

高校における構造指向の数学的活動に関する考察¹

—教授学的状況理論の視点から—

兵庫教育大学 濱中裕明・加藤久恵

1. はじめに

近年特に重視されている数学的活動の内容としては、数学の実用的価値に重点をおいた応用指向の数学がとりあげられることが多い。しかし一方で、数学の内容や考察そのものを面白いと思わせるような、主体的・能動的な考察活動を促す「構造指向の数学的活動」を考えることも重要ではないか。本研究では、そのような活動の枠組みを提案し、実践を通してその効果を検証しながら、「構造指向の数学的活動」の教材開発を行うことを目的としている。

例えば阿部(2009)は、問題解決から数学的活動への変容について、「理想的には主体に焦点化されて導入された問題解決であったが、その教授・学習の焦点は客体である数学に焦点があり、その意味で主客の乖離が存在する。」と述べ、続いて「数学的活動」を主・客との乖離を繋ぐものとして解釈できること、応用指向の強調から主・客の往還を行っていくことの重要性を述べている。主・客との乖離を繋ぐために、応用指向の方法の強調から改善を図ることも有効と思われるが、一方で、本研究では、構造指向の数学の方法からも「数学的活動」を取り入れることで、数学を分かる喜びに焦点をあて、学習者と数学の乖離の改善を図ることを提案したい。結局、応用指向、構造指向のいずれにせよ、何らかの数学的な題材や課題に学習者がとりくむ場面において、そのときの取り組み方が問題となるのではないか。本稿の目的は、この問題について、フランスを起源とする数学教授学における教授学的状況理論の視点をうい、これまでの研究で述べた「構造指向の数学的活動のサイクルモデル」(濱中・加藤, 2013a)について再考し、示唆を得ようというものである。

2. 構造指向の数学的活動のサイクルモデル

上述のような「構造指向の数学的活動」のために、濱中・加藤(2013a)では次の図 1 に示す「構造指向の数学的活動のサイクルモデル」を提案した。これは、数学者の研究活動の縮図として構想されている。

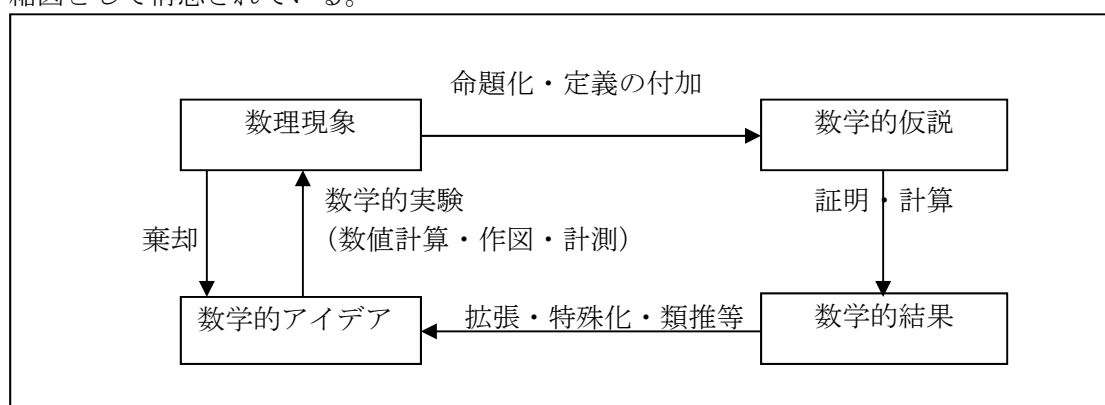


図 1 構造指向の数学的活動モデル

¹ 本研究は科研費(23531192)の助成を受けています。

数学者の研究の起点となるのは、何らかの数学的アイデアである。それは何か既知の数学的結果からの類推であったり、拡張であったりするが、具体的に定式化されたものではなく、インスピレーションや課題意識といった程度のことも多い。数学的なアイデアは、数学的な実例の計算等によって確かめられ、定義を付加したり、命題化したりすることで数学的仮説（予想）となる。もちろん、数学的仮説が、数学的に証明されれば、それは数学的な研究成果となり、次の数学的アイデアを生むための素となる。このサイクルを縮図化して、数学的活動における一つのモデルとしたのである。下記にこのサイクルモデルの詳細を述べる。

