{T}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathrm{T}^{-1}=(-)^{a+b+A+B-2j}\zeta^*\psi^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{x},-x^0).$$

QED

4.4 スカラー場・ベクトル場・Dirac 場

スカラー場 $\phi(x)$ は $(A,B)=(0,0)$ の場合であるので, $\phi(x)\equiv\psi^{00}_{00}$ とおくと式 (4.3.48) より,

$$\mathrm{P}\phi(x)\mathrm{P}^{-1}=\eta^*\phi(\mathscr{P}x). \tag{4.4.1}$$

式 (4.3.49) より,

$$\mathrm{C}\phi(x)\mathrm{C}^{-1}=\xi^*\phi^\dagger(x). \tag{4.4.2}$$

式 (4.3.50) より,

$$\mathrm{T}\phi(x)\mathrm{T}^{-1}=\zeta^*\phi(-\mathscr{P}x). \tag{4.4.3}$$

ベクトル場 $v^\mu(x)$ は $(A,B)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の場合である. a,b の値 $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ を $\uparrow,\downarrow$ で表すと, 次のようにおける.

$$v^\mu\equiv\begin{pmatrix}\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow}-\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow}\\ i(\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow}+\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow})\\ \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow}+\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow}\\ \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow}-\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow}\end{pmatrix}. \tag{4.4.4}$$

式 (4.3.48) より，

$$\mathrm{P}\psi_{ab}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{-1} = \eta^*\psi_{ba}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathscr{P}x). \tag{4.4.5}$$

これより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}v^1\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{P}^{-1} = \eta^*(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \eta^* v^1(\mathscr{P}x),\\
\mathrm{P}v^2\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}i(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{P}^{-1} = \eta^* i(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \eta^* v^2(\mathscr{P}x),\\
\mathrm{P}v^3\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{P}^{-1} = \eta^*(\psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \eta^* v^3(\mathscr{P}x),\\
\mathrm{P}v^0\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{P}^{-1} = \eta^*(\psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = -\eta^* v^0(\mathscr{P}x).
\end{aligned}$$

従って，

$$\mathrm{P}v^\mu(x)\mathrm{P}^{-1} = -\eta^*\mathscr{P}^\mu{}_\nu v^\nu(\mathscr{P}x). \tag{4.4.6}$$

式 (4.3.49) より，

$$\mathrm{C}\psi_{ab}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathrm{C}^{-1} = (-)^{-a-b}\xi^*\psi_{-b-a}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger}(x). \tag{4.4.7}$$

これより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}v^1\mathrm{C}^{-1} &= \mathrm{C}(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{C}^{-1} = -\xi^*(\psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger} - \psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger}) = \xi^* v^{1\dagger},\\
\mathrm{C}v^2\mathrm{C}^{-1} &= \mathrm{C}i(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{C}^{-1} = \xi^* i(\psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger} + \psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger}) = \xi^* v^{2\dagger},\\
\mathrm{C}v^3\mathrm{C}^{-1} &= \mathrm{C}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{C}^{-1} = \xi^*(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger} + \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger}) = \xi^* v^{3\dagger},\\
\mathrm{C}v^0\mathrm{C}^{-1} &= \mathrm{C}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{C}^{-1} = \xi^*(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger} - \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dagger}) = \xi^* v^{0\dagger}.
\end{aligned}$$

従って，

$$\mathrm{C}v^\mu(x)\mathrm{C}^{-1} = \xi^* v^{\mu\dagger}(x). \tag{4.4.8}$$

式 (4.3.50) より，

$$\mathrm{T}\psi_{ab}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-1} = (-)^{a+b-1}\zeta^*\psi_{-a-b}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(-\mathscr{P}x). \tag{4.4.9}$$

これより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}v^1\mathrm{T}^{-1} &= \mathrm{T}(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{T}^{-1} = \zeta^*(\psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = -\zeta^* v^1(-\mathscr{P}x),\\
\mathrm{T}v^2\mathrm{T}^{-1} &= -i\mathrm{T}(\psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{T}^{-1} = -i\zeta^*(\psi_{\downarrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\uparrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = -\zeta^* v^2(-\mathscr{P}x),\\
\mathrm{T}v^3\mathrm{T}^{-1} &= \mathrm{T}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{T}^{-1} = -\zeta^*(\psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = -\zeta^* v^3(-\mathscr{P}x),\\
\mathrm{T}v^0\mathrm{T}^{-1} &= \mathrm{T}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\mathrm{T}^{-1} = -\zeta^*(\psi_{\downarrow\uparrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \psi_{\uparrow\downarrow}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \zeta^* v^0(-\mathscr{P}x).
\end{aligned}$$

従って，

$$\mathrm{T}v^\mu(x)\mathrm{T}^{-1} = \zeta^*\mathscr{P}^\mu{}_\nu v^\nu(-\mathscr{P}x). \tag{4.4.10}$$

