平成15年度　学位論文

多面体の分解合同とはさみ合同群

兵庫教育大学大学院 学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
M０２１８６H 吉　田　拓　生

序　文

初等教育課程の算数科において，多角形の面積を求めるには，以下の考察過程を経ることが通例である。

まず単位正方形の面積を１と定め，長方形をいくつかの小正方形に分割することで，長方形の面積を“縦×横”と定義する。次に，三角形や平行四辺形は，それらをいくつかの部分に分割し，長方形に組み換えることでそれらの面積公式を得る。

この考察においては，多角形の面積を求めるために，多角形を分割するという操作が共通して行われており，求めるべき多角形の面積は，すべて長方形に置き換えることで容易に得ることができる。このように，ある多角形を分割して組み換え，別の多角形を得るとき，これらの多角形は“分解合同である”という。しかしながら，どんな多角形も長方形と分解合同であろうか。また，任意の多面体に関しても，直方体と分解合同であろうか。それらの疑問について，本論文では分解合同という概念を取り入れ，考察する。

多角形については，比較的容易な議論により，等積な２つの多角形が分解合同であることを証明できるが，多面体に関しては，多角形の議論をそのまま適用させることができない。そこで，本論文では，等積な多面体が分解合同であるための条件を考察する。考察にあたっては，はさみ合同群という概念を導入し，この概念を用いて等積な多面体の分解合同性を考える。

多面体の分解合同性をめぐる議論は19世紀末頃から行われており，20世紀初頭には，デーンによって，等積であっても，分解合同ではない２つの多面体が与えられた。その後，半世紀ほどを経て，スイスの数学者シドレールが，多面体の分解合同性に関する研究を始めるまでは，多面体の分解合同性をめぐる議論は，長い間忘れられていた。すなわち，多面体の分解合同性の議論が再考されたのは，近年になってからのことである。その中でも，はさみ合同群は，より新しい概念であり，はさみ合同群を用いることで，等積な多面体が分解合同であるための条件を直観的にとらえることができる。

本論文の構成について述べる。

１章では，本論文において基礎となる概念を準備し，多角形における分解合同性に関する考察を述べる。

1.1 節では，多角形，多面体の議論に関して必要となる基礎概念を準備する。まず，多角形，多面体の定義を述べ，それらの間の“合同”を定義する。また，本論文では，複数の多角形や多面体を扱うため，多角形や多面体の“和”を定める。それらの基礎概念によって，本論文の中心となる概念の“分解合同”，および“補充合同”を定義する。

1.2 節では，多角形の面積，多面体の体積を定義し，その諸性質を述べる。

1.3 節では，多角形の分解合同性について述べる。多角形に関しては，ボヤイとゲルヴィンによって，“ 等積な多角形は分解合同である ” ことが示された。そこで，まず，このボヤイ＝ゲルヴィンの定理を示す。また，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理によって，“ 等積な多角形は補充合同である ” ことを導くことができ，多角形においては，分解合同であることと補充合同であることは同値となる。

1.4 節では，多面体に関する疑問を提示する。1899 年，ヒルベルトは，著書の中で，“ 多角形の面積は初等的な方法で得ることができるのに対し，多面体の体積は積分によって求めなければならない ” ことを主張した。翌年，パリで開かれた数学者の国際会議で，当時の数学における 23 の未解決問題の第 3 問題として，“ 底面積と高さが等しい三角錐は分解合同であるか ” ということを提唱している。

2 章では，“ 等積な正四面体と立方体は分解合同でない ” というデーンの定理の証明にあたる。デーンの定理により，ヒルベルトの第 3 問題は，否定的に解かれることとなる。

2.1 節では，デーンの定理を証明する上で重要となる “ 加法的関数 ” を定義する。まず，ベクトル空間上での “ 1 次独立 ” や “ 1 次従属 ” の概念を述べ，加法的関数を定義し，その性質も述べる。

2.2 節では，ハドヴィゲールの主張について考察する。ハドヴィゲールは，等積な多面体が分解合同であるための必要条件（ハドヴィゲールの定理）を示した。このハドヴィゲールの定理は，加法的関数によって定められる “ 多面体における不変量 ” の概念を導入することによって得られる。

2.3 節では，ハドヴィゲールの定理を用いて，デーンの定理を証明する。

2.4 節では，等積な多面体における分解合同と補充合同の同値性を考察する。多角形に関しては，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理によって，等積な多角形が分解合同であることと補充合同であることの同値を容易に示せたが，等積な多面体においては，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理と同様の定理が成り立たないため，多角形のときと同様の議論ができない。しかしながら，シドレールが証明した別のアプローチによって，等積な多面体においても，“ 分解合同であることと補充合同であることが同値である ” ことが示される。

3 章では，ハドヴィゲールの定理の必要条件が，十分条件でもあること（デーン＝シドレールの定理）を示す。証明については，本論文のテーマの 1 つである “ はさみ合同群 ” という概念を導入し，証明にあたっている。

3.1 節では，多面体に関して，はさみ合同群という群の概念を定め，その諸性質について述べる。実は，はさみ合同群に関する考察は，多面体の分解合同性に関する考察とほぼ等価である。

3.2 節では，シドレールによる，“ デーン＝シドレールの定理の証明における幾何学的な部分 ” の考察について述べる。シドレールが主張した補題については，3.1 節で定めたはさみ合同群の概念を適用している。

3.3 節では，イェッセンによる，“ デーン＝シドレールの定理の証明における代数的な部分 ” の考察について述べ，さらに，多面体における “ 独立 ” の概念を定義し，証明に必要な加法的関数を準備し，デーン＝シドレールの定理を証明する。

3.4 節では，デーン不変量という概念について述べる。このデーン不変量を用いると，デー

ン＝シドレールの定理をより代数的にとらえることができる。
　以上が，本論文の構成内容である。
　最後に，この論文を作成するにあたって，貴重な御時間を割いて頂いた上，懇切丁寧に御指導して下さった濱中裕明先生に，この場を御借りして，心から御礼申し上げます。また，研究の環境を整え，御指導下さった兵庫教育大学数学教室の諸先生方に，心から感謝を表したいと思います。

目 次

1章　基礎概念と多角形の分解合同

まず，この章では，等積な多角形の分解合同性について考察する。

分解合同な２つの多角形が等積であることはすぐに明らかとなるが，ボヤイとゲルヴィンは，逆も成り立つこと（ボヤイ＝ゲルヴィンの定理）を示した。すなわち，等積な２つの多角形は分解合同である。

この事実を述べるにあたって，始めに，基礎となる概念を準備する。なお，基礎概念を準備するために用いる概念については，明確な定義を行わず，既知であるものとみなして論を進める。

1.1　基礎概念

図形の合同を述べるに際し，まず，多角形，多面体を次のように定義する。

定義 1.1 以下，半平面，半空間は境界を含むとする。平面の部分集合のうち，有限個の半平面の共通部分で表される有界な集合で，内点を持つものを**凸多角形**という。また，３次元空間の部分集合のうち，有限個の半空間の共通部分で表される有界な集合で，内点を持つものを**凸多面体**という。

このとき，有限個の凸多角形の和集合を**多角形**といい，有限個の凸多面体の和集合を**多面体**という。

初等幾何等，幾何学においては，下で述べる合同な２つの多角形（多面体）を「同じもの」とみなすことが多いが，本稿では多角形（多面体）を平面（空間）の部分集合として考え，集合として等しいときにのみ 等号で結ぶ。つまり，多角形（多面体）F と F' について，$F = F'$ とは $F \subset F'$ かつ $F \supset F'$ ということである。

また，次の記法を用意する。これは，多角形の分解の定理である。

定義 1.2 平面内（空間内）の有限個の多角形（多面体）$A_1, A_2, \cdots, A_m$ において，どの２つについても共通の内点が存在しないとき，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ の和集合を $A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ と表し，多角形（多面体）$A_1, A_2, \cdots, A_m$ の**和**とよぶ。また，逆に，このとき，A は $A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ に**分解される**という。

多角形と多面体については，次のことが成り立つ。

定理 1.3 任意の多角形は，いくつかの三角形の和で表せる。また，任意の多面体は，いくつかの四面体の和で表せる。

証明 直感としては明らかと思われるので，多面体についてのみ，概略を示す。多面体が凸多面体でなければ，多面体の各面を含む平面で多面体を切断し，有限個の凸多面体に分ける。凸多面体の内部に1点 O をとると，凸多面体は O と凸多面体の各面で出来る角錐の和である。また，角錐は有限個の四面体に分けられる。詳しくは [4] を参照。 ∎

ここで，以下のことを定義する。

定義 1.4 ユークリッド平面（空間）において，ユークリッド平面（空間）からそれ自身への写像で，２点間の距離を変えないものを**合同変換**という。

２つの多角形（多面体）F と F' は，ある合同変換によって一方が他方の像となるとき，**合同**であるといい，$F \equiv F'$ と書く。

ここで，多角形（多面体）に関し，次に述べる2つの関係を導入する。これらは本稿の中心となる概念である。

定義 1.5 2つの多角形（多面体）F と F' において，F は多角形（多面体）$P_1, P_2, \cdots, P_m$ の和で表され，F' は多角形（多面体）$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ の和で表されるものとする。このとき，$P_i \equiv Q_i$ であるならば，F と F' は**分解合同**であるといい，$F \overset{d}{\sim} F'$ と表す。

また，互いにない点を共有せず，$P_i \equiv Q_i$ となる多角形（多面体）P_i, Q_i（$1 \leq i \leq m$）があって，F と $P_1, P_2, \cdots, P_m$ の和が，F' と $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ の和と合同になるならば，F と F' は**補充合同**であるといい，$F \overset{c}{\sim} F'$ と表す。

1.2 面積，体積

この節では，多角形，多面体における面積，体積の概念を導入したい。

初等幾何においては，1辺の長さが1である正方形の面積を単位面積とし，一般に，多角形 F の面積は，F を構成している単位面積の数としている。ところが，この面積の概念では，単位面積だけで構成されない多角形の面積を表すことに支障をきたすおそれがある。そこで，より正確な面積の概念を得るために，まず次のものを定める。

定義 1.6 平面の x,y 座標軸をひとつ固定すると，平面全体は $\{(x,y)|i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1\}$ （$i, j \in \mathbb{Z}$）という単位正方形に分割される。この分割のことを**0番目のモザイク**とよぶことにする。さらにこれらの正方形を，各辺を10等分する点を通る，辺に平行な線分で100個の合同な正方形に分割するとより細かい分割が得られる。この分割を**1番目のモザイク**とし，以下この操作を繰り返して，**k 番目のモザイク**（$k = 0, 1, 2, \cdots$）を定義する。

ここで定めたモザイクを用いて，面積を定義する。まず，平面の x,y 座標軸をひとつ固定し，この座標平面上に0番目のモザイクを固定する。F を平面上の多角形とし，F は a_k 個

$(k=0,1,2,\cdots)$ の k 番目のモザイクの正方形を含み，b_k 個の k 番目のモザイクの正方形と共通部分をもつものとする。

補題 1.7 $\frac{a_k}{10^{2k}}$ と $\frac{b_k}{10^{2k}}$ は，k が限りなく ∞ に近づくとき，それぞれある実数値に収束する。

証明 どの k 番目のモザイクの正方形も，100 個の $(k+1)$ 番目のモザイクの正方形を含んでいるので，F は $100a_k$ 個以上の $(k+1)$ 番目のモザイクの正方形を含み，$100b_k$ 個以下の $(k+1)$ 番目のモザイクの正方形と共通部分をもつ。つまり，

$$a_{k+1} \geq 100a_k, \quad b_{k+1} \leq 100b_k$$

である。これを $10^{2(k+1)}$ で割ると，

$$a_0 \leq \frac{a_1}{10^2} \leq \cdots \leq \frac{a_k}{10^{2k}} \leq \cdots \leq \frac{b_k}{10^{2k}} \leq \cdots \leq \frac{b_1}{10^2} \leq b_0$$

となり，$\frac{a_k}{10^{2k}}$ と $\frac{b_k}{10^{2k}}$ はそれぞれ単調増加、単調減少な有界数列なので，収束する。 ∎

ここで，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{10^{2k}} = \underline{s}(F), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{10^{2k}} = \overline{s}(F)$$

とする。

定義 1.8 上の前提において，$a_k \leq b_k$ より，$\underline{s}(F) \leq \overline{s}(F)$ であるが，$\underline{s}(F)$ と $\overline{s}(F)$ が一致するとき，F は**可測**であるといい，このとき，$\underline{s}(F) = \overline{s}(F)$ となる数を，F の**面積**とよび，$s(F)$ と表す。

本来は，Lebesgue 測度等の測度論をもちだすべきだが，本稿では多角形，多面体の面積，体積しか扱わないので，上のような定義で論を進める（Jordan 測度）。

さて，上の定義において，次の命題が成り立つ。

命題 1.9 可測性や面積は，座標軸を移動させたり，モザイクを変えたりしても変化しない。

命題 1.10 多角形はすべて可測である。

これらの証明は [1] を参照して頂きたい。

命題 1.11 面積は次のような基本的性質をもつ。

- F を多角形とすると，$s(F) \geq 0$ である。
- F と F' を，内点を共通しない多角形とすると，$F+F'$ も可測で，$s(F+F') = s(F)+s(F')$ となる。
- F を多角形，F' を F を合同変換で移したものとすると，F' も可測で，$s(F) = s(F')$ となる。

- 単位正方形 Q は可測で，$s(Q)=1$ である。

この基本的性質についての証明は，[1] を参照して頂きたい。

体積の概念に関しては，面積の概念との類比によって導入することができる。すなわち，3 次元のモザイクとして空間の立方体への分割を考えればよい。x,y,z 直交座標系を固定すれば，平面 $x=\frac{p}{10^k}$，$y=\frac{q}{10^k}$，$z=\frac{r}{10^k}$ $(p,q,r\in\mathbb{Z})$ により，空間は立方体に分割される。この分割を，k 番目のモザイクとする。

体積は，面積と同様にして，次のように定義できる。

定義 1.12 F を多面体とし，a_k 個の k 番目のモザイクの立方体を含み，b_k 個の k 番目のモザイクの立方体と共通部分をもつものとすると，$\frac{a_k}{10^{3k}}$ と $\frac{b_k}{10^{3k}}$ は，k が限りなく ∞ に近づくとき収束し，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{10^{3k}}=\underline{v}(F),\quad \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{10^{3k}}=\overline{v}(F)$$

とおける。$a_k\leq b_k$ より，$\underline{v}(F)\leq\overline{v}(F)$ であるが，$\underline{v}(F)$ と $\overline{v}(F)$ が一致するとき，F は**可測**であるといい，このとき，$\underline{v}(F)=\overline{v}(F)$ となる数を，F の**体積**とよび，$v(F)$ と表す。

体積についても，命題 1.11 と同様の 4 つの基本的性質がいえる。

また，多面体についても，多角形と同様の命題が成り立つ。

命題 1.13 多面体の可測性および体積は，座標軸を移動させたり，モザイクを変えたりしても変化しない。

命題 1.14 多面体はすべて可測である。

証明は [1] を参照して頂きたい。

以上の結果，次のことがいえる。

命題 1.15 2 つの分解（補充）合同な多角形（多面体）は，等積である。すなわち，面積（体積）が等しい。

証明 多角形（多面体）は可測なので，面積（体積）の基本的性質（命題1.11）によって，命題は明らかに成り立つ。 ▮

この事実に基づくものとして，分解法や補充法という面積（体積）の計算法があり，ある多角形（多面体）を簡単なものにつくり変え，面積（体積）を求めることができる。例えば，三角形や平行四辺形の面積は，次節で述べるように長方形の面積に帰着され，また，命題 1.11 を用いると，長方形の面積は垂直な 2 辺の長さの積であることを示せる。

さて，上の命題で述べたように，2 つの分解（補充）合同な多角形（多面体）は，等積である。では，その逆はどうか。すなわち，等積な多角形（多面体）はすべて，分解合同（補充合同）だろうか。この問題に対して，まず多角形に関する解答を，次の節で述べたい。

1.3 多角形の分解合同

等積な多角形がすべて分解合同であるという肯定的な解答は，1832年にファルカッシ・ボヤイ，および1833年にゲルヴィンによって，ほとんど同時に与えられた。このボヤイ=ゲルヴィンの定理を述べるにあたって，まず，いくつかの補題を準備したい。

補題 1.16 3つの多角形 A, B, C に対して，A と B が分解合同であり，また B と C が分解合同であれば，A と C も分解合同である。

証明 A と B は分解合同であるから，B を多角形 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の和で表し，A はそれぞれ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ と合同な $a_1', a_2', \cdots, a_n'$ の和と表すことができる。また，B と C も分解合同ゆえ，B を多角形 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ の和で表し，C はそれぞれ $c_1, c_2, \cdots, c_m$ と合同な $c_1', c_2', \cdots, c_m'$ の和となる（図1.1参照）。

このとき，B は $a_i \cap c_j$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ の和となる（これらのうちのいくつかは空集合かもしれない）。また，a_i' は $a_i \cap c_1, \cdots, a_i \cap c_m$ のそれぞれと合同な多角形の和で表されるから，$A = a_1' + \cdots + a_n'$ より，A は $a_i \cap c_j$ のそれぞれと合同な多角形の和となる。同様に，C も $a_i \cap c_j$ のそれぞれと合同な多角形の和となるので，A と C は分解合同である。∎

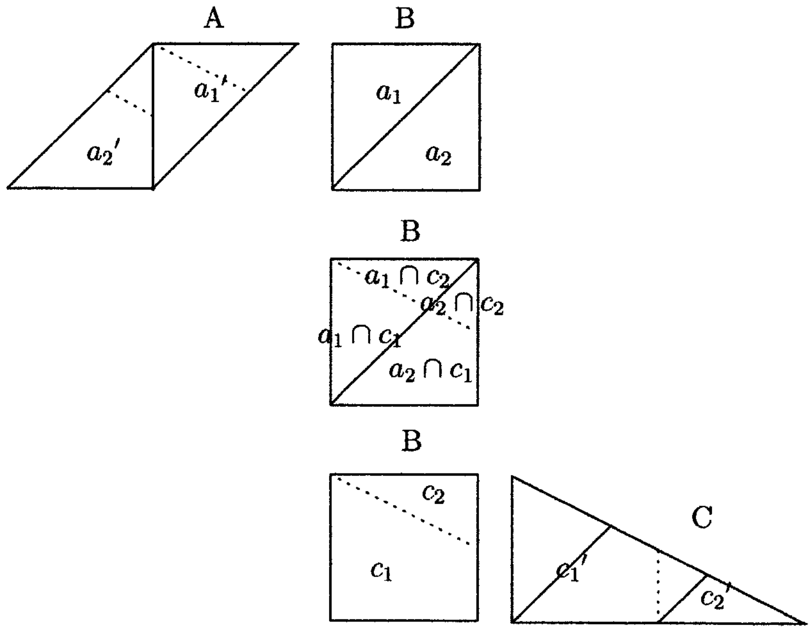


図 1.1: 多角形 A，B，C の分解合同性

補題 1.17 すべての三角形に対し，分解合同となる長方形が存在する。

証明 まず，任意の三角形 ABC の最大辺を AB とし，C からそれに下ろした高さを CD とする。このとき，点 D は辺 AB 上にある。そうでないとすれば，$\angle A$，$\angle B$ のいずれかが鈍角となり，AB が最大辺でないことになって，矛盾が生じる。