- 1) 数学的アイデアの提示：数学的アイデアを生み出す部分は得てして難しいことが多く、また教師による適切な学習の方向付けも必要であるから、数学的アイデアの提示は教員主導でも構わない。この数学的アイデアの提示がサイクルの起点となる。
- 2) 数理現象の発見：そのアイデアを数学的に具体化したものとして、実例の計算や計測などの数学的実験の活動を行う。その数学的実験の方法は、自然に学習者から想起される場合もあるであろうし、やはり教師の提案が必要となる場合もあろう。また、仮にこの実験で、当初の数学的アイデアに基づいた結果が得られなければ、いったんアイデアは棄却され、修正を求められる。また、この数学的実験の中から興味深い数理現象が発見できれば、その発見を数学的に述べて整理することが求められる。特に、ここでは学習者の発見が自然に生起するような配慮が必要である。
- 3) 数学的仮説を立案：すなわち、数学的仮説を立てる段階である。ここでもまた、発見した内容から整理された数学的仮説を学習者が自分自身のもので認識するような配慮が必要であろう。そして、そのような認識が学習者に生まれれば、そこから主体的な考察活動へと自然に展開することが可能ではないか。
- 4) 数学的結果を獲得：すなわち前段階で立てた数学的仮説について、数学的に証明したり、計算したりして、数学的結果を得る段階である。仮説が「自分のもの」という認識に立てば、そこには証明をする責任が自然に発生するであろう。そのような主体的な考察による結果の獲得によってこそ、「分かる喜び」を実感させることができるのではないか。また、ここで得られた結果を基にして、新しい数学的アイデアを提示していくことで、次の数学的活動のサイクルへとつなげることができる。

特に2)から3)に至る部分の自ら数学的仮説を発見し立案する展開は次の意味で重要である。というのもその部分に、主体的な考察活動の促進、つまり、問題を自らが考えるべき問題として自発的にとらえ、自然に探究活動へと導入することができるという効果があると考えられるからである。

3. 教授学的状況理論

宮川(2009)によればフランスを起源とする「数学教授学」というのは、規範的な教授の方法を示すよりも、むしろ、指導学習のメカニズムを記述・説明する体系的知識を目指した「理論」と述べられている。教授学的状況理論というのは、その数学教授学の中でも代表的な理論の1つである。どうして数学的活動の考察に教授学的状況理論を用いるのかを説明するために、まず、教授学的状況理論について概説する。

Brousseau(1997)によって構築された教授学的状況理論においては、生徒が数学的知識を獲得する過程と場面がモデル化され、記述・考察される。まず、この教授学的状況理論では、教授の場面を「生徒」、「ミリュー (milieu)」、「教師」という三者の関係によってモデル化する。ここでいう「ミリュー」は、しばしば「環境」と訳されるが、生徒をとりまき、

また、生徒が対峙する、数学的知識に関わるものの一部であり、学習する内容やそこに含まれる題材や課題・教具などを含めた概念である。そして、「主体である生徒は、矛盾や困難、不均衡を生成するミリューに適応しながら学習する」という「学習の前提」をおく。つまり、生徒はミリューから課題を感じ取り、ミリューに働きかけ、ミリューから想定しなかったフィードバックを受け取り、その不均衡に適応することで学習は進むのだと仮定する。しかしながら、「教授意図のないミリューは、我々が主体（生徒）に獲得するよう望んでいる知識を主体（生徒）にすべて引き出させるためには、明らかに不十分である」ことから、教師は生徒とミリューが適切な相互作用を引き起こすように働きかけることを求められる。これが、第2の前提である教授の前提となる。教師の介入がなく、場に生徒とミリューしか無い状況を「非教授学的状況」と呼ぶ。