4.2 節で述べたように, 空間反転を含む Lorentz 群の表現を得るためには $A = B$ でなければならない. $A \neq B$ で空間反転を含む Lorentz 群の既約表現は直和 $(A, B) \oplus (B, A)$ である. そこで, 次に $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ の Dirac 表現を考える.

$$\psi_\ell(x) \equiv (\psi^{\frac{1}{2}0}_{\frac{1}{2}0}, \psi^{\frac{1}{2}0}_{-\frac{1}{2}0}, \psi^{0\frac{1}{2}}_{0\frac{1}{2}}, \psi^{0\frac{1}{2}}_{0-\frac{1}{2}}) \tag{4.4.11}$$

とする. 式 (4.3.48) より,

$$\mathrm{P}\psi^{\frac{1}{2}0}_{a0}\mathrm{P}^{-1} = \eta^*\psi^{0\frac{1}{2}}_{0a}(\mathscr{P}x), \quad \mathrm{P}\psi^{0\frac{1}{2}}_{0a}\mathrm{P}^{-1} = \eta^*\psi^{\frac{1}{2}0}_{a0}(\mathscr{P}x). \tag{4.4.12}$$

従って,

$$\mathrm{P}\psi(x)\mathrm{P}^{-1} = \eta^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(\mathscr{P}x) \equiv \eta^*\beta\psi(\mathscr{P}x). \tag{4.4.13}$$

式 (4.3.49) より,

$$\mathrm{C}\psi^{\frac{1}{2}0}_{a0}\mathrm{C}^{-1} = \xi^*(-)^{-1-a-\frac{1}{2}}\psi^{0\frac{1}{2}\dagger}_{0-a}(x), \quad \mathrm{C}\psi^{0\frac{1}{2}}_{0a}\mathrm{C}^{-1} = \xi^*(-)^{-a-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}0\dagger}_{-a0}(x). \tag{4.4.14}$$

従って, [54]

$$\mathrm{C}\psi(x)\mathrm{C}^{-1} = \xi^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi^*(x) \equiv \eta^*\beta\mathscr{C}\psi^*(x), \tag{4.4.15}$$

ここで,

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.16}$$

とおいた. 式 (4.3.50) より,

$$\mathrm{T}\psi^{\frac{1}{2}0}_{a0}\mathrm{T}^{-1} = (-)^{a+\frac{1}{2}-1}\zeta^*\psi^{\frac{1}{2}0}_{-a0}(-\mathscr{P}x), \quad \mathrm{T}\psi^{0\frac{1}{2}}_{0a}\mathrm{T}^{-1} = (-)^{a+\frac{1}{2}-1}\zeta^*\psi^{0\frac{1}{2}}_{0-a}(-\mathscr{P}x). \tag{4.4.17}$$

従って,

$$\mathrm{T}\psi(x)\mathrm{T}^{-1} = \zeta^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \psi(-\mathscr{P}x) \equiv -\zeta^*\gamma_5\mathscr{C}\psi(-\mathscr{P}x). \tag{4.4.18}$$

ここで,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4.19}$$

である. 但しここでの 1 は 2×2 の単位行列である.

4.5 ベクトル形式

式 (4.4.4) の様にとった v^μ についての Lorentz 変換を表す行列を求める．

まず 3 軸まわりの回転を考える．式 (4.2.18) より $\mathcal{J}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ であり，$\boldsymbol{\theta}=(0,0,\theta)$ より，

$$
\begin{aligned}
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{J})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow} &= (1+i\theta)\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow}, &(4.5.1)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{J})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow} &= \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow}, &(4.5.2)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{J})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow} &= \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow}, &(4.5.3)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{J})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow} &= (1-i\theta)\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow}. &(4.5.4)
\end{aligned}
$$

従って，式 (4.4.4) より，

$$
\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \\ v'^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^0 \end{pmatrix}. \tag{4.5.5}
$$

次に 3 軸方向のブーストを考える．式 (4.3.11) より，$i\mathcal{K}=(\mathcal{A}-\mathcal{B})$ であり，$\boldsymbol{\theta}=(0,0,\theta)$ より，

$$
\begin{aligned}
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{K})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow} &= \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\uparrow}, &(4.5.6)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{K})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow} &= (1+\theta)\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\uparrow\downarrow}, &(4.5.7)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{K})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow} &= (1-\theta)\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\uparrow}, &(4.5.8)\\
(1+i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathcal{K})\psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow} &= \psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{\downarrow\downarrow}. &(4.5.9)
\end{aligned}
$$

従って，式 (4.4.4) より，

$$
\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \\ v'^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^0 \end{pmatrix}. \tag{4.5.10}
$$

つまり，3 軸のまわりの回転と 3 軸方向のブースト変換性質より，式 (4.4.4) で定義される v^μ は 4 次元ベクトルと同じ Lorentz 表現をもつことが分かる．一般の場合も同様に検証できる．

4.6 Dirac 形式

$(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ 場の斉次 Lorentz 群の表現を $D(\Lambda)$ とする．無限小変換

$$
\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, &(4.6.1)\\
\omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu} &(4.6.2)
\end{aligned}
$$