次に，CD の中点 F を通って AB に平行な直線を引き，CA, BC との交点をそれぞれ E, G とする。また，A と B からその直線に垂線を下ろし，その足をそれぞれ H, I とする。（図 1.2 参照）。このとき，$\triangle EAH \equiv \triangle ECF$，$\triangle GBI \equiv \triangle GCF$ となるので，長方形 $AHIB$ は，三角形 ABC と分解合同である。

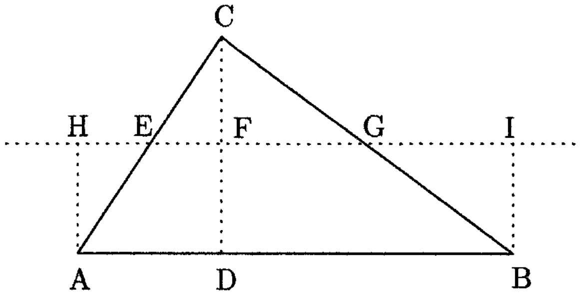


図 1.2: 三角形と長方形の分解合同

∎

補題 1.18 底辺を共有する 2 つの平行四辺形が等積ならば，それらは分解合同である。

証明 平行四辺形 $ABCD$ を P，平行四辺形 $ABEF$ を P' とおく。P と P' は，底辺 AB を共有し，高さが等しいものとする。このとき，辺 DC と EF は同一直線上にある（図 1.3 参照）。

次に，g を $\overrightarrow{AB}$ 方向に長さ AB 平行移動させる合同変換とし，g^i（$i \in \mathbf{Z}$）は g を i 回行うものとすると（ただし，i が 0 のときは恒等変換，負のときは $g^{|i|}$ の逆変換とする），任意の整数 k, n, m に対し，$g^n(P) \cap g^m(P')$ と $g^{n+k}(P) \cap g^{m+k}(P')$ は合同である。よって，P は $\sum P \cap g^{-k}(P')$ であることから，$\sum g^k(P) \cap g^0(P')$ と合同である。$g^0(P')$ は P' を表しており，P' は $\sum g^k(P) \cap P'$ であることから，P と P' は分解合同である。

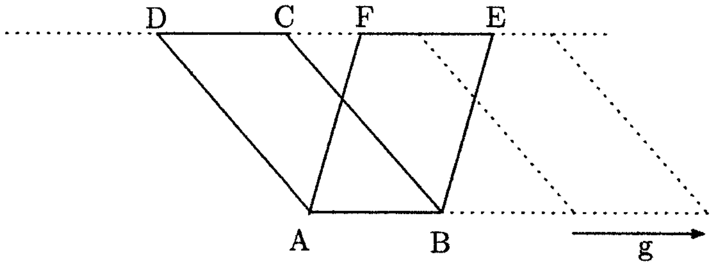


図 1.3: 等積な平行四辺形の分解合同性

∎

補題 1.19 等積な2つの長方形は分解合同である。

証明 等積な2つの長方形を $ABCD$, $EFGH$ とし，辺 AB, BC, EF, FG の中で長さが最大のものを AB とする。点 E を中心とする半径 AB の円と，半直線 GH との交点を図1.4のようにとり L とする。次に，直線 LH 上に $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{EF}$ となるように点 K をとると，四角形 $EFKL$ は平行四辺形となり，長方形 $EFGH$ と等積で，高さが等しい。長方形 $EFGH$ と平行四辺形 $EFKL$ は辺 EF を共有しているので，補題1.18より，分解合同である。また，$AB = LE$ より，長方形 $ABCD$ を合同変換して，長方形 $ABCD$ と長方形 $EFKL$ は底辺 LE $(= AB)$ を共有し，高さが等しいとしてよい。よって，補題1.18より，これらも分解合同である。したがって，補題1.16より，長方形 $ABCD$ と $EFGH$ は分解合同となる。

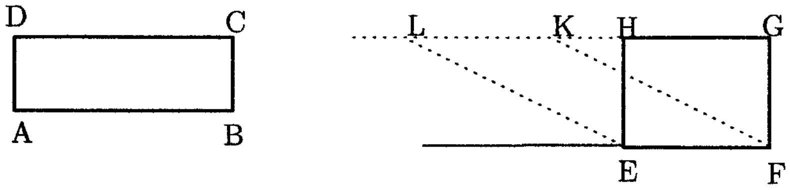


図 1.4: 等積な長方形の分解合同性

∎

補題 1.20 すべての多角形に対し，分解合同となる長方形が存在する。

証明 F を任意の多角形とすると，定理1.3より，F を有限個の三角形に分解でき，それらの三角形に $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ と記号をつける。次に，長さ1の線分 AB をとり，点 A, B からそれぞれ垂線 CA, DB を立て，δ_1 と長方形 ABB_1A_1，δ_2 と長方形 $A_1B_1B_2A_2$，$\cdots$，δ_n と長方形 $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$ が等積になるように，AC 上に点 A_1, $A_2, \cdots,$, A_n，BD 上に点 B_1, B_2 $, \cdots, B_n$ をとる。また，各長方形 $A_{i-1}B_{i-1}B_iA_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に $R_1, R_2, \cdots, R_n$ と記号をつけ，長方形 $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ を H とおく（図1.5参照）。補題1.16，1.17，1.19より，δ_1 と R_1，δ_2 と R_2，$\cdots$，δ_n と R_n はそれぞれ分解合同である。ゆえに，F と H は分解合同である。

∎

以上の補題から，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理が成り立つ。

定理 1.21 等積な2つの多角形は分解合同である。

証明 F と H を任意の等積な多角形とすると，補題1.20より，F に分解合同な長方形 A と H に分解合同な長方形 B がとれる。長方形 A と B は等積なので，補題1.19より，長方形 A と B は分解合同となる。したがって，補題1.16より，多角形 F と H は分解合同である。 ∎

また，等積な2つの多角形が補充合同であるかどうかを考えたい。この問いに関する肯定的な解答も，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理によって得られる。

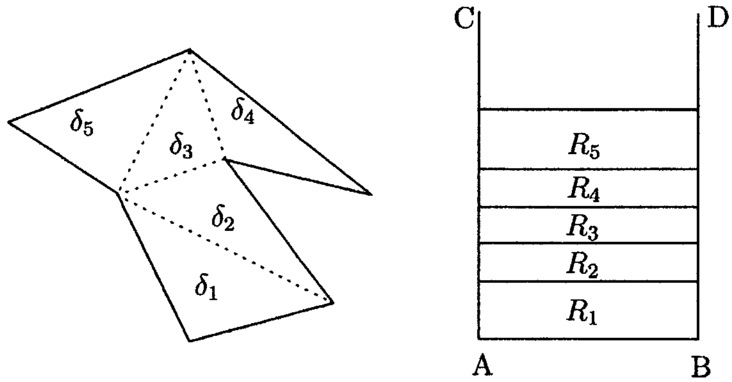


図 1.5: 多角形と長方形の分解合同性

定理 1.22 等積な2つの多角形は補充合同である。

証明 A と B を任意の等積な多角形とする。多角形 A, B は有界であるので，それぞれ合同な正方形 F と F' に含まれているものと仮定できる。次に，$A+C=F, B+D=F'$ となるように多角形 C, D をとると，C と D は明らかに等積である。ゆえに，ボヤイ=ゲルヴィンの定理より，C と D は分解合同となり，C と D は合同な部分の対に分解できる。また，正方形 F と F' は合同であるから，多角形 A と B は補充合同であるといえる。 ∎

以上，多角形に関して，命題1.15の逆は成り立つことが判明した。すなわち，等積な2つの多角形は分解合同，かつ補充合同である。

1.4 ヒルベルトの第3問題

では，多面体に関してはどうだろうか。等積な2つの多面体は分解合同であろうか。いいかえれば，空間においても，ボヤイ=ゲルヴィンの定理と似たような定理が成り立つだろうか。それが本論文のテーマである。

ヒルベルトは，平面の多角形の面積公式は簡単な分解合同性により説明されるのに，三角錐の体積の公式は積分を用いて証明されることに気づき，底面積が等しく高さが等しい2つの三角錐は分解合同であるか，という問題（ヒルベルトの第3問題）を提唱した。

もし上のヒルベルトの第3問題が肯定的に解かれれば，与えられた三角錐は 同じ底面を持ち高さが3分の1の三角柱と分解合同であることが示される。実際，三角柱 $ABCA'B'C'$ は 3つの三角錐 $A'-ABC$, $A'-B'BC$, $A'-B'C'C$ に分解することができるが，3つの三角錐はそれぞれ他の三角錐と底面積と高さが等しい。よって，ひとつの三角錐 $A'-ABC$ を3つ並べたものと分解合同となる。これにさらに第3問題の肯定的解決を適用すると，図1.6のように三角錐 $A'-ABC$ の高さを3倍にしたものと分解合同となるからである。

さらに，ヒルベルトの第3問題が正しいとすると，任意の2つの等積な多面体は分解合同となる。実際，任意の多面体は四面体の和で表せることをすでに示したが，上に述べたこと

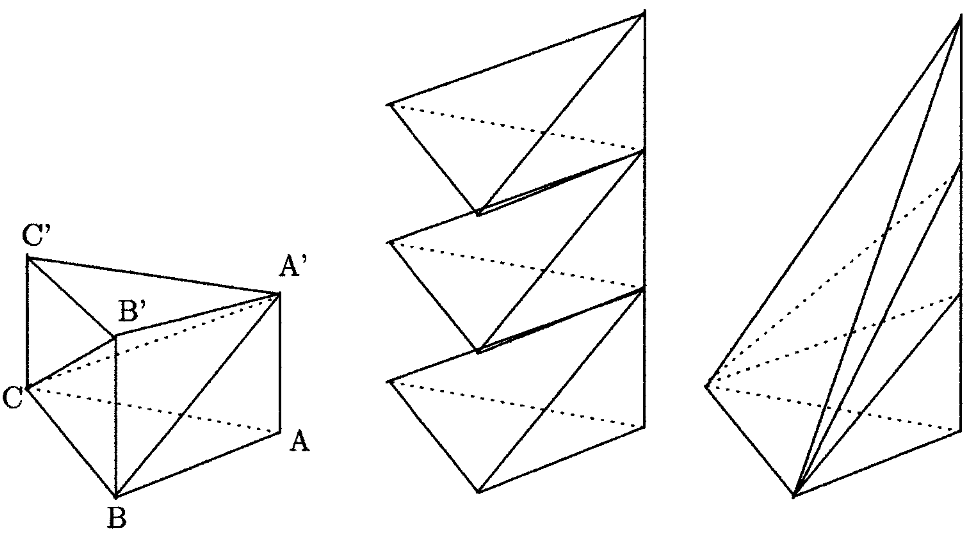


図 1.6: 三角錐の体積

を使えば，四面体は等積な三角柱と分解合同となり，後の章で述べるように，等積な斜角柱はすべて分解合同となるので，補題 1.20 の証明と同様に，単位正方形を底面とする四角柱と分解合同となる。

すなわち，ヒルベルトの第 3 問題は，等積だが分解合同でない多面体の存在が示されると，否定的に解決される。

2章　多面体と分解合同

空間においては，ボヤイ＝ゲルヴィンの定理と同等の定理は成り立たない。つまり，等積であっても分解合同でないような多面体が存在する。この事実の証明は，1901年，ドイツの数学者デーンによって初めて与えられた。デーンは，等積な立方体と正三角錐（正四面体）が分解合同でないこと，すなわち，ヒルベルトの第3問題に対する否定的解答を示した。

この章では，第2節で述べるハドヴィゲールの定理を基に，デーンの定理を証明したい。

2.1　加法的関数

デーンの定理の証明には，スイスの幾何学者ハドヴィゲールの着想が用いられている。ハドヴィゲールの提示した定理を述べるに先立ち，いくつかの概念を導入する。導入上の便宜を図るため，以下，有理数の集合を $\mathbb{Q}$，実数の集合を $\mathbb{R}$ と表す。

定義 2.1 V を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とする。

このとき，V の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が **1次独立**であるとは，有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

であれば，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

であることをいう。

また，V の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が **1次従属**であるとは，0でない数を含む有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

をみたす有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が存在することをいう。

定義 2.2 V を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とし、S を V の部分集合とする。

このとき，S が V を**生成する**とは，V の任意の元 a に対し，

$$a = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

と表せることをいう。ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は有理数で，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は S の元である。

上の式において，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

のように表したものを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の**１次結合**という。

また，S が V の**基底**であるとは，S が V を生成して，S が１次独立であることをいう。

ここで，S が有限集合とは限らないことに注意する。

定義 2.3 V を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とし，S を V の部分集合とする。このとき，

$$\langle S \rangle = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n | a_i \in \mathbb{Q}, x_i \in S, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

を考えると，$\langle S \rangle$ は V の部分ベクトル空間となり，$\langle S \rangle$ を S の**生成する**（V の $\mathbb{Q}$ 上の）**部分ベクトル空間**という。

定義 2.4 V を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間，S を V の部分集合とする。このとき，V の元 y に対して，y が S **と独立**であるとは，y は $\langle S \rangle$ の元でない，すなわち，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + y = 0$$

となる有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，および S の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が存在しないことをいう。

また，V の元 y に対して，y が S **に従属**であるとは，y は $\langle S \rangle$ の元である，すなわち，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + y = 0$$

をみたし，0 でない数を含む有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が存在することをいう。

ここで，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなす。実際，$\mathbb{R}$ には加法があり，有理数倍が自然に定義されるので，$\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間となる。

定義 2.5 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と考え，S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする。このとき，S から $\mathbb{R}$ への写像 f が**加法的**であるとは，S の任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，任意の有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

であるならば，

$$a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_nf(x_n) = 0$$

となることをいう。また，このとき，$f : S \to \mathbb{R}$ を**加法的関数**という。

加法的関数については，次のことが成り立つ。

定理 2.6 定義 2.5 において，f が加法的であれば，f を $\langle S \rangle$ から $\mathbb{R}$ への有理数係数の線形写像に拡張できる。また，f を $\langle S \rangle$ から $\mathbb{R}$ への有理数係数の線形写像に拡張できるのであれば，f は加法的である。

証明 まず，前者の命題を証明したい。

$f : S \to \mathbb{R}$ を $\langle S \rangle$ 上の加法的関数とし，その拡張 $\hat{f} : \langle S \rangle \to \mathbb{R}$ を次のように定める。すなわち，$\langle S \rangle$ の任意の元 x を，有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，および S の元 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ によって，

$$x = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n$$

と表し，

$$\hat{f}(x) = a_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \cdots + a_n f(s_n)$$

とおく。

このとき，

$$x = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b_1 s_1 + b_2 s_2 + \cdots + b_n s_n$$

と２通りに表せるのであれば，

$$(a_1 - b_1)s_1 + (a_2 - b_2)s_2 + \cdots + (a_n - b_n)s_n = 0$$

となるので，f は加法的であるから，

$$(a_1 - b_1)f(s_1) + (a_2 - b_2)f(s_2) + \cdots + (a_n - b_n)f(s_n) = 0$$

である。ゆえに，

$$a_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \cdots + a_n f(s_n) = b_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \cdots + b_n f(s_n)$$

となるため，$\hat{f}$ は well-defined である。

また，$\langle S \rangle$ の別の元 y を

$$y = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_n s_n$$

とすると（$c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{Q}$），

$$\hat{f}(x + y) = (a_1 + c_1)f(s_1) + (a_2 + c_2)f(s_2) + \cdots + (a_n + c_n)f(s_n)$$

$$\hat{f}(x) + \hat{f}(y) = a_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \cdots + a_n f(s_n) + c_1 f(s_1) + c_2 f(s_2) + \cdots + c_n f(s_n)$$

より，$\hat{f}(x + y) = \hat{f}(x) + \hat{f}(y)$ が成り立つ。さらに，$\langle S \rangle$ の元 x，任意の有理数を k に対し，

$$kx = k(a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n) = (ka_1)s_1 + (ka_2)s_2 + \cdots + (ka_n)s_n$$

より，

$$\hat{f}(kx) = ka_1 f(s_1) + ka_2 f(s_2) + \cdots + ka_n f(s_n) = k\hat{f}(x)$$

となり，$\hat{f}(kx) = k\hat{f}(x)$ が成り立つ。ゆえに，$\hat{f} : \langle S \rangle \to \mathbb{R}$ は線形である。

次に，後者の命題を証明する。S の元 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0$$

と仮定すると，このとき，$\hat{f}:\langle S\rangle \to \mathbb{R}$ は線形であるので，

$$\hat{f}(a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n) = 0$$

であり，

$$a_1\hat{f}(s_1) + a_2\hat{f}(s_2) + \cdots + a_n\hat{f}(s_n) = 0$$

となることから，

$$a_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \cdots + a_n f(s_n) = 0$$

が成り立つので，f は加法的である。 ∎

定理 2.7 S を $\mathbb{R}$ の有限部分集合，γ を $\mathbb{R}$ の元とし，加法的関数 $f:S\to\mathbb{R}$ をとる。このとき，f の拡張で，

$$f':S\cup\{\gamma\}\to\mathbb{R}$$

となる加法的関数が存在する。

証明 S の元を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ とし，２つの場合に分けて考える。

まず，γ が S と $\mathbb{Q}$ 上独立であるとき，

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n + \gamma = 0$$

となる $\mathbb{Q}\ni a_1,a_2,\cdots,a_n$ が存在しないので，$f'(\gamma)$ としては，任意の実数がとれる。

次に，γ が S に $\mathbb{Q}$ 上従属であるとき，

$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n + \gamma = 0 \tag{2.1}$$

となる $\mathbb{Q}\ni b_1,b_2,\cdots,b_n$，$S\ni\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ が存在するので，

$$f'(\gamma) = -\{b_1 f'(\alpha_1) + b_2 f'(\alpha_2) + \cdots + b_n f'(\alpha_n)\} \tag{2.2}$$

と定める。このとき，$\mathbb{Q}\ni c_1,c_2,\cdots,c_n,b$，$S\ni\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ に対し，

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n + b\gamma = 0 \tag{2.3}$$

と仮定すると，(2.3) から (2.1) を b 倍したものの差をとると，

$$(c_1 - bb_1)\alpha_1 + (c_2 - bb_2)\alpha_2 + \cdots + (c_n - bb_n)\alpha_n = 0$$

となり，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ について従属関係が成り立つので，

$$(c_1 - bb_1)f'(\alpha_1) + (c_2 - bb_2)f'(\alpha_2) + \cdots + (c_n - bb_n)f'(\alpha_n) = 0$$

が得られ，これに (2.2) を用いると，

$$c_1 f'(\alpha_1) + c_2 f'(\alpha_2) + \cdots + c_n f'(\alpha_n) + bf'(\gamma) = 0$$

