世界探究パラダイムに基づくSRPにおける論証活動（1）
～理論的考察を通して～

宮川　健　上越教育大学
濵中　裕明　兵庫教育大学
大滝　孝治　北海道教育大学

1．はじめに

今日，中等数学教育において育成されるべき知識・技能が問い直されている．わが国の現行の中学校及び高等学校の学習指導要領では，「活用」の語が強調され，現実世界の課題に対処するために数学を用いるといった数学の応用面が重視されるようになった（文部科学省, 2008, 2009）．現場での実際はさておき，この背景には, OECD/PISAに代表される数学と現実世界とのかかわりを重視する世界的な流れ，さらには，子どもたちが「なぜ数学を勉強するのか」「数学学習が何の役に立つのか」といった問いへの回答なしに数学を勉強し続けることの限界があるように思う．今後さらに，数学の応用面や数学をより広く捉えた数理科学が数学教育の中心となっていくのであろうか.

こうした数学教育の流れの中で，証明や論証といったものの扱いはどうなっていくのであろうか. 論証は，古代ギリシャ以来，数学の知的体系の妥当性・真実性を保証する数学における中心的な営みであった．数学という学問を特徴づける要素といっても過言ではない. ただし，そこでの論証は数学の応用面を志向したものというよりも，体系といった数学の構造面を志向したものである．そうした数学的な営みは，応用面が重視される数学教育においては，必要のないものとなるのであろうか.

以上のような問題意識のもと，筆者らは，中等教育における将来の数学教育の在り方，そしてそこでの論証の在り方を探るプロジェクトに参加し，種々の研究を進めてきた．このプロジェクトでは，これまで，論証を捉える理論的基盤の整備をはじめ（宮川他, 2015），数学的活動の捉え方（溝口, 2015），数学的活動に基づいた論証教材の開発（岩知道・杉野本・大滝, 2014; 杉野本・大滝・岩知道, 2015），論証の必要性（阿部・石井, 2014, 2015; 阿部, 2015）などについて検討されてきた[1].

本稿では，上述の問題意識に正面から取り組み，将来の数学教育では，論証に関していかなる活動が求められるのか，論証の居場所がそもそも保証されているのか，といった論証の必要性と求められる論証の性格について検討したい.

論証の必要性については，阿部・石井 (2014, 2015) は，数学的リテラシーという視点から議論してきた. 学習者が社会に出てから必要となる素養に論証が含まれるのかという視点である．一方で，求められる論証の性格は, 求められる活動の性格に依存する. 例えば, 数学研究者らによる数学を創る構造志向の活動において求められる論証と，数学的モデル化という応用志向の活動において求められる論証（cf. 阿部, 2015）では, それぞれの性格は一致しないであろう．そのため，将来の数学教育において，いかなる指導方法を採用し，いかなる活動を重視するかといった数学教育の考え方・精神により，論証の必要性や求められる論証の性格は異なったものとなるのである.

そこで本稿では，教授人間学理論 (ATD) の範疇で提示されている，“世界探究パラダイム”に基づいた “Study and Research Paths (SRP)” と呼ばれる探究的要素をより多く含む一連の活動を取り上げ，そこで求められる論証活動について考察したい．世界探究パラダイムや SRP は，将来の数学教育において中心的となるものとして，10年ほど前から Chevallard が提案しているものである．それらは単に興味深いだけでなく，活

[1] 詳細は，日本数学教育学会第2回及び第3回春期研究大会の論文集，プロジェクトのホームページ (http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~shinno/hi-project/Top.html) を参照のこと.

動の仕組みを示すために種々の理論的な概念が整備されており，それらにより，SRP の仕組みが理論的に特徴づけられている．そのため，論証の位置づけや役割をより詳細に議論できるのである．さらに，これらの ATD の種々の概念は，理論的な枠組みとして，他の活動の分析をも可能とすると考える．

以下ではまず，世界探究パラダイムとそれに基づいた SRP がいかなるものであるかについて，それらにまつわる ATD の理論的な諸概念とともにやや詳細に示す（第 2 節，第 3 節）．その後，SRP における論証の必要性と求められる論証の性格について，いくつかに観点を絞って考察する（第 4 節）．なお，考察は理論的なものに留まる．SRP の実践を通した考察は，別稿（濵中・大滝・宮川，2016）を参照いただきたい．

２．二つの教授パラダイム

教授人間学理論 (ATD) では，「何を学習すべきか—何が教授争点 *O* になりうるのか—，そして何がその争点を学習する形態となるのかを暗黙裡に規定する規則の集まり」のことを「教授パラダイム (didactic paradigm)」と呼ぶ (Chevallard, 2015, p. 174)．これは，上で触れた数学教育に対する考え方や精神に相当するものである．そして中等教育の数学において今日中心的な‘古い’パラダイムを「記念碑主義 (monumentalism)」もしくは「作品訪問 (visiting works)」，それにとって代わる‘新しい’パラダイムを「世界探究 (questioning the world)」と呼び，それぞれがいかなる性格をもつのか ATD の視座から特徴づける[2]．

