

命題と条件に関する教材研究と指導の提言

—必要条件と十分条件の指導について—

兵庫教育大学 濱中裕明

兵庫教育大学大学院生 安納秀佳・寶田光太郎・森邊智美

文部科学省(2001)の『今後の国立の教員養成系大学学部の在り方について(報告)』にもあるように、教員養成系大学・大学院においては、理学部や文学部とは違う独自性が求められており、教科専門にかかる部分については改革の余地が大きいと指摘される。もちろん、筆者らもそういう独自性を意識して、これまで学部・修士課程において学びを展開してきたはいるものの、近年はその独自性を成果により明示的に示すことが求められている。そうした状況を背景として、今回は修士課程において、従来の教科専門のゼミとは別に、より教育実践に近く、かつ教科専門の視点を取り入れた自主的なゼミ活動を、院生とともに展開してきた。

ここでとりあげる内容は、高校の数学Ⅰの単元「命題と条件」のなかの必要条件と十分条件についてである。実際、筆者の経験上の実感では、一般的な大学生においても「必要条件」と「十分条件」という用語に対する理解は極めて低い。実は、今回のゼミ活動に参加した院生たち自身もその理解が曖昧であった。しかし、逆にいえば、どうして理解がなされていなかったのかを自問自答することもできる。本稿は、そうした研究活動のなかでなされた考察の成果についてまとめたものであり、「必要条件」と「十分条件」について、どのような理解が不足しているのか、また理解の不足の原因は何かについて検討し、それを改善するための指導の提言を目的とする。

1 標準的な指導内容と理解の様相

まずは、「必要条件」と「十分条件」について、教科書でどのように扱われているかをみてみよう。現行のS社の教科書「数学Ⅰ」を見ると、必要条件、十分条件は右のように説明されている。

E 必要条件と十分条件

2つの条件 p , q について、命題 $p \implies q$ が真であるとき、

q は p であるための 必要条件 である、

p は q であるための 十分条件 である

という。

$p \implies q$ が真
十分条件 必要条件

図 1 S社「数学Ⅰ」より

森(1993)によれば、1993年の当時の教科書12社17冊のうち12冊を調べたところ、10冊で上記と同じ表現がなされていると報告されている。また残り2冊も「であるための」が「が成り立つための」や「の」に変わっただけで大きな違いはないと報告されている。

森(1993)は、「数学の『必要条件』、『十分条件』を正しく使えるようになるためには、まず第一段階として『 p 成立』『 q 成立』と表される事柄について、『 $p \rightarrow q$ が成立するかしないか』を把握することが欠かせない。それができた上で、数学で要求されているとおりの正しく、 q に『必要条件』を、 p に『十分条件』をあてなければならない」とのべ、「必要条件」や「十分条件」を判断する問題が、2つの問題に分けて考えられると述べている。

つまりその2つの問題とは、2条件 p と q についての、

- 「 p ならば q 」もしくは「 q ならば p 」のどちらが成り立つかを判断する問題。
- そのうえで、どちらがどちらの必要条件（もしくは十分条件）かを判断する問題。

である。そして、森(1993)は、多くの学習者がこのうち後者の方に困難を感じていることを調査から明らかにしている。森(1993)の調査問題は以下のようなものである（下記の下線部は口頭の指示・設問だったとのこと）。

問1 「 A ならば B である」が成り立つとします。次の（ ）内には A か B を、また [] 内にはつなぎの言葉を、日本語で入れなさい。

a () は () [] 必要条件である。

b () は () [] 十分条件である。

問2 これを習ったときどう感じたか。

問3 そう感じた原因はどこにあると考えるか。

森(1993)の報告では、情報系学科の学生を対象とした調査で問1の正答率が72%であったこと、問2では9割の学生が「難しい」という印象を持っていたことを挙げ、また、7割近くの学生が「言葉が難しい」という内容の回答をしていたと述べられている。特に、その言葉の難しさとして、「必要」や「十分」という言葉に対する日常的な用法や意味が、「必要条件」や「十分条件」という数学の条件間の関係を表す用語のもつ意味とつながりにくいことを指摘している。

また、「必要」や「十分」という言葉のほかにも、森(1986,1993)は「 p ならば q 」という命題において、帰結にあたる q を、前提の意味の強い「必要条件」と名付けることにも、そもそも日本語の使い方として無理があるのではないかと指摘している。