が成り立つ。したがって，f' は加法的である。 ∎

ここでは S を有限集合にしたが，S が有限でなくても同様の証明ができる。

系 2.8 S を $\mathbb{R}$ の部分集合，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ を $\mathbb{R}$ の元とし，加法的関数 $f : S \to \mathbb{R}$ をとる。このとき，f を拡張し，

$$f' : S \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\} \to \mathbb{R}$$

となる加法的関数が存在する。

証明 定理 2.7 を n 回用いればよい。 ∎

2.2 ハドヴィゲールの定理

前節の加法的関数を用いて，多面体に不変量を導入する。

定義 2.9 任意の多面体 P の各辺における内側の二面角を孤度で表したものを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ とし，$l_1, l_2, \cdots, l_k$ をそれらの二面角に対応する辺の長さとする。また，$S(\subset \mathbb{R})$ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \pi$ を含むものとし，加法的関数 $f : S \to \mathbb{R}$ で，$f(\pi) = 0$ となるものをとる。このとき，

$$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \cdots + l_k f(\alpha_k)$$

を **f で定まる多面体 P の不変量**といい，$f(P)$ で表す。

この概念を用いて，ハドヴィゲールは以下のような興味深い主張をしている。

定理 2.10 等積な 2 つの多面体を A, B とし，多面体 A のすべての二面角の大きさを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，多面体 B のすべての二面角の大きさを $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ とする。また，$f(\pi) = 0$ をみたす加法的関数

$$f : \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \pi\} \to \mathbb{R}$$

をとる。

このとき，多面体 A, B に対し，A と B が分解合同であれば，

$$f(A) = f(B)$$

となる。

このハドヴィゲールの定理を証明するにあたって，以下の概念を準備し，それに関する補題を 1 つ述べておきたい。

定義 2.11 任意の多面体 A をとる。多面体 A をいくつかの多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ に分解し，多面体 $A, M_1, M_2, \cdots, M_k$ の頂点，および辺が互いに交わってできる点で $A, M_1, M_2, \cdots, M_k$ の辺を分割すると，有限個の線分が得られる。この線分を**鎖**と呼ぶ。また，多面体 A の辺を構成する鎖を A の鎖，多面体 M_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ の辺を構成する鎖を多面体 M_i の鎖という。（もちろん，A の鎖であり，かつ M_i の鎖となるものもあり得る。）

さらに，S を $A, M_1, M_2, \cdots, M_k$ のすべての二面角の角度を含む $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$f(\pi) = 0$ をみたす加法的関数 $f : S \to \mathbb{R}$ をとる。A の鎖を1つとり，その長さを m とし，その鎖に対応している A の二面角の大きさを孤度で表したものを α とする。このとき，積 $mf(\alpha)$ を A におけるこの鎖の**重み**という。多面体 M_i における重みも，M_i における二面角を用いて同様に定義する。

補題 2.12 任意の多面体 A をとり，多面体 A を多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ に分解し，多面体 $A, M_1, M_2, \cdots, M_k$ のすべての二面角の大きさを孤度で表したものを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とする。このとき，$f(\pi) = 0$ をみたす加法的関数

$$f : \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \pi\} \to \mathbb{R}$$

をとると，各多面体に対する不変量 $f(A), f(M_1), f(M_2), \cdots, f(M_k)$ は,

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \cdots + f(M_k)$$

をみたす。

証明 A の $M_1, M_2, \cdots, M_k$ への分割と f を用いて，定義2.11の鎖とその重みを考える。多面体 A における長さ l_1 の辺は，多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ の鎖のうちのいくつかの鎖でできており，その長さをそれぞれ $m_1, m_2, \cdots, m_p$ とする。このとき，これらの鎖はすべて同じ A の二面角が対応しているので，対応する A の二面角の大きさを α_1 とすると，これらの鎖の A における重みに対し,

$$m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + \cdots + m_p f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + \cdots + m_p) f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1)$$

が成り立つ。多面体 A の他の辺についても同様のことが成り立つので，多面体 A のすべての（A における）鎖の重みの和は，不変量 $f(A)$ に等しいことがいえる。

一方，多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ についても，同様にして，各多面体の不変量は，各多面体の鎖の重みの和に等しいことがいえる。それゆえ，多面体 A のすべての鎖の重みの和と各多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ のすべての鎖の重みの和を足し合わせたものが等しくなることを示せばよい。

多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ において，任意の鎖を1つとり，その長さを m_x とする。この長さ m_x の鎖はいくつかの多面体 $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_s}$ の辺に属するので，それに対応する二面角の大きさを $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$ とすると，この鎖の $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_s}$ における重みの和は,

$$m_x f(\alpha_{i_1}) + m_x f(\alpha_{i_2}) + \cdots + m_x f(\alpha_{i_s})$$

となる。そこで，この鎖の重みの和を求めたい。以下，記号を簡略化するため，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$ を $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ と表す。

多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ の任意の鎖は，多面体 A において，次の5つのいづれかであると考えられる。

- まず，鎖が多面体 A の内部に含まれていて，線分 m_x を部分集合として含む多面体のそれぞれが，この線分を鎖としてもっているならば（図 2.1 の左），鎖に対応する二面角の総和は，

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s = 2\pi$$

となり，f は加法的だから，

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \cdots + f(\gamma_s) - 2f(\pi) = 0$$

が得られる。よって，$f(\pi) = 0$ より，

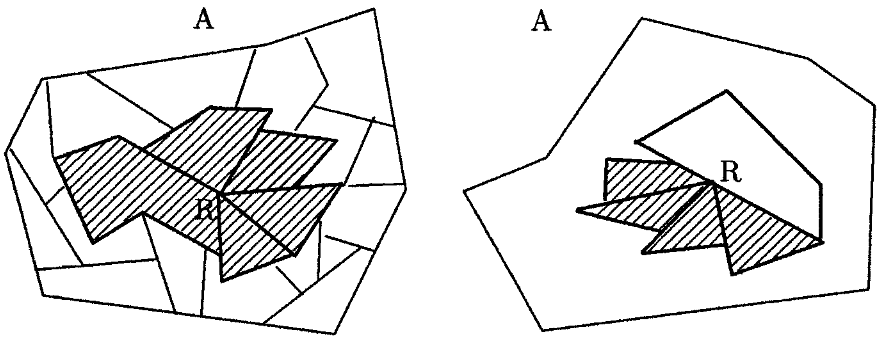
$$m_x f(\gamma_1) + m_x f(\gamma_2) + \cdots + m_x f(\gamma_s) = 0$$

となる。

- 鎖が多面体 A の内部にあって，線分 m_x を部分集合として含む多面体のうちの 1 つが m_x を面上にもち，残りのものが鎖としてもつのであれば（図 2.1 の右），このとき，鎖に対応する二面角の和は，

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s = \pi$$

となる。ゆえに，上と同様に，$m_x f(\gamma_1) + m_x f(\gamma_2) + \cdots + m_x f(\gamma_s) = 0$ が得られ，いずれの場合にも多面体 A の内部に含まれている鎖の重みの和は，0 である。



左図は鎖に垂直な平面で
切った切り口であり，
鎖は 1 点 R で示されている。

図 2.1: 鎖が内部にある場合

- 次に，鎖が多面体 A の面上にあるが辺の上にはないとき（図 2.2），この鎖に対する二面角の和は，

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s = \pi$$

であり，この場合も，鎖の重みの和は 0 である。

- さらに，鎖が多面体 A の辺の上にあって，図 2.3 のような 2 つの場合を考える。このとき，線分 m_x を部分集合として含む多面体のそれぞれがこの線分を鎖としてもって

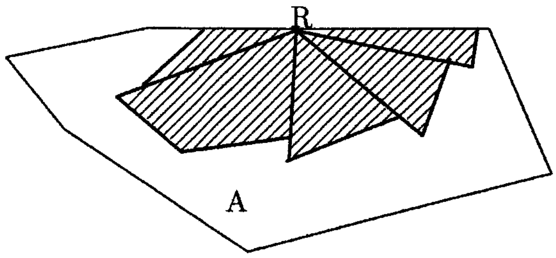


図 2.2: 鎖が面上にある場合

いるのであれば（図 2.3 の左），この鎖が含まれる A の辺に対応する二面角の大きさを α_w とすると，鎖に対する二面角の和は，

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s = \alpha_w$$

であり，f が加法的であることを用いると，

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \cdots + f(\gamma_s) = f(\alpha_w)$$

が成り立ち，

$$m_x f(\gamma_1) + m_x f(\gamma_2) + \cdots + m_x f(\gamma_s) = m_x f(\alpha_w)$$

となる。すなわち，この場合の鎖の重みの和は，多面体 A における鎖の重みに等しい。

- 最後に，線分 m_x を部分集合として含む多面体のうちの 1 つが m_x を面上にもち，残りのものが m_x を鎖としてもつのであれば（図 2.3 の右），鎖に対する二面角の和は，

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s = \alpha_w - \pi$$

となり，$f(\pi) = 0$ なので，同様に，

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \cdots + f(\gamma_s) = f(\alpha_w) - f(\pi) = f(\alpha_w)$$

が成り立ち，

$$m_x f(\gamma_1) + m_x f(\gamma_2) + \cdots + m_x f(\gamma_s) = m_x f(\alpha_w)$$

となる。ゆえに，この場合の鎖の重みも，多面体 A の鎖の重みに等しい。

以上のことから，多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ のすべての鎖の重みの総和は，多面体 A のすべての鎖の重みの和に等しいといえる。 ∎

この補題を用いることで，ハドヴィゲールの定理を以下のように示すことができる。

証明 (定理 2.10 の証明)

多面体 A を多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ に分解し，多面体 B を多面体 $M_1{}', M_2{}', \cdots, M_s{}'$ に分解する。ただし，M_i と $M_i{}'$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ は合同な多面体とする。また，多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_s$

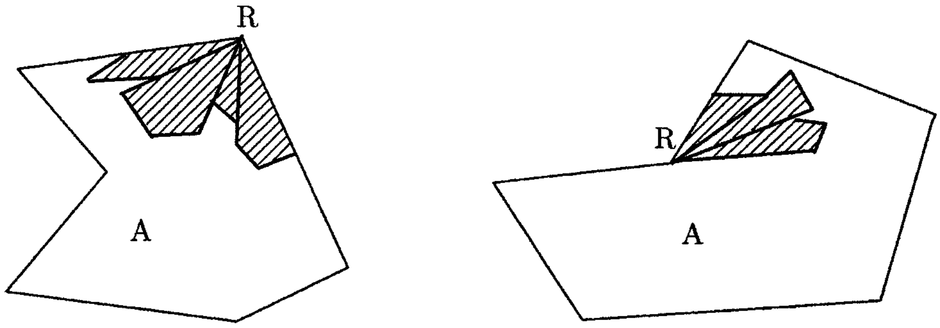


図 2.3: 鎖が辺上にある場合

のすべての二面角の大きさを孤度で表したものを $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ とすると，M_i と $M_i{}'$ は合同な多面体なので，多面体 $M_1{}', M_2{}', \cdots, M_s{}'$ のすべての二面角の大きさも $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ と表すことができる。このとき，系 2.8 にしたがって，f を拡張した加法的関数

$$f' : \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r, \pi\} \to \mathbb{R}$$

をとる。

多面体 A は多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ からつくられているので，補題 2.12 より，

$$f'(A) = f'(M_1) + f'(M_2) + \cdots + f'(M_s)$$

となる。

一方，多面体 B についても，同様に，

$$f'(B) = f'(M_1{}') + f'(M_2{}') + \cdots + f'(M_s{}')$$

が成り立つ。

M_i と $M_i{}'$ は合同な多面体ゆえ，明らかに $f'(M_i) = f'(M_i{}')$ であるので，$f'(A)$ と $f'(B)$ は等しい。また，f' は f を拡張したものなので，$f(A) = f(B)$ が得られる。 ∎

2.3 デーンの定理

前節で述べたハドヴィゲールの定理に加え，次の補題が成り立てば，デーンの主張（定理 2.14）が肯定される。

補題 2.13 n を 2 より大きい自然数，m を $1 \leq m < n$ をみたす自然数とし，m と n は互いに素とする。次に，

$$\cos\varphi = \frac{m}{n} \tag{2.4}$$

となるよう $\varphi \in \mathbb{R}$ をとる。このとき，φ と π は整数比にならない。すなわち，

$$n_1\varphi + n_2\pi = 0 \tag{2.5}$$

となる整数 n_1, n_2（$n_1 = n_2 = 0$ ではない）は存在しない。

証明　背理法で示す。

$n_1 \neq 0$ としてよい。(2.5) が成り立つと仮定すると，

$$n_1\varphi = -n_2\pi$$

より，$n_1\varphi$ は π の整数倍となる。ゆえに，$\cos n_1\varphi$ は 1 あるいは -1 となる。よって，0 でない任意の整数 k に対し，$\cos k\varphi$ が 1 もしくは -1 とならないことを示せばよい。

加法定理によって，次の２式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\varphi &= \cos(k\varphi+\varphi)\\ &= \cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(k-1)\varphi &= \cos(k\varphi-\varphi)\\ &= \cos k\varphi\cos\varphi + \sin k\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

この２式の和をとると，

$$\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi\cos\varphi$$

となるので，この式に $\cos\varphi = \dfrac{m}{n}$ を代入すると，

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2m}{n}\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \tag{2.6}$$

を得る。

まず，n が奇数である場合，n と互いに素な整数 a_k を用いて，

$$\cos k\varphi = \frac{a_k}{n^k} \tag{2.7}$$

と表せることを数学的帰納法によって示す。

命題の仮定 (2.4) より，m と n は互いに素なので，$k=1$ のとき，(2.7) は成り立つ。また，$k=2$ のとき，

$$\cos 2\varphi = 2\cos\varphi^2 - 1 = \frac{2m^2-n^2}{n^2}$$

である。いま，整数 x と y の最大公約数を $gcd(x,y)$ と表すことにすると，

$$gcd(2m^2-n^2, n) = gcd(2m^2, n) = 1$$

より，$(2m^2-n^2)$ と n は互いに素となり，(2.7) が成り立つ。次に，$k=p-1,p$ ($\mathbb{N}\ni p\geq 2$) で (2.7) が成り立つと仮定する。ただし，p は 2 以上の自然数とする。$k=p+1$ のとき，(2.6) より，

$$\begin{aligned}\cos{(p+1)\varphi} &= \frac{2ma_p}{nn^p}-\frac{a_{p-1}}{n^{p-1}}\\ &= \frac{2ma_p-n^2a_{p-1}}{n^{p+1}}\end{aligned}$$

を得，m と n，a_p と n（奇数）がそれぞれ互いに素であるので，

$$gcd(2ma_p-n^2a_{p-1},n)=gcd(2ma_p,n)=1$$

となる。すなわち，$(2ma_p-n^2a_{p-1})$ と n が互いに素なので，$k=p+1$ のときも (2.7) が成り立つ。ゆえに，任意の k に対して，$\cos k\varphi$ は (2.7) のように表せるので，1 もしくは -1 とならない。

次に，n が偶数である場合，n は自然数 r を用いて $n=2^rh$（h は奇数）と表せる。ここで，m は 2，h と互いに素である。

$r=1$ と $r\geq 2$ の 2 通りに分けて考える。まず $r=1$ の場合，$n>2$，$h>1$ である。このとき，$k\geq 1$ において，h と互いに素な整数 b_k，c_k を用いて，

$$\cos k\varphi=\frac{b_k}{c_kh^k} \tag{2.8}$$

と表せることを数学的帰納法によって示す。

$k=1$ のとき，

$$\cos\varphi=\frac{m}{2h}$$

であり，また，$k=2$ のとき，

$$\cos 2\varphi=2\cos\varphi^2-1=\frac{m^2-2h^2}{2h^2}$$

となり，$gcd(m^2-2h^2,h)=1$ より，$k=1,2$ において (2.8) が成り立つ。次に，$k=q-1,q$ ($q\geq 2$) で (2.8) が成り立つと仮定する。$k=q+1$ のとき，

$$\begin{aligned}\cos{(q+1)\varphi} &= \frac{m}{h}\frac{b_q}{c_qh^q}-\frac{b_{q-1}}{c_{q-1}h^{q-1}}\\ &= \frac{mb_qc_{q-1}-b_{q-1}c_qh^2}{c_qc_{q-1}h^{q+1}}\end{aligned}$$

となり，

$$gcd(mb_qc_{q-1}-b_{q-1}c_qh^2,h)=gcd(mb_qc_{q-1},h)=1$$
$$gcd(c_qc_{q-1},h)=1$$

より，$k=q+1$ のときも (2.8) が成り立つ。ゆえに，任意の k に対して，$\cos k\varphi$ は (2.8) のように表せるので，分母は h のべき乗を約数にもち，1 もしくは -1 とならない。

次に，$r \geq 2$ の場合，任意の $k \geq 1$ に対して，$2, h$ と互いに素な b_k を用いて，

$$\cos k\varphi = \frac{b_k}{2^{kr-k+1}h^k} \tag{2.9}$$

と表せることを数学的帰納法によって示す。

$k=1$ のとき，

$$\cos\varphi = \frac{m}{n} = \frac{m}{2^{r-1+1}h}$$

であり，また，$k=2$ のとき，

$$\cos 2\varphi = \frac{2m}{n}\frac{m}{n} - 1 = \frac{m^2 - 2^{2r-1}h^2}{2^{2r-1}h^2}$$

となり，$gcd(m^2 - 2^{2r-1}h^2, h) = 1$ より，$k = 1, 2$ において (2.9) が成り立つ（m は奇数であることに注意する)。

次に，$k = q-1, q$ （$q \geq 2$）で (2.9) が成り立つと仮定する。$k=q+1$ のとき，

$$\begin{aligned}\cos(q+1)\varphi &= \frac{2m}{n}\frac{b_q}{2^{qr-q+1}h^q} - \frac{b_{q-1}}{2^{(q-1)r-(q-1)+1}h^{q-1}} \\ &= \frac{mb_q - 2^{2r-2}h^2 b_{q-1}}{2^{(q+1)r-(q+1)+1}h^{q+1}}\end{aligned}$$

となり，$mb_q - 2^{2r-2}h^2b_{q-1} = b_{q+1}$ とおくと，b_{q+1} は奇数である。また，

$$gcd(mb_q - 2^{2r-2}h^2b_{q-1}, h) = gcd(mb_q, h) = 1$$

より，b_{q+1} は 2，h と互いに素ゆえ，$k=q+1$ のときも (2.9) が成り立つ。よって，任意の k に対して，$\cos k\varphi$ は (2.9) のように表せるので，分母は 2 のべき乗を約数にもち，1 もしくは -1 とならない。

したがって，$\cos k\varphi$ は 1 もしくは -1 にならない。 ∎

ハドヴィゲールの定理と補題 2.13 を用いて，次のデーンの定理を示す。

定理 2.14 （デーンの定理）

等積な立方体と正四面体は分解合同でない。

証明 正四面体 $ABCD$ をとり，頂点 D から面 ABC に対して垂線を下ろし，その足を E とする。点 E は正三角形 ABC の重心となるので，直線 AE と辺 BC との交点を F とすると，F は BC の中点であり，線分 AF は正三角形 ABC における中線となる（図 2.4 参照)。一方，線分 DF は正三角形 BCD における中線となるので，$EF : DF = EF : AF = 1 : 3$ となる。また，$AF \perp BC, DF \perp BC$ より，$\angle DFE$ が辺 BC に対する二面角であり，その大きさを φ とすると，$\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$ となる。