「教授の前提」により非教授学的状況では不十分なため、教師の存在が必要であるが、「学習の前提」が述べるように学習は生徒のミリューとへの適応によって進むのであるから、教師はこの適応を妨げずに介入する必要がある。つまり教師は、生徒が適切にミリューに働きかけ、そこからのフィードバックをうけて適応がうまく進むように介入するが、生徒にとっては、教師ではなく適応の対象であるミリューと対峙していると感じさせる必要がある。そのような教授の状況を、「亜教授学的状況」と呼ぶ。実際、数学的知識の獲得が進むような生徒のミリューへの適応のためには、亜教授学的状況理論が望ましいと考えられる。

では、「亜教授学的状況」を教室に生み出すにはどうすればよいのだろうか。「教授学的状況理論では、すべての数学知識に対して、亜教授学的になりうる状況（「基本状況」(fundamental situation)）が存在することを前提としている」（宮川, 2009）が、実際に亜教授学的状況を生み出すのが難しいことは想像に難くなく、どのように実現していくのかも、「数学教授学」の研究課題とされている。（宮川, 2009）

4. 数学的活動と亜教授学的状況

教授学的状況理論で用いられる概念に「委譲」と「制度化」というものがある。これらは、教師が生徒とミリューの間の相互作用へ働きかけるときの過程を表現する概念である。Brousseau(1997)は、「「委譲」は、学習者に環境（ミリュー）との相互作用を起こさせるために、つまり亜教授学的状況を生じさせるために、ある問いや課題に対する“責任”を学習者に移す過程」であり、「この過程では、生成される数学的知識が文脈化(contextualization)・人間化(personalization)される」と述べている(訳は宮川(2009)による)。つまり委譲とは、数学的な知識を文脈のある課題や題材に埋め込み、課題と対峙する一人の探究者としての責任を、生徒に生じさせるような過程のことと捉えることが出来る。そして、「制度化」は、その逆で「得られた数学の概念や定理、定義などを脱文脈化(decontextualisation)・脱人間化(depersionalization)し、より形式的な知識とする過程である」とされる。こうしてみると、亜教授学的状況を生み出したうえで、生徒とミリューとの相互作用から、数学的知識の獲得を促し、そこから脱文脈化された形式的知識を定着させるためには、委譲と制度化の過程の両者がそろふことが望ましい形の一つであることが伺える。

さて、学習指導要領では、数学的活動は「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動」（文部科学省, 2009）として説明されている。数学学習にかかわる主体的活動はどのようにして発生するだろうか。例えば一つの証明すべき命題を挙げ、これを証明しなさい、と教師が促しても、そこから生徒の主体的な証明活動はなかなか期待できないだろう。この状況で、なぜその命題が正しいと想定されるかといえ、教師がそれを提示したから」である。また、なぜその命題を証明する必要があるのかといえ、教師が促したから」で

ある。つまり、これでは生徒にとって、自らが自分の証明活動の原因となりえず、主体的な学習活動とはほとんどなり難い。そしてこのような状況では、教授学的状況理論のいう、生徒からミリュールへの働きかけやフィードバックによる適応は生じ難いであろう。つまり、ここには委譲の過程が足りないのである。逆に言えば、「主体的な探究活動」である数学的活動とは、数学的な問いや課題に対する“責任”が学習者に移された状態であり、必然的に亜教授学的状況であることが望ましいことになる。

ヴィットマンは、構造指向と応用指向という2つの側面を数学に見出し、その両者のバランスの重要性を説いている。なるほど、応用指向というのは、数学の活用という視点で見れば、文脈化・人間化の過程と適合的であり、構造指向というのは、脱文脈化を目指した数学のようにも見える。しかしながら十分に抽象度の高い高校での数学においては、現実の事象を目指した応用指向ではなくても、文脈をもった構造指向の数学もまた、存在可能なのではないだろうか。つまり、高校の数学においては、現実の事象への応用以外を目的としても、委譲と制度化の過程をふまえて、数学的活動を展開することが可能ではないか。これまでの研究（濱中・加藤, 2013a）で述べてきた、「構造指向の数学的活動」およびその「サイクルモデル」の目指すものは、教授学的状況理論に照らしてみると、このように理解することが出来る。

