不変式と調和多項式について

教科・領域教育学専攻
自然系コース
M08175E
松川　尚寛

本論文では２つの群の作用について考察する．一つは n 次対称群 S_n の n 変数複素係数多項式環 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ への作用であり，S_n の作用で不変な対称式と，その対極にある調和多項式を通して多項式環 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ の構造の一端を明らかにする．今一つは 2 次の一般線型群 $GL(2, \mathbb{C})$ の作用であり，2 変数多項式環への作用と，2 次全行列環上の多項式環への作用をとりあげる．特に 2 変数多項式環の斉次式のなす空間が $GL(2, \mathbb{C})$ の既約表現を与えることを示し，$GL(2, \mathbb{C})$ の任意の既約表現がそれらの表現と行列式のべきとの積として得られることを利用して，斉次部分空間をウエイト分布を利用して既約分解する．ここでも不変式と調和多項式が重要な役割を演じる．

１章では，２章，３章で必要となる用語と定理について説明する．ただし，線形代数，群，環，体についての基本事項は既知とした．

§1.1 では基本対称式とべき乗和多項式を定義し，ニュートンの公式を証明する．§1.2 では群の作用を定義し，n 次対称群が自然に n 変数複素係数多項式環に作用することを示す．§1.3 では次数付きベクトル空間や次数写像を定義し，n 変数複素係数多項式環が次数付きベクトル空間であることを述べ，次数付きベクトル空間のポアンカレ級数を定義する．§1.4 ではラグランジュの補間公式を示し，§1.5 では多項式環 $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ における微分・偏微分について説明する．

２章では，$\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ の任意の多項式が調和多項式を係数とする基本対称式 $e_1, ..., e_n$ の多項式として一意的に表されること，すなわち，次のベクトル空間としての同型が成り立つことを証明する．

$$\mathcal{H}[e_1, ..., e_n] \simeq \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$$

なお，調和多項式の全体 $\mathcal{H}$ が環構造を持たないため，左辺は通常の多項式環とは異なる．正確には

$$\mathcal{H}[e_1, ..., e_n] = \bigoplus_{j_1, \cdots, j_n} \mathcal{H} {e_1}^{j_1} {e_2}^{j_2} \cdots {e_n}^{j_n}$$

なる直和であるが，本論文では上のように表記することにする．　上の同型より，S_n の $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ への作用は $\mathcal{H}$ への作用に帰着される．

§2.1 では対称式を定義し，$\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ の対称式全体 S が基本対称式 $e_1, ..., e_n$ を変数と見なした多項式環 $\mathbb{C}[e_1, ..., e_n]$ と同一視で

きること, 従って対称式が基本対称式の複素係数多項式として一意的に表されること, S が次数付きベクトル空間であること, などを証明する. §2.2 では代数的偏微分 ∂_i や ∂ を定義した後, 調和多項式を定義し, 調和多項式全体 $\mathcal{H}$ が ∂_i 不変であること, 次数付きベクトル空間であること, 差積が調和多項式であること, $\mathcal{H} \cap S = \mathbb{C}$ が成り立つこと, などを示す. §2.3 では多項式環 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, および対称式のなす空間 S のポアンカレ級数を決定する. §2.4 では基本対称式で生成されたイデアル $\mathcal{I}$ による商空間 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/\mathcal{I}$ を考察することにより $\dim \mathcal{H} = n!$ であること, $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{I}$ であること, $\mathcal{H}$ が差積 Δ を何回か偏微分して得られる多項式で生成されること, 集合としての等式 $\mathcal{H}[e_1, ..., e_n] = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ が成り立つこと, などを証明する. §2.5 では $\mathcal{H}$ のポアンカレ級数を決定し, S のポアンカレ級数との積が $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ のポアンカレ級数になることを証明し, 最後に $\mathcal{H}[e_1, ..., e_n]$ における表示の一意性を示す.

3章では一般線型群 $GL(2, \mathbb{C})$ の2次全行列環上の随伴作用から得られる $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ への作用と, $\mathbb{C}[x, y]$ への自然な作用について考察する. 特に $\mathbb{C}[x, y]$ の斉次部分空間が既約であること, $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ の多項式が調和多項式を係数とする $GL(2, \mathbb{C})$ 不変式 $\mathrm{trace}, \det$ の多項式として一意的に表され, $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ の斉次部分空間の既約分解が得られること, などを示す.

§3.1 では 2 次行列の成分を変数とする 4 変数多項式環 $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ への一般線型群 $GL(2, \mathbb{C})$ の作用について述べ, $GL(2, \mathbb{C})$ 不変式を定義する. $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ から $\mathbb{C}[x, y]$ へのある種の代入写像により, $GL(2, \mathbb{C})$ 不変式環が2変数の対称式全体のなす環と同型, すなわち $\mathbb{C}[\mathrm{trace}, \det]$ に一致することを示す. また $GL(2, \mathbb{C})$ 不変式環のポアンカレ級数を求め, $GL(2, \mathbb{C})$ の1次元多項式表現が行列式のべき乗になることを示す. §3.2 では $\mathbb{C}[x, y]$ の斉次部分空間が $GL(2, \mathbb{C})$ の有限次元既約表現を与えることを示す. また, $GL(2, \mathbb{C})$ の中心であるスカラー行列の固有空間と, 特殊線形変換によるウエイト分布を用いて既約分解を求める方法を説明する. §3.3 では $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ の斉次部分空間の既約分解について考察し, $GL(2, \mathbb{C})$ の中心が自明に作用していることから, 既約因子が奇数次元のもののみであることを導く. また 調和多項式のなす空間 $\mathcal{H}$ の斉次部分空間が既約であることを示し, $\mathcal{H}$, 不変式環, および $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ のポアンカレ級数を求める. 最後に $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ が $\mathcal{H}$ と $\mathrm{trace}, \det$ で生成されたイデアルの直和であることを示し, それを用いて, $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})]$ の多項式が調和多項式を係数とする $\mathrm{trace}, \det$ の多項式として一意的に表されることを示す.

主任指導教員　松山　廣
指　導　教　員　松山　廣