森(1986,1993)の上記の指摘はとても興味深いが、それ以外にも「必要条件」「十分条件」の理解の実態としては、次のような誤解があるのではないかと考えた。例えば、図1に示したS社の教科書「数学I」を見ると、必要条件と十分条件の定義の説明の横には、「 $p \Rightarrow q$ 」の図式があり、 p と q の下にそれぞれ「十分条件」、「必要条件」と書かれている。ここから「 p が十分条件であり、 q が必要条件である」と誤解してしまう傾向はないだろうか。本来、定義の文にあるように「 p ならば q 」が成り立つときに、 p は「 q であるための十分条件」であって、「 q であるための」は省略できない。なぜならば、十分条件という用語は、 p と q という2つの数学的な条件間の相対的な関係を表すための概念だからである。例えば、2つの数の5と3について、「5は3より大きい」という表現は正しいが、「5は大きい」という表現は不自然で数学的にナンセンスである。これと同様の不自然さが「 p は十分条件である」という文についてもいえる。「 p は q の十分条件である」という文は、「 p は q よりも強い（厳しい）条件である」ということを意味しており、「 q は p の必要条件である」という文は「 q は p よりも弱い（緩い）条件である」ことを意味している。このように、十分条件や必要条件という言葉は、本来、2つの条件間の相対関係を表す用語であるにも関わらず、単に「仮定が十分条件」「結論が必要条件」というような誤った理解が多い様に思われる。これは、筆者らの経験からの推測であるが、森(1993)では「必要条件」「十分条件」を、「十分が前」「矢の先は必要」といった丸暗記のためのこじつけ文で覚えている学習者も多いことが述べられており、そのような学習のもとでは、多分にあり得ることではないかと考える。

一方、必要条件や十分条件を、集合の包含関係との関係で理解させようという意見もある。たとえば、田島一郎(1963)は当時新しく高校数学に導入された「数学と論証」、「集合の

考え」について、「論証能力の向上ということが大きな目標になっているが、その際、集合の考えが大きな役割を務める」と述べている。そして、教材の扱い方として、「命題として $A \rightarrow B$ 」であることと「集合として $A \subseteq B$ 」であることとの関係を理解させることの重要性を指摘している。たしかに、条件間の命題を、集合間の包含関係に対応させることにより、条件間の関係を可視化することはできる。それを、論理的推論法則の理解の支援として活用する研究もなされている（岡崎(2008)）。しかしながら、必要条件と十分条件という用語の理解に関していえば、条件間の関係を包含関係で考えることにより、逆に混乱する場合もあるのではないかと。例えば、2つの集合 P と Q について、集合 Q が集合 P を部分集合として含むとき（図2）、「集合 P に含まれるならば、集合 Q に含まれる」ので、「集合 P に含まれる」ことが「集合 Q に含まれる」ことの十分条件、つまり、「より強い条件」となる。しかしながら、集合 Q が「(集合 P を) 含む」「大きい」「広い」といった表現は、集合 Q に「強い」というイメージを持たせてしまわない

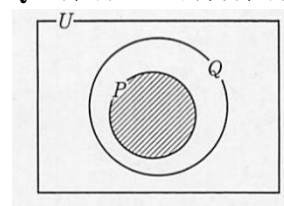


図2 $P \subset Q$

だろうか。これは、「集合 Q に含まれる」という条件が「集合 P に含まれる」という条件よりも「弱い」という事実と相反するイメージを与え、このことがかえって学習者に混乱を引き起こすこともあるのではないだろうか。

2 数学の文脈での必要条件・十分条件

必要条件と十分条件についての指導内容と理解の様相を概観したうえで、次は数学の視点から教材研究を進めていきたい。まず、そもそも何のために必要条件や十分条件を学ぶのだろうか。言い換えれば、必要条件や十分条件という概念を学習することによってどのような意義があるのだろうか。例えばそうした概念が日常に役に立つかといえ、これについて筆者らは懐疑的である。確かに、日常的な叙述にも必要条件や十分条件という用語を当てはめることは可能であるが、それによって新たな視点や考えが生まれたりすることは稀有であろう。O'Brien ら(1973)は、生徒や学生が日常において使う論理を **Child Logic** と呼びその様相を調べている。そうした日常論理においては、数学論理として正しくない記述や解釈も多い。例えば、「あなたが男性ならば、ここに入ってはいけない」という記述は、日常的には「女性なら入ってもよい」ことを含意することが多いだろう。これは数学的には正しい推論ではないが、しかし、数学的には正しくないからそのような記述や解釈をするべきではない、とは思わない。確かに日常論理と数学論理の違いは、数学論理の学習の妨げとはなるが、だからといって数学論理を日常論理に持ち込むことによって、日常論理を厳密な論理に変えるべきだというのは極論であり、日常論理は数学論理と分けて評価すべきだろう。つまり、必要条件、十分条件といった概念は、日常論理のなかで活用するために学習するものというよりも、むしろ数学のための数学用語であると考え。つまり、これらの用語は数学のなかで活用されるべき用語である。