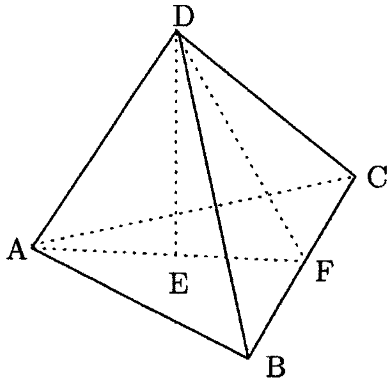


図 2.4: 正四面体 $ABCD$

ここで，補題2.13を適用すると，整数 n_1, n_2 に対し，$n_1\varphi + n_2\pi = 0$ であれば，$n_1 = n_2 = 0$ となる。すなわち，φ と π は1次独立である。よって，$f(\pi) = f(\frac{\pi}{2}) = 0, f(\varphi) = 1$ となる加法的関数 $f : \{\pi, \frac{\pi}{2}, \varphi\} \to \mathbb{R}$ をとる。

ここで，正四面体 $ABCD$ を P，P と等積な立方体を Q とし，P, Q の1辺の長さをそれぞれ l, m とする。次に，P, Q が分解合同であると仮定し，上記の f に対してハドヴィゲールの定理を適用させると，$f(P) = f(Q)$ が得られる。しかし，f で定まる P, Q の不変量はそれぞれ $f(P) = 6lf(\varphi) = 6l$，$f(Q) = 12m(\frac{\pi}{2}) = 0$ であり，$f(P) = f(Q)$ であることに矛盾する。したがって，等積な正四面体と立方体が分解合同でない。 ∎

2.4 分解合同と補充合同の同値

平面において，等積な2つの多角形に対し，分解合同であることと補充合同であることは，定理1.21，1.22によって同値であるといえるが，その証明は等積と分解合同の同値性（定理1.21）に大きく依存するものであった。しかし，空間においては，デーンの定理によって，等積であっても分解合同でない正四面体と立方体が存在するため，同様の証明は成立しない。この問題に対しては，シドレールが次のような解決（シドレールの定理）を与えている。

定理 2.15 等積な2つの多面体 A, B において，A と B が分解合同であることと，A と B が補充合同であることは同値である。

分解合同性から補充合同性を導くことは，それほど難しくはない。

補題 2.16 等積な2つの多面体が分解合同であれば，それらは補充合同である。

証明 仮定をみたす多面体 A と B をとる。もし A, B が共通部分をもつのであれば，どちらかの多面体を平行移動して，共通部分をもたないようにする。多面体 A を多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ に分解し，多面体 B を多面体 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_k$ に分解する。ただし，多面体 M_i と M'_i（$i =$

$1, 2, \cdots, k$）は合同であるようにとる。次に，多面体 A と B を同時に内部に含む大きな多面体 M をとり，M から A, B を取り除いた部分を M_0 とおく。このとき，

$$\begin{aligned} M &= A + M_0 + B \\ &= M_1 + M_2 + \cdots + M_k + M_0 + B \\ &= A + M_0 + M_1' + M_2' + \cdots + M_k' \end{aligned}$$

であることから，多面体 A と B は補充合同である。 ∎

シドレールの定理を証明するために，補題をいくつか準備する。

まず，斜角柱について考える。斜角柱は，分解合同に関して，たいへん良い性質をもっている。

補題 2.17 任意の斜角柱に対して，分解合同となる直方体が存在する。

証明 任意の斜角柱 A をとる。A の側辺に垂直な平面で A を切り，A を２つの多面体 M_1, M_2 に分割する。M_1, M_2 と合同な多面体を M_1', M_2' とし，$M_1' + M_2'$ で表される多面体 B を図 2.5 のようにとると，B は直角柱となる。A の側辺の長さが小さく，A の側辺に垂直な平面で A を切っても上記の操作ができないときは，上記の操作ができるような十分な側辺の長さが得られるように A をいくつかの斜角柱に分解したのち，それぞれの斜角柱に対して上記の操作を行って直角柱をとり，それらの直角柱の和をとると A と分解合同な直角柱 B が得られる（図 2.5 参照)。

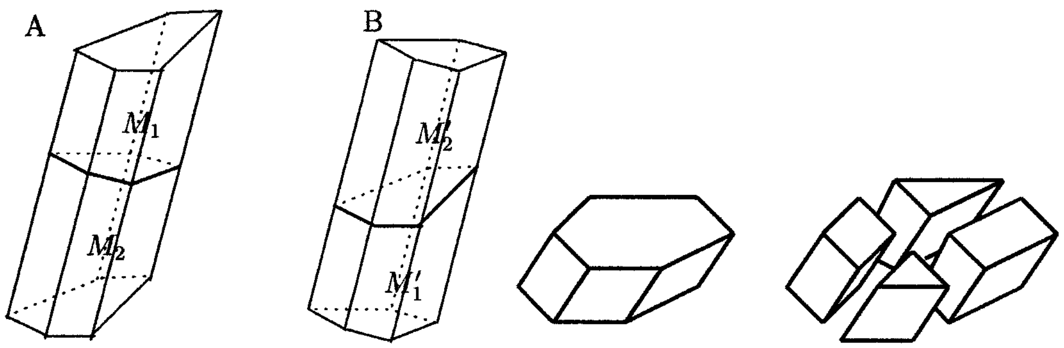


図 2.5: 斜角柱と直角柱の分解合同性

次に，補題 1.20 より，直角柱 B の底面 P に対し，分解合同な長方形 R が存在する。ゆえに，P と R が分解合同となるように，P を多角形 $H_1, H_2, \cdots, H_k$，R を多角形 $H_1', H_2', \cdots, H_k'$ ($H_i \equiv H_i', i = 1, 2, \cdots, k$) に分解できる。また，$R$ を底面とし，B と高さが等しい直方体を C とする。このとき，多角形 $H_1, H_2, \cdots, H_k$ を底面にもち，高さが B と等しい直角柱 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ に B を分割する。C についても同様に，$H_1', H_2', \cdots, H_k'$ を底面にもち，高さが C と等しい直角柱 $T_1', T_2', \cdots, T_k'$ に分割する。B と C は高さが等しく，また $H_i \equiv H_i'$ ゆえ，$T_i \equiv T_i'$ となる。よって，B と C は分解合同である。したがって，A と C は分解合同となるので，任意の斜角柱に対し，分解合同な直方体が存在する。 ∎

補題 2.18 等積な２つの直方体は分解合同である。

証明 等積な２つの直方体 A, B をとる。A の辺の長さを a, b, c で表す。このとき，A の高さを c とすると，底面は縦，横の長さが a, b の長方形だが，補題1.20 より，A の底面は，辺の長さが $\sqrt[3]{abc}, \dfrac{ab}{\sqrt[3]{abc}}$ の長方形と分解合同である。よって，補題2.17 の証明の後半部分と同様の分割方法を用いると，A は辺の長さが $\sqrt[3]{abc}, \dfrac{ab}{\sqrt[3]{abc}}, c$ で表される直方体と分解合同となる。次に，得られた直方体は，長さ $\sqrt[3]{abc}$ の辺を高さとみると，底面は縦，横の長さが $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{abc}}, c$ の長方形で，１辺の長さが $\sqrt[3]{abc}$ の正方形と分解合同である。よって，得られた直方体は，１辺の長さが $\sqrt[3]{abc}$ の立方体と分解合同となる。この立方体を Q とすると，B についても同様に，B と Q が分解合同であることが成り立つ。よって，A, B ともに Q に分解合同であるゆえ，A と B は分解合同となる。 ∎

実は，斜角柱については，等積と分解合同は同値なのである。

命題 2.19 等積な２つの斜角柱は分解合同である。

証明 補題2.17 より，任意の斜角柱 A に対し，分解合同な直方体 S がとれる。また同様に，A と等積な斜角柱 B に対し，分解合同な直方体 T がとれる。このとき，S と T は等積であるので，補題2.18 より，S と T は分解合同である。ゆえに，等積な斜角柱 A と B は分解合同である。 ∎

補題 2.20 互いに内点の共通部分をもたない角柱 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ をとり（$n = 1, 2, \cdots, n$），それらの和 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ と等積な角柱を P とおく。このとき，P と $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ は分解合同である。

証明 補題2.17 より，角柱 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ に対し，それぞれと等積で分解合同な直方体 K_1, $K_2, \cdots, K_n$ が存在する。$K_1, K_2, \cdots, K_n$ に対し，それぞれと等積な直方体 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ で，底面が合同であるものを考えると，補題2.18 より，K_i と R_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）は分解合同である。$R_1, R_2, \cdots, R_n$ は，合同な面が一致するよう重箱のように積み上げることができ，１つの直方体 T を構成できる。つまり，T と $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ は，直方体のとり方から明らかに分解合同である。また，T は P と等積である。したがって，命題2.19 より，P と T は分解合同であり，ゆえに，命題は成り立つ。 ∎

ここで，次の記法を準備する。

定義 2.21 任意の多面体 P をとり，P を λ 倍に拡大した相似な多面体 P' を $P^{(\lambda)}$ と表す。

また，$M_1, M_2, \cdots, M_k$ は M と合同な多面体で，互いに共通な内点をもたないものとする。このとき，$M_1 + M_2 + \cdots + M_k$ を kM と表す。

補題 2.22 任意の多面体 P，任意の自然数 n に対し，$M + nP$ と $P^{(n)}$ が分解合同となる角柱 M が存在する。

証明 まず，P が三角錐である場合を考える。このとき，$P^{(n)}$ も三角錐であり，P の n 倍の高さをもつ。次に，$P^{(n)}$ の高さを n 等分する点を通り，$P^{(n)}$ の底面に平行な面で $P^{(n)}$ を分割すると，これらの多面体のうち 1 つは P と合同な三角錐で，残りのものはすべて三角錐台である。そこで，これらの各三角錐台について，下の面を ABC，上の面を $A_1B_1C_1$ と表し（図 2.6），辺 A_1B_1 を通り辺 CC_1 に平行な平面と下底とが交わってできる線分を A_2B_2 とすると，三角錐台は角柱 $A_2B_2CA_1B_1C_1$ と多面体 $AA_1A_2BB_1B_2$ に分けられる。さらに，辺 A_1A_2 を通り面 BB_1B_2 に平行な平面によって多面体 $AA_1A_2BB_1B_2$ を三角錐 $AA_1A_2A_3$ と三角柱 $A_1A_2A_3B_1B_2B$ に分けることができる。このとき，三角錐 $AA_1A_2A_3$ のとり方から $AA_1A_2A_3$ は P と相似であり，P と等しい高さをもっているので $AA_1A_2A_3$ は P と合同である。ゆえに，$(n-1)$ 個の三角錐台は，それぞれ P と合同な三角錐と 2 つの三角柱に分けられる。すなわち，$P^{(n)}$ は，n 個の三角錐と $2(n-1)$ 個の三角柱に分けられる。したがって，補題 2.20 より，$2(n-1)$ 個の三角柱はそれと等積な角柱 M と分解合同となるので，P が三角錐のとき，命題は真である。

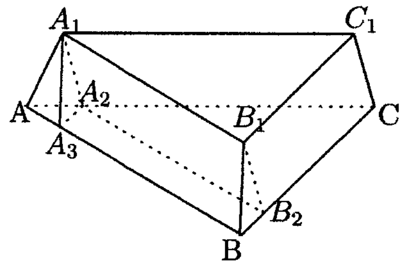


図 2.6: 三角錐台 $ABC - A_1B_1C_1$ の分割

次に，P を任意の多面体とする。定理 1.3 より，P は有限個の三角錐 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ に分解される。$T_1,T_2,\cdots,T_k$ をそれぞれ n 倍に拡大したものに対し，上で示したことから，

$$T_1{}^{(n)} \overset{d}{\sim} M_1 + nT_1\ ,\ T_2{}^{(n)} \overset{d}{\sim} M_2 + nT_2\ ,\ \cdots\ ,\ T_k{}^{(n)} \overset{d}{\sim} M_k + nT_k$$

となるように角柱 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ をとることができる。ゆえに，

$$P^{(n)} \overset{d}{\sim} (M_1 + M_2 + \cdots + M_k) + (nT_1 + nT_2 + \cdots + nT_k)$$

である。また，補題 2.20 より，$M_1{+}M_2{+}\cdots{+}M_k$ と等積な角柱 M をとると，$M_1{+}M_2{+}\cdots{+}M_k$ は M と分解合同であり，$nP = n(T_1 + T_2 + \cdots + T_k) = nT_1 + nT_2 + \cdots + nT_k$ であることから，

$$\begin{aligned} P^{(n)} &\overset{d}{\sim} (M_1 + M_2 + \cdots + M_k) + (nT_1 + nT_2 + \cdots + nT_k) \\ &\overset{d}{\sim} M + n(T_1 + T_2 + \cdots + T_k) \\ &\overset{d}{\sim} M + nP \end{aligned}$$

が成り立つ。 ∎

補題 2.23 等積な 2 つの多面体が補充合同であれば，それらは分解合同である。

証明 この証明では多くの多面体を扱っており，それらの関係が複雑になるため，模式図（図 2.8）も参照して頂きたい。

任意の多面体 A, B をとり，A と B は補充合同であると仮定する。すなわち，分解合同な多面体 C, D に対し，$A+C$ と $B+D$ が合同な多面体となるものとする。次に，C を内部に含むように立方体 Q をとる。Q と A の体積 $v(Q), v(A)$ に対し，n を

$$n^2 > 1 + \frac{v(Q)}{v(A)}$$

をみたす整数とする。このとき，両辺を $nv(A)$ 倍すると，

$$n^3 v(A) = v(A^{(n)}) > nv(A) + nv(Q) \tag{2.10}$$

と表すことができる。つまり，A を n 倍に拡大したものの体積が，A と Q の体積の和の n 倍より大きくなるように n をとる。

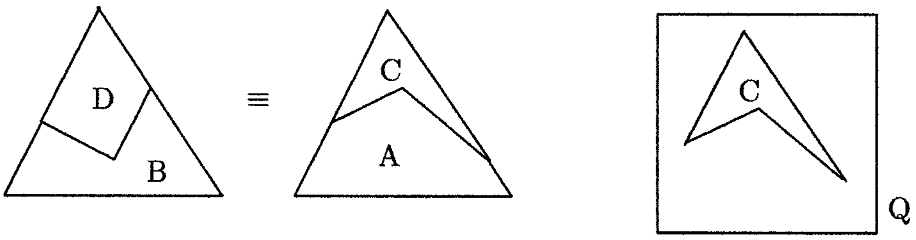


図 2.7: 多面体 A, B, C, D の関係および C と立方体 Q の関係

ここで，補題 2.22 を適用し，$A^{(n)}$ と $S + nA$，$B^{(n)}$ と $T + nB$ がそれぞれ分解合同となるように角柱 S, T をとる。このとき，分解合同な多面体は体積が等しいので，

$$v(A^{(n)}) = v(S) + nv(A)\ ,\ v(B^{(n)}) = v(T) + nv(B) \tag{2.11}$$

が得られる。(2.10),(2.11) より，$v(S) > nv(Q)$，すなわち，S は Q を n 倍したものより体積が大きいことが分かる。一方，補題 2.20 より，S は Q と同じ底面をもつ直方体としてよい。このとき，直方体 S は Q と合同な立方体を n 個以上含む。ゆえに，S は C と合同な多面体を n 個含む。

S から nC を除いた部分を H とすると，

$$S = H + nC \tag{2.12}$$

と表すことができる。また，仮定より A と B が等積であり，$v(A^{(n)}) = v(B^{(n)})$，$nv(A) = nv(B)$ であることから，(2.11) より S と T も等積である。よって，補題 2.17 より，S と T は分解合同となる。

以上のことことから，

$$A^{(n)} \overset{d}{\sim} S + nA = H + nC + nA = H + n(C+A) \overset{d}{\sim} H + n(B+D) = H + nB + nD$$

であり，C と D が分解合同ゆえ，

$$H + nB + nD \overset{d}{\sim} H + nB + nC = (H + nC) + nB$$

が成り立ち，

$$(H + nC) + nB \overset{d}{\sim} S + nB$$

$$S + nB \overset{d}{\sim} T + nB \overset{d}{\sim} B^{(n)}$$

ゆえ，$A^{(n)}$ と $B^{(n)}$ が分解合同であることを導ける。したがって，$A^{(n)}$ と $B^{(n)}$ をそれぞれ $\dfrac{1}{n}$ に縮小すれば，A と B も分解合同となる。

∎

以上の補題によって，シドレールの定理は示される。
証明　（定理 2.15 の証明）補題 2.16 と補題 2.23 により成り立つ。 ∎

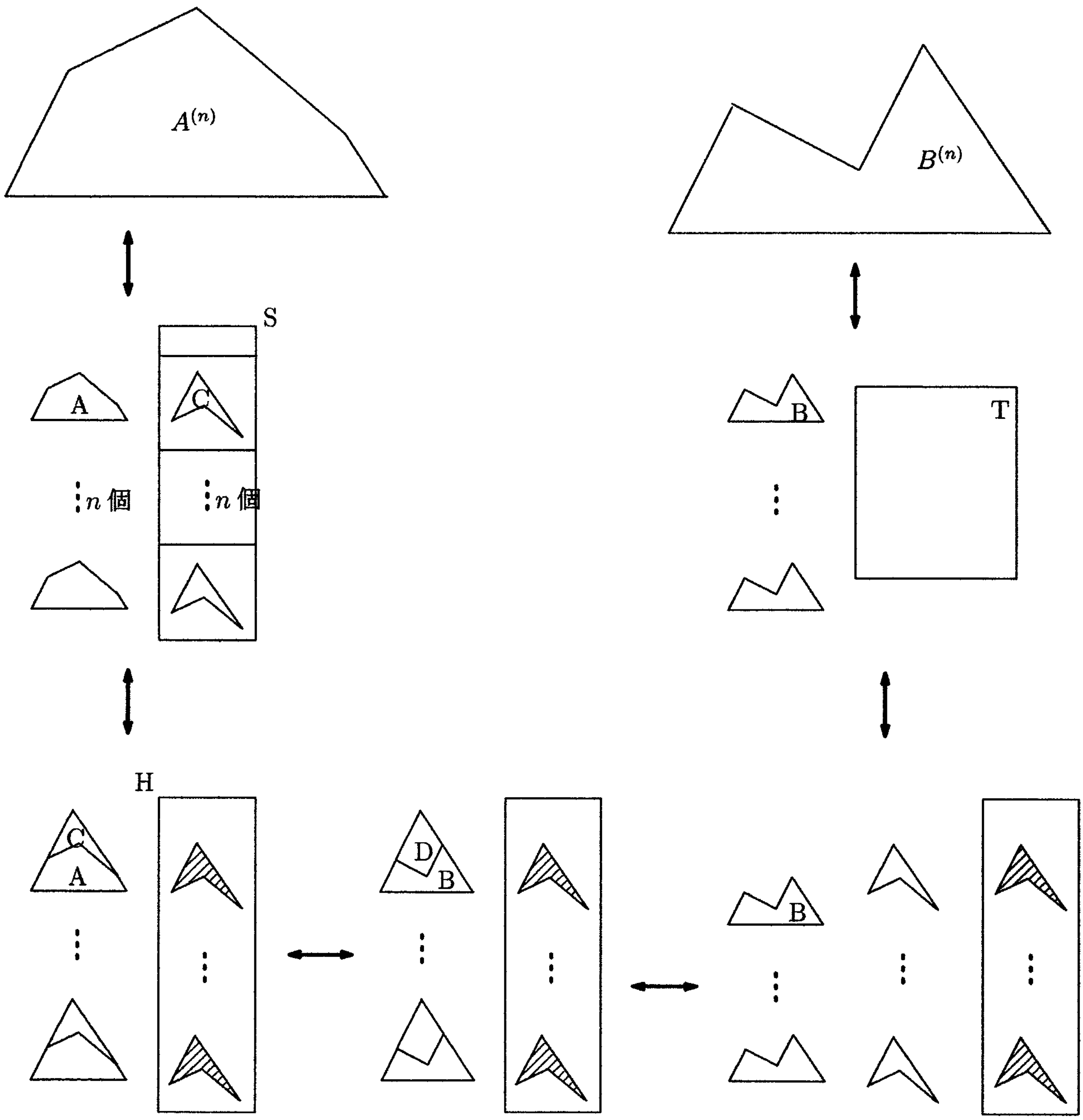


図 2.8: 補題 2.23 の証明の模式図

3章　デーン=シドレールの定理

この章では，等積な多面体が分解合同であるための条件について考察する。

前章におけるハドヴィゲールの定理にて，等積な多面体が分解合同であるための必要条件をすでに述べているが，シドレールは，ハドヴィゲールの定理の逆も成り立つことを示した。この“等積な多面体が分解合同であるための必要十分条件（デーン=シドレールの定理）”を述べるにあたって，まず，はさみ合同群という概念を導入し，多面体の分解合同性を代数的にとらえていく。