（１）記念碑主義（作品訪問）パラダイム

ユークリッドの原論（もしくはプラトンの著作）を学ぶなどといった，過去のある偉人の作り上げた作品や成し遂げた仕事を学ぶことを通して，ある学問を学ぶというような教授パラダイムを「権威と名作を称賛し学習するパラダイム (hailing and studying authorities and masterpieces)」と Chevallard は呼ぶ (idem. p. 175)．「記念碑主義」はこれにとって代わったものである．複数の偉人の作り上げた作品をそれだけで意味をなす小さな部分に細分化し，それらを順々に学習していくというパラダイムである．小さな部分は，例えば，ピタゴラスの定理，タレスの定理，ヘロンの公式，ユークリッドの互除法などといったように，各々がモニュメントや記念碑のようなものとして，授業では，教師と生徒がそれらを順に見物に訪ねていく，とするのである．知識が細分化されるため，知識の存在理由は消えてしまい，「なぜこれが生じたのか？」「何の役に立つのか？」といった問いは扱われない．それでも，生徒らはそれらを称賛し楽しむことが期待されるのである．ここでは，生徒らは「ちょっとした見物人に矮小化される」(idem. p. 175) のである．

記念碑主義は，今日，フランスに限らず，どこの国でも見られるものであろう．わが国の後期中等教育は，この最たるものではないだろうか．学習する概念が何のために生じ，いかに役立つのか，ほとんど知らずに，過去の数学者たちが作った作品から抽出された記念碑（モニュメント）を次から次へと一つずつ訪問していく．ツアーでモニュメントを回る観光旅行のようなものである．そしてこの帰結は，「習ったすべての知識は，試験が終われば当然のように忘れ去られる」という，Chevallard が“ゴミ箱の原理”(Recycle bin principle) と呼ぶものである(idem. p. 176)．

（２）世界探究パラダイム

記念碑主義にとって代わる‘新しい’パラダイム「世界探究」は，科学者の態度とされている探究の態度を目指すものである．今日，ある問いに対する回答が明らかでないにもかかわらず，その問いを避ける者が少なくない．そういった態度ではなく，「どんな問い *Q* が生じても，*x* はそれについて考え，そしてできるだけ頻繁に，ある価値のある回答 *A* に到達するためにそれについて学習 (study) する」（*x* は学習者）という，そして「*x* は，自分が一度も出会ったことのない，一度も解いたことのない問題が含まれる状況に対しても毎回躊躇しない」(idem. p. 178) という態度を目指す．

ここでは，すでに知られた過去のものを後ろ向きに学習するのではなく，問いに答えるため，何かを発見するため，という前向きの姿勢で，*Q* に関するものに

[2] Chevallard は，基本的に中等教育における数学教育を念頭に議論を進めている．

ついて学習することになる[3]．従来の‘古い’パラダイムのように，学習すべき内容が事前に決まっており，それを順々に，その存在理由も知らずに学習していくのではない．世界について問い，その問いに答えるために必要なもののみを，必要が生じた際に学習するのである．そこで学習されるものは，記念碑主義の場合とは異なり，存在理由を伴って生じる．たとえ学習するものが過去の偉人が作り上げた作品であったとしても，Q という問い（もしくはそれに関する問い）に答えるという目的のために，それを学習するのである．したがって，記念碑主義パラダイムに基づいたカリキュラムが指導すべき内容によって決定されるのに対し，世界探究パラダイムに基づいたカリキュラムは問いの集合によって指導内容が決定されるのである (idem. pp. 182-183)．Chevallard はそうしたカリキュラムを具体的に提案しているわけではないが，世界探究パラダイムに基づいた問いとして，以下の事例をあげている (idem. p. 178)．

a. 統計を使っていて抱く素朴な疑問：「自由度」という表現は正確には何を意味するのだろうか？
b. 物理において用いられる変な記号：$\propto$（〜に比例する）．この記号の数学的扱いは？
c. 生物多様性に関心のある者が出会う次の方程式は何を意味するのか？

$$H_e = 1 - \frac{1}{1+4N_e\mu}.$$

それぞれの詳細は割愛するが，c は数学が苦手な者は見ただけで躊躇するような式であろう．こうしたものに躊躇しない態度を世界探究パラダイムは目指すのである．また，世界探究パラダイムでは，世界について問うため，他教科との合科的な課題や日常の文脈が多く入ってくる．ただし，日常の文脈が単に入ればよいわけではない．日常の文脈のものもあれば，学問的な文脈のものもある．世界探究パラダイムに基づいた学習がなされるためには，この世界における活動の中で抱く問いを取り上げ，それに対し，前向きに探究を進めることが肝要となる．

