数学学習における内容構造と認知構造の関連

－中学校数学科図形領域における「論証」を対象に－

常　田　拓　考
（恵庭市立恵み野中学校）
黒　岩　　督
（兵庫教育大学）

中学校数学科図形領域における「論証」を対象に，教師が教授上伝達を意図する内容構造と学習者の認知構造の関連について検討した。問題を解く過程で想起される数学的概念の特定，これらの概念の組み合わせパターン，問題の類似性判断に基づく問題分類，概念を基準にした直接的な問題分類などから生徒の認知構造を推定し，学力水準別の特徴を検討した。その結果，成績が上位の生徒ほど内容構造に近い認知構造を形成していることが示された。さらに，成績上位の生徒でも，論証の際に適切な概念を個別には想起できていても，概念同士の関係性の理解という点では不十分な点もあり，これが認知構造と内容構造の差異として現れていることが明らかになった。

キーワード：内容構造，認知構造，数学的概念，類似性判断，論証問題，中学校生徒

常田　拓考：恵庭市立恵み野中学校・教頭，〒061-1371 恵庭市恵み野東1-1-2，E-mail: hirotaka-tsuneta@ed.city.ebetsu.hokkaido.jp
黒岩　　督：兵庫教育大学・基礎教育学系・准教授，〒673-1494 兵庫県加東市下久米942-1，E-mail: kuroiwa@hyogo-u.ac.jp

Relationship between Content Structure of Mathematical Proof Problems and Cognitive Structures of Junior High School Students

Hirotaka Tsuneta
(*Megumino Junior High School*)
Masaru Kuroiwa
(*Hyogo University of Teacher Education*)

The present research examined the relationship between content structure of mathematical proof problems and corresponding cognitive structures of junior high school students. The content structure was defined as a structure that a teacher intended to constitute, and the cognitive structure was defined as a structure acquired by each student in this research. Cognitive structure was estimated by observing results of identification of mathematical conceptions evoked in problem solving, combination pattern of the conceptions, problem classification based on similarity rating, and direct classification of problems using correct mathematical conceptions. The results showed that the students who scored highly in mathematical learning had cognitive structure close to the content structure, but it should be noted that their cognitive structure was insufficient regarding the connection and subsumption among mathematical conceptions. This late result was seen as a discrepancy between the two stuructures.

Key Words: subject content structure, cognitive structure, mathematical conceptions, similarity rating, proof problems, junior high school students

Hirotaka Tsuneta: Vice-Principal, Megumino Junior High School, 1-1-2 Megumino Higashi, Eniwa-shi, Hokkaido 061-1371 Japan. E-mail: hirotaka-tsuneta@ed.city.ebetsu.hokkaido.jp
Masaru Kuroiwa: Associate Professor, Department of Curriculum and Instructions, Hyogo University of Teacher Education, 942-1 Shimokume, Kato-shi, Hyogo 673-1494 Japan. E-mail: kuroiwa@hyogo-u.ac.jp

問題と目的

本研究の目的は，中学校数学科図形領域における「論証」を対象として，教師が教授上伝達を意図する内容構造と学習者の認知構造の関連について検討することである。

数学教育の重要な役割の1つは，数学に関する体系的な知識を伝えることである。したがって，教師は授業設計にあたって，授業を通して伝達する知識の構造を明確にすることが必要である。さらに，教師が学習者の獲得した知識の構造を捉えることは，数学教育において概念がどのように伝達されたかを評価する点で重要である。本研究では，教師が授業によって伝達を意図する知識の構造を内容構造と呼び，学習者が獲得した知識の構造を認知構造と呼ぶ。

学習者は問題に直面したとき，習得した知識を再構成することによって，問題を数学的に処理することができる。しかし，学習者が個々の問題を解決できたとしても，教師が意図する概念の構造的な理解にまでは必ずしも至っていないことが考えられる。すなわち，認知構造と内容構造に違いが生じている場合があると考えられる。本研究では，数学教育における教授学習過程が数学的概念の伝達形成過程であるという立場から，内容構造と認知構造の関連に注目する。