3.1　はさみ合同群

まず，次の記法を準備する。

定義 3.1 すべての多面体の集合を考え，これを $\mathcal{P}$ と表す。また，角柱と分解合同な多面体全体の集合を $\mathcal{Z}$ と表す。

$\mathcal{P}$ には分解合同 $\overset{d}{\sim}$ という同値関係がある。そこで，分解合同による商集合 $\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ を考える。このとき，$\mathcal{P}$ の元 A に対し，A を代表元とする $\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ の元を $[A]$ と表す。

上で定めた商集合 $\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ では，“足し算”が次のように定義できる。

定義 3.2 $\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ の元 $[A]$,$[B]$ に対し，B を適当に合同変換 g で動かせば，A と $g(B)$ の共通内点がないようにできる。このとき，

$$[A]+[B]=[A+g(B)]$$

と定めると，合同変換 g,g' に対し，$A+g(B)\overset{d}{\sim}A+g'(B)$ より，well-defined である。この演算“$+$”は可換であり，結合性をみたし，空集合の同値類 $[\emptyset]$ を単位元としてもつ。しかし，逆元がないので，G を形式的な差 $[A]-[B]$ の集合，つまり，

$$G=\{[A]-[B]\mid [A],[B]\in\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}\}/\sim$$

と定める。ここで，同値関係 $\sim$ は，$[A]-[B]$ と $[A']-[B']$ に対し，ある $[C]\in\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ があって，

$$[A]+[B']+[C]=[A']+[B]+[C]$$

となるとき，$[A]-[B] \overset{d}{\sim} [A']-[B']$ と定める。

G の元 $[A]-[B],[C]-[D]$ に対し，$([A]-[B])+([C]-[D])$ を $([A]+[C])-([B]+[D])$ と定めると，演算は well-defined で，$[\emptyset]-[\emptyset]$ を単位元として加法群になる。これを**はさみ合同群**という。

以後，$[A]-[\emptyset]$ を単に $[A]$，$[\emptyset]-[A]$ を単に $-[A]$，$[\emptyset]-[\emptyset]$ を単に 0 と表す。

ここで，命題 3.4 の主張のために補題を 1 つ述べる。

補題 3.3 $X,Y,C \in \mathcal{P}$ とする。$\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ において，$[X]+[C]=[Y]+[C]$ であれば $[X]=[Y]$ である。

証明 X と C，Y と C は共通内点がないものとしてよい。

$[X]+[C]=[Y]+[C]$ より，$X+C \overset{d}{\sim} Y+C$ である。ゆえに，合同変換 g_i によって $g_i(P_i)=Q_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ となる多面体 P_i,Q_i を用いて，$X+C,Y+C$ をそれぞれ

$$X+C=P_1+P_2+\cdots+P_m\ ,\ Y+C=Q_1+Q_2+\cdots+Q_m$$

と分解する。

ここで，$P_i \cap X$ を X_i，$P_i \cap C$ を C_i，$\sum_{i=1}^{m} g_i(X_i)=X'$，$\sum_{i=1}^{m} g_i(C_i)=C'$ とおくと，

$$Y+C=\sum_{i=1}^{m} Q_i=\sum_{i=1}^{m} g_i(P_i)=\sum_{i=1}^{m} g_i(X+C)=\sum_{i=1}^{m} g_i(X_i)+\sum_{i=1}^{m} g_i(C_i)=X'+C'$$

と表せ，

$$Y+\sum_{i=1}^{m} C_i=X'+\sum_{i=1}^{m} g_i(C_i)$$

を得る。ゆえに，Y と X' は補充合同であるので，補題 2.23 より，それらは分解合同である。したがって，$Y \overset{d}{\sim} X' \overset{d}{\sim} X$ ゆえ，$[Y]=[X]$ となる。 ∎

補題 3.3 より，関係式 $[A]+[X]=[B]$ をみたす解 $[X]$ は唯 1 つである。つまり，$\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ 上の演算 “ $+$ ” は，いつでも引き算をできる状況ではないが，できるときは唯 1 つに決まる。

命題 3.4 G において $[A]-[B]=[A']-[B']$ であることと，$\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ において $[A]+[B']=[A']+[B]$ であることは同値である。特に，G において $[A]-[\emptyset]=[A']-[\emptyset]$ であることは，$P/\overset{d}{\sim}$ において $[A]=[A']$ であることと同値であり，すなわち，A と A' が分解合同であることと同値となる。

証明 G の元 $[A]-[B],[A']-[B']$ について，$[A]-[B]=[A']-[B']$ であることは，定義によれば，ある $[C] \in \mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ に対して $([A]+[B'])+[C]=([A']+[B])+[C]$ であることと同値であるが，補題 3.3 より，最後の条件は $[A]+[B']=[A']+[B]$ と同値である。 ∎

したがって，今後，G に関する考察を，多面体の分解合同性に関する考察とする。

G に関する性質を述べる。

定理 3.5 G の任意の元 σ に対し，$\sigma = [P] - [C]$ となる多面体 P と立方体 C が存在する。

証明 G の任意の元 $[A] - [B]$ に対し，B を含む立方体を C，C から B の内点を除いた部分を Q とする。また，A と $g(Q)$ の共通内点がないように合同変換 g を選び，$P = A + g(Q)$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}[A] - [B] &= [A] + [Q] - [C] \\ &= [P] - [C]\end{aligned}$$

となる。 ∎

補題 3.6

$$H = \{[Q] - [Q'] \mid Q, Q' \in \mathcal{Z}\} \subset G$$

とおくと，H は G の部分群であり，G は加法群だから，H は正規部分群である。

証明 $Q + Q' \in \mathcal{Z}$ であることを示す。$\mathcal{Z} \ni Q, Q'$ であるので，補題2.17 より，$Q \overset{d}{\sim} T, Q' \overset{d}{\sim} T'$ となる直方体 T, T' が存在する。次に，T' と等積で，底面が T と合同な直方体を T'' とする。このとき，底面が一致するよう $T + T''$ をとると，$T + T''$ は直方体となる。また，補題2.19 より，T' と T'' は分解合同であるので，$Q + Q' \overset{d}{\sim} T + T'' \in \mathcal{Z}$ を得る。 ∎

命題 3.7 体積を表す関数 v を用いて，$[A] - [B] \in G$ を $v(A) - v(B) \in \mathbb{R}$ へ移す写像 $v : G \to \mathbb{R}$ は well-defined で，準同型である。特に，H に制限すると，$v : H \to \mathbb{R}$ は同型である。

証明 $G \ni [A] - [B], [A'] - [B']$ に対し，$[A] - [B] = [A'] - [B']$ とすると，命題3.4 より，$\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ において，

$$[A] + [B'] = [A'] + [B]$$

であるから，

$$v(A) + v(B') = v(A') + v(B)$$

となる。よって

$$v(A) - v(B) = v(A') - v(B')$$

を得るので，$v : G \to \mathbb{R}$ は well-defined である。また，$G \ni [A] - [B], [C] - [D]$ に対し，

$$([A] - [B]) + ([C] - [D]) = ([A] + [C]) - ([B] + [D])$$

より，

$$\begin{aligned}v(([A] - [B]) + ([C] - [D])) &= v(([A] + [C]) - ([B] + [D])) \\ &= v([A] + [C]) - v([B] + [D]) \\ &= v(A) + v(C) - v(B) - v(D) \\ &= v([A] - [B]) + v([C] - [D])\end{aligned}$$

が成り立ち，$v : G \to \mathbb{R}$ は準同型である。

次に，$v : H \to \mathbb{R}$ について考える。$H \ni [Q_1]-[Q_2],[Q_3]-[Q_4]$ に対し，

$$v(Q_1)-v(Q_2)=v(Q_3)-v(Q_4)$$

とすると，

$$v(Q_1)+v(Q_4)=v(Q_2)+v(Q_3)$$
$$v(Q_1+Q_4)=v(Q_2+Q_3)$$

となり，$\mathcal{Z} \ni Q_1+Q_4, Q_2+Q_3$ だから，命題2.19 より，$\mathcal{P}/\overset{d}{\sim}$ において，

$$[Q_1]+[Q_4]=[Q_2]+[Q_3]$$

を得る。よって，G において，

$$[Q_1]-[Q_2]=[Q_3]-[Q_4]$$

が成り立ち，$v : H \to \mathbb{R}$ は単射である。また，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \geq 0$ であれば，縦，横，高さが 1，1，x の直方体を Q とすると，$v([Q]) = x$ となる。また，$x < 0$ であれば，縦，横，高さが 1，1，$|x|$ の直方体を Q' として，$v(-[Q']) = x$ となる。よって，$v : H \to \mathbb{R}$ は全射である。したがって，$v : H \to \mathbb{R}$ は同型である。 ∎

命題 3.8 H の元 δ は，適当な $\mathcal{Z}$ の元 C を用いて，$v(\delta) > 0$ のとき $[C]$，$v(\delta) = 0$ のとき $[\emptyset]$，$v(\delta) < 0$ のとき $-[C]$ と表される。

証明 H の元 $[C]-[C']$ に対して，$v([C]-[C']) > 0$ のとき，$v([C]) > v([C'])$ である。このとき，$C \overset{d}{\sim} C' + C''$ となる $C'' \in \mathcal{Z}$ が存在する。したがって，$[C] = [C'] + [C'']$ であり，$[C]-[C'] = [C'']$ と表せる。すなわち，$v(\delta) > 0$ のとき $[C'']$ と表せる。

他の場合についても同様に示される。 ∎

命題3.10 を述べるにあたって，次のことを定める。

定義 3.9 商群 G/H を $\hat{G}$ と表し，$[P]$ を代表元（$P \in \mathcal{P}$）とする $\hat{G}$ の元を $[[P]]$ と表す。

命題 3.10 $\hat{G}$ の任意の元は，適当な $P \in \mathcal{P}$ によって $[[P]]$ と表される。

証明 定理3.5 より，G の任意の元 σ に対し，ある多面体 P と立方体 C によって $\sigma = [P]-[C]$ と表されるが，$-[C]$ は $\hat{G}$ では消えるので，

$$\sigma + H = [P] + H$$

を得る。ゆえに，$\hat{G}$ の元は $[P]$ で代表され，$[[P]]$ と表せる。 ∎

$\hat{G}$ については，次のことが成り立つ。

定理 3.11 $P, Q \in \mathcal{P}$ とする。$\hat{G}$ において，$[[P]] = [[Q]]$ であることと，適当な $\mathcal{Z} \ni C, C'$ を用いて $P + C \overset{d}{\sim} Q + C'$ と表せることは同値である。

証明 $[P] + [C] = [Q] + [C']$ であるとき,$v(C) > v(C')$ とし，$C' \overset{d}{\sim} C + C''$ となる $C'' \in \mathcal{Z}$ をとると，

$$
\begin{aligned}
P + C \overset{d}{\sim} Q + C' &\Leftrightarrow P + C \overset{d}{\sim} Q + C + C'' \\
&\Leftrightarrow P \overset{d}{\sim} Q + C'' \\
&\Leftrightarrow [P] = [Q] + [C''] \\
&\Leftrightarrow [[P]] = [[Q]]
\end{aligned}
$$

となり，命題が成り立つ。 ∎

以上のことから，次の結果を得る。

定理 3.12 P, Q を多面体とする。このとき，

$$
\begin{aligned}
P \overset{d}{\sim} Q &\Leftrightarrow [P] = [Q] \; in \; G &\quad (3.1) \\
&\Leftrightarrow v(P) = v(Q) \text{ かつ } [[P]] = [[Q]] \; in \; \hat{G} &\quad (3.2)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

証明 (3.1) はすでに示しているので, (3.2) を示す。
($\Rightarrow$) は自明である。
($\Leftarrow$) について，$[[P]] = [[Q]]$ より，適当な $C \in \mathcal{Z}$ を用いて，

$$[P] - [Q] = \pm[C] \in H$$

を得る。よって，$v([P] - [Q]) = v(\pm[C]) = 0$ より，$C = \emptyset$ である。ゆえに，$[P] = [Q]$ となる。したがって, (3.1) より $P \overset{d}{\sim} Q$ となり, (3.2) も成り立つ。 ∎

実は，$\hat{G}$ はベクトル空間の構造をもつ。$[[P]] \in \hat{G}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$\lambda > 0$ のとき，

$$\lambda[[P]] = [[P^{(\lambda)}]]$$

$\lambda < 0$ のとき，

$$\lambda[[P]] = -[[P^{|\lambda|}]]$$

と定義する。$H \ni [Q]$ ならば $[Q^{(\lambda)}] \in H$，また，$[P] = [P']$ ならば $[P^{(\lambda)}] = [P'^{(\lambda)}]$ より，この演算は well-defined である。
さらに，任意の多面体に対し，次のことが成り立つ。

命題 3.13 任意の $P \in \mathcal{P}$，任意の $\mathbb{R} \ni \lambda > 0, \mu > 0$ に対し，

$$(\lambda + \mu)[[P]] = \lambda[[P]] + \mu[[P]]$$

となる。

証明

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

となる三角錐 P_i をとる $(i = 1, 2, \cdots, n)$。このとき，

$$P^{(\lambda)} = P_1^{(\lambda)} + P_2^{(\lambda)} + \cdots + P_n^{(\lambda)}$$

より，

$$\lambda[[P_i]] + \mu[[P_i]] = (\lambda + \mu)[[P_i]] \tag{3.3}$$

であればよい。実際，図 3.1 より，(3.3) は成り立つ。

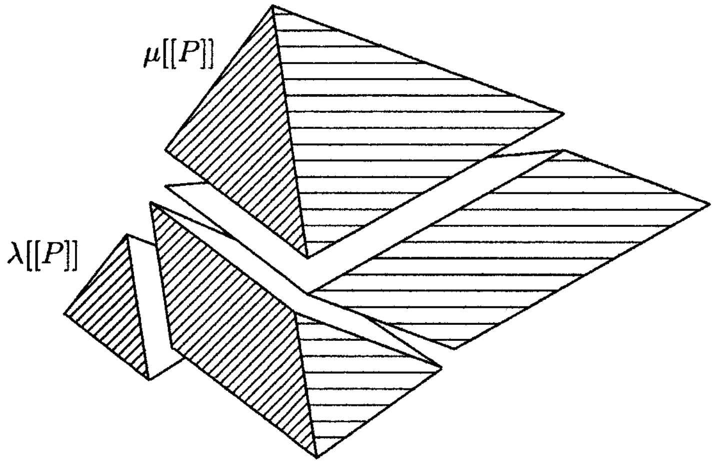


図 3.1: 三角錐 $(\lambda + \mu)[[P_i]]$

∎

命題 3.13 により，$\hat{G}$ は $\mathbb{R}$ 係数のベクトル空間となる。

3.2 デーン＝シドレールの定理 (1) -幾何学的準備-

1965 年，シドレールは，ハドヴィゲールの定理の必要条件が，十分条件でもあることを示した。

定理 3.14 等積な 2 つの多面体 A, B をとり，A のすべての二面角の大きさを $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，$B$ のすべての二面角の大きさを $\beta_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ とする。また，$S = \{\alpha_i, \beta_j, \pi\}$ とする。このとき，$A \overset{d}{\sim} B$ であることと，$f(\pi) = 0$ をみたす任意の加法的関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対して $f(A) = f(B)$ であることは同値である。

この定理 3.14 をデーン＝シドレールの定理とよぶ。

定理 3.14 を示すにあたって，まず，幾何学的な部分の証明のための補題をいくつか挙げる。以下の補題は，シドレールが考察したものである。

補題 3.15 図3.2のように，底面$ABCD$，頂点Oからなる四角錐Mをとる。このとき，辺BC，ADがそれぞれ面OCDと垂直で，$|CD|=|OD|$，$|BC|=2|AD|$とすると，$M\in\mathcal{Z}$である。

証明 K,LをそれぞれOB,CBの中点とし，Kに関してLと対称な点Hをとる。τを$\overrightarrow{OH}$方向に長さOH平行移動させる合同変換とすると，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{DA}$より，$\tau(\Delta OCD)=\Delta HLA$を得る。よって，$\Delta OCD\equiv\Delta HLA$であるので，$\Delta HLA$は$|AH|=|AL|$となる二等辺三角形である。ゆえに，$AK\perp HL$となる。

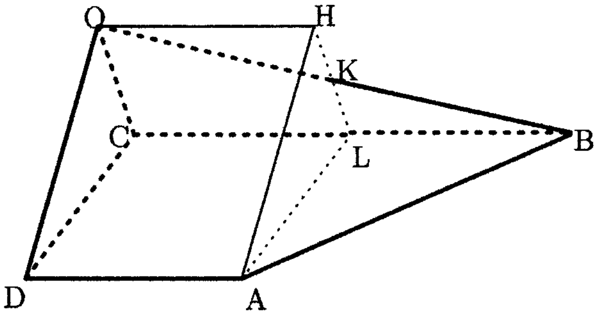


図 3.2: 四角錐M

また，線分AKと面OCDは平行で，$AK\perp BC$より，AKと面OBCは垂直となる。よって，AKを軸とする回転角πの回転ρをとると，三角錐$AKOH=\rho$(三角錐$AKBL$)を得る。ゆえに，

$$[(\text{多面体}\,OCDKLA)]+[(\text{三角錐}\,AKBL)]=[(\text{多面体}\,OCDKLA)]+[(\text{三角錐}\,AKOH)]$$