こうした世界探究パラダイムに基づいた学習の形態は，今日の社会を生きるために必要な能力の育成に適している．実際，社会では，学校で習った数学の内容を備えていればよいわけではない．それらでは十分でないだけでなく，それらがそもそも必要か否かも疑問である．必要となる数学は，時代・場所・職業によって大きく異なる．必要に応じて必要なことを学習できること，必要に応じて学習する態度を育てることが大事になるのである．

３．世界探究パラダイムに基づいた指導・学習の定式化

（１）Study and Research Paths

Study and Research Paths (SRP)[4] は，前出の世界探究パラダイムに基づいた指導・学習の過程を定式化したものである．そこでは，知識というものが，非歴史的なものではなく，何かしらの問いに対して回答をもたらそうとする意志の結果であるとの考えに基づき，より重要な，より意味のある問いを前面に取り上げる (Chevallard, 2004). 既存の作品や仕事をその存在理由も知らぬまま単に訪問するのではなく，問いに回答を与えようとする過程で必要となるものを，存在理由を伴って随時学習するのである．SRP では，研究者が知識を生み出すような探究の過程を想定しており，その過程は既存の知識の“学習 (Study)”と問題解決や創造に相当する“研究 (Research)”との往還からなる．具体的には，SRP はおおよそ次のような構造の過程となる (cf. Winsløw, Matheron & Mercier, 2013)．まず，数多くの問いを生み出し，より多くの教えるべき知識に出会えるような，“生成的な強い力 (fort pouvoir générateur)”

[3] Chevallard (2015, pp. 178-179) は後ろ向きを “retrocognitive”，前向きを “procognitive” と呼び学習の性格を特徴づける．

[4] 仏語の名称は，Parcours d’étude et de recherche であり，PER と短縮される．英語では，Study and Research Courses (SRC) や Research and Study Paths, Study and Research Programmes など種々の訳語が用いられてきた．しかし，近年では SRP を用いることが増えてきたようである．筆者は，SRC と course の語をこれまで用いることがあったが，今後は SRP を用いたい．なお，course の語を用いない理由は，それが教育界でしばしば用いられる語であり混同されることにある (Barquero, Bosch, & Gascón, 2013)．特に，仏語の parcours が研究を進める際の紆余曲折を伴う「経路」を意味しているため，course とすれば事前に敷かれたレールのように捉えかねられないからである．

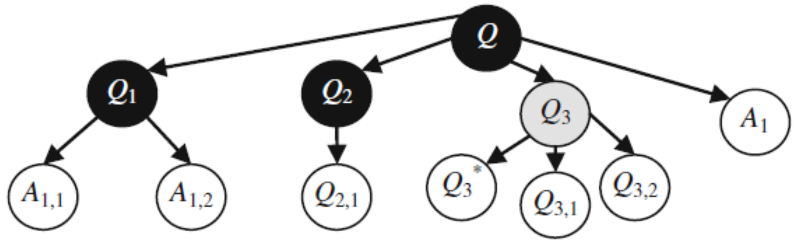

図１　SRP の樹形構造 (Winsløw et al., 2013, p. 271)

(Chevallard, 2004; 2006) をもったひとつの問いから始まる．この問いに答えるべく，様々な資料にあたりそれらを学習するとともに，そこから考察を進める．すると，Q に部分的な回答を与えるであろう様々な新たな問いが生じる．それは，部分的な問いのこともあれば，Q から導かれた関連の問いのこともある．そしてさらに，それらの新たな問いに取り組むことにより，場合によっては何かしらの回答が得られ，場合によってはさらに新たな問いが生じる．こうしたことが続いていくのである．この過程は図式にすれば，図１のような樹形構造になる．

SRP の活動を授業に取り入れた場合，新たに生成される問いは，生徒の参照した資料・メディアや生徒の既得の知識 (équipement praxéologique) に応じて異なったものとなり，教師は生徒の活動（問い，回答）を予見できないことも少なくないであろう．ATD では，探究がどこに行くか事前に決めずに進める SRP を“オープンな SRP (PER ouvert)”と呼ぶ．一方，何らかの教えるべき対象が存在し，それが探究の過程で生じるように設定した SRP は，“目的づけられた SRP (PER finalisé)”と呼ぶ．さらに，教科内の SRP (PER monodisciplinaires)，教科横断的な SRP (PER codisciplinaires) などといった区分もできる (Chevallard, 2009)．Chevallard (2004) は，以下のような問いの例を SRP で利用可能なものとしてあげている[5]．

a.　どうやって大きな数を計算するのか？例えば，123456789^4 のような計算を一般的な電卓で．

b.　電卓を使ってどうやって数値計算，代数計算をうまくできるのか？

c.　「ある定理の逆が証明可能であること，もしくは逆に反証可能であることをいかに決定するのか？」例えば，「三角形の２つの角の二等分線が同じ長さなら，その三角形が二等辺三角形であることをいかに示せるのか」

d.　a, b, c が 100 未満の整数のとき，$\sqrt{a}$ と $b\sqrt{c}$ を電卓で比較できるか？

ここにあげられた問いはいずれも数学の SRP 向けのものである．先に述べたように，数学的モデル化のような日常の文脈を必ずしももたないこうした問いも世界探究パラダイムで扱われるのである．