を考えることによってこれらの行列の性質を調べる．その場合，

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{J}^{\mu\nu} \tag{4.6.3}$$

とする．但し，$\mathscr{J}^{\mu\nu} = -\mathscr{J}^{\nu\mu}$．交換関係 (1.4.13) を満たす行列のセットは，

$$i[\mathscr{J}^{\mu\nu}, \mathscr{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\mathscr{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\mathscr{J}^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho}\mathscr{J}^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\mathscr{J}^{\rho\mu}. \tag{4.6.4}$$

その様な行列のセットを見つけるために，次の反交換関係を満たす行列を γ^μ とする:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{4.6.5}$$

$\mathscr{J}^{\mu\nu}$ を次のように定義する:

$$\mathscr{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{4.6.6}$$

式 (4.6.5) を使うと，

$$[\mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} + i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho}. \tag{4.6.7}$$

これから式 (4.6.6) は交換関係 (4.6.4) を満すことが分かる．

式 (4.2.2), (4.2.3), (4.2.18), (4.3.11) より，

$$\mathscr{J}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}, \tag{4.6.8}$$

$$i\mathscr{J}_{i0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix} \tag{4.6.9}$$

であることが分かる．σ_i は Pauli 行列である:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.6.10}$$

式 (4.6.8), (4.6.9), (4.6.5), (4.6.6) と $\gamma^0 = -i\beta$ とおくことによって，

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = -i\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}. \tag{4.6.11}$$

これを Dirac 行列という．これより，$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ であることが分かる．また，γ_5 は γ^μ と反交換することも分かる:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{4.6.12}$$

式 (4.6.11) から次の式が成り立つこと分かる:

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = -\gamma^\mu. \tag{4.6.13}$$

これから

$$\beta \mathscr{J}^{\rho\sigma\dagger}\beta = \mathscr{J}^{\rho\sigma} \tag{4.6.14}$$

従って，行列 $D(\Lambda)$ は擬 unitary 関係を満たす: [55]

$$\beta D(\Lambda)^{\dagger}\beta = D(\Lambda)^{-1}. \tag{4.6.15}$$

Dirac 表現は unitary ではない. だから $\psi^{\dagger}\psi$ はスカラーではない. この困難を扱うために，新しい adjoint を定義する:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\beta. \tag{4.6.16}$$

擬 unitary 条件 (4.6.15) を使うと，$\psi, \bar{\psi}$ で構築されたフェルミオンの双線形は次の Lorentz 変換性質をもつ: [56]

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)D(\Lambda)MD^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x). \tag{4.6.17}$$

また, 空間反転では式 (4.4.13) より，

$$\mathrm{P}[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]\mathrm{P}^{-1} = \bar{\psi}(\mathscr{P}x)\beta M\beta\psi(\mathscr{P}x). \tag{4.6.18}$$

行列 M を $\mathbf{1}, \gamma^{\mu}, \mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^{\mu}, \gamma_5$ とする. 単位行列の場合は,

$$D(\Lambda)1D^{-1}(\Lambda) = 1. \tag{4.6.19}$$

交換関係 (4.6.7) から, [57]

$$D(\Lambda)\gamma^{\rho}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\sigma}{}^{\rho}\gamma^{\sigma}. \tag{4.6.20}$$

式 (4.6.6) に式 (4.6.20) を使うと,

$$D(\Lambda)\mathscr{J}^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}\mathscr{J}^{\mu\nu}. \tag{4.6.21}$$

また, γ_5 は γ^{μ} と反交換するので,

$$[\mathscr{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0. \tag{4.6.22}$$

式 (4.6.22) より，

$$D(\Lambda)\gamma_5 D^{-1}(\Lambda) = \gamma_5, \tag{4.6.23}$$

$$D(\Lambda)\gamma_5\gamma^{\rho}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\sigma}{}^{\rho}\gamma_5\gamma^{\sigma}. \tag{4.6.24}$$

従って, 双線形 $\bar{\psi}M\psi$ は，スカラー，ベクトル，テンソル，軸性ベクトル，擬スカラーとして変換することが分かる (「軸性」と「擬」の表す意味は, 空間反転での一般のベクトル，スカラーの性質と反対であるという意味である. 擬スカラーは負のパリティをもち，軸性ベクトルの空間成分，時間成分はそれぞれ正，負のパリティをもつ).

4.7 CPT 定理

電荷の様な保存する量子数をもつ量子力学を Lorentz 不変にするために反粒子の存在が必要であった. その粒子・反粒子の性質間に次の定理のような厳密な関係が成り立つ. この定理を CPT 定理という.

