

種々の射影と地図作成への応用

教科・領域教育学専攻
自然系コース
M09168H
岸田典大

1 研究の背景

初めて地球儀に触れたのは幼稚園のときである。地球儀が地球を表していることを知って、地球がこのような球体であることに大変驚いたことは今でも覚えている。小学校に入り、社会の時間に地図について学んだ。中学校に入ってからは、世界を表した世界地図にも数多くあることを学び、世界地図は色んな所で用いられているのだと感じた。それが私と地図との関係の始まりになる。

大学院に入り、再び地図と関わることになる。地図の作成には数学の射影が用いられていることを知り、非常に興味を持った。そこで、私は地図射影について学び、それが数多く存在する地図投影法にどのように応用されているのかについて研究を行うことにした。地図射影とは地球のような球体で表されているものを平面である紙面上に表すことをいう。これだけで、立体を平面に写すことができる謎が解明できた訳だが、実際に存在する地図投影法がどのように射影されているかまでは見えてこない。また、地図射影を調べると言っても、それまでに準備として知っておかなければならない知識がいくつもある。例えば、球の表面である球面を紙という平面へ射影することから、平面幾何や球面幾何について学ぶ必要がある。ただ、平面幾何については高校数学まででもよく扱われている分野なので本論文では扱わず、球面幾何だけについてのみ扱っている。他に、曲線や曲率、曲面といった地図射影を学ぶ上で欠かせない幾何学的性質についても述べている。

球面上の幾何といえば、非ユークリッド幾何学の

一つである球面幾何学であり、多くの本が出版されているが、G. ジェニングス「幾何再入門」を中心に勉強した。また、曲線や曲率、曲面などや地図射影に関することなどについては、John McCleary「Geometry from a Differentiable Viewpoint」を中心に、関連する他の文献も交えて勉強した。本論文ではそれらの文献を通してこの2年間に学んだもの、考えたことについてまとめている。この論文では、地図投影法に馴染んでいない読者も想定して、すべてではないが形状によって地図投影法を分類したものについてもまとめている。

2 論文の構成

序章

第1章 外積代数の準備

- 1.1 外積の定義と性質
- 1.2 スカラー3重積と3次の行列式
- 1.3 外積の幾何的性質
- 1.4 ベクトル3重積
- 1.5 ラグランジュの公式

第2章 球面幾何

- 2.1 測地線
- 2.2 球面上の測地線
- 2.3 球面三角形の6個の角
- 2.4 辺の余弦法則
- 2.5 双対球面三角形
- 2.6 角の余弦法則
- 2.7 球面三角形の正弦法則

第3章 平面曲線と空間曲線の曲率

- 3.1 平面曲線

| | |
|-----|------------|
| 3.2 | 平面曲率 |
| 3.3 | 弧曲線 |
| 3.4 | 有向曲率 |
| 3.5 | 伸開線と縮閉線 |
| 3.6 | 空間曲線 |
| 第4章 | 曲面と第一基本形式 |
| 4.1 | 正則曲面 |
| 4.2 | 接平面 |
| 4.3 | 第一基本形式 |
| 4.4 | 面積 |
| 第5章 | 地図作成 |
| 5.1 | 地図射影 |
| 5.2 | 立体射影 |
| 5.3 | 中心射影 |
| 5.4 | メルカトル射影 |
| 5.5 | ランベルトの円柱射影 |
| 第6章 | 付録：地図投影法 |
| 6.1 | 分類と命名 |
| 6.2 | 様々な地図投影法 |

おわりに

3 論文の概要

第1章では、準備として、球面幾何や地図射影に関する微分幾何学的諸性質を示す上で用いられている外積代数やベクトル解析の基本的な性質についてまとめている。

第2章では、球面幾何について述べている。ここでは、球面上の測地線や球面三角形は平面上のそれらとは違うことについて触れ、各々の性質について詳しく見ている。次に、辺の余弦法則、双対球面三角形についても述べている。双対三角形の双対性を利用することによって、辺の余弦法則から角の余弦法則が導けることを示している。最後に、球面三角形の正弦法則について述べている。

第3章では、平面曲線または空間曲線について述べている。まず、パラメータ付けられた微分可能な曲線について再パラメータ化、弧長関数などの定義を行い、弧長によってパラメータ付けられた

曲線の性質について触れる。また、平面曲率や有向曲率の概念を定義し、伸開線と縮閉線に関連してサイクロイドについての定理を示す。次に、空間曲線を扱い、法ベクトルやねじれ率の概念を導入する。さらに、正則単位速度曲線においてセレーフレネの公式の定理を証明し、一般螺線やそれに関する命題をセレーフレネの公式を用いて証明を行う。

第4章では、曲面と第一基本形式について述べている。まず、地図投影について必要となる曲面に関することとして、正則曲面の定義を行い、逆関数定理・陰関数定理を用いて正則曲面の諸性質を示している。また、接平面についても触れている。次に、地図において角度や面積などを保存する条件の定式化に必要な第一基本形式の概念を定義し、それを用いた平面や曲面などの線素を例で挙げている。さらに、有界領域の面積を定義し、面積を計算した例を紹介している。

第5章では、地図作成について述べている。最初に理想的な地図射影について触れ、それが存在しないことを証明する。続いて、等角や等積について定義し、第一基本形式を用いた等角や面積保存の特徴付けについて見ていく。その後、立体射影、中心射影、メルカトル射影、ランベルトの円柱射影に対し、そのような等角や面積保存、距離保存の射影が実際どの地図投影法に応用されているのかについても述べている。

第6章では、付録として地図投影法全般についてまとめている。正角・正距・正積といった正性質の意味や光源の違いによる呼び方の違いにも触れている。そして、形状による地図投影法の分類を行い、方位図法、円筒図法、円錐図法、それら3つの擬図法やそれら以外の地図投影法について紹介している。

主任指導教員 小池 敏司
指導教員 小池 敏司