吉田（1982）は，数学教育における教科の指導目標は，構造化された知識を子どもが獲得するように援助することであり，知識の構造を明確に同定することは，知識獲得への介入に関して効果的な方法論を提供する基礎を与えることになると指摘している。数学の問題を解決するためには，数学的概念が獲得されていることが必要である。しかし，概念が個別に理解されているだけでは，問題の解決に至らない。概念の関係性が理解され，これをもとに概念の構造化がなされていることが必要である。

ガニエ（1989）は，知識の構造化の点で数学的な理解において個人差がみられるのは，知識の体制化（knowledge organization）の方法や構造が人によって異なるからであると指摘し，数学の問題で「迷った」時も，うまく知識の体制化をしていれば，していない時よりもより速く問題を解くことができると述べている。

また，安西（1980）は，問題の解法を理解している人とそうでない人との差は，解法の正しい手順が構造化された知識として獲得されているかどうかの差であると述べている。さらに，与えられた問題の文章を理解したり，ある領域の問題の解法を理解することは，問題解決の一部に過ぎないと述べている。

このように，生徒は内容構造を獲得することによって，数学の理解を達成する。したがって，教師が内容構造を授業によって伝達し，その結果として学習者に形成される認知構造を解明することは，数学的概念の伝達形成過程としての数学教育に示唆するところが大きいと考えられる。

崎谷（1988）は，数学の知識構造の個人差を明らかにするため，中学校3年生を対象にカード分類法を用いた調査をおこなった。生徒の分類結果（認知構造）とあらかじめ仮定した分類（内容構造）を比較した結果，数学学習における「よく構造化された知識（well-structured knowledge)」の3つの基準（統合性integration，一致性correspondence，結合性connectedness）（Resnick & Ford, 1981）において，成績が上位の生徒は下位の生徒より優れており，上位の生徒はよく構造化された数学的知識をもっていることが明らかにされた。すなわち，上位の生徒の認知構造は下位の生徒のそれに比して内容構造により近いものとなっていた。

植田（1991）は，Shepard & Chipmans（1970）の2次的同型論（second-order isomorphism），すなわち外的対象相互の類似関係は外的対象の内的表象相互の類似関係の系として同型であるという考えに立ち，問題の類似性判断をもとに生徒の認知構造を検討した。中学校1・2年生及び数学科の大学生が対象とされ，調査の結果から得られた心理空間を検討したところ，中学校1年生の上位群と2年生の上位群の間には，問題に対して構成される内的表象に差異があることが示唆された。さらに大学生と中学校2年生との間には，内的表象間の類似性の強さに違いがあることが明らかにされた。

Geeslin & Shavelson（1975）は，数学的構造を抽象的な機構における集合内の概念間の相互関係であるとし，内容構造を教育的な素材としての教材の構造と定義している。また認知構造とは，長期記憶における概念機構にあるとみなす仮説的機構であると定義している。これに従い，言語連想テストにより内容構造と認知構造の距離が測定され，授業後の認知構造と内容構造の違いが検討された。その結果，成績の上位群が下位群よりも内容構造と認知構造の距離が近いことが明らかにされた。

佐伯（1980）は，内容構造とは数学教材の内容の論理的な構造，すなわちキーワード（主要概念）間のリンクを意味するとしている。また認知構造とは，学習者の比較的長期の記憶における諸概念（要素）とそれらの諸関係を合わせ考えた仮説的機構，つまり学習者の心の中のラベル付けしたファイリングシステムであるとしている。佐伯（1980）はこれをもとに，I式WAテスト（岩手式言語連想テスト）を開発し，内容構造と認知構造の距離の測定を試みた。その結果，学習が成立すると両構造間の距離が近くなり，さらに学力の上位の者は下位の者よりも一層その距離が近くなることが見いだされた。

数学の問題を解決する際には，長期記憶に保持されている数学的概念が直面する問題に応じて検索・想起され

ると考えられる。しかし，複数の問題を分類するには，個別の問題を解くときに必要な概念を想起するだけでは十分ではなく，さらに概念間の関係性や構造も理解していなければならない。学習者の認知構造が内容構造に近いほど，概念の関係性や構造は理解されているので，個々の問題を解くときに必要な概念を組み合わせて適切に問題を分類できると考えられる。したがって，学習者の認知構造を推定するには，問題分類の際にどのような数学的概念が想起されるかとともに，どのように組み合わされるかといった点からの検討も必要である。