では、数学におけるどんな状況で、必要条件、十分条件は使われるのか。そのシチュエーションや文脈を無視して、必要条件、十分条件の用語の意味を丸暗記しようとしても無意味ということになる。

数学の研究に携わる、数学の教科専門担当の立場からいえば、数学における必要条件、十分条件という用語の使用は、何か調べたい特定の状態が成立するための条件を探究するときに発生する。例えば、与えられた三角形の内心と外心が一致するときは、どんな三角形のときだろうか。与えられた三角形が正三角形であれば、内心と外心が一致するのは自明であるが、ほかの場合はないだろうか。このようなシチュエーションにおいて、『三角

形が正三角形である』ことは、『内心と外心が一致する』ための十分条件であるが、必要条件でもあるだろうか」、という記述がなされるし、また、必要条件や十分条件という用語の理解が、そのような探究的思考の誘引となり得るのである。

しかるに、教科書に書かれている説明は、そのようなシチュエーションに全く合致しない。上記で述べたように、必要条件・十分条件は、調べたい状態が発生するという条件（未知の条件 X ）と同値な簡明な条件を探究する際に、未知な条件との相対関係の記述に使うものである。ゆえに、考案した条件 p について、

➤ 「条件 p は、未知の条件 X が成り立つための必要条件である」

とき、これを

➤ 「未知の条件 X は、条件 p が成り立つための十分条件である」

などと言い換えることは文脈から言って奇妙である。つまり、教科書のように一つの命題「 p ならば q 」に関して2通りに展開される「 p は q であるための十分条件」、「 q は p であるための必要条件」という説明は、用語の活用される文脈に合っていないのである。

そう考えると、森(1993)の、「 X ならば q 」が成り立つとき q は結論であるからこれを必要条件とよぶのは日本語として無理がある、という指摘がなされる背景には、文脈の不足があったのではないかということが見えてくる。森(1993)は、「 X ならば q 」の対偶をとって「 q でないならば、 X は成り立たない」とすれば「 X 成立のためには、 q 成立が必要だ」と表せるので、「必要」の日常の用語法と一致して理解できるとも述べている。しかしながら、文脈なしに「 X ならば q 」という命題を、「 X 成立のためには・・・」と捉え直すのは不自然だろう。一方、もしもはじめから、 X が未知の知りたい条件であり、別の簡明な条件 q が与えられ、「 X ならば q 」という命題が明らかになったというシチュエーションならばどうだろうか。つまり、「どういうときに X が成り立つのだろうか」という探究課題のもとでの考察だとすれば、「 X ならば q 」を「 X 成立のためには・・・」と捉えるのは、きわめて自然な思考の流れである。つまり、「未知の条件 X が成り立つのはどういうときか」という文脈があるから、「 X が成り立つためには」という意識が自然に発生し、「必要条件」という用語が適合するという風に考えられる。

3 指導への提言

本節では、前節までの議論を踏まえて、指導への提言を行いたい。そこでまず、これまでの議論で明らかとなった指導上の課題を整理しておく。

(1) 数学の探究的考察活動のなかで活用されるシチュエーションに近い文脈で、「必要条件」「十分条件」の学習がなされるべきであるということ。そのためには、そのようなシチュエーションを含んだ教材を開発する必要がある。

(2) そのうえで、「必要」「十分」という日常語のもつイメージとなるべく一致するように、「必要条件」「十分条件」という、数学の条件間の相対関係を表す用語の意味を説明する手立てを考えること。

上記の2つの課題について、以下それぞれの対応策を提案する。

まず、(1)について考える。中学校で扱う数学の命題では、仮定と結論が互いに必要十分条件となることが多い。例えば、「三角形が二等辺三角形ならば底角が等しい」がこれは逆もまた成り立つ。このように「四角形が平行四辺形となるための条件とは何か」といった形式の問いを考察する際に、必要条件を聞かれているのか十分条件を聞かれているのかをあまり意識せずとも大きな問題が発生しないことになる。逆に言えば、「必要条件」や「十分条件」の学習においては、そのような暗黙の前提を破棄することが促されるような課題、つまり与えられた状態 X が成立するための条件を考えると、自然と X 成立のための必要条件や十分条件が想起される数学的シチュエーションが必要となる。それにより、「必要条件」