定理 4.7.1 反転位相 ζ, ξ, η を適切に選べば, 全ての反転の積 *CPT* は保存する. ∎

証明. いろいろなタイプの自由場の CPT 積の効果を調べる. スカラー, ベクトル, Dirac 場について, [58]

$$\begin{aligned} \mathrm{CPT}\phi(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} &= \zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger(-x), \qquad (4.7.1)\\ \mathrm{CPT}\phi_\mu(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} &= -\zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger_\mu(-x). \qquad (4.7.2)\\ \mathrm{CPT}\psi(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} &= \zeta^*\xi^*\eta^*\gamma_5\psi^*(-x). \qquad (4.7.3) \end{aligned}$$

(位相 ζ, ξ, η はそれぞれの場によって記述される粒子の種類による.) 全ての粒子について位相を次のように選ぶ:

$$\zeta\xi\eta = 1. \qquad (4.7.4)$$

スカラー場またはベクトル場またはその導関数から作られたテンソル $\phi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ は次のように変換する:

$$\mathrm{CPT}\phi_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = (-)^n\phi^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_n}(-x). \qquad (4.7.5)$$

Dirac 場の双線形結合で作られるテンソルの場合, [59]

$$\begin{aligned} \mathrm{CPT}[\bar{\psi}_1(x)M\psi_2(x)][\mathrm{CPT}]^{-1} &= \psi_1^T(-x)\gamma_5\beta M^*\gamma_5\psi_2^*(-x)\\ &= [\bar{\psi}_1(-x)\gamma_5 M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger. \qquad (4.7.6) \end{aligned}$$

双線形結合の式が n 階のテンソルならば, M は Dirac 行列の n (mod 2) 個の積であるので, $\gamma_5 M\gamma_5 = (-1)^n M$. 従って, 式 (4.7.5) を満たす.

エルミート相互作用密度 $\mathscr{H}(x)$ はスカラーなので, テンソルの時空添え字の総数は偶数である. 従って,

$$\mathrm{CPT}\mathscr{H}(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = \mathscr{H}(-x). \qquad (4.7.7)$$

斉次 Lorentz 群の一般既約表現に属する場 $\psi^{AB}_{ab}(x)$ の 1 つ以上の場から作られるエルミートスカラーについても同じことが成り立つ. 前節までの結果から $\zeta\xi\eta = 1$ とすると, [60]

$$\mathrm{CPT}\psi^{AB}_{ab}(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B}\psi^{AB\dagger}_{ab}(-x). \qquad (4.7.8)$$

$\psi^{A_1B_1}_{a_1b_1}(x)\psi^{A_2B_2}_{a_2b_2}(x)\cdots$ の積から作られた $\mathscr{H}(x)$ がスカラーならば, $A_1+A_2+\cdots, B_1+B_2+\cdots$ は整数である. 従って, $(-1)^{2B_1+2B_2+\cdots} = 1$. [61] つまり, エルミートスカラー $\mathscr{H}(x)$ は自動的に式 (4.7.7) を満たす.

式 (4.7.7) と相互作用 $V \equiv \int d^3x\mathscr{H}(\vec{x},0)$ より,

$$\mathrm{CPT}\ V\ [\mathrm{CPT}]^{-1} = \int d^3x\mathscr{H}(-\vec{x},0) = \int d^3x\mathscr{H}(\vec{x},0).$$

従って, CPT は V と交換する:

$$\mathrm{CPT}\ V\ [\mathrm{CPT}]^{-1} = V.$$

QED

Notes

[25] n,σ のラベルは, 全ての異なる粒子タイプとスピン z 成分をそれぞれとる.

[26] $D(W)$ は unitary なので $D(W)D(W^{-1}) = 1$ から $D(W^{-1}) = D(W)^\dagger$ 従って, $D(W^{-1})^\dagger = D(W)$, これと式 (3.2.14) を使うと式 (4.1.10) になる.

[27] $\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}(W(\Lambda,p))(2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{i(\Lambda p)\cdot(\Lambda x+b)}u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)e^{(i(\Lambda p)\cdot b)}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ip\cdot x}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$.

$\sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}(W(\Lambda,p))e^{i(\Lambda p)\cdot(\Lambda x)}u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)e^{ip\cdot x}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$.

[28] $D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}(R) = \delta_{\sigma\bar\sigma} + \frac{i}{2}\Theta_{ik}(J^{(j_n)}_{ik})_{\sigma\bar\sigma}$ から, $D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}(R) = \delta_{\sigma\bar\sigma} - \frac{i}{2}\Theta_{ik}(J^{(j_n)*}_{ik})_{\sigma\bar\sigma}$.

[29] $U_0(\Lambda,a)\mathscr{H}(x)U_0(\Lambda,a) = \sum_{NM}\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_N} g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_N}U(\Lambda,a)\psi^-_{\ell'_1}(x)\cdots\psi^-_{\ell'_N}(x)\psi^+_{\ell_1}(x)\cdots\psi^+_{\ell_M}(x)U(\Lambda,a)$
$= \sum_{NM}\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_N} g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_N}D_{\ell'\bar\ell'}(\Lambda^{-1})\psi^-_{\ell'_1}(\Lambda x+a)\cdots D_{\ell_1\bar\ell_1}(\Lambda^{-1})\psi^+_{\ell_1}(\Lambda x+a)\cdots$.