（２）ヘルバルト図式

ATD では，「教授システム (didactic system)」を $S(X; Y; \heartsuit)$ で記述する (Bosch & Gascón, 2014)．ここで，♥は，何らかの問いや数学的な作品・仕事，プラクセオロジーなどであり，「教授争点 (didactic stake)」と呼ばれる．X は♥を学習 (study) する人の集合であり，Y はそれを助ける人の集合である．ATD は，さらに，指導・学習の過程，もしくはさらに一般的に研究者が行なうような学習と研究の過程（つまり，SRP）を次の「ヘルバルト図式 (Herbartian formula; schéma herbatien)」によって記述する．

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow A^{\heartsuit}$$

ここで，Q は‘問い (question)’，M は‘教授ミリュー (didactic milieu)’，$A^{\heartsuit}$ は問い Q に対する‘回答 (answer)’である．次節で説明するが，ミリューについては，Brousseau (1997) による教授学的状況理論 (TDS) で扱われるミリューと同様のもの（cf. 宮川, 2009）を想定すればよい．ここでの教授システム S では，教授争点が作品ではなく，問いになっている．記念碑主義であれば，O を作品 (work) として，$S(X; Y; O)$ などと書けるであろう．一方，上のヘルバルト図式の教授システムでは，作品ではなく，問い Q に回答を

5 世界探究のところで取り上げた問いも SRP の最初の問いになりうる．

与えるべくミリューに働きかける．これは，SRP さらには世界探究パラダイムの特徴である．ここでのミリューは X と Y によってもたらされ，二種類の要素により構成される．一つは，Q に関連した問いに対する利用可能な資料から得た先人の作った既存の回答 $A^{\lozenge}$ である．研究者は何の情報も得ず研究を進めるわけではない. インターネットや参考文献を調べることにより，自らの問いに関連する既存の回答 $A^{\lozenge}$ を見つける．それをミリューとして働きかけることにより，自らの回答 $A^{\heartsuit}$を作り上げていくのである. ミリューを構成するもう一つの要素は，理論や実験など他の作品・仕事 (works)[6] である．これには，$A^{\lozenge}$ に表出する数学的な概念や定理・性質といった理論，問いに取り組む際に用いられる道具や装置，さらには問いといったものが含まれる．通常の探究においては，学習者は，複数の回答 $A^{\lozenge}$，複数の作品・仕事 O と相互作用を行なう．そのため，記号を使えば，$M = \{A_1^{\lozenge}, A_2^{\lozenge}, \ldots, A_k^{\lozenge}, O_{k+1}, \ldots O_m\}$ となり，ヘルバルト図式はより正確には，次のように記述される．

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow \{A_1^{\lozenge}, A_2^{\lozenge}, \ldots, A_k^{\lozenge}, O_{k+1}, \ldots O_m\}] \hookrightarrow A^{\heartsuit}$$

（３）メディア・ミリューの往還

上記のヘルバルト図式において，すなわち世界探究パラダイムに基づいた学習 SRP において，ミリューへの働きかけによっていかに回答 $A^{\heartsuit}$に至るのか．ATD でその過程は，「メディア・ミリューの往還 (media-milieu dialectic)」という仕組みによってなされるとする．