や「十分条件」という概念を扱うことに必然性が生じる。また、そこで扱う数学的シチュエーションは、あくまでも「必要条件」「十分条件」を学習するための、題材にすぎないのであるから、不必要に複雑であったり、難しかったりするものではない。

そこでここでは、自然数 x と y について、「 x と y の最小公倍数が 100 以上（これを条件 X）」となるのはどういうときか、という主発問を提案する。これに対する解として次の 2 つを挙げる。

➤ 「 x もしくは y が 100 以上」（条件 p）。

➤ 「 xy が 100 以上」（条件 q）。

そして、条件 p、q と条件 X との関係を考えさせる、という教材を提案する。

条件 p が成り立つとき、つまり x または y が 100 以上なら、最小公倍数は x 、 y の倍数なのであるから、最小公倍数も 100 以上、つまり条件 X が成り立つ。しかし、条件 p が成り立たなくても、条件 X が成り立つときはある。つまり、条件 p は、調べたい条件よりも強すぎる条件となっている。

一方、 xy は、 x と y の公倍数であるから、最小公倍数が 100 以上（条件 X）ならば、 xy も 100 以上である。だから、条件 X が成り立つときには、条件 q も成り立つ。しかし、逆に条件 q が成り立てばいつも条件 X が成り立つ、とは限らない。このように、条件 q は、条件 X 成立のときはいつも成り立つことだが、条件 X を成立させるには弱すぎる条件となっている。

以上のように、この主発問とそれに関する解の提示は、必要条件と十分条件という概念を登場させるのに適した数学的シチュエーションを構成している。

上記のような数学的シチュエーションを提示したうえで、(2)についてどのような手立てが考えられるかを検討する。その際、文脈のなかに教材をおいたことが、次の 2 つの点で生きてくる。第一は、必要や十分という用語と関連付けやすくなることであり、第二は必要条件・十分条件という用語が条件間の相対的関係を表すと自然に意識されることである。

まず、十分条件について考えよう。単に「p ならば X」という命題だけでは、「十分」という言葉と関連がうすいが、条件 X が成り立つのはどんなときかを考察するという数学的シチュエーションの中であれば、「条件 p さえあれば条件 X が成り立つ」といった文脈でとらえることができる。一方で、条件 p が成り立たずとも、条件 X が成り立つこともある、という反例から、条件 p は条件 X が成り立つ特別な場合である、または、条件 X よりも厳しい条件である、といった相対関係が意識される。とくに、「条件 p が成り立つなら、十分に、条件 X が成立するに事足りる、強い条件である」という説明が自然にできよう。ここから、十分条件という用語の意味が、「十分」という言葉の意味と関係づけて理解できるのではないかと。また、その際には条件 p を形容する表現として、「強い」「きつい」「厳しい」「特別な場合の」など、相対的な関係をイメージさせる表現を用いることが重要であろう。特に、「より強い条件」「厳しい条件」といった表現は、日常でも複数の条件の関係を表す際に用いられる。

次に必要条件について考える。十分条件と同じように、「X ならば q」という命題を与えただけでは、「必要」という言葉とつながらない。しかし、条件 X が成り立つときはどんなときかと考えるシチュエーションであれば、条件 X との相対関係が意識され、「条件 X が成り立つときには、まず条件 q が成り立たなければならない」という文脈でとらえることが自然となる。しかし、かといって条件 q さえ成り立てばいいかいうと、条件 q だけでは条件 X が成立しない反例が構成できることをみれば、条件 q は条件 X を成立させるために、前提として成り立たなければならない条件であり、また、それだけでは弱い条件であることが分かる。特に、「条件 q は、条件 X が成立するときには、最低限満たされなければならない必要な条件だが、それだけでは不足している弱い条件である」という説明ができる。

ここでは、条件 q を形容する表現として、「弱い」「ゆるい」「必要最低限の」といったものがふさわしい。実際、「より弱い条件」「ゆるい条件」といった表現も、日常のなかで条件間の相対関係を表すのに使用される。