しかし，従来の研究（佐伯，1980; 崎谷，1988; 植田，1991）では，問題あるいは概念の類似度や問題の分類結果のみをもとに認知構造が推定されており，学習者が問題を解く過程でどのような数学的概念を想起したか，さらに問題の分類過程において個々の問題の解決に必要と判断された数学的概念が互いにどのように組み合わされているかといった点からの検討は不十分である。

そこで，研究Ⅰでは，中学校数学科図形領域の「論証」を対象にして，個々の問題に対していかなる数学的概念が想起されるかを特定するとともに，それらの概念が問題間で組み合わされて問題が分類される過程を検討する。これによって，問題分類の最終的な結果が近似していても，その過程で想起され分類の基準となった数学的概念には差異が生じている場合も明らかにできる。このように，分類過程も考慮して認知構造を推定することは，学習者が分類の基準とした数学的概念及びそれらの組み合わせを特定できる点で，最終的な分類結果のみをもとにして推定した認知構造よりも有効であると考えられる。

研究Ⅰ

目的

発話思考法によって得られる言語プロトコルをもとに，問題の分類過程で使用された，あるいは使用されたと推測される数学的概念を特定し，これらの概念がどのように組み合わされて問題の分類がなされたかを検討し，認知構造と内容構造との差異を明らかにする。

方法

内容構造

対象者に与えられた論証問題は表1の9問であった（以下，各問題を①～⑨の番号で示す）。これらの問題の内容構造は次の手続きによって求めた。

1）2名の中学校数学科教師が2年生で学習する図形領域のうち「平行線の性質」「三角形の合同条件」「三角形や平行四辺形の性質」における論証に関わる学習内容から数学的概念を独立に抽出した。それぞれ33個，31個の概念が抽出され，そのうち30個が一致した。

表1　使用した論証問題

問題番号	問　題
①	平行四辺形ABCDの対角線ACをひき，∠DACの二等分線がBCの延長と交わる点をEとすると，AC＝CEであることを証明せよ。
②	AB＝ACである△ABCの辺BC上に点Pをとる。Pを通りAB，ACに平行な直線をひき，AC，ABとの交点をそれぞれD，Eとすると，PD＋PE＝ABであることを証明せよ。
③	△ABCの∠Aの2等分線が辺BCと交わる点をDとし，頂点CからDAに平行な直線をひき，辺ABの延長との交点をEとする。このとき，AE＝ACであることを証明せよ。
④	AB＝ACである二等辺三角形ABCの頂点を通り，底辺BCに平行な直線をADとし，辺BAの延長上に点Eをとる。このとき，直線ADは，頂点Aにおける外角EACを2等分することを証明せよ。
⑤	2つの対角線の長さが等しく，互いに他を2等分する四角形は長方形であることを証明せよ。
⑥	平行四辺形ABCDで，対角線BDが∠Bを2等分するとき，この平行四辺形はひし形であることを証明せよ。
⑦	平行四辺形ABCDの辺CDの中点をEとし，AEの延長とBCの延長との交点をFとするとき，BC＝CFであることを証明せよ。
⑧	平行四辺形ABCDの対角線の交点Oを通る直線をひき，辺AB，CDとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，Oは線分EFの中点であることを証明せよ。
⑨	平行四辺形ABCDの対角線AC上にAE＝CFとなるように点E，Fをとると，BE＝DFであることを証明せよ。

2）この30個の概念について同じ2名の教師が協議しながら，教科書（「改訂中学数学2」1992年度用，教育出版）の記述に沿って整理した。その結果，「三角形」「平行線」「平行四辺形・ひし形・長方形・正方形」の3つのカテゴリーのもとに，それぞれ4個，1個，6個の概念を含む構造となった。これらの概念のうち，内容構造に含まれるもののみを表2に示した。

3）こうして整理した概念にそって，表1の問題を論証するときに使用する概念を2名の教師が独立に抽出した。抽出された概念を問題ごとに2者間で比較した結果，ほぼ完全に一致したので，これらを内容構造とした。その内容構造を表3に示した。

対象者

中学3年生6名を対象者とした。生徒の数学学力によって，問題の分類結果及び分類の基準とする数学的概念に差異が生じると考えられるので，数学科教師に次の6つの類型を示し，各1名を対象者として抽出してもらうよう依頼した。

