

高校数学における平面上の変換の取り扱いについて

—APOS 理論の視点から—

兵庫教育大学 濱中裕明

兵庫教育大学 吉川昌慶

兵庫教育大学大学院生 鎌田真司

兵庫教育大学大学院生 染分克麻

1. はじめに

平成 20 年度告示の高等学校数学の指導要領からは、指導内容として行列と一次変換が大きく削減された。数学活用の中に行列が言葉としては入っているが、事実上ほとんど指導されていないのが実情と言えよう。しかし、大学での数学に従事する側からは、行列・一次変換の重要性の指摘と高校での内容からの削減を惜しむ声もよく聞く。

では行列・一次変換の何が大事だったのだろうか。行列・一次変換に関わる内容は、大学では線形代数と呼ばれる数学の一分野となっている。そして実際、線形代数は数学の体系のなかで極めて基本的であり、大学以後では数学だけにとどまらず理学・工学においても広範に用いられ、多くの科学分野で基本的となる知識ではある。しかしそれは大学以後の数学からみた、いわば、上から見た重要性であって、高校を含めた高校以前の数学との関わりのなかでどのような意味を持つのか、といった、いわば教材研究が不十分さの故に、高校での取り扱いが消化不良を起こしかねなかったことも、高校の指導内容から削除されてしまった一因と考えられる。

そもそも行列とは何であって、何のためにあるものなのか。行列については、連立一次方程式との関係で、その存在理由をとらえることも可能であるが、ここでは行列を一次変換という「平面上の変換」を表すためのもの、と捉える。

平面上の変換は、中学校でも図形の移動(平行移動・対称移動・回転移動)として学習内容に含まれている。また平面上の変換とは、数学の体系のなかでは、実数の集合(数直線)から実数の集合への写像である(実数値)「関数」を、平面から平面への写像として高次元化したものであり、「関数」と同様に極めて基本的な考察対象である。

では、行列・一次変換が指導要領から消えてしまった現在、高等学校の数学で平面上の変換を扱う場面はなくなってしまったのだろうか。そうした変換の考えを高等学校の数学で取り扱い得る単位として複素数平面がある。しかし、後述するように現状の高等学校での複素数平面の単位では、平面上の変換という考えの取り扱いは不十分であるように感じ

られる。どうして平面の変換の考えの取り扱いが十分でないと考えられるのか、また、そもそも変換の考えとはどういうものであって、どのような取り扱いが重要と考えられるのか、そうした問いに対し、本稿では APOS 理論を援用し、部分的な回答を与え、求められる理解を促すような教材の試案を述べたい。

2. 変換とは

数学においては、ある集合 X の各元に、ある集合 Y の一つの元を定めるような対応のことを写像 $f: X \rightarrow Y$ というが、特に写像 f において集合 Y が集合 X と等しいとき、これを集合 X 上の変換 f とよぶ。しかし、文脈によっては、 f が全単射であることを前提とする場合も多い。本稿では、特に中学校・高等学校での平面上の変換の扱いを考察するため、以後、特に断らない限り変換といえば平面上の全単射である変換を指すこととする。中学校では図形の移動として平行移動、線対称移動、回転移動などの合同変換が登場する。合同変換は、可逆な変換であり、さらに合同変換どうしを合成しても合同変換となるという性質があることから、平面図形に「合同」＝「合同変換で移りあう」という分類基準を与えることになる。実際、「幾何」領域では、点、線、面などの幾何的対象を全て点の集合と捉え、さらに二つの点を変換による像とその原像として見直すことにより、変換という観点からの議論が可能となる。(中略)さらに、変換が保存する性質に着目することにより、変換は単一の図形だけでなく平面あるいは空間そのものを議論するための手段となるが、これは、様々な幾何学をある空間に作用する変換群における不変式論と捉えて分類した、F. Klein の手法そのものである。」(高橋, 2005) とあるように、関数とは違って、平面上の変換は幾何的対象の分類や平面そのものの考察の道具ともなりうるものである。例えば、合同変換に拡大縮小変換も加え、合成で閉じた変換の集まり(相似変換)を考えれば、その変換で移りあうという関係(相似関係)を定義することとなる。また、等倍ではない相似変換は必ず不動点を持つといった性質の議論は、変換が定義される平面そのものの性質を考察しているといえるだろう。このように変換は、単に関数が高次元化したというより、幾何や代数とも関係が深く、関数とは異なる多面的な側面を持つ。