つまり、亜教授学的状況を生じさせるという視点で見れば、数学的活動をおこなう際、考察すべきテーマを教師があからさまに提示することは、あまり得策とはいえない、むしろ回避すべきことといえる。そこで、授業で扱うテーマを自然に、自らが取り組むべき探究課題として、高校生に感じさせるために、例えば、一連の活動や測定、実験等を通して、生徒が意外性のある結果を予想するような場面を設定する。このとき、生徒からその予想が自然に発せられれば、この予想は「生徒のもの」であり、教員側からは「なぜ？本当にそうなるの？」という疑問を自然に発することができる。このやりとりで、生徒が「提案者」、教員が「疑義をはさむ者」の役割を担うことができれば、生徒にとって自然に「証明をする役割」が発生し、委譲の過程をひきおこすよい契機となるのではないかと考える。

5. 教授学的契約と数学的アイデアの棄却の場面

「教授学的契約」もまた、教授学的状況理論における重要な概念のひとつである。教授学的契約とは、教師が生徒に教えるという意図をもち、生徒が教師から学ぼうとする意図をもつがゆえに、自然と生じる相互義務的な関係のことである。この関係は、双方がそれぞれに持っている、「教えよう」、「学ぼう」とする意図から生じるにも関わらず、教授学的契約によっては、教授に対して必ずしも望ましい効果を与えるとは限らない。宮川(2009)は、「例えば、数学の授業では、学習者が教師の期待しているものを探る活動が頻繁に見られる。これは教授学的契約の影響であり、授業において発見すべき内容を教師が定めるから生じるのである」と、望ましくない教授学的契約の影響の例を挙げ説明しているが、これは次のように解釈できる。すなわち、発見すべき内容を教師が定めるがゆえに、教師は正しいことをいう存在であり、生徒は教師の期待する答えを探る存在である、という望ましくない教授学的契約が生じ、そこから「真理は教師の中にある」という認識が生まれ、「ミリュールに適応しながら学習する」という認識が薄れてしまう。その結果、ミリュールへの対峙が真摯に行われなくなってしまうのである。

これまでの研究で、構造指向の数学的活動のサイクルモデルの実践例として、多面体に関する授業を行ってきた(濱中・加藤, 2013b)が、次節で後述するように、そのなかでも望ましくない教授学的契約が学習者である高校生の中に存在することが伺えた。特に、構造指向の数学的活動を前節で述べたように委譲の過程をふまえた活動と捉えるならば、上で述べたような「真理は教師のなかにある」という認識の破棄を促さなければ、委譲がうま

く機能しないであろう。

望ましくない教授学的契約に基づく「真理が教師の中にある」といった認識を改めるためにはどうすればよいだろうか。たとえば、学習者である生徒が独自にミリュウに対峙した結果、教師の想定を上回るような発見ができれば、「真理が教師の中にある」といった認識は当然改められるであろうが、そのようなことは稀であろうし、そもそもミリュウに対峙させるために認識を改めさせようとしているのだから、これでは循環論法である。ここでは、教師が計画的に行うことができるような、教授学的契約を改める機会を考える必要がある。そこで、ここでは構造指向の数学的活動のサイクルモデルにおける、「数学的アイデアの棄却」のステップに注目したい。

サイクルモデルの最初の段階である数学的アイデアの提示は、教師主導で行われることを想定している。そして、そのアイデアを検証するような作業として数学的実験を行い、数理現象に出会う段階へと進むが、この段階で、教師は表面上、学習者と同一の立場、つまり、同じ目的に向かって探究をすすめる態度をとっていくことが望ましいと考える。そうでなければ、学習者にとって「真理は教師が知っていて、教師の期待する答えを探る活動を自分で行う」という望ましくない教授学的契約が強まると想像されるからである。しかしながら、やはりそういった教授学的契約は根強いものと考えられる。