6つの類型は次のとおりであった。数学の成績が上位であり，図形領域の学習についても十分定着している生徒（以下Gg）。上位ではあるが，数式領域に比べ図形領域の学習を不得意とする生徒（Gp）。成績が中位であり，図形領域を得意とする生徒（Mg）。中位ではあるが，図形領域を

不得意とする生徒（Mp）。成績が下位ではあるが，図形領域に関心をもっている生徒（Pg）。下位であるが，図形領域に比べ数式領域に関心をもっている生徒（Pp）。

表2　論証問題の内容構造に含まれる数学的概念

三角形の合同条件（A１）
２つの三角形について，以下のいずれかのとき合同となる。
- 対応する３組の辺がそれぞれ等しいとき
- 対応する２組の辺がそれぞれ等しく，そのはさむ角が等しいとき
- 対応する１組の辺が等しく，その両端の角が等しいとき

二等辺三角形の定義・性質・条件（A３）
- ２つの辺が等しい三角形を二等辺三角形という。
- 二等辺三角形の２つの底角は等しい。
- ２つの底角が等しい三角形は二等辺三角形である。

平行線の性質（B１）
- 対頂角は等しい。
- 平行な２直線に他の直線が交わったときにできる同位角，錯角は等しい。
- ２直線に他の直線が交わってできる同位角（錯角）が等しければ，この２直線は平行である。

平行四辺形の定義（C１）
- 向かい合う２組の辺がそれぞれ平行である四角形

平行四辺形の性質（C２）
- 向かい合う２組の辺の長さはそれぞれ等しい。
- 向かい合う２組の角の大きさはそれぞれ等しい。
- ２つの対角線は，互いに他を２等分する。

ひし形，長方形，正方形の定義（C４）
- ひし形は，４つの辺の長さが等しい四角形
- 長方形は，４つの角の大きさが等しい四角形
- 正方形は，４つの辺の長さが等しく，４つの角の大きさが等しい四角形

表3　各論証問題の内容構造

問題番号	内容構造
①②	{A３，B１，C１，C２}
③④	{A３，B１}
⑤⑥	{A１，B１，C２，C４}
⑦⑧⑨	{A１，B１，C２}

内容構造に含まれる数学的概念については表２参照。

手続き

面接に入る前に，まず以下のことをおこなった。２年生で学習済みの表１の論証問題を１問づつ，B５用紙に図及び解答欄とともに印刷した冊子を作成した。その冊子を面接日の２日前に各生徒に配布し，問題を解いておくよう指示した。なお，証明する際にわからない点があれば，教科書等は参考にせずに，学習内容カードを参考にするよう指示した。学習内容カードとは，先に整理した数学的概念を生徒が２年時に使用した教科書の記述に沿ってカードに書き表したものである。証明ができない場合，どのカードの概念を使えば証明ができるかを考え，必要と思われるカードの概念を解答用紙に書いてくるように指示した。カードは冊子とともに渡しておいた。

面接は個人別に発話思考法によりおこなった。生徒自身の証明，あるいは証明に必要と考えた概念が書かれた９問の問題を見せながら，「証明に使う数学の内容を考えながら問題をグループ分けしなさい。このとき，考えていることを声に出して言うように心がけなさい」と教示した。面接中の発話内容はすべてテープレコーダーに記録した。面接時間は１人につき約１時間であった。問題の分類の基準となった数学的概念を発話させるため，生徒が問題を分類するときに「どうしてそのように分けるのか」あるいは，「数学で学習したどんな内容や性質，定理が思い浮かんだか」などを主に質問した。

結果と考察

分類過程における発話記録をもとに，内容構造を求めた際の手続きに準じて認知構造を推定した。各生徒の認知構造を問題分類の結果とともに図１に示した。

上位の生徒では，問題から想起した複数の数学的概念を基準にして，問題の分類ができると推測される。しかし，内容構造に含まれる数学的概念をすべて取り上げることは必ずしもできなかった。この点で認知構造と内容構造に差異が認められた。中位の生徒では上位の生徒に比して，複数の概念を組合せて分類することができなかった。認知構造に含まれる数学的概念の数は上位の生徒に比べ少なかった。