3. 複素数平面以外での変換の取り扱い

中学校1年生の段階での合同変換(図形の移動)の学習は、図形領域の内容としての定性的な扱いが中心であり、特に幾何教育の文脈で取り扱われる。幾何教育では、考察の方法の対象化によって学習水準が上昇するという Van Hiele の学習水準論でよく例示されるように、図形の性質を論証によって考察することを目指すべき学習水準の上昇の方向として規定し、具体的には、中学校では下記の第二水準から第三水準を規準として考えるのが一般的であろう。

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">● 第零水準；事物(対象)を形(方法)で考察できる (視覚的水準)● 第一水準；形(対象)を形の性質(方法)で考察できる (説明的水準) |
|---|

- 第二水準；形の性質(対象)を性質間の論理的順序関係(命題，方法)で考察できる
(理論的水準)
- 第三水準；論理的順序関係を示す命題(対象)を証明(方法)で体系化できる
(形式的論理の水準)
- 第四水準；命題の証明体系(対象)を形式論理(方法)で形式化できる
(論理法則の本性的水準)

しかしながら，中学校の 1 年生の段階では図形に関する論証指導が始まっておらず，図形を対象とした考察において，性質間の論理的順序関係を考察の方法とすることができない．そこで，暫定的な考察の方法として，図形の移動や対称性が「考察の方法」となるのである．そして，やがて中学校の後半においては，この考察方法は棄却されていく．実際，中学校第 3 学年の三角形の合同条件を基にした論証指導においては，二等辺三角形の底角が等しいことの証明として，「線対称だから」「対称移動で移りあうから」という説明は棄却されることとなる．しかし，図形の移動の学習は無意味だったかという点，そうではなく，図形の移動という見方・考え方が，この三角形の合同を基にした論証の段階においても，合同な図形を見出すための重要な視点を与えてはいる．だが，それは暗黙的である．

それからもう一つ，特筆しておくべきことは，ここで扱う図形の移動は，確かに背後に合同変換の概念があるものの，実際には三角形の移動というように，具体的な図形の移動を扱っているという点である．すなわち，平面全体の変換を学習しているわけではなく，具体的な図形の移動の様子や性質を理解することがここでの主眼となっていることは留意すべきである．

では，一旦考察の方法として学習された合同変換（図形の移動）の学習は，このあとどのように学習水準が上昇し，またどのようなコンセプトの発展が目指されるのだろうか．

以前の平成 10 年度告示の学習指導要領では，図形の移動からつながりのある内容として，高等学校の数学 C において「行列」を学習することとされていた．その当時の指導書によれば，例えば単元構成は以下のようにになっている（大島ほか，2008，pp.14-17）．

- (1) 行列
- (2) 行列の加法，減法，実数倍
- (3) 行列の乗法
- (4) 行列の乗法の性質
- (5) 逆行列
- (6) 連立一次方程式
- (7) 点の移動と一次変換
- (8) 合成変換と逆変換
- (9) 回転移動と一次変換

これを見ると後半で回転移動を含めた一次変換を扱っていることからわかるように，中

学校では定性的な取り扱いであった合同変換（回転移動などの図形の移動）が、行列を用いることで一次変換として定量的に扱うことができるようになる。またここでは、図形の移動ではなく平面全体の変換が考察されている。さらに変換（一次変換）は、考察の方法というよりも、考察の対象そのものとして登場している。しかし、逆に言えば何のために一次変換を学習するのか、一次変換を学習することの良さが分かりにくいともいえる。

また、単元の初めには行列が必然性を欠いていきなり登場する。例えば、点を座標で表すという既存の知識や、物理でのベクトルの登場などから、ベクトルやその成分表示・演算には、ある意味でそれ以前の知識からの必然性がある。しかし、行列のような数の並べ方、また、行列の演算そのものだけを取り上げれば、その知識には必然性が感じられないだろう。そのため、単元構成を見てもわかるように、行列の基礎的内容にかける授業時間数が多く、特に前半は、行列の演算方法の習得に大きく時間を割くことになる。