そこで、教師が学習者と同じ探究者としての立場をとりつつ、さらに当初の数学的アイデアが当然なりたつ（つまり真理は教師が知っている）ようにふるまいながら、一度アイデアの棄却が必要となるように、あらかじめ題材を設定しておく。つまり、実験や測定をふまえた結果、当初のアイデアの棄却が必要となるような状況を計画しておく。「真理が教師の中にある」という認識を持っている生徒にとっては、教師が設定した数学的アイデアは当然正しいものという認識と、自分自身が導き出した実験結果との矛盾により不均衡を突きつけられるであろう。この不均衡への適応によって、教師が「真理の伝達者」ではなく、真理はミリュウのなかにあるのだという新たな認識が生まれ、学習者に探究者としての責任感を発生させる契機となりうるのではないか。

つまり、構造指向の数学的活動のサイクルモデルにおける、数学的アイデアの棄却のステップは、単に数学的に誤りだったら棄却するといった数学的意義ではなく、教授学的な意義があることを指摘したい。このステップを踏まえることで、実験結果から数理現象を発見・命題化する過程において、自分が発見していくのだという認識が生まれ、自分の発見だという認識から証明する責任が生じるのではないかと考える。

6. 実践中の事例

これまでの研究で行ってきた多面体に関する授業の実践例(濱中・加藤, 2013b)のなかで、前節のような教授学的契約を改める契機となる「数学的アイデアの棄却」の場面の事例を説明する。

(1) 授業 実施日：2012年9月1日

対象：県立A高校：1年生39名（理数クラス）

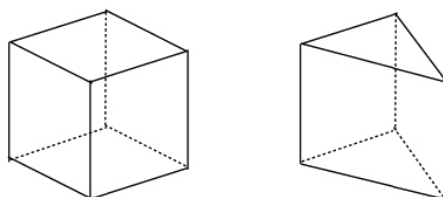
(2) 授業の内容

高大連携のための特別授業として行ったもので、授業の流れを以下に大まかに述べる。

- A) **多角形の外角の和について**: 平面上の凸多角形の外角の和は 360° であることは知られている。この数学的結果を基にして、では凹多角形ではどうなるか、という数学的アイデアを提示する。そのなかで、外角は負にもなりえると考えることのよさ、および、外角はその頂点での曲がり具合（曲率）を表しているという考え方を提示する。

次に、A)の結果を基にして、新しい数学的アイデアを提示する。つまり、「多角形には、いつでも“等しくなる和”が存在したのであるから、3次元の多面体にも、何か一定となる「曲がり具合を示す角の和」がないだろうか」というアイデアである（**数学的アイデアの段階**）。

そこで、具体的な多面体、たとえば立方体と正三角柱において、何か角度を計測・計算してみようという実験が考えられる。そこで、多面体は「辺において曲がっている」と考えて、各辺において面と面がなす角の和やその補角の和の計算を促すが、立方体と正三角柱では「各辺における2面角の補角』の和」が一定とならない。（**数理現象の観察と仮説の棄却**）



- B) **錐体の側面上の多角形の内角和の計測**：そこで、「では、辺ではなく、多面体の頂点部分で、何か「曲がり具合」を示す角はないか」というアイデアを提示する。（**新たな数学的アイデア**）そして、頂点付近と平面との比較をするために、「多面体の頂点部分をモデル化した錐体の表面上で、多角形の内角の和を計測してみよう」という実験のアイデアを提案する。そして、実際に、錐体の側面上で、多角形の内角を計測する活動を行い、3角形、4角形、5角形等の内角の和がどうなるかを表にまとめるという活動を行う。（**数理現象の観察**）今回は、切欠きが 90° の用紙と切欠きが 60° の下図のような用紙を用意して、計測を行わせた。