下位の生徒では個々の数学的概念そのものの定着が不十分であり，問題を分類するために使う概念も限られていた。分類結果のみに注目すれば，中位の生徒よりも内容構造に近い分類がおこなわれていた。しかし，分類の基準とした概念が限られていたり，問題文中の形態的特徴を基準にしていたため，その概念内容はまったく異なっていた。内容構造では，⑤と⑥を同グループにする基準の１つに概念C４を用いたが，生徒はひし形，長方形，正方形の３つの四角形の定義・性質を関連させ，１つの概念の集合としてとらえていなかったと考えられる。個々の四角形の性質等は実際の論証には利用されたいたが，ひし形・長方形・正方形の包摂関係を１つの概念として同定することは困難のようであった。

さらに，すべての生徒に共通している傾向として，問題の分類にあたって，証明するときに使用する概念のうち頻度の高い概念（A1, A3, B1）を基準に分類することが認められた。

また，分類結果は同じでも，その基準となった数学的概念が内容構造に含まれる概念とは異なっていることが明らかになった。たとえば，４名の生徒は問題⑦⑧⑨を

Gg

【①③④】{A 3，B 1}
【②】{A 3，B 1，C 1，C 2，平行四辺形になるための条件}
【⑤】{A 3，C 2，C 4}
【⑥】{A 1，A 3，B 1}
【⑦⑧⑨】{A 1，B 1，C 2}

Gp

【①】{A 1，B 1}
【②】{A 3，C 1，C 2}
【③④】{A 3，B 1}
【⑤⑥】{A 1，B 1，C 2，C 4}
【⑦⑧⑨】{A 1，B 1，C 2}

Mg

【①②⑤】{A 3，C 2}
【③④】{A 3}
【⑥】{B 1，C 4}
【⑦⑧⑨】{A 1，B 1，C 2}

Mp

【①⑧】{B 1，C 2}
【②③④】{B 1}
【⑤】{A 1，C 2，C 4}
【⑥⑦⑨】{A 1，B 1}

Pg

【①②】{A 3}
【③】{中点連結定理}
【④⑦】{A 3，B 1}
【⑤】{ひし形・長方形・正方形の性質}
【⑥⑧⑨】{A 1，ひし形・長方形・正方形の性質}

Pp

【①③】{交点を使った問題}
【②⑤】{四角形に関する問題}
【④⑥】{図形を線分で分けている問題}
【⑦⑧⑨】{B 1，C 2，四角形内部に線分}

【　】内は同グループに分類された問題の番号
{　} 内はは分類の基準となった数学的概念（記号表記のものは表 2 参照）
Gg, Gp, Mg, Mp, Pg, Ppは生徒の類型（本文参照）

図 1　各生徒の問題分類と認知構造

1 つのグループとしたが，下位の生徒が分類の基準とした概念は内容構造に含まれる概念とは異なっていた。一方，上位の生徒では，問題の証明は正しかったが，想起された概念や問題の分類が内容構造とは差異があった。論証に必要な概念を個別に理解していても，それらの構造化が不十分であることを示すものであろう。

以上より，認知構造を推定する際には，問題の最終的な分類結果のみならず，分類過程で想起された数学的概念及びそれらの概念を基準とした問題の分類過程を検討することの有効性が示唆された。また，個々の概念がどのように組み合わされて問題の分類がなされているかを検討することの有効性も示唆された。

研究Ⅱ

目的

研究Ⅰでは，認知構造の推定には，問題解決過程で想起される概念とともに，問題分類の基準として想起される概念や，さらにそれらがどのように組み合わされるかという点も考慮することの重要性が示された。そこで研究Ⅱでは，生徒が想起した数学的概念とともに，問題間の類似性判断，問題分類の基準となった概念の組み合わせ，問題分類の結果をもとに認知構造を推定する。そのために，3 つの調査をおこない，それらの結果をもとに定量的に認知構造を推定し，内容構造との関連性の様相を検討する。

方法

対象者

対象者はH町立K中学校の 3 年生 3 学級の生徒105名であった。生徒の第 2 学年における「図形」領域学習時の成績を基準に，上位群33名，中位群51名，下位群21名の 3 群を設定した。

手続き

質問紙は研究Ⅰで用いた問題に基づいて作成した。なお，問題⑤⑥については，それぞれに含まれる数学的概念のうち，「ひし形，長方形，正方形」の包摂関係に関する概念は生徒にとって想起が困難であったので，研究Ⅱでは除くこととした。なお，証明は複数の数学科教師によって協議し作成した。対象とする数学的概念は研究Ⅰと同様であった。