4. APOS 理論

本節では APOS 理論を概観し、APOS 理論の観点から、変換のコンセプションの深化の在り方を考えたい。APOS 理論とは、数学的概念がどのように学習されるのか、学習者が数学的概念の理解をどのように心理的に築き上げるのかを説明する枠組みについての理論であり、Jean Piaget の理論を起源として、1980 年代初頭に Dubinsky らによって提唱されてきた(Dubinsky, 1984)。APOS という語は、Action, Process, Object および Schema を指しており、内化・整合・反転・カプセル化、一般化などの心理的メカニズムによって、Action コンセプション、Process コンセプション、Object コンセプションといった心理的構造を作る段階 (stage) 経て、それらを Schema と呼ばれる構造の中に組織化していくという捉え方を指す (I. Arnon et al., 2014, p. 17)。

Action コンセプションについては、「概念は最初に Action として、つまり、それ以前に構成された単数あるいは複数の object の外的に示された変換として、構成される。」(idem. p.19)と説明される。ここで Action が外的であるというのは、その操作の個々のステップが心的ではなく明示的に行われることを意味している。実際、それぞれのステップの明示的遂行が次のステップを促すため、Action のステップはまだ想像で行うことは出来ず、どのステップも飛ばすことはできない。例えば、関数概念の場合でいえば、「具体的な式表現がないと関数概念を考えることができず、その式表現の変数に代入して操作することには少し長けた者、そのような者が関数の理解の Action コンセプションを持っているとみなされる。」(Dubinsky et al., 2005, p.338)

さらに、「Action が繰り返し行われ省察されるに従い、人は外的手がかりに依存する状態からそれらの内的制御を持つ状態へと移行する。この状態では、それぞれのステップを必ずしも具体的に実行することなしにその実行状態をイメージできるようになる。またこの状態は、いくつかのステップを飛ばしたり、逆順にすすめたりすることができるように」といったことで特徴づけることができる。」(I. Arnon et al., p.20) と述べられているよう

に、Action はやがて内化され、具体的操作なしに想像で考察することができるようになる。このような理解を Process コンセプションという。

Process コンセプションによって Action が内化され、「Process の全体性を意識するようになる」と、その全体性に対して変換を作用させることができると気づき、実際にそのような変換（具体的なものの場合も、想像の中での変換の場合もある）を構成することができるようになる。このとき、我々は個人が Process を認知的な Object へとカプセル化した、というのである。」(Dubinsky, 2005, p.339)と説明されるように、Process コンセプションのカプセル化とは、動的な操作であるプロセスに対して、何らかの Action を行うことができるように、Process を対象化することができるようになることであり、そのような理解を Object コンセプションとよぶ。

一度、カプセル化された Object は、必要とあれば脱カプセル化によりその Process へと分解して考えることもできる。また、脱カプセル化された二つの Object を組み合わせると再び一つの Object にカプセル化（整合 coordination）したり、脱カプセル化した Process を逆順に考えたり(reversal)といった種々のメカニズムが考えられる。こうした心理的構造とその間のメカニズムが組織化された総体を APOS 理論では Schema とよぶのである。

Dubinsky(2005)が、関数を例に挙げて説明しているように、関数や変換、写像といった概念と APOS 理論は適合性が高い^[4]。そこで、APOS 理論を参照しつつ、変換の学習で目指される変換という数学的概念のコンセプションを考えていきたい。まず、Action コンセプションについてだが、例えば中学校での図形の移動（合同変換）の学習は、変換に関する Action コンセプションの段階と捉えることができる。すなわち、具体的な図形の移動の学習を通して、変換という概念を意識する段階である。

高等学校では、前述の行列による一次変換においても、後述する複素数平面での変換の取り扱いにおいても、点の移動が基本となる。ここでは平面上の全ての点の移動を変換として捉えており、さらに、平面図形 X を点の集まりとみなして、図形 X の移動を、集合 X の変換による像を考えること、と捉える。そのためには図形の移動、および、個々の点の変換という Action を通して、移動の Action を内化し、平面全体の変換という Process コンセプションに移行する必要がある。