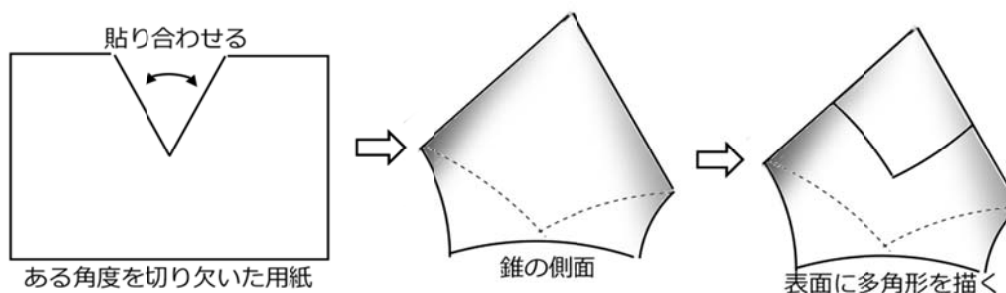


図3 1 切り欠いた用紙から錐体側面を作る

表1 1 90° を切り描いた用紙での計測例

頂点数	3	4	5	6
内角の和	268,270 270,268	445,451 450,450	630,632 633,631	805,813 812,811

- C) **錐体の側面上の多角形の内角和を考察**：この表にまとめるという作業のなかから、自然に「一般に n 角形だったらどうなるか」という予想をたて、数学的仮説を立案するように誘起する。生徒から、錐体の側面上の内角和や外角和についての仮説が発言されたなら、証明を促していく。実際、錐体を切り開いた展開図において、中心角が 360° に a° 足りないならば、錐体の頂点を囲む n 角形の内角和は

$$180 \times (n - 2) + a^\circ$$

となる。その証明はいま作った錐面を切り開くことで、中学生程度の知識でも可能である。(数学的仮説から数学的結果への段階)

特に、教授学的状況理論のいう委譲の過程に注目するならば、今回の授業実践では上記の B)、C)の部分が、重要である。なぜならこの部分で、生徒が自ら数学的予想を発見すること、そして同時に、その予想を証明する責任感が生徒に生じることが想定されているからである。そして、それこそが、生徒による「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動」としての数学的活動たりえる部分だからである。

- D) この数学的結果をもとに、多面体の頂点の周りの局所的な部分において、これを頂点の周りに切り開いたとき、 360° に足りない角度、つまり切り開いたときの「切れ込み角の大きさ」を頂点の周りの「曲がり具合」を表す角としてはどうかというアイデアを提示し、凸多面体においては、その「曲がり具合」の和が常に 720° となることを解説した。さらに、そこからオイラーの定理（凸多面体のオイラー数が2となること）へと学習内容を導いた。

(3) 「数学的アイデアの棄却」の場面

上記の A)の場面での様子を記述する。多角形における外角が、頂点での曲がり具合であることを提示したのち、多面体でも同じことが出来るのではないか、というアイデアを提示した。その後の対話を以下に示す。

T: 「じゃあさ、多面体でも何か同じになるものがあるんじゃないの。ありそうだってことになったら、ここはひとつ試してみよう。そういうわけで、三角柱と立方体を考えてみよう。これらの多面体で何か曲がり具合を全部たして同じ値になるものがあるんじゃないかな。

多面体で、これの曲がっているところはどこか、といたら（直方体の模型を提示して）辺の部分で面と面が曲がってくっついてるよね。この曲がってる角度を全部足してみたら、何か同じ値になりませんかね。」

(立方体と三角柱の絵を描く)

T: 「この辺の部分で面と面が成す角を2面角といいます。2面角を全部足したら、何度ですかね。すべての辺についての2面角の和を計算してください。

立方体の2面角は全部 90° だね。全部で足すといくつ？」

S1: 「 $90 \times 12 = 1080^\circ$ です。」

T: 「三角柱の方はいくつ？」

S2: 「 720° です」

T: 「ほお、その求める式は？」

S2: 「 $90 \times 6 + 180$ です」

T: 「うん、そうだね。あー、でもとても残念なことに数字が一致しないね。いや、でもまだ大丈夫だ。平面のときだって、三角形と四角形の内角の和は一致しなかったね。一致したのは外角の方だ。いま計算した2面角は、多面体の内側の角なんだから、2面角の補角の和を計算すればいいんじゃないかな。みんな、ちょっともう一度計算してみてくれ。そうすればうまくいくはずだ。

