行列の指数関数について

教科・領域教育学専攻
自 然 系 コ ー ス
M 1 0 1 7 9 I
西 川 昌 美

1 研究の目的

高校で学ぶ数学の背景には, 多くの場面で線形代数の考え方が, 微分積分では冪級数の考え方が含まれている. そこで本研究においては, 線形代数の内容と冪級数に関する理論を通して大学数学の出発点となるような内容を整理することを第一の目的としている.

第二の目的として, 線形代数の内容と冪級数の内容を, 行列の指数関数を通して簡単な微分方程式の理論として融合し, 現実の事象へと適用する計算を行った.

そのような計算を目的とした遠景には数学的活動や数学的モデリングの考えがある. 筆者は卒業研究において高等学校における数学的活動を扱っていることもあり, 本研究においても数学的な活動として, 現実の事象に数学の理論を当てはめるといった数学的モデリングの考えを念頭に置き, 微分方程式の考えを用いて現実の事象を考察する計算例を提示している.

2 研究の内容

本稿では線形代数学の行列の理論, および, 解析学の冪級数の理論を取り上げ, それらを行列の指数関数として結び付け, 微分方程式との関係を述べている.

線形代数学において, 正方行列 A を正則な行列 T を用いて $A = TPT^{-1}$ と表すことは, 行列 A の冪乗を考える際に非常に有用である. 特に, 行列 P の形が可能な限り簡単な形で表されれば, 行列 A の冪乗を容易に計算できる. 行列 P の対角成分以外が 0 であるとき, 行列 A が対角化されているというが, このとき, A の冪乗は容易に計算できる. しかし, このように対角化できない場合もある. その場合, Jordan 標準形を考えることで, A の冪乗の計算が容易になる. この Jordan 標準形の議論を進める上で, 出発点となるのが, Cayley-Hamilton の定理である.

このように本稿では, 線形代数学について行列の基本的な考え方から Jordan 標準形までを扱った. このことは, 今まで筆者自身が曖昧に扱ってきた部分を見直すきっかけとなり, 行列の持つ性質の有用性を感じられるものとなった.

また, 冪級数について扱っているが, この冪級数は, 有限個の項からなる式である多項式を, 無限個の項にまで拡張したものとして考えられる. 冪級数は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表されるため, 多項式と違って収束するかどうかという問題があるが, 一旦これが収束することを確かめれば, 微分などの操作を行う上で, 多項式と同様に扱うことができる.

高校数学においては, 収束の定義が曖昧な形で扱われているが, ここでは厳密な収束の定義を導入し, この冪級数の収束, 微分等について論じている. また, 高校では自然対数の底として e が登場し, 指数関数 e^x が論じられていくが, このあたりの議論は, 高校生にとって不自然な展開に見えることも多いようである. 特に, e の必然性に疑問をもつ高校生は多い. ここでは, 指数関数を冪級数で定義したのち, e を別な形で導入し高校で扱う e^x を再構成した.

また, 本稿において, 注目すべき点は指数関数に行列を代入することである. これは, 指数関数を冪級数で与えたことに加え, 行列の冪乗を考えたこととの深い関連性を示すこととなった. このように, 行列の指数関数として捉えることから, それが任意の 2 次, もしくは 3 次の行列に対して, 収束することとその収束値を示した.

通常の指数関数 e^x は, 微分したものが自分自身と一致するという特異な性質があり, そのことが関数 e^x と微分方程式の密接な関係へとつながっていくが, 行列の指数関数においても, 微分方程式との密接な関係がある.

大まかに言えば微分方程式の理論とは, 状態が数値化される現象において, どういう状態のときにどういう変

化をしていくかが分かっているとき, 全体的な変化の様相を関数として求める問題である.

本稿で扱う扱う微分方程式は, 定数係数の線形微分方程式であり, もっとも簡単なものではあるが, 一般の微分方程式の平衡点の様子はここで扱う種類の微分方程式で考察することができるなど, 基本的であるともいえる.

すなわち, ここで扱う微分方程式とは $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_t = A\boldsymbol{x}_t$ であるが、この方程式の一般解は行列の指数関数によって

$$\boldsymbol{x}_t = \exp(tA)\boldsymbol{x}_0$$

として求められる.

ここでは2次の実行列に対して, 微分方程式の一般解や具体的な解を求め, その様子を相図として表した. このとき, 微分方程式の解を平面上の曲線を捉えると, xy 平面上の任意の点に対し, その点を通る曲線が存在する. また, 解の一意性から, 微分方程式の解の示す曲線のうち, 共有点をもつものはないため, xy 平面全体はそれらの曲線によって, もれなく埋め尽くされる.

最後に, 現実の事象を微分方程式を用いて考察する数理モデルとして, 2種類の生物についての個体数の変化の様相と, 買いだめ現象における購買量と在庫量の変化の様相を考察した. 数学的モデリングの理論では, 現実の事象から条件整理などによりモデル化することで数学的モデルをつくり, これを数学的に処理・考察したのち, もとの現実の事象に当てはめてモデルを再考しなおすというサイクル的思考活動が提唱されている. その活動により, 数理モデルの理論をより完成されたモデル理論に近づけていくわけであるが, ここでは考察した内容を完成された厳密な理論として扱うのではなく, 数学的モデリングの1つのサイクル, つまり, 現象を数理的にモデル化する活動例として紹介している. このような社会の現象を微分方程式を用いてモデル化する活動のなかで, 現実の事象を数学的に分析できるという数学の有用性が再認識された. また, その考察の過程で得られた数学的な結果と現象の定性的な部分との一致をみて、このような活動自体に純粋な面白さを感じ, 数学に対する興味を一層深めることができた.

3 論文の構成

以下, 修士論文の構成について詳述する.

第1章「線形代数」では, 第3節までにおいて行列 A の対角化に関する事柄を取り上げ, 第4節から第7節では, Cayley-Hamilton の定理を出発点として Jordan 標準形の理論の本質的な部分を論じ, 2次または3次の行列 A に対して, 具体的な複素行列としての標準形及び実行列としての標準形を記している.

第2章「冪級数」では, 収束の厳密な定義を扱い, それをもとに実数列 $\{a_n\}$ に対する冪級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束条件, 冪級数が収束するときのその微分を紹介している. その冪級数によって, 指数関数を

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

と定め, この指数関数がもつ性質について触れている. また, この冪級数の収束値が, 高校で扱われている指数関数 e^x となることを紹介している.

第3章「行列の指数関数」では, 第2章で扱った冪級数により定義した指数関数に行列 A を代入し, 行列の指数関数 $\exp(A)$ を考え, その収束や性質について紹介している. 第1章の Jordan 標準形により, 行列 A が TPT^{-1} と表わせたことから, その行列の指数関数 $\exp(A)$ の収束値を2次, 3次の実行列の場合について行列 P の形によって, 分類しまとめている.

第4章「微分方程式」では, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_t = A\boldsymbol{x}_t$$

の解が存在すること, その解が一意的であることについて考察し, 2次の実行列に対して, 微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_t = A\boldsymbol{x}_t$ の一般的な解や, 具体的な解を求めることから, その解の様子を概観している. また, 2変数の微分方程式に関して, その平衡点がもつ安定性について触れ, その平衡点の近傍における微分方程式の解の挙動について考察している. 本研究の目的としても挙げている数学の理論である微分方程式を現実の事象に適用し計算する例として, 2種類の生物の個体数の変化, 買いだめ現象における購買量と在庫量の変化の様相について考察している.

主任指導教員　濵中　裕明
指導教員　濵中　裕明