3 種類の調査を実施した。調査 1 では，生徒が問題を解く過程で想起した数学的概念を特定するために，問題文及びその証明が記述されたものを生徒に読ませ，証明に必要と判断した概念を記入させた。

調査2では，問題の類似性判断から問題分類を推定するため，10段階尺度を用いて7問の問題の対ごとに計21対の類似性を評定させた。調査用紙は問題対ごとに1枚の用紙に印刷し，冊子にしたものであった。

調査3では，問題の分類の際に想起される概念及びそれらがどのように組み合わされて問題が分類されるかを明らかにするために，各問題に含まれていると判断される数学的概念を基準にさせながら7問の問題を直接分類させた。教示は次の通りであった。「7問の問題を証明する際に使われている図形の定義，定理，条件や性質などを考えながら，7問の問題をグループ分けしなさい。」

以上の調査を学級ごとに10分程度の休憩をはさんで実施した。調査は第1著者がおこない，調査時間は約100分であった。

結果と考察

概念の想起個数

調査1の結果をもとに，概念の想起個数に関する分析をおこなった。各問題ごとに内容構造に含まれる数学的概念の平均想起個数を各群別に表4に示した。これについて，各問題ごとに群を要因とした1要因の分散分析を実施した。有意な主効果があったものについては，多重比較（ライアン法）をおこなった。その結果を表5に示した。①では上位群及び中位群が下位群より有意に多かった。⑨では上位群が下位群より有意に多かった。②⑦⑧ではいずれも上位群が中位群及び下位群より有意に多かった。

表4　各論証問題における群別の数学的概念の想起個数の平均と標準偏差

問題番号/群	上位(n=33)	中位(n=51)	下位(n=21)
①(4)	2.36(0.69)	2.34(0.73)	1.62(1.74)
②(4)	3.18(0.67)	2.67(0.86)	2.42(0.73)
③(2)	1.94(0.24)	1.86(0.53)	1.81(0.66)
④(2)	1.88(0.33)	1.82(0.68)	1.67(0.71)
⑦(3)	2.79(0.73)	2.41(0.69)	2.33(0.84)
⑧(3)	3.00(0.74)	2.59(0.80)	2.33(0.71)
⑨(3)	3.21(0.64)	2.84(0.96)	2.57(1.05)

問題番号の後の括弧内の数値は内容構造に含まれる数学的概念の個数を示す。

表5　分散分析及び多重比較の結果

問題番号	F値	t値	有意差
①	7.105*	3.11, 3.65	G>P, M>P
②	6.900*	2.93, 3.42	G>M, G>P
③	0.475		
④	0.809		
⑦	3.332*	2.26, 2.19	G>M, G>P
⑧	5.277*	2.38, 3.09	G>M, G>P
⑨	3.451*	2.54	G>P

分散分析の自由度はすべて2/102
*P<.05

内容構造一致概念と内容構造不一致概念の想起個数

さらに，調査1で想起されたすべての概念を内容構造と一致するもの（内容構造一致概念）と一致しないもの（内容構造不一致概念）に区別し，それぞれの想起個数に関する分析をおこなった。内容構造一致概念及び内容構造不一致概念の想起個数の違いを各問題ごとに群間で比較するため，問題ごとに群×各概念の想起個数についての度数分布を求め，これに対して対数線型モデルの当てはめによる検定（弓野，1981）を実施した。

その結果，問題によりその様相に若干の違いはあるものの，有意な交互作用が認められたのは上位群と下位群であった。より多くの一致概念を想起した生徒の人数は，上位群では多くなっていたのに対し，下位群では少なくなっていた。また，不一致概念をまったく想起しなかった生徒の人数は，上位群で多く，下位群では少なかった。したがって，上位群では一致概念は想起され不一致概念は想起されない傾向が顕著であるのに対し，下位群では一致概念は想起されにくく不一致概念は想起されやすい傾向が顕著であった。

数学的概念の組合せパターン

調査1の結果について，想起された数学的概念の組み合せパターンを分析した。各問題ごとに群別の数学的概念の組み合わせパターンの数と，内容構造と同じ概念パターンの相対度数を表6に示した。さらに，相対度数が.100以上の組み合わせパターンを表7に示した。