ここで「メディア (media)」とは，「広い意味では，ある種類のオーディエンスに向けられた，世界についてもしくはその一部についての情報を示す手段」(Kidron et al., 2014, p. 158; Chevallard, 2004) とされ，一般的な意味でのメディア（雑誌，新聞，ビデオなど）をはじめ，書籍，論文，講義などを指す．何らかの知識や情報を伝える意図のあるシステムである (Artigue, Bosch, Gascón & Lenfant, 2010)．一方，「ミリュー (milieu)」は，上に示したヘルバルト図式のミリューM を意味する．‘自然’の一部として振る舞う教授意図をもたないシステムであり，学習過程において探究者が相互作用するものである (cf. Chevallard, 2004; Artigue et al., 2010; Kidron et al., 2014)．これは，TDS における milieu を含む．ただし TDS では，教師が設定したミリュー ($\{O_i\}$)との相互作用によって学習が生じると考えた．しかし ATD では，「どんな知識の構築においても，新しい知識や情報を与えるメディアとこの情報の妥当性の証拠を示すミリューとの間の往還が生じる」(Artigue et al., 2010, p. 1540) と考え，ミリューのみならず，メディアという概念を導入し，メディア・ミリューの往還が，学習が生じる条件の一つと考える．例えば, 何らかの問いに直面した際, 研究者であれば, 取り急ぎメディアからその問いの回答に関連する既存の回答 $A_1^{\lozenge}$を得るであろう. そこから他の既存の作品や仕事 (O_i) との相互作用により，それが正しいのか検証したり，自らの問いの回答となりうるのか検討したりする．多くの場合，メディアから得られた最初の回答は十分でないため，もしくは新たな問いが生じたため，さらにメディアから別の既存の回答 $A_2^{\lozenge}$を得て，探究を進めていく．こうした過程がメディア・ミリューの往還である．この過程は，「メディアによって与えられた利用可能な（部分的）回答と亜教授学的状況との相互作用を通してそれを検証することの間の連続的な相互作用に対応する」(Kidron et al., 2014, p. 158).

（４）５つの段階と７つの往還

以上のように ATD は，世界探究パラダイムに基づいた SRP という探究活動の過程と仕組みを樹形構造，ヘルバルト図式，そしてメディア・ミリューの往還によって特徴づけ，授業デザインや探究活動の分析のためのツールを提供する．さらに ATD においては，SRP における特定の問い Q への取り組みの過程を定式化するとともに，SRP における活動をさらに詳細に構造化する視点を提示している．それは，5 つの段階 (temps) と 7 つの往還 (dialectique) である．まず，問い Q への取り組みの過程は，次の 5 つの段階 (temps) の繰り返しによってモデル化されるとする (Chevallard, 2002).

i. 観察 (observation) : メディアから得られた回答 $A^{\lozenge}$の観察.
ii. 分析 (analyse) : 回答 $A^{\lozenge}$の実験的・理論的分析.

[6] 仏語では “œuvres” であり，一般的には，作品や業績などを意味する．

iii. 評価 (evaluation)：回答 $A^{\Diamond}$の評価.

iv. 開発 (developpement)：回答 A の作成.

v. 擁護と例証 (defense & illustration)：作り出した回答 A の擁護と例証.

この5つの段階により，具体的には次のような過程を SRP が想定していることがわかる．問い Q に対して自らの回答 A を作り上げるためには，まずインターネット等のメディアから得られた情報がいかなるものかを把握すること（観察）から始まる．この情報は，Q に対する答えではないかもしれないが，何らかの問いに対する他者による回答 $A_1^{\Diamond}$である.それを把握するためには，観察のみならず，それがいかなるものか，実験したり理論的に考察したりして理解する必要があろう（分析）．そして一度理解すれば，それが自らの探究に有用か否か評価する．それが有用と判断されれば，それを用いて自らの回答 A を作り上げ，有用と判断されなければ別の回答を探しに行き,新たな $A_2^{\Diamond}$を見つけ段階 i から再度取り組むことになる．自らの回答を作り上げた後は，その回答が正しいことを示す活動（擁護と例証）が進められるのである.

また，これらの段階の活動は，次の7つの2極間の往き来（往還）によってより詳細に構造化される (Chevallard, 2002; Chevallard & Ladage, 2011).

1. 本題と脱線 (sujet et hors-sujet)
2. スカイダイバーとトリュフ採集家 (parachutiste et truffier)
3. ブラックボックスとクリアボックス (boites noires et boites claires)
4. 推測と証明 (conjecture et preuve)
5. 外的読解と内的記述 (excription et inscription)
6. 発信と受信 (diffusion et reception)
7. 個人と集団 (individu et collectif)

これらは，探究の営みの様々な側面を抽出したものである．それぞれの2極を行ったり来たりしながら，探究が進むことを示している[7]．ここではそれぞれの詳細は説明しないが,わかりにくいもののみ説明すれば，2 番目は大局的に探究することと局所的に探究することの往還を意味し，5 番目は外で得た他者が作った回答 $A^{\Diamond}$を読む営み（外的読解）と自らの回答 A を作り上げるために何度も書く営み（内的記述）との往還を意味する．また，7つ目の「個人と集団の往還」は近年加えられたものである (Chevallard & Ladage, 2011, p. 824).

なお，上記の往還は，いずれも研究者が一般に行なっている営みの種々の側面をも表わしている．われわれが日頃進める数学教育学の研究の営みも同様である.