[30] 式 (4.1.15) と (4.1.16) を式 (4.1.25) に代入し, $\mathbf{x}$ で積分すると相互作用 Hamiltonian は,

$$\begin{aligned} V &= \sum_{NM}\int d^3\mathbf{p}'_1\cdots d^3\mathbf{p}'_N d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_M \sum_{\sigma'_1\cdots\sigma'_N}\sum_{\sigma_1\cdots\sigma_M}\sum_{n'_1\cdots n'_N}\sum_{n_1\cdots n_M} \\ &\quad \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1,n'_1)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}'_N,\sigma'_N,n'_N)a(\mathbf{p}_M,\sigma_M,n_M)\cdots a(\mathbf{p}_1,\sigma_1,n_1) \\ &\quad \times \mathscr{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M). \end{aligned}$$

但し,

$$\mathscr{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots) = \delta^3(\mathbf{p}'_1+\cdots-\mathbf{p}_1-\cdots)\tilde{\mathscr{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots),$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathscr{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M) = (2\pi)^{3-3N/2-3M/2} \\ &\times\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M}v_{\ell'_1}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\cdots v_{\ell'_N}(\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N) \\ &\times u_{\ell_1}(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)\cdots u_{\ell_M}(\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M). \end{aligned}$$

つまり, この相互作用は S 行列がクラスター分解原理を満たすことを保証する形をしている.

[31] $Qa = (q-q(n))a, Qa^\dagger = (q+q(n))a^\dagger$ つまり $Qa = aQ - q(n)a, Qa^\dagger = a^\dagger Q + q(n)a^\dagger$.

[32] $Q\mathscr{H} \equiv Q\psi_{\ell_1}\psi_{\ell_2}\cdots\psi^\dagger_{m_1}\cdots = \psi_{\ell_1}(Q-q_{\ell_1})\psi_{\ell_2}\cdots\psi^\dagger_{m_1}\psi^\dagger_{m_2}\cdots = -q_{\ell_1}\mathscr{H} + \psi_{\ell_1}\psi_{\ell_2}(Q-q_{\ell_2})\cdots\psi^\dagger_{m_1}\psi^\dagger_{m_2}\cdots$

$= (-q_{\ell_1})\mathscr{H} + (-q_{\ell_2})\mathscr{H} + \cdots = (-q_{\ell_1} - q_{\ell_2} \cdots + q_{m_1} + q_{m_2} \cdots)\mathscr{H} + \mathscr{H}Q.$

33 $[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = \frac{1}{4}[\mathcal{J}_i + i\mathcal{K}_i, \mathcal{J}_j + i\mathcal{K}_j] = \frac{1}{4}(i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k - \epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k + \epsilon_{jik}\mathcal{K}_k + i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k) = \frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}(\mathcal{J}_k + i\mathcal{K}_k),$

$[\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j] = \frac{1}{4}[\mathcal{J}_i - i\mathcal{K}_i, \mathcal{J}_j - i\mathcal{K}_j] = \frac{1}{4}(i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k + \epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k - \epsilon_{jik}\mathcal{K}_k + i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k) = \frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}(\mathcal{J}_k - i\mathcal{K}_k),$

$[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = \frac{1}{4}[\mathcal{J}_i + i\mathcal{K}_i, \mathcal{J}_j - i\mathcal{K}_j] = \frac{1}{4}(i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k + \epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k + \epsilon_{jik}\mathcal{K}_k - i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k) = 0.$

34 4次元 $2A$ 階の対称テンソルの独立な成分の数は, 対称なのでどんな順列も左から 0123 の順に同じ数が続く順列に並び替えることができる. 従って, $2A$ 個の数字を 0,1,2,3 の 4 つに分ける方法だけ順列がある. つまり, 順列の数は ${}_{2A+3}C_3$. トレース 0 の条件の数は, 縮約しない添字の数が $2A+3-2$ より ${}_{2A+1}C_3$. 従って, トレース 0 の対称テンソルの成分の数は, $\frac{(2A+3)!}{3!(2A)!} - \frac{(2A+1)!}{3!(2A-2)!} = (2A+1)^2$. (A, A) 場に期待される数と同じである.

35状態 $\Psi^j{}_\sigma \equiv \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab)\Psi_{ab}$ があるとき, Ψ^j_σ, Ψ_{ab} の無限小回転 θ での変化をそれぞれ $\delta\Psi^j_\sigma, \delta\Psi_{ab}$ とすると, $\delta\psi^j_\sigma = \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab)\delta\psi_{ab}$. 従って, 式 (4.2.7) と (4.2.8) より, $\delta\Psi_{ab} = i\sum_{\bar{a}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(A)}_{\bar{a}a}\Psi_{\bar{a}b} + i\sum_{\bar{b}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(B)}_{\bar{b}b}\Psi_{a\bar{b}}$. また, $\delta\Psi^j{}_\sigma = i\sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}\Psi^j{}_{\bar{\sigma}}$. 従って, $i\sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}\Psi^j{}_{\bar{\sigma}} = \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab)(i\sum_{\bar{a}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(A)}_{\bar{a}a}\Psi_{\bar{a}b} + i\sum_{\bar{b}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(B)}_{\bar{b}b}\Psi_{a\bar{b}})$.