上位群の組み合せパターンの数は中位・下位群に比して少なく，内容構造と同じ概念パターンの相対度数は上位群で高くなっていた。上位群では，相対度数が比較的高い組み合せパターンは内容構造に含まれる数学的概念に近いものであった。これに対し，下位群では組み合せパターンの数も多く，内容構造に含まれる数学的概念との差異も大きいものが多くなっていた。

これらのことから，上位群は問題を解く際に適切な数学的概念を想起できるのに対し，下位群は想起することが困難であることが示唆された。しかし，上位群においても，想起される数学的概念が必ずしも内容構造に含まれる数学的概念とは一致するとは限らないことも明らかになった。

問題間の類似性評定

調査2における問題間の類似性評定の結果から問題分類を推定し，内容構造での問題分類との差異を検討した。表8に各群における類似性評定値の平均を示した。

上位群では①と③，①と⑦の類似性が高かった。逆に②と⑧の類似性は低かった。内容構造で同じグループである①と②の類似性は低かった。また，③と④，⑦と⑧と⑨についてはその類似性が高かった。①と②の内容構造一致概念の想起個数には差が認められており，①と②の類似性の低さはこれを反映していると考えられる。①

表6　各論証問題における群別の数学的概念の組み合わせパターンの数及び内容構造と同じ概念パターンの相対度数

問題番号		①	②	③	④	⑦	⑧	⑨
内容構造に含まれる数学的概念		{A3,B1,C1,C2}	{A3,B1,C1,C2}	{A3,B1}	{A3,B1}	{A1,B1,C2}	{A1,B1,C2}	{A1,B1,C2}
組み合わせパターン数	上位	8	9	3	2	7	9	9
	中位	22	27	9	12	15	21	24
	下位	16	18	14	13	14	18	18
内容構造と同じ概念パターンの相対度数	上位	.060	.212	.939	.879	.455	.333	.545
	中位	.059	.039	.550	.510	.157	.215	.196
	下位	.048	.048	.143	.095	.095	.095	.095

表7　各論証問題における群別の相対度数が.100以上の数学的概念の組み合わせパターン

問題番号/群	上位	中位	下位
①	{A3,B1}	{A3,B1}	{B1,C2}
	{A3,B1,C1}		
②	{A3,B1,C2}	{A3,B1,C2}	
	{A3,B1,C1,C2}	{A3,B1,C3}	
	{A3,B1,C1}		
③	{A3,B1}	{A3,B1}	{B1}
		{B1}	{A1,B3}
		{A1,B1}	{A3,B1}
④	{A3,B1}	{A3,B1}	{B1}
	{B1}	{B1}	
⑦	{A1,B1,C2}	{A1,B1}	{A1,B1}
	{A1,B1}	{A1,B1,C2}	
	{A1,B1,C1,C2}	{B1,C2}	
⑧	{A1,B1,C2}	{A1,B1,C2}	{A1,B1}
	{A1,B1}	{A1,B1}	
	{A1,B1,C1,C2}		
	{A1,B1,C1}		
⑨	{A1,B1,C2}	{A1,B1,C2}	{A1,C1,C2}
	{A1,B1,C1,C2}		

表8　群別の類似性評定値の平均と標準偏差

問題対/群	上位(n=33)	中位(n=51)	下位(n=21)
①②	4.24(2.37)	3.71(2.13)	3.19(2.20)
①③	6.79(2.13)	6.20(1.97)	5.66(2.59)
①④	3.91(2.23)	4.45(2.25)	4.29(2.47)
①⑦	5.36(2.65)	6.02(2.28)	6.24(2.29)
①⑧	4.21(2.04)	3.55(1.89)	3.48(2.06)
①⑨	4.61(2.13)	5.61(1.75)	4.81(2.02)
②③	4.18(2.15)	4.39(1.81)	3.42(1.89)
②④	4.12(2.32)	4.28(2.01)	3.38(2.24)
②⑦	3.97(2.01)	3.78(1.93)	4.10(2.16)
②⑧	1.88(1.61)	3.73(1.99)	3.29(2.55)
②⑨	3.61(2.24)	4.28(2.13)	3.91(2.02)
③④	5.36(2.04)	4.90(2.14)	3.38(1.99)
③⑦	4.97(2.13)	4.04(2.16)	4.38(2.57)
③⑧	2.46(1.94)	3.78(2.19)	3.14(1.86)
③⑨	3.00(2.12)	4.14(1.90)	4.76(2.39)
④⑦	3.67(2.04)	3.67(2.03)	3.67(2.36)
④⑧	3.70(2.13)	4.18(2.07)	3.71(2.68)
④⑨	2.55(1.94)	3.43(2.00)	3.29(2.54)
⑦⑧	5.70(2.14)	4.57(2.50)	6.00(1.63)
⑦⑨	5.03(2.21)	5.35(2.00)	5.24(2.67)
⑧⑨	5.21(2.72)	5.09(2.08)	4.52(2.70)