4．考察：SRP における論証活動

ここまで，ATD の範疇において，世界探究パラダイムに基づく指導形態として定式化されている SRP を，それを特徴づける理論的な概念とともに示した．教師がすべてを把握している問題を，限られた道具のみを用いて解決するような，‘古い’パラダイムに基づいた数学の授業での活動とは異なり，SRP では，より研究者の活動に近い「真の探究活動」, 数学であれば「真の数学的活動」と呼べるようなものが想定されていた.

一方，本稿の目的は，そうした探究活動における論証の必要性と論証活動の性格を明らかにすることであった．そこで以下では，論証活動をやや広い意味で捉え，3 節で示した SRP の営みにおいて，いかなる場面で論証活動が生じるのか(必要となるのか)を検討し，さらにそこでの論証活動がいかなる性格をもちうるのか考察する．また，論証活動の性格については，「教授学的契約」 (Brousseau, 1997) の視点から考察する．この視点を採用した理由は，‘古い’パラダイムに基づいた従来の指導と世界探究パラダイムに基づいた SRP という両者における根本的な差異が，教授学的契約にあると考えるためである.

（1）$A^{\Diamond}$と A に関わる論証活動

SRP では，これまでに見てきたように，最初の問い Q_0 に答えるために，メディアから得られた他者が作った回答 $A_i^{\Diamond}$を見つけ出し検討し,そこから新たな問い Q_i が発生したり，それに対し自分なりの一時的な回答 A_i を作り出したりということを繰り返しながら，自らの最終的な回答 $A^{\heartsuit}$を作り出す．ここでの Q_0 や Q_i が，数学的な証明や何らかの理由の説明を求める問いであれば，当然ながら，学習者は論証活動を進めることにな

[7] 番号は便宜的に振った．探究の順序を表わしているわけではない.

る．その過程では，メディアより得られた証明を含む回答 $A_i^\Diamond$を読み，理解するといった営みもあろう．しかし，ここで検討したいのは，そうした論証を前提とした Q における論証活動ではなく，世界探究パラダイムに基づいた適当な Q に対して進められる論証活動である．そこで，前出の一つの Q に対する取り組みの 5 段階においていかなる論証活動が求められるのか，7 つの往還の視点を交えながら，検討する．

先の 5 段階では，メディアから得られた（もしくは受信した）他者が作った回答 $A^\Diamond$を検討する場面とそこから自らの回答 A を作り出す場面があった．$A^\Diamond$は，他者の回答であるため，当然ながら，まずそれを理解する活動（すなわち外的読解）が生じる．その活動は，最初の 3 つの段階（観察・分析・評価）におけるものであり，$A^\Diamond$の真偽を確かめつつ，それがいかに使えるのかその有用性を判断するような活動である．真偽を確かめることは既に論証活動の一つである．特に，インターネット上で得られた回答 $A^\Diamond$は信頼性に乏しいことが少なくないことから，こうした活動が生じやすい．真偽を確かめる方法は，多岐にわたり，帰納的なものから演繹的なものまで可能である．いかなる方法を用いて確かめるかは，その状況によって決定される (Balacheff, 1987)．おそらく，学習者が納得することのみが目的であれば，個人・集団の往還の視点から個人の活動のみであれば，数学的な証明ではなく，手っ取り早く納得できる帰納的なものが採用されるであろう．すなわち，帰納的なものでも演繹的なものでも，学習者自身が真偽を納得できるものであれば十分である．

一方，学習者が $A^\Diamond$に対峙した際の最大の問いは「$A^\Diamond$は使えるか？」というものである．なぜならば学習者の目標は Q に回答を与えることであるからである．$A^\Diamond$を観察（段階 i）し，使えそうにない場合はそれを深く理解することなく，次の $A^\Diamond$に移って行く．ここでは大局的な判断（スカイダイバー）がなされる．ところが，$A^\Diamond$が使えそうな際は，そのより深い理解が求められ，分析（段階 ii）が進められる．そこでは，$A^\Diamond$に含まれる様々な個々の概念を理解するため，すなわち局所的な考察（トリュフ採集家）のための新たな問い（「〜とは何か？」），そして理由についての問いが生じる．理由についての問いは，例えば，「なぜ $A^\Diamond$という回答が得られたのか」「なぜ $A^\Diamond$では O_i という概念を用いているのか」といったものである．こうした問いが生じる理由は，学習者がその後の活動において，$A^\Diamond$を用いて自らの回答 A を作り出し（段階 iv），さらにそれを擁護（段階 v）しなければならないことにある（内的記述）．SRP では教師に期待される回答が事前に決まっているわけではく，作り出す回答 A は学習者がよく理解し責任をもったものとなる．そのために，$A^\Diamond$についても深い理解が求められるのである．理解していないものから，理解している回答を作り出すことはできない．例えば，メディアから得られた回答 $A^\Diamond$が何かしらの方法であった場合（例えば，濵中・大滝・宮川 (2016) のように 3 乗根をシンプルな電卓で求める方法），それでうまくいくことを確認するのみならず，「なぜその方法でうまくいくのか」という理由についての問いが生じる．この問いに対する回答をもたない限り，そこから自らが責任をもった回答 A を作り出すことはできないのである．