そしてさらに、そこから Object コンセプションに至るためには、平面全体の変換という Process 自体を object として扱うような Action を通じて、Process を対象化する（カプセル化）することが求められる。つまり、そこまで到達して初めて、変換の考えが豊かな Schema として組織されることになる。

Process としての平面上の変換を対象として扱うような Action としては、どのようなものがあるだろうか。そのような Action として、基本的でありかつ典型的なものは、変換の合成であろう。すなわち、高等学校での変換の考えの取り扱いにおいては、

- 具体的な図形の移動や点の移動を内化し、変換の Process をとらえること。
- 変換の Process を対象化し、合成などの、変換に対する Action を扱うこと。

などが求められるのではないかと考える。

個々の点や図形の移動ではなく、Process としての変換を考えることは、特定の点の移動ではなく、任意の点の移動を考える、ということになり、そのような記述は全称性を含むようになる。すなわち、Process としての平面全体の変換を扱うことは、全称性のある命題を扱うことにつながる。例えば、一般の点を中心とする回転移動を複素数の演算で表す(図1)という内容は、任意の点 z に対し、それを、点 α を中心として θ だけ回転した点の位置の表示を求めていることになり、全称性のある命題の取り扱いといえる(俣野ほか, 2015)。

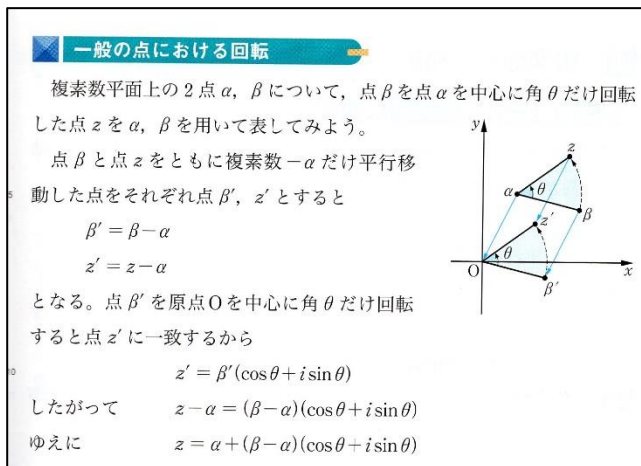


図1 数学III 教科書より(俣野ほか, 2015)

5. 数学III「複素数平面」での変換の取り扱い

現行学習指導要領(平成20年度告示)では、「行列」の単元が事実上なくなったに近く、数学IIIでの「複素数平面」の単元が平面上の変換の考えを扱うことのできるほとんど唯一の単元となっている。複素数平面の取り扱いについて、学習指導要領には、「イ. 複素数平面/(ア) 複素数の図表示: 複素数平面と複素数の極形式, 複素数の実数倍, 和, 差, 積及び商の図形的な意味を理解し, それらを事象の考察に活用すること。(イ) ド・モアブルの定理: ド・モアブルの定理について理解すること」と記載されているのみで、変換としての扱いは明示的に書かれていないが、「行列」がなくなってしまっていることを念頭におけば、高大接続のためにも、複素数の演算のもつ図形的意味を通じて、変換としての取り扱いを示すべきではないだろうか。

実際、二つの複素数 α と β を複素数平面にとり、それらの積 $\alpha\beta$ が複素数平面のどこに来るかを考えるだけでは、変換とはならない。 2×3 を考えることが比例関数を考えることにならないのと同じである。変換のProcess コンセプションを意識すれば、複素数どうしの演算(特に、和や積)において、一方を定数、他方を変数とし「変換」として扱うことで、特定の複素数の移動ではなく、任意の点(複素数)を同時に動かすという平面全体の変換を考えることが重要である。つまり、具体的な複素数どうしの演算結果を図形的にとらえることは、Action コンセプションの段階といえる。

例えば、ある『数学III』の教科書では、以下のような例題を扱っておりこれに対して二つの解答が与えられている(図2・高橋ほか, 2013)。

点 z が原点を中心とする半径1の円周上を動くとき、複素数 $w = i(z + 1)$ で表される点 w は、どのような図形を描くか

例題 5 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、複素数 $w=i(z+1)$ で表される点 w は、どのような図形を描くか。