となり，((多面体$OCDKLA$)+(三角錐$AKOH$))は三角柱ゆえ，$M\in\mathcal{Z}$となる。 ∎

次の補題を述べるために，いくつか定義を準備する。

まず，関数$\omega:(0,1)\to(0,\infty)$を

$$\omega(x)=\frac{1-x}{x}$$

とおく。このとき，開区間$(0,1)$の元x,yに対し，

$$\omega(xy)=\omega(x)\omega(y)+\omega(x)+\omega(y)$$

であることが容易に確かめられる。

次に，$(0,1)\ni x,y$に対し，$T(x,y)$を，頂点A,B,C,Dからなり，

$$AB\perp BC\perp CD\perp AB$$

$$|AB|=\sqrt{\omega(x)}\ ,\ |BC|=\sqrt{\omega(x)\omega(y)}\ ,\ |CD|=\sqrt{\omega(y)}$$

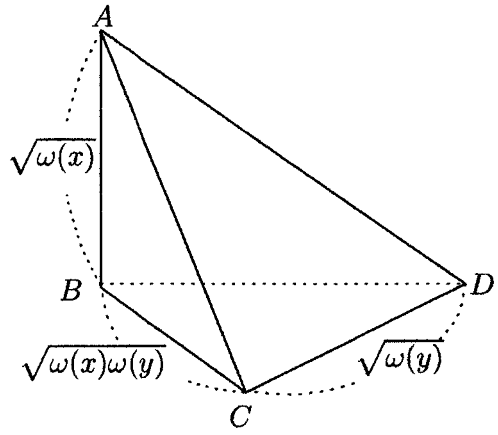


図 3.3: $T(x,y)$

をみたす四面体とする（図 3.3 参照)。

このとき，四面体 $T(x,y)$ において，

$$(AB\text{ の二面角}) = \angle CBD = \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}$$

$$(CD\text{ の二面角}) = \angle ACB = \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(y)}}$$

と表せる。

補題 3.16 図 3.3 の $T(x,y)$ に対し，図 3.4 のように座標軸をとる。

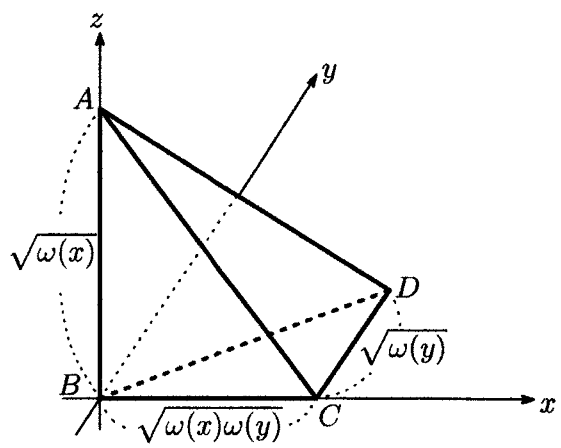


図 3.4: 座標空間上の $T(x,y)$

このとき，

$$(AD\text{の二面角}) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(xy)}}$$

$$|AD| = \sqrt{\omega(xy)} \tag{3.4}$$

$$v(T(x,y)) = \frac{1}{6}\left(\omega(xy) - \omega(x) - \omega(y)\right) \tag{3.5}$$

となる。

証明　図 3.4 において，

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{\omega(x)\omega(y)}, 0, -\sqrt{\omega(x)})\ ,\ \overrightarrow{BD} = (\sqrt{\omega(x)\omega(y)}, \sqrt{\omega(y)}, 0)$$

である。さらに，

$$\overrightarrow{BP} = (1, 0, \sqrt{\omega(y)})\ ,\ \overrightarrow{BQ} = (-1, \sqrt{\omega(x)}, 0)$$

となる点 P,Q をとる。このとき，

$$BP \perp AD\ ,\ BP \perp CD\ ,\ BQ \perp BD\ ,\ BQ \perp BA$$

より，$\overrightarrow{BP}$ は面 ACD の法線ベクトル，$\overrightarrow{BQ}$ は面 ABD の法線ベクトルとなる。また，辺 AD に対する二面角の大きさを α とすると，$\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{BQ}$ のなす角の大きさは $(\pi - \alpha)$ より，

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\frac{-1}{\sqrt{1+\omega(x)}\sqrt{1+\omega(y)}}$$

を得る。よって，

$$\begin{aligned}
(AD\text{の二面角}) &= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\omega(x)}\sqrt{1+\omega(y)}} \\
&= \arccos\sqrt{xy} \\
&= \arctan\sqrt{\frac{1-xy}{xy}} \\
&= \arctan\sqrt{\omega(xy)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(xy)}}
\end{aligned}$$

となる。次に，直角三角形 ABD において，辺 AD に対し，

$$\begin{aligned}
|AD| &= \sqrt{|AB|^2 + |BD|^2} \\
&= \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2} \\
&= \sqrt{\omega(x) + \omega(x)\omega(y) + \omega(y)} \\
&= \sqrt{\omega(xy)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに，

$$\begin{aligned} v(T(x,y)) &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,|BC||CD||AB| \\ &= \frac{1}{6}\,\omega(x)\,\omega(y) \\ &= \frac{1}{6}\,(\omega(xy)-\omega(x)-\omega(y)) \end{aligned}$$

と表せる。 ∎

補題 3.17 開区間 $(0,1)$ の任意の元 x，y_1，y_2 に対し，

$$[T(x,y_1)]+[T(xy_1,y_2)]=[T(x,y_2)]+[T(xy_2,y_1)] \tag{3.6}$$

となる。

証明 証明の概略を述べる。

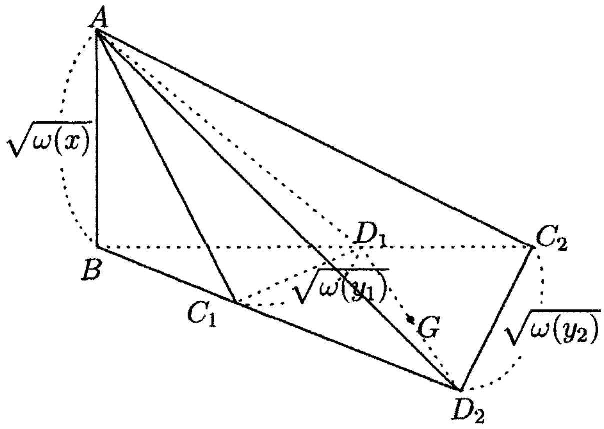


図 3.5: 四面体 $T(x,y_1)$ と四面体 $T(x,y_2)(1)$

図3.5のように，四面体 $T(x,y_1)$,$T(x,y_2)$ をそれぞれ，辺 AB を共通にもつ四面体 ABC_1D_1，ABC_2D_2 とする。ここで，

$$\angle C_1BD_1=\angle C_2BD_2=\arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}$$

であるから，$y_1<y_2$ として，C_1D_1 と C_2D_2 は交わらず，$BD_2\perp C_1D_1$，$BC_2\perp C_2D_2$ となるものと仮定する。このとき，$\angle D_1C_1D_2=\angle D_1C_2D_2=\frac{\pi}{2}$ より，C_1,D_1,C_2,D_2 は，線分 D_1D_2 の中点 G を中心とする同一円周上にある。さらに，A，C_1，D_1，C_2，D_2 を通る球を S とし，S の中心を H とすると，GH と 面 BD_1D_2 は垂直になる（図3.6参照)。

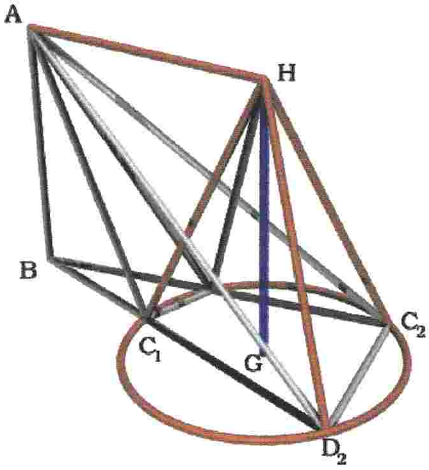


図 3.6: 四面体 $T(x,y_1)$ と四面体 $T(x,y_2)$(2)

次に，面 ABD_1，ABD_2 への H の射影をそれぞれ P_1，P_2 とし，多面体 $ABD_1D_2HP_1P_2$，$AHP_2C_1D_1$，$D_2HP_2C_1D_1$，AHD_1P_1 をとり，それぞれ M，P，Q，R とおく（図 3.7，3.8 参照）。このとき，

$$M = T(x,y_1) + P + Q + R \tag{3.7}$$

となる。y_1，y_2 の大小関係が変わっても，P，Q にマイナスがかかるだけで，後の議論に変化はない。

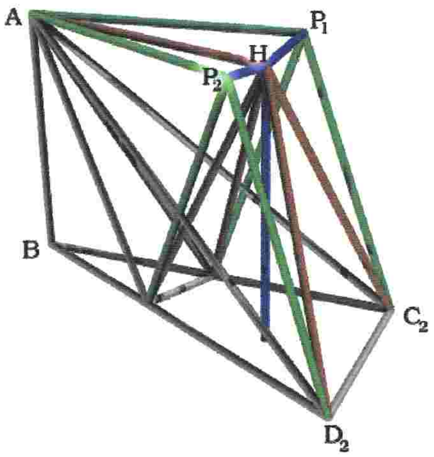


図 3.7: 四面体 $T(x,y_1)$ と四面体 $T(x,y_2)$(3)

平面 ABC_2 と S が交わってできる P_1 を中心とする円を K とすると，A，C_2，D_1 は，S 上かつ面 ABC_2 の内部にあるので，K の円周上にある。よって，

$$|P_1A| = |P_1D_1| = |P_1C_2|$$

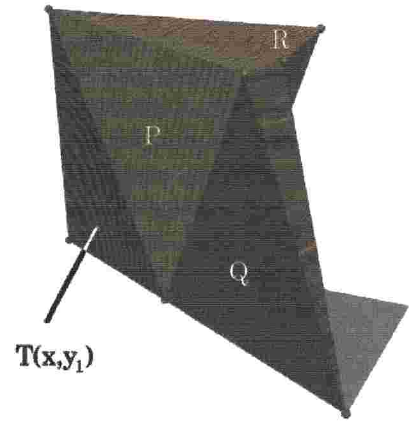


図 3.8: 四面体 $T(x, y_1)$ と四面体 $T(x, y_2)(4)$

となる。また，平面 ABC_1 と S が交わってできる P_2 を中心とする円を L とすると，同様に，

$$|P_2A| = |P_2C_1| = |P_2D_2|$$

となる。

GH と面 ABC_2 は平行なので，G と H は面 ABC_2 から等距離にあり，D_2 と面 ABC_2 の距離は，その 2 倍である。ゆえに，P_1H と C_2D_2 はそれぞれ面 ABC_2 に垂直で，$|C_2D_2| = 2|P_1H|$ となる。また，GH と面 ABC_1 は平行なので，同様に，P_2H と C_1D_1 はそれぞれ面 ABC_1 に垂直で，$|C_1D_1| = 2|P_2H|$ を得る。よって，補題3.15 より，$P \in \mathcal{Z}$，$Q \in \mathcal{Z}$ となる。つまり，

$$[[P]] = [[Q]] = 0 \tag{3.8}$$

である。

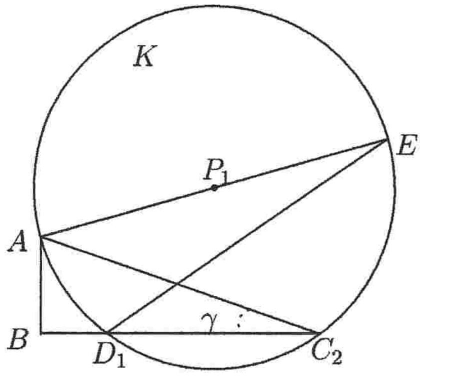


図 3.9: 円 K

最後に，Rについて考える。$\angle AC_2B=\gamma$とし，線分AEがKの直径となるように点Eをとる。このとき，円周角AED_1と円周角AC_2D_1は大きさが等しいので，

$$\angle AED_1=\gamma=\arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(y_2)}}$$

となる（図3.9参照）。

(3.4) より，$|AD_1|=\sqrt{\omega(xy_1)}$となるので，

$$\begin{aligned}|D_1E| &= |AD_1|\cot\gamma\\ &= \sqrt{\omega(xy_1)}\sqrt{\omega(y_2)}\end{aligned}$$

となる。

Hに関してAと対称な点Qをとる。このとき，

$$|EQ|=2|P_1H|=|C_2D_2|=\sqrt{\omega(y_2)}$$

である。よって，

$$AD_1\perp D_1E\perp EQ\perp AD_1$$

$$|AD_1|=\sqrt{\omega(xy_1)}\ ,\ |D_1E|=\sqrt{\omega(xy_1)\omega(y_2)}\ ,\ |EQ|=\sqrt{\omega(y_2)}$$

より，四面体AD_1EQは$T(xy_1,y_2)$となる。四角錐D_1HP_1EQをNとおくと，

$$T(xy_1,y_2)=R+N$$

であることは明らかである。つまり，

$$[[T(xy_1,y_2)]]=[[R]]+[[N]] \tag{3.9}$$

である。また，$|P_1E|=|P_1D_1|$なので，補題3.15より，$N\in\mathcal{Z}$である。つまり，

$$[[N]]=0 \tag{3.10}$$

である。

ここで，(3.7)，(3.8)，(3.9)，(3.10) より，

$$[[M]]=[[T(x,y_1)]]+[[T(xy_1,y_2)]]$$

となる。y_1，y_2を入れかえても同様に，

$$[[M]]=[[T(x,y_2)]]+[[T(xy_2,y_1)]]$$

が得られ，

$$[[T(x,y_1)]]+[[T(xy_1,y_2)]=[[T(x,y_2)]]+[[T(xy_2,y_1)]]$$

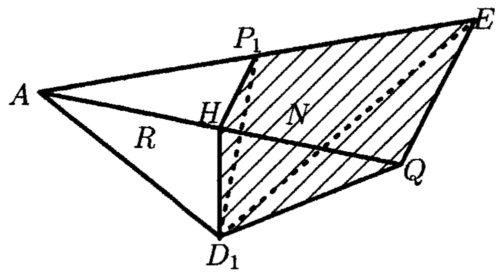


図 3.10: 四面体 R と四角錐 N

となる。

一方，(3.5) より，

$$\begin{aligned}
v(T(x,y_1)) + v(T(xy_1,y_2)) &= \frac{1}{6}(\omega(xy_1) - \omega(x) - \omega(y_1) + \omega(xy_1y_2) - \omega(xy_1) - \omega(y_2)) \\
&= \frac{1}{6}(\omega(xy_1y_2) - \omega(x) - \omega(y_1) - \omega(y_2)) \\
&= v(T(x,y_2)) + v(T(xy_2,y_1))
\end{aligned}$$

となり，定理3.12 より (3.6) が成り立つ。 ∎

補題 3.18 任意の x (>0)，y (>0)，z (>0) に対し，

$$\begin{aligned}
x\left[\left[T\left(\frac{x+y}{x+y+z},\frac{x}{x+y}\right)\right]\right] + y\left[\left[T\left(\frac{x+y}{x+y+z},\frac{y}{x+y}\right)\right]\right] \\
= x\left[\left[T\left(\frac{x+z}{x+y+z},\frac{x}{x+z}\right)\right]\right] + z\left[\left[T\left(\frac{x+z}{x+y+z},\frac{z}{x+z}\right)\right]\right] \quad (3.11)
\end{aligned}$$

となる。

証明

四面体 $OABC$ をとり，

$$OA \perp OB \perp OC \perp OA$$

$$|OA| = \sqrt{yz}\ ,\ |OB| = \sqrt{xz}\ ,\ |OC| = \sqrt{xy}$$

と仮定する。このとき，

$$|AB| = \sqrt{z(x+y)}\ ,\ |BC| = \sqrt{x(y+z)}\ ,\ |AC| = \sqrt{y(x+z)}$$

である。次に，面 OCD と AB が垂直になり，

$$(\text{四面体}\,OABC) = (\text{四面体}\,ADOC) + (\text{四面体}\,BDOC)$$

となるように点 D をとると，

$$BD \perp DO \perp OC \perp BD$$

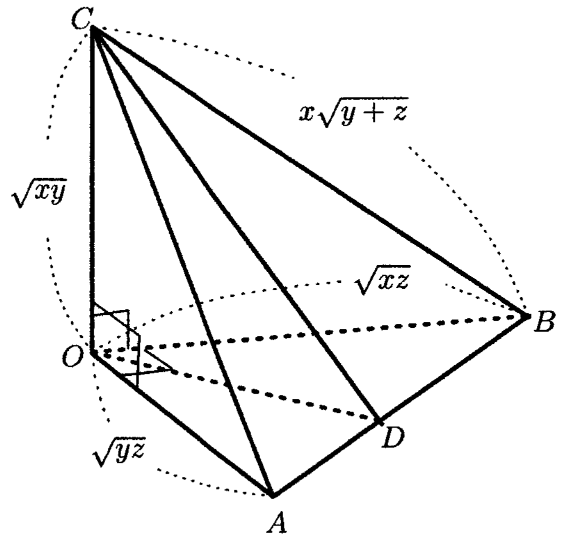


図 3.11: 四面体 $OABC$

$$\cos\angle OBD = \cos\angle OBA = \frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{z(x+y)}} = \sqrt{\frac{x}{x+y}}$$

$$\tan\angle DBO = \tan\angle OBA = \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{xz}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$|BD| = |OB|\cos\angle OBD = \sqrt{xz}\sqrt{\frac{x}{x+y}} = x\sqrt{\frac{z}{x+y}}$$

$$|DO| = |BD|\tan\angle DBO = x\sqrt{\frac{z}{x+y}}\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y}}$$

となり，

$$(\text{四面体}\,BDOC) = T\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right)^{(x)}$$

を得る。また，同様に，

$$(\text{四面体}\,ADOC) = T\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right)^{(y)}$$

が成り立つ。よって，

$$\begin{aligned} [[(\text{四面体}\,OABC)]] &= [[(\text{四面体}\,BDOC)]] + [[(\text{四面体}\,ADOC)]] \\ &= x\left[\left[T\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right)\right]\right] + y\left[\left[T\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right)\right]\right] \end{aligned}$$

ゆえ，四面体 $OABC$ は (3.11) の左辺になる。

一方，面 ACE と OB が垂直になり，四面体 $OABC$ が四面体 $OACE$ と四面体 $BACE$ の和となるように点 E をとると，同様にして，四面体 $OABC$ は (3.11) の右辺ともなる。したがって，命題は成り立つ。 ∎