さらに，「なぜ」といった理由についての問いは，そもそも理論的・科学的な問いである．それは，ブラックボックスをクリアボックス化するための問いであり，対象についての経験的な理解を求めるのではなく，対象の‘構造’について理解を求めるものである．そのため，こうした問いが生じたあかつきには，必然的に，多かれ少なかれ論証活動が生じるのである．ただし，ここで求められる論証の水準は，学習者が所属するコミュニティによって決定される．特に，学習者が自らの研究成果を発表し，他者の批判より自らの回答を擁護するという学習形態であれば，他者を納得させるに十分な論証が必要となる．しかし，帰納的な説明で納得するようなメンバーから構成されるコミュニティであれば，学習者が数学的な証明を作ることはない (Balacheff, 1991)．したがって，学習者が置かれた状況と学習者の所属するコミュニティ，つまり個人と集団の往還の性格が，論証活動の水準を決定するのである．

（２）教授学的契約の視点から

世界探究パラダイムに基づいた SRP と‘古い’パラダイムに基づいた通常の授業では，それぞれにおける教授学的契約が非常に大きく異なる．そして，その違いが，それぞれで求められる論証活動の性格を大きく

異なったものにする．

通常の授業では，学習者は証明すべき命題や性質が真であることを，証明する以前に知っている．なぜならば，その命題が教師や教科書によって与えられるから（例えば「～を証明せよ」といった問題），教師や教科書が偽の性質を与えない（契約）からである．学習者が何らかの数学的性質を自ら発見し，その真偽を問うような授業であっても，発見すべき性質は既に決まっており，それを教師は知っている．なぜならば，学習指導要領により教えるべき内容が既に決められており，教師はその内容についての責任をもつという契約があるからである．そのため，発見した性質は，確かに証明されるかもしれないが，学習者がそれを自らの回答として責任をもち，それを他者に自信をもって説明できるほど把握・理解することはまれである．したがって，数学の通常の授業における教授学的契約が，学習者がある数学的性質の真偽を自ら判断したり，自らの回答に十分責任をもったりすることを困難にし，ひいては学習者が論証の意義を感得することを妨げているのである．

一方，SRP では，教師が真偽を判定すべき命題を与えるわけではない．教えるべき数学の内容が事前に決まっているわけでもない．そのため学習者は，発見した数学的性質に自らが責任をもたなければならないのである．この契約があるからこそ，通常の授業では難しかった，「なぜ」という構造的な理解を求める問いを学習者が自ら立て，自らその回答を作り上げていくという論証活動が生じるのである．

また，通常の授業における教授学的契約は，問題解決の過程においても，上で考察したような，SRP における $A^◊$に関わった論証活動の発生を妨げる．通常の授業では，問題の解決に必要となる道具や情報は，教師が与える．そのため，その情報の真偽や有用性を疑う必要がない．なぜならば，そこには「教師は学習者が問題解決や学習に必要となるものを与える」という教授学的契約があるからである．例えば，算数・数学の授業において，与えられた問題の解決に学習者が行き詰まったとき，インターネットを調べることは通常ルール違反である（そのような契約である）．そのため，問題の解決に導くため，教師がヒントをしばしば提示する．このヒントは教師というメディアから得られた $A^◊$と捉えることができる．しかしながら，この $A^◊$に関わる活動は，インターネット等のメディアから得られた $A^◊$に関する活動と根本的に異なる．ヒントの場合も $A^◊$を理解する必要はある．しかし，それが教師によって与えられたものであるため，その真偽や有用性を疑う必要がないのである．そこで生じる問いは，「使えるか？」ではなく，「どう使うのか？」となる．これは‘方法’についての問いであり，構造的な理解を求める問いではない．ヒントの使い方がわかれば，$A^◊$について何かを問うことはほとんど必要なく（問うても，教師の意図は何か，といった教師の期待を探るような問いである），理由についての問いは発生しない．例えば，なぜそのヒントが有用なのか，その存在理由を考える学習者は稀であろう．

以上のことから，世界探究パラダイムに基づいた SRP では，‘古い’パラダイムに基づいた通常の授業とは大きく異なった教授学的契約が存在し，そのため，これまでは難しかった，「なぜ」という理由についての問いを学習者が自ら立て，自らその回答を作り上げていくという論証活動が生じやすいと考える．数学の応用を重視すれば論証が軽視されるのではないかとの懸念があるが，世界探究パラダイムに基づいた SRP では，論証が必要なくなるのではなく，むしろ論証活動が多く生じ，それが不可欠であることを認識できるような学習状況を提供するのである．SRP における実際の論証活動の必要性とその性格については，SRP の授業実践 (cf. 濵中・大滝・宮川, 2016) を通して得られた実験データの分析により今後さらに詳細に示していく．