$\sum_{\bar{\sigma}} \mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma} \sum_{ab} C_{AB}(j\bar{\sigma}; ab)\Psi_{ab} = \sum_{\bar{a}b} C_{AB}(j, \sigma; \bar{a}b) \sum_a \mathbf{J}^{(A)}_{a\bar{a}}\Psi_{ab} + \sum_{a\bar{b}} C_{AB}(j, \sigma; a\bar{b}) \sum_b \mathbf{J}^{(B)}_{b\bar{b}}\Psi_{ab}.$

ψ_{ab} は独立であるので, $\sum_{\bar{\sigma}} \mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma} C_{AB}(j\bar{\sigma}; ab) = \sum_{\bar{a}} C_{AB}(j, \sigma; \bar{a}b)\mathbf{J}^{(A)}_{a\bar{a}} + \sum_{\bar{b}} C_{AB}(j, \sigma; a\bar{b})\mathbf{J}^{(B)}_{b\bar{b}}$.

36 $(\mathbf{J}^{(A)}_3)^*_{a'a} = a\delta_{a'a}$ より $(\mathbf{J}^{(A)}_3)^*_{a'a} = (\mathbf{J}^{(A)}_3)_{a'a} = -(\mathbf{J}^{(A)}_3)_{-a'-a}$. また $\delta_{-a',-a\pm1} = \delta_{a',a\mp1}$ と

$(\mathbf{J}^{(A)*}_1 \mp i\mathbf{J}^{(A)*}_2)_{a'a} = \delta_{a',a\pm1}\sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}$ より $(\mathbf{J}^{(A)*}_1)_{a'a} = (\mathbf{J}^{(A)}_1)_{a'a} = (\mathbf{J}^{(A)}_1)_{-a'-a}$.

$(\mathbf{J}^{(A)*}_2)_{a'a} = -(\mathbf{J}^{(A)}_2)_{a'a} = (\mathbf{J}^{(A)}_2)_{-a'-a}$ 上下の符号が入れ替わるので最後で一符号がでて相殺した.

37式 (4.3.3) に式 (4.3.5) を代入して, $+\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma})(-1)^{\bar{\sigma}-\sigma}\mathbf{J}^{(j)}_{-\bar{\sigma}-\sigma} = \sum_a \mathbf{J}^{(A)}_{\bar{a}a} v_{a\bar{b}}(0, \sigma) + \sum_b \mathbf{J}^{(B)}_{\bar{b}b} v_{\bar{a}b}(0, \sigma)$.

$(-1)^{j+\sigma}$ を掛けて, $\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma})(-1)^{j+\bar{\sigma}}\mathbf{J}^{(j)}_{-\bar{\sigma}-\sigma} = \sum_a \mathbf{J}^{(A)}_{\bar{a}a} v_{a\bar{b}}(0, \sigma)(-1)^{j+\sigma} + \sum_b \mathbf{J}^{(B)}_{\bar{b}b} v_{\bar{a}b}(0, \sigma)(-1)^{j+\sigma}$.

$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, -\bar{\sigma})(-1)^{j-\bar{\sigma}}\mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma} = \sum_a \mathbf{J}^{(A)}_{\bar{a}a} v_{a\bar{b}}(0, -\sigma)(-1)^{j-\sigma} + \sum_b \mathbf{J}^{(B)}_{\bar{b}b} v_{\bar{a}b}(0, -\sigma)(-1)^{j-\sigma}$.

38$\sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)\tilde{u}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma)\tilde{u}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, -\sigma) = \sum_\sigma (-1)^{j+\sigma} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)(-1)^{j+\sigma}\tilde{v}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sigma)$. 式 (4.3.15) を使った.

39 $\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \frac{p^0}{m}$, $\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{p^3}{m}$.

40$\tilde{b} = B -$ 整数, $a = A -$ 整数 よって $2\tilde{b} - 2a = 2\tilde{B} - 2A +$ 偶数 $= 2\tilde{B} + 2A - 4A +$ 偶数.

41 $P(-\mathbf{p}, -p^0) = \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-\mathbf{p}) - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-\mathbf{p}) = (-1)^{2A+2\tilde{B}}P(\mathbf{p}, p^0)$.

42 $[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}^\dagger_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_\mp = (2\pi)^{-3}\int d^3p(2p^0)^{-1}(P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}))[\kappa\tilde{\kappa}^* e^{ip\cdot(x-y)} \mp \lambda\tilde{\lambda}^* e^{-ip\cdot(x-y)}]$.

43x が時間的で $x^0 = 0$ とすると $|\mathbf{x}|^2 < 0$. 従って, 矛盾する.

44 $\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \int_0^\infty p^2dp\int_{-1}^1 \frac{2\pi e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta}d(\cos\theta)}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} = \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{p^2dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\left[\frac{e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta}}{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}\right]_{-1}^1$.

45$\sigma = a + b = A -$ 整数 $+ B -$ 整数. また, $\sigma = j -$ 整数 であるので, $j = A + B -$ 整数.