補題 3.19

$$\xi + \eta + \zeta = \pi$$

をみたすように開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ の元 ξ，η，ζ をとる。

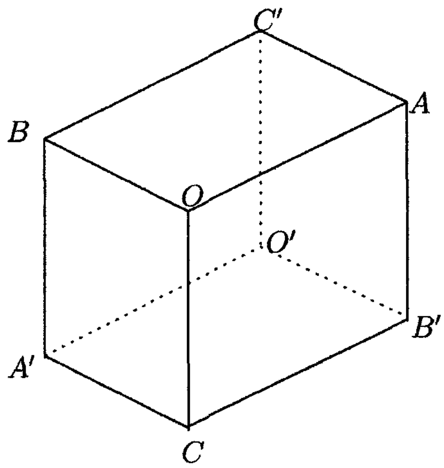


図 3.12: 直方体 R

このとき，図 3.12 のように，頂点 O，A，B，C，O'，A'，B'，C' からなる直方体で，平面 $OAO'A'$ と平面 $OBO'B'$ のなす角が ξ，平面 $OBO'B'$ と平面 $OCO'C'$ のなす角が η，平面 $OCO'C'$ と平面 $OAO'A'$ のなす角が ζ となる直方体 R が存在する。

証明 α，β，γ を

$$\xi + \eta = \alpha = \pi - \zeta \ , \ \eta + \zeta = \beta = \pi - \xi \ , \ \zeta + \xi = \gamma = \pi - \eta$$

となる数とする。このとき，

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \ , \ \beta \ , \ \gamma < \pi$$

より，

$$\cos\alpha < 0 \ , \ \cos\beta < 0 \ , \ \cos\gamma < 0$$

である。

ここで，図 3.13 のように，平面 P 上の 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を，

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{c}| = 1$$

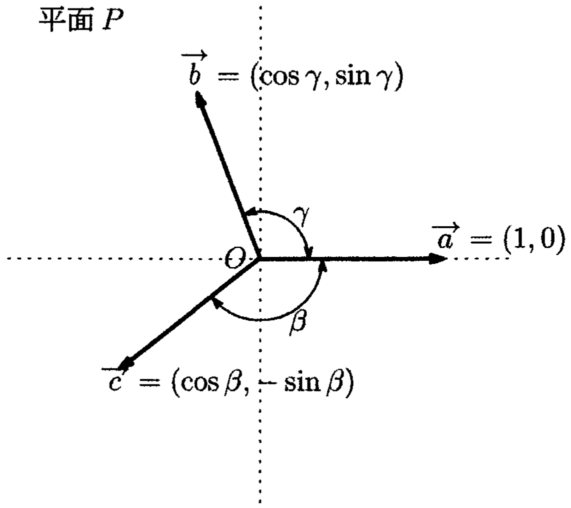


図 3.13: 平面 P 上にとった 3 つのベクトル

をみたすようにとる。さらに，平面に垂直で，長さが 1 のベクトル $\overrightarrow{n}$ をとる。このとき，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ を

$$\overrightarrow{e_1}=(\sin\alpha)\overrightarrow{a}+\left(\sin\alpha\sqrt{\frac{-\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}}\right)\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{e_2}=(\sin\beta)\overrightarrow{b}+\left(\sin\beta\sqrt{\frac{-\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}}\right)\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{e_3}=(\sin\gamma)\overrightarrow{c}+\left(\sin\gamma\sqrt{\frac{-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}}\right)\overrightarrow{n}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} &= \left((\sin\alpha)\overrightarrow{a}+\left(\sin\alpha\sqrt{\frac{-\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}}\right)\overrightarrow{n}\right)\cdot\left((\sin\beta)\overrightarrow{b}+\left(\sin\beta\sqrt{\frac{-\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}}\right)\overrightarrow{n}\right)\\
&= \sin\alpha\sin\beta\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\sin\alpha\sin\beta\sqrt{(\cos\gamma)^2}\\
&= \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\beta(-\cos\gamma)\\
&= 0
\end{aligned}$$

より，$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$ となる。同様に，$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}=0$，$\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_1}=0$ より，$\overrightarrow{e_2}\perp\overrightarrow{e_3}$，$\overrightarrow{e_3}\perp\overrightarrow{e_1}$ が得られる。

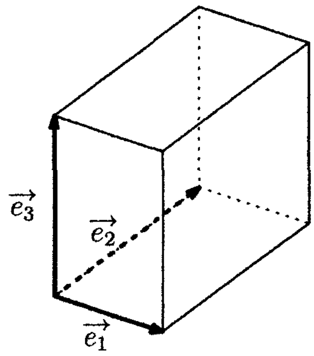


図 3.14: 直方体

次に，図3.14のように，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ を用いて直方体をつくる。このとき，

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\overrightarrow{a} + \sin\beta\overrightarrow{b} + \sin\gamma\overrightarrow{c} &= \begin{pmatrix}\sin\alpha + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta \\ 0 + \sin\beta\sin\gamma - \sin\gamma\sin\beta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\sin\alpha + \sin(\beta+\gamma) \\ 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\sin\alpha + \sin(-\alpha) \\ 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より，ある $k \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = k\overrightarrow{n}$$

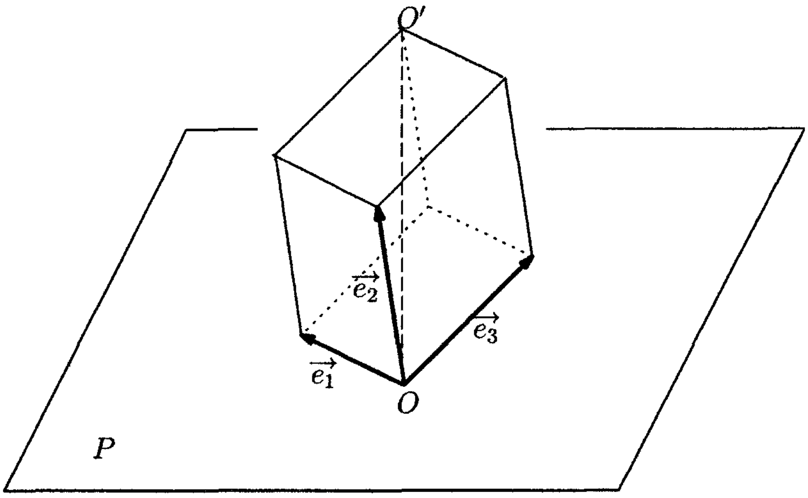
と表すことができる。

この直方体で，O の反対側の頂点を O' とすると，O' の位置ベクトルは $k\overrightarrow{n}$ で，線分 OO' と平面 P は垂直となる。また，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ から平面 P へ下ろした垂線の足は，それぞれ O から $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ の方向に進んだところにあるので，題意をみたす。

∎

3.3 デーン＝シドレールの定理(2) -証明の代数的部分-

1968年，イェッセンは，シドレールの幾何学的な補題に留意しながら，デーン＝シドレールの定理における代数学的な部分の証明を簡略化させた。イェッセンの示した補題は以下のようなものである。（このうち，補題3.20，3.21は，補題3.22の証明に用いるもので，デーン＝シドレールの定理の証明に直接用いるのは，補題3.22のみである。）



補題 3.20 開区間 $(0,1)$ の任意の元 x, y に対し，

$$F(x,y) = F(y,x)$$

$$F(x,y_1) + F(xy_1,y_2) = F(x,y_2) + F(xy_2,y_1)$$

をみたす実数値関数 F をとる。このとき，開区間 $(0,1)$ で定義され，

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - f(xy)$$

をみたす実数値関数 f が存在する。

補題 3.21 $\Phi(u,v)$ を $u>0$, $v>0$ で定義される実数値関数とし，

$$\Phi(u,v) = \Phi(v,u)$$

$$\Phi(\lambda u,v) = \lambda\Phi(u,v)$$

$$\Phi(u,v_1) + \Phi(u+v_1,v_2) = \Phi(u,v_2) + \Phi(u+v_2,v_1)$$

をみたすものとする。このとき，$u>0$ で定義される実数値関数 g で，

$$g(u) + g(v) - g(uv) = 0$$

かつ

$$\Phi(u,v) = ug(u) + vg(v) - (u+v)g(u+v)$$

となる g が存在する。

補題 3.22 $F(x,y)$ を開区間 $(0,1)$ で定義される実数値関数とし，$(0,1) \ni x, y, y_1, y_2$ に対し，

$$F(x,y) = F(y,x) \tag{3.12}$$

$$F(x,y_1) + F(xy_1,y_2) = F(x,y_2) + F(xy_2,y_1) \tag{3.13}$$

$$xF\left(\frac{x+y_1}{x+y_1+y_2}, \frac{x}{x+y_1}\right) + y_1F\left(\frac{x+y_1}{x+y_1+y_2}, \frac{y_1}{x+y_1}\right)$$
$$= xF\left(\frac{x+y_2}{x+y_1+y_2}, \frac{x}{x+y_2}\right) + y_1F\left(\frac{x+y_2}{x+y_1+y_2}, \frac{y_2}{x+y_2}\right) \tag{3.14}$$

をみたすものとする。このとき，開区間 $(0,1)$ で定義される実数値関数 h で，

$$x+y=1 \ ((0,1) \ni x,y) \ \Rightarrow \ xh(x)+yh(y)=0$$

かつ

$$F(x,y) = h(x)+h(y)-h(xy)$$

となるものが存在する。

補題3.20，3.21，3.22の証明は，イェッセンにより簡略化されたものとはいえ，選択公理に依存しており，それらの証明内容は非常に多くの代数的な議論を用いることとなる。そのため，証明の詳細は [1] を参照して頂きたい。

さて，補題3.22は，デーン＝シドレールの定理の十分条件を示すために用いる加法的関数を準備するために必要で，その加法的関数を準備するにあたって，いくつかの概念を導入する。

まず，次の概念を定める。

定義 3.23 ある $\mathcal{P}$ の部分集合 $\{N_\alpha\} \subset \mathcal{P}$ があって，任意の $A \in \mathcal{P}$ に対し，

$$[[A]] = \sum_{finite} \lambda_\alpha [[N_\alpha]]$$

となる $\lambda_\alpha \in \mathbb{R} - 0$ が唯一つ存在するとき，N_α を **polyhedral basis** という。

次に，多面体の独立性を，以下のように定める。

定義 3.24 H を $\mathcal{P}$ の部分集合とする。このとき，H が**独立**であるとは，任意の $P_i \in H$，$a_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i[[P_i]] = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0 \ (i=1,2,\cdots,m)$$

であることをいう。

多面体全体の集合に関しては，次のことがいえる。

補題 3.25 $\mathcal{P}$ において，polyhedral basis となる $\{N_\alpha\}$ が存在する。

証明 まず，Zorn の補題を用いて，極大な“独立な多面体の集合”が存在することを示すために，“独立な多面体の集合”から成る全順序集合 $\{H_i | i \in I\}$ に対して，その中のどのメンバーよりも大きい独立な集合があることを証明する。すなわち，$\bigcup_{i\in I} H_i = H^*$ とおき，H^* が独立であることを示す。ある $a_j \in \mathbb{R}$，$P_j \in H^*$ に対し（$j = 1, 2, \cdots$），$\sum_{finite} a_j[[P_j]] = 0$ とする。適当な k_j に対し，$P_j \in H_{k_j}$ であり，また，$\{H_i | i \in I\}$ は全順序集合であるので，H_{k_j} のなかで最も大きい集合を H_k とすると，任意の j に対し，$P_j \in H_k$ となる。よって，H_k は独立ゆえ，$\sum_{finite} a_j[[P_j]] = 0$ であれば $a_j = 0$ となるので，H^* も独立である。ゆえに，Zorn の補題より，ある極大な“独立な多面体の集合”$\{N_\alpha\}$ が存在する。

次に，この $\{N_\alpha\}$ が polyhedral basis であることを示す。任意の $A \in \mathcal{P} - \{N_\alpha\}$ をとると，$\{N_\alpha\}$ は極大なので，$\{A, N_\alpha\}$ は独立でない。すなわち，ある $\nu \neq 0$ に対し，

$$\nu[[A]] = \sum_{finite} \lambda_\alpha[[N_\alpha]] \tag{3.15}$$

となる。(3.15) の両辺を $\frac{1}{\nu}$ 倍すると，

$$[[A]] = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha[[N_\alpha]] \qquad \left(\lambda'_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\nu}\right)$$

を得る。ゆえに，任意の $[[A]]$ は $[[N_\alpha]]$ を用いて表すことができる。

また，$[[A]]$ を，

$$[[A]] = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha[[N_\alpha]] \ , \ [[A]] = \sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha[[N_\alpha]]$$

と２通りに表せるものと仮定する。このとき，２式の差をとって同類項をまとめると，

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\lambda_\alpha - \mu_\alpha)[[N_\alpha]] = 0$$

となり，$\lambda_\alpha - \mu_\alpha \neq 0$ とすると，N_α が独立であることに矛盾する。したがって，N_α は polyhedral basis である。 ∎

先に述べたイェッセンの代数学的考察に話題を戻す。

polyhedral basis $B = \{N_\alpha\}$ を固定する。このとき，開区間 $(0,1)$ の任意の元 x，y に対し，

$$[[T(x,y)]] = \sum_{\alpha} F_\alpha(x,y)[[N_\alpha]] \tag{3.16}$$

となるよう $F_\alpha : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ を定める。このとき，F_α は，補題 3.22 の３つの条件式 (3.12)，(3.13)，(3.14) をみたすことを示そう。

- F_α について考える。
$$[[T(y,x)]] = \sum_\alpha F_\alpha(y,x)[[N_\alpha]]$$
であるが，$[[T(x,y)]] = [[T(y,x)]]$ より，
$$F_\alpha(x,y) = F_\alpha(y,x) \tag{3.17}$$
が成り立つ。

- また，$(0,1) \ni x, y_1, y_2$ に対して，
$$[[T(x,y_1)]] + [[T(xy_1,y_2)]] = \sum_\alpha F_\alpha(x,y_1)[[N_\alpha]] + \sum_\alpha F_\alpha(xy_1,y_2)[[N_\alpha]]$$
$$[[T(x,y_2)]] + [[T(xy_2,y_1)]] = \sum_\alpha F_\alpha(x,y_2)[[N_\alpha]] + \sum_\alpha F_\alpha(xy_2,y_1)[[N_\alpha]]$$
であるが，補題 3.17 より，
$$[T(x,y_1)] + [T(xy_1,y_2)] = [T(x,y_2)] + [T(xy_2,y_1)]$$
ゆえ，F_α は，
$$F_\alpha(x,y_1) + F_\alpha(xy_1,y_2) = F_\alpha(x,y_2) + F_\alpha(xy_2,y_1) \tag{3.18}$$
をみたす。

- 同様に，補題 3.18 により，F_α は，
$$\begin{aligned} &xF_\alpha\left(\frac{x+y_1}{x+y_1+y_2}, \frac{x}{x+y_1}\right) + y_1F_\alpha\left(\frac{x+y_1}{x+y_1+y_2}, \frac{y_1}{x+y_1}\right) \\ &\qquad = xF_\alpha\left(\frac{x+y_2}{x+y_1+y_2}, \frac{x}{x+y_2}\right) + y_2F_\alpha\left(\frac{x+y_2}{x+y_1+z_2}, \frac{y_2}{x+y_2}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$
をみたす。

よって，(3.17)，(3.18)，(3.19) と補題 3.22 より，
$$x + y = 1 \Rightarrow xh_\alpha(x) + yh_\alpha(y) = 0 \tag{3.20}$$
をみたす $h_\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}$ が存在し，任意の x, y に対し，
$$F_\alpha(x,y) = h_\alpha(x) + h_\alpha(y) - h_\alpha(xy) \tag{3.21}$$
をみたす。
次の補題 3.26 において，上の h_α を用いて，加法的関数を準備する。

補題 3.26 $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \tan x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) & (x \neq \frac{k\pi}{2}) \\ 0 & (x = \frac{k\pi}{2}) \end{cases} \tag{3.22}$$

と定める $(k \in \mathbb{Z})$。このとき，φ_α は加法的である。

証明 まず，

$$x + y = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(y) = 0 \tag{3.23}$$

であることを示す。

k を奇数とし，$x \neq \frac{m\pi}{2}$，$y \neq \frac{n\pi}{2}$ $(\mathbb{Z} \ni m, n)$ であるとき，

$$\sin^2 y = \cos^2 x \ , \ \tan y = \cot x$$

より，

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(y) &= \tan x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) + \tan y \cdot h_\alpha(\sin^2 y) \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x}(\sin^2 x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) + \cos^2 x \cdot h_\alpha(\cos^2 x)) \end{aligned}$$

ゆえ，(3.20) より，

$$\frac{1}{\sin x \cos x}(\sin^2 x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) + \cos^2 x \cdot h_\alpha(\cos^2 x)) = 0$$

となり，(3.23) は成り立つ。次に，k を偶数とし，$x \neq \frac{m\pi}{2}$，$y \neq \frac{n\pi}{2}$ であるとき，

$$\tan x = -\tan y \ , \ \sin^2 x = \sin^2 y$$

より，

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(y) &= \tan x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) + \tan y \cdot h_\alpha(\sin^2 y) \\ &= \tan x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) - \tan x \cdot h_\alpha(\sin^2 x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得るので，(3.23) は成り立つ。また，$x = \frac{m\pi}{2}$，$y = \frac{n\pi}{2}$ のとき，(3.23) は明らかに成り立つ。

次に，$A \in \mathcal{P}$ をとり，A のすべての辺の長さを $l_1, l_2, \cdots, l_s$，A のすべての二面角の大きさを $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ とする。このとき，$\sum_{i=1}^{s} l_i \varphi_\alpha(\gamma_i)$ を $\hat{\varphi}_\alpha(A)$ と表す。ここでは，まだ φ_α が加法的であるかどうか分かっていないので，この $\hat{\varphi}_\alpha(A)$ が不変量であるかどうか分からないことに注意する。そこで，まず，$\hat{\varphi}_\alpha(T(x,y))$ について，

$$\hat{\varphi}_\alpha(T(x,y)) = F_\alpha(x,y) \tag{3.24}$$

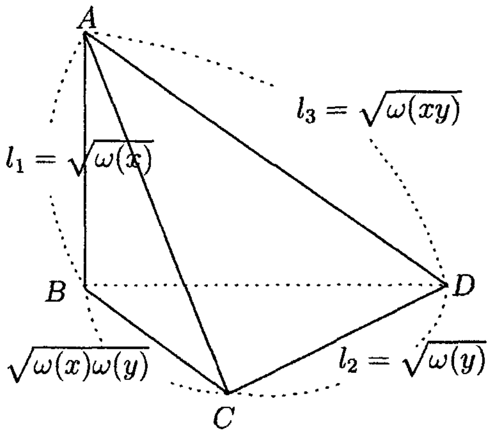


図 3.15: 四面体 $T(x,y)$

であることを示す。

図3.15の $T(x,y)$（= 四面体 $ABCD$）において，

$$|AB| = l_1 = \sqrt{\omega(x)}\ ,\ |CD| = l_2 = \sqrt{\omega(y)}\ ,\ |AD| = l_3 = \sqrt{\omega(xy)}$$