５．おわりに

世界探究パラダイムに基づいた SRP は，わが国で言えば課題学習であろう．Chevallard は，課題学習により中等教育における数学のカリキュラムを構成することを提案するのである．その是非はさておき，SRP では，「問い」に焦点が当たっている点が興味深い．わが国では，課題学習などのように，「問い」よりも「課題」の語が前面に取り上げられ，必ずしも「問い」に焦点

が当たらない[8]．この点がわが国の課題学習と異なる．「課題」であれば，メディアから種々の既存の回答を調べてそれを羅列する調べ学習のようなものになりかねない．問いに焦点が当たるからこそ，論証とのつながりが顕在化してくるように思う．

Chevallard は「問いは非人間社会には存在しない人間の最も貴重な業績である」(2010, p. 140) と考え，それこそを学ぶ（すなわち，取り組む）べきと考える．問いに取り組みその結果得られたものを学ぶのではないのである．得られたものの学習を目標とすれば，それはたちまち記念碑訪問パラダイムに基づいた数学教育となってしまう．得られたものは，脱文脈化され存在理由も消失しているため，容易に記念碑となってしまうのである．

参考文献

Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. & Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. In *Proceedings of CERME 6* (pp. 1535-1544), Lyon: INRP.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2). 147-176.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bisop, E. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Dordrecht: Kluwer.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modeling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(3), 307-338.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education: Authored by networking theories group* (pp. 67–83). Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 - 1990.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. In T. Assude & B. Grugeon (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.* Journées de didactique comparée (Lyon, mai 2004). (http://yves.chevallard.free.fr)

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21-30), Barcelona: FUNDEMI IQS.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. (http://yves.chevallard.free.fr)

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous? *Éducation et didactique*, 4 (1), 139-148.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S. J. Cho (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education* (pp. 173-187). Springer.

Chevallard, Y. & Ladage, C. (2011). Clinique et ingénierie de l'enquête codisciplinaire : un atelier « Enquêtes sur Internet » au collège. In M. Bosch, J. Gascón, R. Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) *Un panorama de la TAD* (pp. 807-830). Bellaterra, Barcelona: CRM.

Kidron, I., Artigue, M., Bosch, M., Dreyfus, T., & Haspekian, M. (2014). Context, milieu, and media-milieus dialectic: A case study on networking of AiC, TDS, and ATD. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education: Authored by networking theories group* (pp. 153–177). Springer.

[8] これはもしかすると文化的な要因があるのかもしれない．実際，研究においても，research question の適訳を見つけることは難しく，「問い」よりも「課題」に焦点が当てられる．

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267-284.

阿部好貴 (2015).「数学的モデル化と論証の接続に関する一考察：数学的リテラシーの視点から」，日本数学教育学会論究臨時増刊，Vol. 97, 1-8.

阿部好貴・石井英真 (2014).「数学的リテラシーとしての論証の必要性」，日本数学教育学会第 2 回春期研究大会論文集，pp.57-60.

阿部好貴・石井英真 (2015).「数学的リテラシーとしての論証の必要性（２）」，日本数学教育学会第 3 回春期研究大会論文集，pp.63-66.

岩知道秀樹・杉野本勇気・大滝孝治 (2014).「論証教材としての Sylvester の自然数定理」，日本数学教育学会第 2 回春期研究大会論文集，pp.37-40.

杉野本勇気・大滝孝治・岩知道秀樹 (2015).「Sylvester の自然数定理を巡る論証活動」，日本数学教育学会第 3 回春期研究大会論文集，pp. 53-56.

濵中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016).「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2) ～電卓を用いた実践を通して～」，全国数学教育学会第 43 回研究発表会発表資料（於広島大学）.

溝口達也 (2015).「カリキュラム開発における数学的活動とそのネットワークの方法論的考察」，日本数学教育学会第 3 回春期研究大会論文集，pp. 57-62.

宮川健 (2011).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」．日本数学教育学会誌数学教育学論究, Vol. 94, 37-68.

宮川健・真野祐輔・岩崎秀樹・國宗進・溝口達也・石井英真・阿部好貴 (2015).「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的基盤」．全国数学教育学会誌数学教育学研究, 21 (1), 63-73.

文部科学省 (2008). 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版.

文部科学省 (2009). 高等学校学習指導要領解説数学編理数編，実教出版.

付記 : 本研究は，JSPS 科研費 (15H03501) 及び平成 27 年度全国数学教育学会ヒラバヤシ基金研究助成の補助を受けて進められたものである.