上述のように、「必要条件」や「十分条件」といった概念を特定の状態 X が成立するための条件を探究する文脈の中におき、提示した条件 p 、 q と条件 X との関係を「必要」「十分」という日常語と関係づけて説明したうえで、その相対関係を数学的な表現である命題（「 p ならば X 」、「 X ならば q 」）で表示しながら、概念の意味を説明する。その際には、「強い」「特別な」「厳しい」や「弱い」「最低限の」「ゆるい」という用語と関連付けて相対性を意識させる。さらに、 p 、 q や X という条件を板書上で、左右ではなく、上下に配置することも提案したい。そのことにより、条件間の相対関係を視覚的・感覚的に理解しやすくできるのではないかと考える。

4 調査

ここまで森(1993)等による先行研究や調査の結果、および、数学での「必要条件」「十分条件」の使われる文脈を基にして、教材研究を行い、指導への提言を展開してきたが、その考察の過程では検証が必要な経験上の知見をいくつか仮定している。実際、以下のような点は検証が必要であろう。

- 視点1. 第1節において、「必要条件」「十分条件」という用語が条件間の相対的な関係を表している、という理解が学習者に欠如しているのではないかと述べたが、この点について検証が必要である。
- 視点2. 第1節において、集合の包含関係と、それらの集合に含まれるための条件間の関係との間の対応は、「強い」という言葉のイメージとの連想から混乱を引き起こす可能性があるとして述べた。このことも検証が必要である。
- 視点3. 第3節においては、2つの条件間の相対関係を表現するのに、「強い」「厳しい」「きつい」や「弱い」「ゆるい」などの形容詞を用いることを提言した。特に、数学用語の解説として用いることを考慮すれば、そのうち比較的主観性の少ない「強い」という表現を用いたい。実際、日常でも「強い条件」という用語法はあり得るが、学習者にとって、日常的に使われる「強い条件」という表現の理解が、数学の文脈においても意味を成すように転移可能であるかを検証する必要がある。

以上の3つの視点を意識して、以下の調査を実施した。

- 調査対象：
教員養成学部の講義を受講し、中学・高校教員免許状（数学）の取得を目指す学生20名（うち1名は、学部授業を受講し中学・高校教員免許状（数学）の取得を目指す大学院生）。
- 調査問題：
調査問題は図3のとおりである。
- 調査結果：
➤ 視点1について、調査問題の1番の結果を基に述べる。1番の問題の回答を次の6類型に分類した。

以下の問題を読んで、回答ください。なお、回答は1番から順番にすすめ、途中で前の問題の回答を修正したり、戻ったりしないようにお願いします。

1. つぎの「必要条件」「十分条件」の説明文の下線部について、もしもおかしいと思うところがあれば、修正したものを下書きなさい。
「2つの条件 p と q について、 p ならば q が成り立つとする。このとき、 p は十分条件である。 q は必要条件である。」

「2つの条件 p と q について、 p ならば q が成り立つとする。このとき、

」

2. 自然数 x と y に関する次の条件 A) と B) のうち、より「強い」条件はどちらですか。
(自然数 x と y について、「 $xy \geq (x \text{ と } y \text{ の最小公倍数})$ 」となることに留意せよ)

A) x と y の最小公倍数は 100 以上である。

B) xy は 100 以上である。
() が強い。

3. 自然数 x に関する次の条件 A) と B) のうち、より「強い」条件はどちらですか。

A) x は 100 以上である。

B) x は 101 以上である。
() が強い。

4. 次の集合 X と Y について、どちらがどちらを含みますか。

X は、平面内のすべての正方形の集合。 Y は、平面内のすべての台形の集合。

() は () を含む。

5. 四角形 F についての次の条件 A) と B) のうち、より「強い」条件はどちらですか。

A) 四角形 F は正方形である。

B) 四角形 F は台形である。
() が強い。

図 3 調査問題の内容

A: 「 p は q であるための十分条件である」というように、「 q であるための」、「 q の」などの表現を追加したもの。(正解として想定した回答)

B: 特に修正は必要ないと判断した回答。

C: 「必要条件」と「十分条件」の入れ換え。

AC: 「必要条件」と「十分条件」を入れ替えたうえで、「 q であるための」などの表現を追加したもの。

D: 「 $p \Rightarrow q$ は必要条件である」など、主語がおかしいもの。

E: その他

累計別の回答数は以下のとおり。

A	B	C	AC	D	E
3 (15%)	7 (35%)	5 (25%)	1 (5%)	2 (10%)	2 (10%)