とすると，

$$\gamma_1 = \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}\ ,\ \gamma_2 = \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(y)}}\ ,\ \gamma_3 = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{\omega(xy)}}$$

と表せるので，

$$\sin^2\gamma_1 = \frac{1}{1+\cot^2\gamma_1} = \frac{1}{1+\omega(x)} = x\ ,\ \sin^2\gamma_2 = y\ ,\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3\right) = xy$$

を得る。よって，(3.22)，(3.23)，(3.21) より，

$$\begin{aligned}
&l_1\varphi_\alpha(\gamma_1) + l_2\varphi_\alpha(\gamma_2) + l_3\varphi_\alpha(\gamma_3)\\
&= l_1\varphi_\alpha(\gamma_1) + l_2\varphi_\alpha(\gamma_2) - l_3\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3\right)\\
&= l_1\tan\gamma_1\cdot h_\alpha(x) + l_2\tan\gamma_2\cdot h_\alpha(y) - l_3\tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3\right)\cdot h_\alpha(xy)\\
&= \sqrt{\omega(x)}\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}h_\alpha(x) + \sqrt{\omega(y)}\frac{1}{\sqrt{\omega(y)}}h_\alpha(y) - \sqrt{\omega(xy)}\frac{1}{\sqrt{\omega(xy)}}h_\alpha(xy)\\
&= h_\alpha(x) + h_\alpha(y) - h_\alpha(xy)\\
&= F_\alpha(x,y)
\end{aligned}$$

となる。また，四面体 $ABCD$ の残りの二面角の大きさは $\frac{\pi}{2}$ なので，(3.22) より，

$$\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

となり，(3.24) が成り立つ。ゆえに，(3.24)，(3.16) より，

$$[[T(x,y)]] = \sum_{\alpha} \hat{\varphi}_{\alpha}(T(x,y))[[N_{\alpha}]] \tag{3.25}$$

を得る。

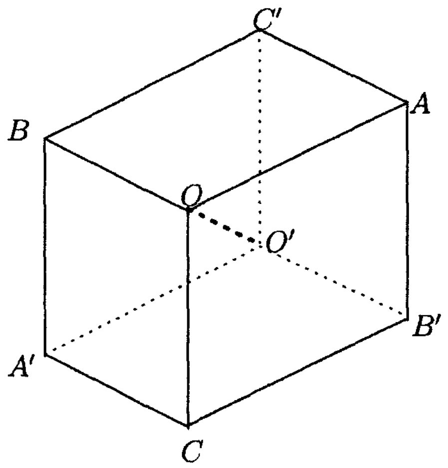


図 3.16: 直方体 R

ここで，開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ の元 ξ，η，ζ をとり，

$$\xi + \eta + \zeta = \pi$$

とする。補題 3.19 において，題意をみたすように直方体 R を 6 つの四面体に分解したとき，それぞれの四面体を $T_1, T_2, \cdots, T_6$ とおく。このとき，T_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ は，適当に λ_i，x_i，y_i を与えると，$\lambda_i T(x_i, y_i)$ と表せるので，(3.25) より，

$$[[T_i]] = \sum_{\alpha} \hat{\varphi}_{\alpha}(T_i)[[N_{\alpha}]] \tag{3.26}$$

が成り立つ。一方，$T_1 + T_2 + \cdots + T_6 = R$ より，

$$[[T_1]] + [[T_2]] + \cdots + [[T_6]] = 0$$

ゆえ，(3.26) を代入すると，

$$0 = [[T_1]] + [[T_2]] + \cdots + [[T_6]] = \sum_{i} \sum_{\alpha} \hat{\varphi}_{\alpha}(T_i)[[N_{\alpha}]] = \sum_{\alpha} \left(\sum_{i} \hat{\varphi}_{\alpha}(T_i) \right) [[N_{\alpha}]]$$

となり，$\{N_{\alpha}\}$ は polyhedral basis なので，

$$\hat{\varphi}_{\alpha}(T_1) + \hat{\varphi}_{\alpha}(T_2) + \cdots + \hat{\varphi}_{\alpha}(T_6) = 0 \tag{3.27}$$

を得る。

(3.27) の左辺 $\sum_{i=1}^{6}\hat{\varphi}_\alpha(T_i)$ を定義に戻って考えると，各 T_i について，辺 OO'，OA，OB，OC，$O'A'$，$O'B'$，$O'C'$ 以外の辺に対する二面角の大きさは，すべて $\frac{\pi}{2}$ であり，また，T_i の辺 OA，OB，OC，$O'A'$，$O'B'$，$O'C'$ における二面角をそれぞれ足し合わせると，それぞれの大きさは $\frac{\pi}{2}$ となり，(3.23) より，それらの辺に対応する項は消えるから，辺 OO' の長さを l とすると，(3.27) は，

$$2l\varphi_\alpha(\xi)+2l\varphi_\alpha(\eta)+2l\varphi_\alpha(\zeta)+\sum l_i\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

となる。つまり，

$$\varphi_\alpha(\xi)+\varphi_\alpha(\eta)+\varphi_\alpha(\zeta)=0 \tag{3.28}$$

を得る。(3.23) より，

$$\varphi_\alpha(\pi-\zeta)=-\varphi_\alpha(\zeta)$$

となるので，(3.28) は，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ni\xi,\eta$，$\xi+\eta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ に対して，

$$\varphi_\alpha(\xi)+\varphi_\alpha(\eta)=\varphi_\alpha(\xi+\eta) \tag{3.29}$$

と表せる。さらに，

$$\xi'=\frac{\pi}{2}-\xi\ ,\ \eta'=\frac{\pi}{2}-\eta$$

ととりなおすと，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ni\xi',\eta',\xi'+\eta'$ に対しても，(3.23)，(3.29) より，

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\xi')+\varphi_\alpha(\eta') &= -(\varphi_\alpha(\xi)+\varphi_\alpha(\eta))\\ &= -\varphi_\alpha(\xi+\eta)\\ &= -\varphi_\alpha(\pi-\xi'-\eta')\\ &= \varphi_\alpha(\xi'+\eta')\end{aligned}$$

となり，(3.29) は，任意の $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ni\xi,\eta$ に対して成立する。

最後に，任意の $\mathbb{R}\ni\xi,\eta$ に対し，$\mathbb{Z}\ni k,m$ を適当に選び，

$$\xi^*=\frac{k\pi}{2}-\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ \eta^*=\frac{m\pi}{2}-\eta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

をとる。このとき，(3.23) より，

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\xi)+\varphi_\alpha(\eta) &= -\varphi_\alpha(\xi^*)-\varphi_\alpha(\eta^*)\\ &= -\varphi_\alpha(\xi^*+\eta^*)\\ &= -\varphi_\alpha\left(\frac{(k+m)\pi}{2}-\xi-\eta\right)\\ &= \varphi_\alpha(\xi+\eta)\end{aligned}$$

となり，(3.29) は，任意の $\mathbb{R} \ni \xi, \eta$ に対して成り立つ。したがって，φ_α は加法的である。 ∎

補題3.26 より，φ_α は加法的なので，任意の $A \in \mathcal{P}$ に対し，φ_α で定まる A の不変量 $\varphi_\alpha(A)$ を考えることができる。このとき，補題2.12 より，

$$A = P + Q \quad (\mathcal{P} \ni P, Q) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_\alpha(A) = \varphi_\alpha(P) + \varphi_\alpha(Q) \tag{3.30}$$

が成り立つ。

補題 3.27 φ_α を，補題3.26 の加法的関数とする。このとき，任意の $A \in \mathcal{P}$ に対し，

$$[[A]] = \sum_\alpha \varphi_\alpha(A)[[N_\alpha]] \tag{3.31}$$

が成り立つ。

証明 補題3.26 の証明（(3.25) 参照）より，四面体 $T(x, y)$ に対し，

$$[[T(x, y)]] = \sum_\alpha \varphi_\alpha(T(x, y))[[N_\alpha]]$$

が成り立つ。また，$\lambda > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(T(x, y)^{(\lambda)}) &= \sum \lambda l_i \varphi_\alpha(\gamma_i) \\
&= \lambda \sum l_i \varphi_\alpha(\gamma_i) \\
&= \lambda \varphi_\alpha(T(x, y))
\end{aligned} \tag{3.32}$$

より，任意の $T(x, y)^{(\lambda)}$ （$\lambda > 0$） に対しても，

$$[[T(x, y)^{(\lambda)}]] = \sum_\alpha \varphi_\alpha \left(T(x, y)^{(\lambda)}\right) [[N_\alpha]]$$

が成り立つ。

ここで，任意の $A \in \mathcal{P}$ に対し，A を有限個の四面体に分解する。さらに，図 3.17 のように，分解したそれぞれの四面体に対し，内接球をとり，内接球の中心から各面へ垂線を下ろし，その垂線の足から各辺に垂線を下ろし，12 個の四面体に分解する。このとき，12 個に分解された四面体はすべて，そのとり方から $\lambda_i T(x_i, y_i)$ （$\lambda_i > 0$） で表せるので，

$$A = \sum_i T(x_i, y_i)^{(\lambda_i)} \tag{3.33}$$

と分解できる。また，(3.30) より，

$$\varphi_\alpha(A) = \sum_i \varphi_\alpha \left(T(x_i, y_i)^{(\lambda_i)}\right) \tag{3.34}$$

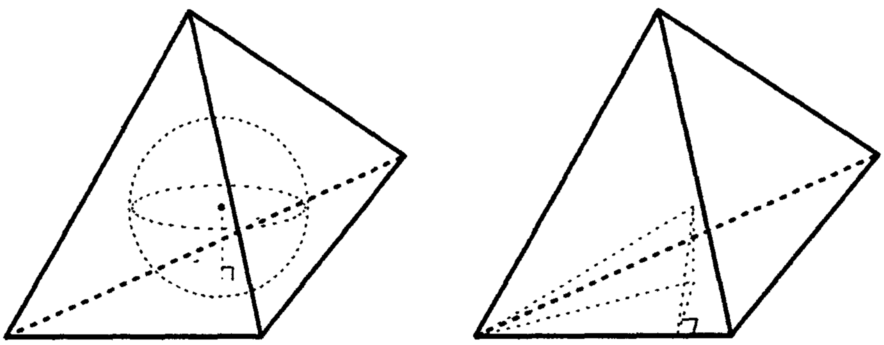


図 3.17: 四面体の分割

が成り立つので，(3.33)，(3.34) より，

$$\begin{aligned}
[[A]] &= \sum_i [[T(x_i, y_i)^{(\lambda_i)}]] \\
&= \sum_i \sum_\alpha \varphi_\alpha\left(T(x_i, y_i)^{(\lambda_i)}\right)[[N_\alpha]] \\
&= \sum_\alpha \left(\sum_i \varphi_\alpha\left(T(x_i, y_i)^{(\lambda_i)}\right)\right)[[N_\alpha]] \\
&= \sum_\alpha \varphi_\alpha(A)[[N_\alpha]]
\end{aligned}$$

を得る。 ∎

デーン＝シドレールの定理は，補題 3.27 を用いて示される。

証明　（定理 3.14 の証明）

$A \overset{d}{\sim} B$ であるための必要性は，すでにハドヴィゲールの定理で証明している。そこで十分性を示す。すなわち，$f(\pi) = 0$ をみたす任意の加法的関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対して，$f(A) = f(B)$ であれば $A \overset{d}{\sim} B$ であることを証明する。

補題 3.26 の φ_α をとると，φ_α も加法的なので，

$$\varphi_\alpha(A) = \varphi_\alpha(B)$$

となる。このとき，補題 3.27 より，

$$[[A]] = \varphi_\alpha(A)[[N_\alpha]] = \varphi_\alpha(B)[[N_\alpha]] = [[B]]$$

ゆえ，定理 3.12 より，$A \overset{d}{\sim} B$ である。 ∎

3.4 デーン不変量

定義 3.28 A, B をアーベル群とする。このとき，集合 $A \times B$ で生成される自由アーベル群

$$F = \mathbb{Z}\langle (a,b) \mid a \in A, b \in B \rangle$$

を考える。また，F の部分群 R を，次の i),ii) で表される形の元で生成される部分群とする。

i). $(a,b) + (a',b) - (a+a',b)$

ii). $(a,b) + (a,b') - (a,b+b')$

このとき，剰余群 F/R を $A \otimes B$ と表し，A と B の**テンソル積**という。
　また，$A \otimes B$ の元で，(a,b) で代表されるものを単に $a \otimes b$ と表す。

　以下において，加法群 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ のテンソル積 $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ を考えたい。テンソル積の定義より，$n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$(n \cdot a) \otimes b = a \otimes (n \cdot b) = n(a \otimes b)$$

であり，$q = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ についても，

$$\begin{aligned}
(q \cdot a) \otimes b &= \left(\frac{r}{s} \cdot a\right) \otimes b \\
&= r\left(\frac{a}{s} \otimes b\right) \\
&= \frac{a}{s} \otimes (r \cdot b) \\
&= \frac{a}{s} \otimes \left(s \cdot \frac{r}{s} \cdot b\right) \\
&= \left(s \cdot \frac{a}{s}\right) \otimes (q \cdot b) \\
&= a \otimes (q \cdot b)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

定理 3.29 $x_i \in \mathbb{R}$，$y_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ とする。このとき，$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ において，

$$\sum_i x_i \otimes y_i = 0$$

$\iff$『$f(\pi) = 0$ となる任意の加法的関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関して，

$$\sum_i x_i f(y_i) = 0\ 』$$

が成り立つ。

証明　まず，$(\Rightarrow)$ を示す。

$\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ において，$\sum_i x_i\otimes y_i=0$ と仮定する。このとき，テンソルの定義,

$$\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}=F/R$$

で考えると，$\displaystyle\sum_i x_i\otimes y_i$ は R に含まれることになる。

いま，$f(\pi)=0$ となる加法的関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\xrightarrow{\hat{f}}\mathbb{R}$ を

$$\hat{f}(x\otimes y)=xf(y)$$

と定めると，$\hat{f}$ は準同型で，R の生成元 $(a,b)+(a',b)-(a+a',b)$，$(a,b)+(a,b')-(a,b+b')$ については，$\hat{f}$ の値は 0 となる。つまり，$\hat{f}$ は，R 上では 0 である。よって

$$\hat{f}(\sum_i(x_i\otimes y_i))=\sum_i x_if(y_i)=0$$

となる。

次に，$(\Leftarrow)$ を示す。

x_i，y_i は，$f(\pi)=0$ となる任意の加法的関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\sum_i x_if(y_i)=0$ をみたすと仮定する。

いま，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみて，その基底を π を含むようにとり，$\{\pi,p_\alpha\}$ とする。このとき，y_i は，$\mathbb{Q}\ni q^{(i)},{q_\alpha}^{(i)}$ を用いて，

$$y_i=q^{(i)}\pi+\sum_\alpha {q_\alpha}^{(i)}p_\alpha$$

と表すことができる。よって，

$$\begin{aligned}\sum_i x_i\otimes y_i &= \sum_i x_i\otimes q^{(i)}\pi+\sum_{i,\alpha}x_i\otimes {q_\alpha}^{(i)}p_\alpha\\ &= \sum_i\left(q^{(i)}x_i\right)\otimes\pi+\sum_{i,\alpha}\left({q_\alpha}^{(i)}x_i\right)\otimes p_\alpha\\ &= \sum_\alpha\left(\sum_i {q_\alpha}^{(i)}x_i\right)\otimes p_\alpha\end{aligned}\tag{3.35}$$

となる。

いま，任意の α_0 を 1 つ固定し，$\displaystyle\sum_i {q_{\alpha_0}}^{(i)}x_i=0$ を示す。

加法的関数 $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ を,

$$f(p_{\alpha_0})=1\ ,\ f(\pi)=0\ ,\ f(p_\alpha)=0\ \ (\alpha\neq\alpha_0)$$

とする。このとき，仮定より，

$$\begin{aligned}\sum_i x_i {q_{\alpha_0}}^{(i)} &= \sum_i x_i f\left(\sum_\alpha {q_\alpha}^{(i)} p_\alpha + q^{(i)}\pi\right)\\ &= \sum_i x_i f(y_i)\\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに，(3.35) より，$\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ となる。 ∎

定理 3.30 等積な多面体 A, B をとり，A, B のすべての辺の長さをそれぞれ l_i, m_j $(\mathbb{N} \ni i, j)$ で表す。また，長さ l_i, m_j の辺に対応する二面角の大きさを α_i, β_j とする。このとき，

$$\begin{aligned}&[[A]] = [[B]] \quad in\ \hat{G}\\ \Longleftrightarrow &\sum_i l_i \otimes \alpha_i = \sum_j m_j \otimes \beta_j \quad in\ \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 $f(\pi) = 0$ をみたす任意の加法的関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$f(A) = f(B) \Leftrightarrow \sum_i l_i f(\alpha_i) - \sum_j m_j f(\beta_j) = 0$$

であるから，定理 3.14 の証明と定理 3.29 より，

$$\begin{aligned}[[A]] = [[B]]\ in\ \hat{G} &\Leftrightarrow \sum_i l_i \otimes \alpha_i - \sum_j m_j \otimes \beta_j = 0\\ &\Leftrightarrow \sum_i l_i \otimes \alpha_i = \sum_j m_j \otimes \beta_j\end{aligned}$$

となり，命題が成り立つ。 ∎

定義 3.31 すべての辺の長さが l_i，それらの辺における二面角の大きさが α_i で表される多面体 A に対して，

$$D(A) = \sum_i l_i \otimes \alpha_i \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

を対応させる写像

$$\mathcal{P} \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

を**デーン不変量**という。

実は，定理3.30より，Dは$D:\hat{G}\to\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$を引きおこす。容易に分かるように，この$D:\hat{G}\to\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$は準同型で，さらに，定理3.30は，この$D$が単射準同型であることを示している。

はさみ合同群に関して結果をまとめると，

$$\mathbb{R}\xleftarrow[\cong]{v} H\subset G \qquad \text{(同型)}$$

$$G/H=\hat{G}\xrightarrow{D}\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \qquad \text{(単射)}$$

となる。

分解合同に関しては，Dを用いると次のようになる。

定理 3.32 A,Bを任意の多面体とする。このとき，

$$A\overset{d}{\sim}B\iff v(A)=v(B)\ \text{かつ}\ D(A)=D(B)$$

である。

証明 定理3.12と定理3.30より明らかである。 ∎

参考文献

[1] Vladimir G. Boltianskii. *Hilbert 3rd problem.*

[2] Johan L. Dupont. *SCISSORS CONGRUENCES,GROUP HOMOLOGY AND CHARACTERISTIC CLASSES.* World Scientific.

[3] Ruth Kellerhals. *Old and new about Hilbert's third problem.* European women in mathmatics(Loccum,1999),179 - 187. Hindawi Publ. Corp.

[4] ヴェ・ゲ・ボルチャンスキー, ア・エム・ロプシッツ. 『面積と体積』. 東京図書, 1994.

[5] 三宅敏恒. 『入門線形代数』. 培風館.

[6] 堀田良之. 『代数入門 - 群と加群 - 』. 数学シリーズ. 裳華房, 1987.