46$j = A + B -$ 整数 より $2A = -2B + 2($整数$) + 2j = 2B - 4B + 2($整数$) + 2j = 2B + ($偶数$) + 2j$. 従って, $(-1)^{2A} = (-1)^{2B}(-1)^{2j}$. フェルミオンのとき $2j$ は奇数なので $(-1)^{2A} = -(-1)^{2B}$. ボゾンのとき $2j$ は偶数なので $(-1)^{2A} = (-1)^{2B}$.

[47]$\{\}$ はトレース 0 の部分を表す．例えば，$\{\partial_\mu \partial_\nu\} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\Box$.

[48] $(j,0)$ 場と (B,B) 場の直積は，$j \otimes B \otimes B$. $(j \otimes B) \otimes B \equiv A \otimes B$. $A = j \otimes B$ はベクトルの加法則より，$|j-B| \leqq A \leqq j+B$ の値をとる．従って，$|A-B| \leqq j \leqq A+B$.

[49] $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J}\langle j_1 j_2 - m_1 - m_2 | j_1 j_2 J - M\rangle$.

$\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle = \langle j_1 j_2 - m_1 - m_2 | j_1 j_2 J - M\rangle$. meshia より

[50]$\mathscr{C}_{\bar{\sigma}\sigma} \propto (-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma},-\sigma}$ とすると $\mathscr{C}^{-1}_{\sigma\bar{\bar{\sigma}}} \propto (-1)^{-j+\sigma}\delta_{-\sigma,\bar{\sigma}}$ より，$(\mathscr{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathscr{C}^{-1})_{\sigma\sigma'} = (\mathscr{C})_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\bar{\bar{\sigma}}}(\mathscr{C}^{-1})_{\bar{\bar{\sigma}}\sigma'}$

$= (-1)^{j-\bar{\sigma}}\delta_{\sigma,-\bar{\sigma}}(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma},\bar{\bar{\sigma}}}(-1)^{-j+\bar{\bar{\sigma}}}\delta_{-\bar{\bar{\sigma}},\sigma'} = (-1)^{\bar{\bar{\sigma}}-\bar{\sigma}}\delta_{\sigma,-\bar{\sigma}}(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma},\bar{\bar{\sigma}}}\delta_{-\bar{\bar{\sigma}},\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\mathbf{J}^{(j)}_{-\sigma,-\sigma'}$.

[51] $u^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)^* = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)*}\theta))_{b,b'}(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)*}\theta))_{a,a'}C_{BA}(j\sigma;b'a')$ である．また，

$(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{C}\mathbf{J}^{(B)}\mathscr{C}^{-1}\theta))_{b,b'}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{C}\mathbf{J}^{(A)}\mathscr{C}^{-1}\theta))_{a,a'}C_{BA}(j\sigma;b'a')$

$= (\mathscr{C}\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta)\mathscr{C}^{-1})_{b,b'}(\mathscr{C}\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)\mathscr{C}^{-1})_{a,a'}C_{BA}(j\sigma;b'a')$

$= (-1)^{\bar{\bar{b}}-\bar{b}}\delta_{b-\bar{b}}(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta))_{\bar{b}\bar{\bar{b}}}\delta_{-\bar{\bar{b}}b'}(-1)^{\bar{\bar{a}}-\bar{a}}\delta_{a,-\bar{a}}(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)_{\bar{a}\bar{\bar{a}}}\delta_{-\bar{\bar{a}}a'}C_{BA}(j\sigma;b'a')$.

[52]$A+B-$ 整数 $= j$ より $2A-2B = 2(A+B-2B) = 2(j+$ 整数$) - 4B$.

[53]$j-$ 整数 $= \sigma$ より $2j-$ 偶数 $= 2\sigma$. 従って，$(-)^{a+b+2\sigma+A+B} = (-)^{a+b+A+B-2j}$.

[54]$\psi^\dagger$ は行ベクトルである．ψ の Hermitian adjoint が列ベクトルであるので $\psi^\dagger$ と区別するために ψ^* とする．

[55](4.6.3) より $D(\Lambda)^\dagger = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{J}^{\mu\nu\dagger}$ であるので，$\beta D(\Lambda)^\dagger\beta = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\beta\mathscr{J}^{\mu\nu\dagger}\beta = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{J}^{\mu\nu} = D(\Lambda)^{-1}$

[56](4.1.6) より $U_0(\Lambda)\psi(x)U_0^\dagger(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x)$. 従って，(4.6.15) より $U_0(\Lambda)\psi(x)U_0^\dagger(\Lambda) = \beta D(\Lambda)^\dagger\beta\psi(\Lambda x)$.

$U_0(\Lambda)\psi^\dagger(x)U_0^\dagger(\Lambda) = (\beta D^\dagger(\Lambda)\beta\psi(\Lambda x))^\dagger = \psi^\dagger(\Lambda x)\beta D(\Lambda)\beta = \bar{\psi}(\Lambda x)D(\Lambda)\beta$.