立方体の場合はいいね。2面角がすべて 90° なのだから、補角もすべて 90° で補角の和も、さっきと同じ 1080° だ。では、三角柱の方で、補角の和を足すといく

つになったかな。」

ここで生徒 S3 にたずねると、S3 は困った顔になったが、その後、次のように答えた。

S3 : 「 1080° です」

T : 「では、それを求める式を教えてください」

S3 : 「えーと・・・わかりません。」

T : 「えーと、じゃあ次の人。君はいくつになったの？」

S4 : 「 900° になりました」

T : 「え、じゃあ求める式はどうだった？」

S4 : 「えーと、 $90 \times 6 + 360$ です。」

T : 「そうだね・・・。あれ、困ったな。ということは、立方体と三角柱では、補角を足し合わせても、立方体と三角柱で同じ値にならなくて、うまくいかないね。」

このあと、2面角やその補角の和が一定になるというアイデアを棄却し、別のアイデアを提示して B) 以下に続いていく。

上記の生徒 S3 は、当初 1080° と回答したが、正しく和を求めれば、 900° である。前後の表所などから、S3 もそのことは分かっていると思われる。しかしながら、教師が「和が等しくなるのではないか」というアイデアを提示していたため、「真理が教師の中にある」という教授学的契約を自分の手による計算結果より優先させてしまい、不均衡に陥っているのである。実際、S3 の生徒だけでなく、この発問の際、計算している生徒たちは誰もがややざわつき、当惑している様子であった。その直後、S4 が 900° という正しい回答をしたときの S3 の安堵と後悔を浮かべた表情も印象的であった。

上記の実践は、この教授学的契約を改めることを検証するために行った実践ではないので、このことに関する詳細な検証は行なわれていない。しかし、上記のように、一度教師の提案する数学的アイデアを自分自身の考察によって棄却させることによって、数学的活動のなかで自分自身が得る結果というものを大事にしようとする気持ちが強まったという感触を持っているし、次の B) 以降の数理現象の発見やその証明へという影響を与えたのではないかと考える。

7. まとめ

今回の考察で、教授学的状況理論の視点から、「主体的な探究活動」である数学的活動をみれば、そこに必然的に亜教授学的状況が要求されることが分かった。そのことを踏まえ、構造指向の数学的活動のサイクルモデルに、委譲の過程を踏まえた学習活動という意義を見出すことができた。そして、その委譲の過程を効果的にするためにも、「真理が教師の中にある」といった望ましくない教授学的契約を改める必要があり、その契機として、数学的アイデアの棄却のステップには、単なる数学的意義ではなく、教授学的意義があることが指摘できた。ただ、そのことの実証的な検証はまだ全くもって不足である。

今後、そのような教授学的意義を込めた「アイデアの棄却」の過程をより多く設計するとともに、実践を踏まえた検証も行いたい。

参考文献：

阿部好貴(2009) 「問題解決から数学的活動へ：その架け橋としての数学的リテラシー」、
日本科学教育学会 年会論文集 33, pp.111-114

濱中裕明、加藤久恵(2013a)「高校における構造指向の数学的活動に関する考察」全国数学教育学会会誌 Vol.19, No.1, pp.27-36.

濱中裕明、加藤久恵(2013b)「高校における構造指向の数学的活動について—多面体に関する授業実践を通して—」全国数学教育学会 第37回研究発表会 発表資料.

宮川健(2009)「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」日本数学教育学会誌『数学教育学論究』vol.94, pp.37-68.

文部科学省(2009)高等学校学習指導要領解説 数学編

ヴィットマン、港三郎訳(2000)「算数・数学教育を生命論的過程として発展させる」『日本数学教育学会誌』、第82巻、第12号, 2000, pp.30-41

Brousseau(1997) “Theory of didactical situations in mathematics”, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.