考え方 複素数 z は、 $|z|=1$ を満たす。この式を w を用いて表す。

解 点 z は、原点を中心とする半径 1 の円周上にあるから、
 $|z|=1$ ……①
 $w=i(z+1)$ より、
 $z=\frac{w}{i}-1=\frac{w-i}{i}$
これを①に代入すると、
 $|\frac{w-i}{i}|=1$
 $|\frac{w-i}{i}|=1$
 $|i|=1$ であるから、 $|w-i|=1$
よって、点 w は、中心が点 i で半径 1 の円を描く。

例題 5 において、点 w の描く図形は、次のように考えることもできる。
 z に 1 を加えると、点 z は実軸方向に 1 だけ平行移動され、さらに i を掛けると、その点は原点のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転されるから、点 w は、点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

図 2 図形の移動の問題 (高橋ほか, 2013)

例題 6 点 z が、原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき、点 -4 と点 z を結ぶ線分の midpoint w は、どのような図形を描くか。

解 点 z は中心 O 、半径 2 の円上にあるから $|z|=2$
 $w=\frac{z-4}{2}$ であるから
 $z=2(w+2)$
よって $|2(w+2)|=2$
ゆえに $|w+2|=1$
したがって、点 w は
点 -2 を中心とし、
半径が 1 の円を描く。

例題 6 において、点 w の描く図形は次のように考えても求められる。
 $w=\frac{z}{2}-2$ であるから、求める図形は、
円 $|z|=2$ を原点を中心として $\frac{1}{2}$ 倍に縮
小し、 x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

練習 19 $w=1+iz$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

図 3 図形の変換の問題 (大島ほか, 2012)

ここで初めに示される枠囲みの解法では、文法的かつ形式的な代数操作のみで解決を行っており、そこに複素数の演算の図形的な意味や動的な変換の見方はまったく見られない。

一方で、その下に示される別解では、複素数の演算を「変換」として捉えており、図形的で動的な考察となっている。つまり、この解法では、各点 z を $w=i(z+1)$ で表される点 w に移動するという操作が、内化された Process として捉えられている。しかしながら、教科書上、この別解は飽くまで補足的な取り扱いとなっている。

図 3 に示す別の教科書でも、同様の問題において、やはり「変換」としての複素数演算を用いた解法は補足的に示されている (大島ほか, 2012)。

また、別の教科書では、こうした変換としての別解は取り上げられていない (俣野ほか, 2015)。

また、上記 3 種の教科書を見る限り、複素数平面の単元において、平面上の変換の Object コンセプションを促すような題材はほとんど見られなかった。

6. 教材の試案

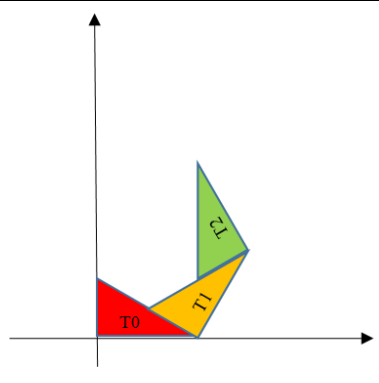
以上のことから、我々は複素数平面で、

1. 複素数の演算を「変換」と捉えるような教材
2. また、「変換」どうしの操作である合成を用いる教材

を考えていきたい。それが、複素数平面で変換のコンセプトの深化を促すことにつながると考えられるからである。しかし、あまり難易度の高い教材を提案することは現実性が低くなってしまふ。そこで、今回は

1. 変換として、 z を $\alpha z + \beta$ (α, β は定数)に移すタイプの変換のみを扱う。
2. 合成としては、同じ変換の合成を扱う。
3. 具体的な三角形の移動を手掛かりに、平面全体の変換へと意識させる足場設定を行う。といった点に配慮した題材を提案する。主たる発問は次のとおりである。

3点 $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 T_0 を考え、これと合同な三角形 T_1, T_2, \dots を下図のように配置していくと、 T_6 はどうなるだろうか。 T_0 に完全に重なるのだろうか。