[57] $D(\Lambda)\gamma^\rho D^{-1}(\Lambda) = (1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{J}^{\mu\nu})\gamma^\rho(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{J}^{\mu\nu}) = \gamma^\rho + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\mathscr{J}^{\mu\nu},\gamma^\rho]$

$= \gamma^\rho + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(-i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} + i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho}) = \delta^\rho_\sigma\gamma^\sigma + \omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} = (\delta^\rho_\sigma + \omega_\sigma{}^\rho)\gamma^\sigma = \Lambda_\sigma{}^\rho\gamma^\sigma$.

[58] 式 (4.4.3)(4.4.1)(4.4.2) $\mathrm{CPT}\phi(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = \mathrm{CP}\zeta^*\phi(-\mathscr{P}x)[\mathrm{CP}]^{-1} = \zeta^*\mathrm{C}\eta^*\phi(-x)\mathrm{C}^{-1} = \zeta^*\eta^*\zeta^*\phi^\dagger(-x)$

式 (4.4.10)(4.4.6)(4.4.8) $\mathrm{CPT}\phi_\mu(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = \mathrm{CP}\zeta^*\mathscr{P}_\mu{}^\nu\phi_\nu(-\mathscr{P}x)[\mathrm{CP}]^{-1}$

$= \zeta^*\mathscr{P}_\mu{}^\nu\mathrm{C}(-\eta^*\mathscr{P}_\nu{}^\lambda\phi_\lambda(-x))\mathrm{C}^{-1} = -\zeta^*\eta^*\zeta^*\phi^\dagger_\mu(-x)$

式 (4.4.18)(4.4.13)(4.4.15) $\mathrm{CPT}\psi(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = \mathrm{CP}(-\zeta^*\gamma_5\mathscr{C}\psi(-\mathscr{P}x))[\mathrm{CP}]^{-1} = -\zeta^*\mathrm{C}(\gamma_5\mathscr{C}\eta^*\beta\psi(-x))\mathrm{C}^{-1}$

$= -\zeta^*\eta^*\zeta^*\gamma_5\mathscr{C}\beta\beta\mathscr{C}\psi^*(-x) = \zeta^*\eta^*\zeta^*\gamma_5\psi^*(-x)$

[59] $\psi_1^T(-x)\gamma_5\beta M^*\gamma_5\psi_2^*(-x) = -(\psi_2^\dagger(-x)\gamma_5^T M^{*T}\beta^T\gamma_5^T\psi_1(-x))^T$. fermion を交換したので一符号が掛かる．

これは 1×1 行列なので T を消去できる．$-\psi_2^\dagger(-x)\gamma_5 M^\dagger\beta\gamma_5\psi_1(-x) = -[\psi_1^\dagger(-x)\gamma_5\beta M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger$

γ_5 と β は反交換するので，式 (4.7.6) となる．

[60] 式 (4.3.50)(4.3.48)(4.3.49) から，$\mathrm{CPT}\psi^{AB}_{ab}(x)[\mathrm{CPT}]^{-1} = \mathrm{CP}(-)^{a+b+A+B-2j}\zeta^*\psi^{AB}_{-a-b}(\mathbf{x},-x^0)[\mathrm{CP}]^{-1}$

$$= (-)^{a+b+A+B-2j}\zeta^* C\eta^* (-)^{A+B-j}\psi^{BA}_{-b-a}(-\mathbf{x}, -x^0)C^{-1} = (-)^{a+b+2A+2B-3j}(-)^{-2B+a+b-j}\psi^{AB\dagger}_{ab}(-\mathbf{x}, -x^0)$$

と $a+A, B-b$ は整数より, $(-)^{2a+2b+2A} = (-)^{2(a+A)+2b} = (-)^{2b} = (-)^{-2(B-b)+2B} = (-)^{2B}$ から

[61] $\psi^{A_1B_1}_{a_1b_1}(x)\psi^{A_2B_2}_{a_2b_2}(x)$ からスカラーを作るならば, $A_1 = A_2 \therefore A_1 + A_2 = 2A_2 =$ 整数.

$\psi^{A_1B_1}_{a_1b_1}(x)\psi^{A_2B_2}_{a_2b_2}(x)\psi^{A_3B_3}_{a_3b_3}(x)$ からスカラーを作るならば, $A_1 + A_2 -$ 整数 $= A_3$ でなければならない. 従って, $A_1 + A_2 + A_3 -$ 整数 $= 2A_3$ より $A_1 + A_2 + A_3$ は整数である. 以下同様にすると, $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ は整数であることが分かる.

参考文献

[1] M.Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc. (1972).

[2] D.Bjorken D.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1965).

[3] C.Itzykson and J.Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).

[4] G.Lüders, *Kong. Dansk. Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd.* **28**, 5 (1954); *Ann.Phys.* **2**, 1 (1957).

[5] Albert Messiah, *Quantum Mechanics*, North-Holland Publishing Company (1978).

[6] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1968).

[7] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press (2002).

[8] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972).

[9] S.Weinberg, *Phys. Rev.* **181**, 1893 (1969), Section V.

[10] 山内恭彦・杉浦光夫, 連続群論入門, 培風館 (1960).