空間曲線におけるセレ・フレネ公式と接触超球面について

教育内容・方法開発専攻
認識形成系教育コース
M 1 1 1 5 1 I
萩　博　文

1　研究の目的

私たちの日常の周りの多くの現象は，それらを規定する支持関数 (ポテンシャル) の極値の選択のしかたによって定まるのなら，極値を与える点である特異点というのは非常に重要な研究対象であることがわかる．

そこで，修士論文のテーマはそれらの特異点を扱う特異点論の微分幾何学への応用の観点から，空間曲線のセレ・フレネ公式と接触超球面の存在と一意性問題に注目し，自然に考えられる新たな問題を課して，それらを導き出すことである．

次に，その課題を記す．

課題 1

単位速度 n 次元空間曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ に対し，一般化された $n-1$ 個の法ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}_1(s), \ldots, \boldsymbol{b}_{n-2}(s)$ と曲率 $\kappa(s)$, $\tau_1(s), \ldots,$ $\tau_{n-2}(s)$ を定義し，それらの微分に関するセレ・フレネ公式を示せ．

課題 2

単位速度 n 次元空間曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ に対する少なくとも $n+1$ 点接触する超球面の存在と一意性に関する命題を定式化し示せ．

2　研究の特徴

本論文の第 1 の研究対象は，空間曲線のセレ・フレネ公式と接触超球面の存在と一意性であるが，その中で，接触の定義を述べている．そこで，ある曲線と直線や円との接触について考える．ここで，曲線 γ の接線とは一般には γ と少なくとも 2 点接触する唯一の直線であると定義されるが，特殊な点において，その接線が 3 点接触を持つような点を屈曲点 (変曲点) と呼んでいる．また，曲線 γ と接触円は一般に少なくとも 3 点接触するが，γ と特殊な点において接触円が 4 点接触するとき頂点と呼んだ．この考えは高校数学において，2 次曲線の接線や 3,4 次関数の変曲点といった基本的な内容のより一般的な数学的解釈を与えているととらえられる．

3　論文の構成

4　論文の概要

第1章　「準備」では，本論文の主要テーマを述べる上で必要となる基礎的な概念，結果を解説している．それらについて，第1節から第3節において論じている．第1節では，C^r 級写像の概念，それに付随する逆関数定理や陰関数定理を記している．また，陰関数定理について，さらに全射写像定理，単射写像定理を示し，それぞれの意味を考察している．第2節では，平面曲線における曲線の表示の仕方や特異点，正則点の定義をしている．第3節では，空間曲線の特異点，正則点の定義といろいろな曲面の紹介をしている．

第2章　「曲線の微分幾何学的不変量」では，本論文の重要テーマを示す上で必要となる，セレ・フレネ公式や接触球面の存在を平面と空間のそれぞれで考察している．第1節では，平面曲線におけるセレ・フレネ公式を示すために必要となる接ベクトル，法ベクトルの定義や，接触の定義を用いて，屈曲点や頂点の概念を与えている．．また距離2乗関数や高さ関数を接触の観点から，セレ・フレネ公式を用いて考察している．そして，単位速度曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ に対して，縮閉線や垂足曲線，平行曲線についても考察を行っている．第2節では，平面曲線と同様に3次元空間に話を移し，セレ・フレネ公式や接触球面の存在と一意性を示している．さらに，複雑であるが，距離2乗関数や高さ関数についてより高次の微分まで計算している．第3節では，前節で記した曲線や曲面の話を，曲線族または曲面族の包絡線または包絡面と呼び，古典的によく知られているものとしてとらえ直している．第4節では，まず，1変数関数族の開折理論について解説している．次に，その中で示した定理や例を用いて，平面曲線と空間曲線のそれぞれで，距離2乗関数と高さ関数を使い，曲線 γ がある一般的な条件のもと，どの曲線と微分同相であるかを示している．

第3章　「n 次元セレ・フレネ公式および接触超球面」では，前章で記した，2次元や3次元におけるセレ・フレネ公式と接触球面の存在と一意性を n 次元まで拡張し，自らの課題として，解答を与えている．第1節では，2章の復習として2次元空間，3次元空間のセレ・フレネ公式と接触について簡単に復習している．そこから自然と考えられる課題を提出し記している．第2節では，n 次元セレ・フレネ公式を示す上で，ベクトルの定義の仕方や曲率，捩率の定義の仕方について，まず，3次元空間曲線における法ベクトル，曲率について考察を行っている．そのときに，どのように解釈すれば2次元空間曲線の曲率が特別な場合とみなせるかにも触れている．そして，$n \geqq 4$ の n 次元空間曲線に対して，新たに従法ベクトル，捩率を定義していくときは，最後のものを除いて，3次元空間曲線の場合の主法ベクトル，曲率と同様に定義していくのがよいとの推察から，それを定式化していくために，まずは4次元について考察している．その考察のもと n 次元の場合を予測し証明している．第3節では，前節で記した n 次元セレ・フレネ公式を用いて，接触超球面の存在と一意性について示すが，まず，$n \geqq 4$ の一般の n 次元空間曲線に対して，課題2を考えるとき，計算が複雑になるので，どのように回避するかの見当をつけるために，先の課題と同様に4次元空間曲線の場合から考察している．その考察のもと式を予測し，n 次元空間曲線について証明を与えている．この章で取り扱った課題については，課題1は古典的に知られている方法とは別の方法で示している．課題2に関しては，結果自体は予測可能であるが，この方面の専門家に聞いてもその結果と証明が載せられている文献についてはわからなかった．

第4章　「様々な幾何学と特異点論」では，物理への応用として，前章までで解説していたユークリッド幾何学を離れて，それとは異なる様々な幾何学において，接触理論や開折理論を展開している．第1節では，等積微分幾何学について解説している．ユークリッド空間内で定義したものや，対応する定理，命題をアフィン空間において同様に定義し，考察している．第2節では，ローレンツ微分幾何学について解説している．ここでは，擬内積を定め，3次元ミンコフスキー空間におけるベクトルを3種類に分類している．さらに，擬外積も定め，そこから，ローレンツ幾何学的セレ・フレネ公式を示している．第3節では，双曲的幾何学について解説している．ここでは，測地的曲率を新たに定め，双曲的セレ・フレネ公式を示している．

主任指導教員　小池　敏司
指導教員　小池　敏司