まず、 T_0 を T_1 に重ねるような図形の移動(変換)は、複素数の演算でどのように表されるかを考える。実際には、 T_0 を、原点を中心に 60° 回転したのち、実軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動すれば T_1 に重なるため、そのような移動は

$$z: \text{移動前の点}, \alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \beta = \sqrt{3}, w: \text{移動先の点}$$

とすると、 $w = \alpha z + \beta \dots \textcircled{1}$ で与えられる。

上述の変換で、 T_0 の3頂点が T_1 の3頂点に移動することは、計算で確かめることができるし、変換としてのProcessコンセプトが備わっていれば、 T_0 内の各点が T_1 内の各点に移動することもわかる。では、この変換で T_0 の外側の点はどこに移動するだろうか。例えば、 T_1 の点はこの変換でどこに移動するだろうか。

この問いは、 T_0 と T_1 を複合した図形の移動を考えることで解決可能である。つまり、 T_0 と T_1 を組み合わせた図形は、回転移動と平行移動によって合同なままに移るので、 T_1 の部分が T_2 の部分に移るのである。

では、 T_0 を T_2 に移すような変換はどのように求めたらよいか。変換のProcessコンセプトの全体性が十分に把握されObjectコンセプトが得られていれば、 $\textcircled{1}$ の変換で T_0 が T_1 に、また、 T_1 が T_2 に移されることから、それぞれのProcessを組み合わせる(合成)ことで、新たなProcessを得ることができる。つまり、 $\textcircled{1}$ の2回の合成を表す

$$\alpha(\alpha z + \beta) + \beta$$

という変換式が得られる。これを繰り返していくことで、 T_0 を T_6 に移すような変換は z を

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha(\alpha(\alpha(\alpha(\alpha z + \beta) + \beta) + \beta) + \beta) + \beta) + \beta \\ & = \alpha^6 z + \beta(\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^1 + 1) \end{aligned}$$

に移す変換であることが分かるが、実際には α が1の6乗根であることから、

$$\alpha^6 = 1, \quad \beta(\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^1 + 1) = 0$$

つまり、上述の変換は恒等変換であり、 T_6 は T_0 とぴったり重なることが示される。

実際、互いに大きさの等しい三角定規を6枚並べてみることで、この計算を具体的に確かめてみることも可能である。

7. おわりに

本稿では APOS 理論を用いて、中学校で学ぶ図形の移動が、高等学校で変換の考え方としてどのようにコンセプションの深化が図られるべきかを検討し、そのような変換への理解の深まりのために、複素数平面の単元においてどのような教材が重要となるかを考察した。また、そのような教材を具体的に発案し、提示した。

しかし、かつての「一次変換」も、大学等の関係者からはその必要性が叫ばれながらも、実際には高等学校の学習指導要領からは姿を消してしまった。今回、「行列」や「一次変換」のエッセンスとしての「変換の考え」を、そのコンセプションの深化を念頭に現状の高等学校で扱うとすれば、どのような扱いが必要となるかその到達点となるものを考察したわけだが、その実現可能性については慎重な検討が必要だろう。特に、今回は APOS 理論を求められる理解の分析にのみ用い、指導の設計等には用いなかったが、Process コンセプションの獲得には十分な Action コンセプションの浸透が必要であるし、当然のことながら Object コンセプションもまた Process コンセプションの獲得を大前提とする。

一方で、変換の考えが高等学校で扱われないことは大いに憂慮すべきことであるのも事実である。少しでも変換の考えが高校で扱われていくよう、実現可能性も念頭に指導の具体化を検討したい。

註 [1] もちろん、線形代数や群論、統計学など、別の分野にも応用されている。

参考文献

大島利雄ほか 15 名(2008). 『改訂版 数学 C 教授資料』. 数研出版.

大島利雄ほか 14 名(2012). 『数学Ⅲ』. 数研出版.

高橋聡(2005). 学校数学における変換の考えに関する一考察：行列によって移動を統合する機能に焦点をあてて. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 38, pp.685-690.

高橋陽一郎ほか 33 名(2013). 『数学Ⅲ』. 啓林館.

侯野博, 河野俊丈ほか 27 名(2015). 『数学Ⅲ』. 東京書籍.

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Octaç, A., Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer Science+Business Media New York.
- Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Aik-Uutiset*, 2, 41-47.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335- 359.