回答類型の AC は、必要条件と十分条件を取り違えているものの、それらの用語が条件の相対的な関係を示す用語であること理解しているとうかがえる。つまり、回答類型の A と AC を合わせた、2 割の学生は相対的な関係を表す用語であると理解していると言える。しかし、回答類型 B や D を回答した 45% の学生は、単に「p が十分条件である」という文に違和感をもっていなかったり、主語がおかしかったりすることから、「必要条件」「十分条件」という用語が相対的な関係を表す用語であるという理解が不足している可能性がある。

- 先に視点 3 について、調査の 2、3 番の問題の結果を基に述べる。
2 番の問題の正答率は 55%（正答数 11）であり、3 番の問題の正答率は 30%（正答数 6）であった。2 番の問題においては、半分強の学生にとって「強い条件」という表現が数学の文脈においても理解されることが分かった。より単純な 3 番の問題において、正答率が 30% と低いのは、一見不可解であるが、これは次に述べる視点 2 に関わる原因による可能性がある。
いずれにしても「強い条件」という表現が半数程度の学生には、数学の文脈でも通用する可能性がある。今後はより多くの学生に通用する表現を調べるために、「厳しい条件」などに表現を変えて、調査を実施したいと思う。

- 視点 2 について、調査問題の 3、4、5 番の結果を基に述べる。
設問の 4、5 番は視点 2 に対応する設問として設けたものである。4 番の正答率が 85%（正答数 17）、5 番の正答率が 55%（正答数 11）であるが、これら 2 つの設問のクロス集計表を以下に示す。

		4 番	
		不正解	正解
5 番	不正解	2	7
	正解	1	10

表中の数は、回答数である（全回答数 20）。これを見ると、4 番の正解者数 17 名（全体の 85%）のうち、7 名（全体の 35%）は集合としての包含関係は分かったものの、それらの集合を表す条件間の関係について、5 番においては「強い条件」を正しく読み取れていない。

ところで、3 番の問題に目を向けてみると、3 番の設問にある 2 つの条件（自然数 x について、「100 以上である」「101 以上である」という条件）も、「100 以上の自然数の集合」「101 以上の自然数の集合」というように、集合として考えやすいものになっている。これはあくまでも推測にすぎないが、集合としての包含関係に目をむけたことにより問題 3 の正答率に影響した可能性も考えられる。

しかしながら、今回の調査結果からだけでは、断定できる部分は少ないことは否めない。今後、より詳細な調査が必要である。

5 まとめと課題

今回の調査では、断定できる部分が少ないが、「十分条件」「必要条件」といった用語が、条件間の相対的な関係を表す用語であるという理解が不足していることはうかがわれた。

数学に関する知見を基にすれば、そのような不足している理解を促すためには、数学のなかで扱われるような文脈で「必要条件」「十分条件」を学習させる必要があることを指摘することができた。また、そのような教材として、最小公倍数に関する条件を例示し、そのような教材を使って数学の文脈のなかで「必要」「十分」という用語と関係するように「必要条件」「十分条件」を説明する手立てを示すことができた。

一方、今回の調査は標本数が少なく、本来、より多くの学習者を対象により詳細な調査を行うべきと考える。ただ、むしろ今回の調査は予備調査と位置づけ、今回の調査結果をもとに今後より詳細な調査を実施したい。また、指導への提言内容の効果に関しては、今後、授業しての指導実践のなかで検証する必要がある。これらについては、今後の課題としたい。

参考文献：

岡崎 宏光(2008) 「ベン図による数学的論理の学習方法」 日本数学教育学会 数学教育論文発表会論文集 41, pp.573-578.

田島 一郎(1963) 「集合で考えよう ―大学入試の新しい傾向について―」 日本数学教育学会誌 45(7), pp.131-136.

森 正雄(1986) 「数学教育における日本語について ―「ために必要」と「ための条件」の考察―」 日本数学教育学会 数学教育論文発表会発表要項 19, pp.133-136.

森 正雄(1993) 「「必要条件」「十分条件」の指導について：理解の実態調査に基づく改善への提言」 日本数学教育学会誌 75(5), pp.121-128.

文部科学省(2001) 「今後の国立の教員養成系大学学部の在り方について（報告）」
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/koutou/005/toushin/011101.htm

O'Brien, Thomas C. (1973) “Logical Thinking in College Students” Educational Studies in Mathematics 5, pp.71-79.