と⑦の類似性が高かったのは，それぞれの問題文の言語的表現が似ている点が影響していると考えられる。

中位群では①と③の類似性が高かった。これに対し，①と②は類似性が低かった。内容構造で同じグループとなっている問題対の比較では，⑦と⑧と⑨で類似性が高く，次に③と④で類似性が高かった。その他，①と⑦，①と⑨の類似性も高かった。①と②の類似性が低かったことは，上位群と同様のことが考えられる。

下位群では，①と⑦の類似性が最も高かった。また，①と③の類似性も高かった。内容構造で同じグループとなっている①と②，また③と④，さらに⑦と⑧と⑨についての互いの類似性は他の問題対の類似性に比して低かった。

群間の差を検討するため，群を要因とした1要因の分散分析を実施した。この結果，群間の主効果が有意であった問題対は②⑧，③④，③⑧，③⑨，⑦⑧であった。内容構造で同じグループとなっている対は③④と⑦⑧で，前者については上位群の類似性評定値は他の2群より高くなっていた。後者については下位群の評定値が最も高く，次いで上位群，中位群となっていた。ただし，下位群と上位群の差は認められなかった。これら以外の問題対は内容構造では別のグループとなっており，上位群の評定値は他の2群より低くなっていた。

類似性評定に基づく問題分類

調査2の類似性判断の評定値に対して，TorgersonのMetric MDSを群別に適用し（クラスカル・ウィッシュ，1980），問題の3次元空間内での布置を求めた。さらに，問題間の近接関係を明らかにするため，最短距離法による階層的クラスター分析もおこない，MDSの結果と合わせて図2に示した。

類似性判断に基づく上位群の問題の布置は，【①③④】【⑦⑧⑨】【②】であった。これは内容構造における問題分類にかなり近似しており，布置の重なりも小さい。中位群の布置は，【①⑦③】【②④】【⑧⑨】であった。上位群に比して，内容構造での問題分類との違いが

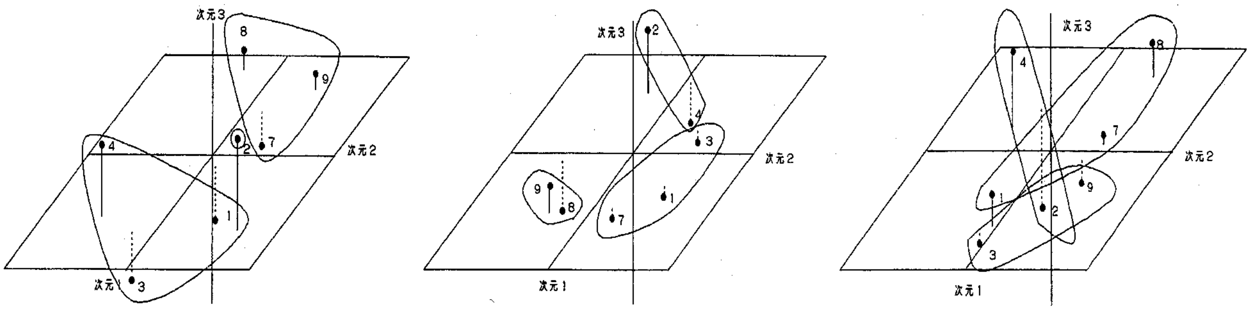

図2　各群における論証問題の3次元空間内での布置（曲線で囲んだものが各群における上位3クラスター）

大きい。下位群の布置は，【①⑦⑧】【②④】【③⑨】であった。これも内容構造での問題分類との違いが大きく，布置の重なりも大きくなっている。

対象者による直接的問題分類

調査3における数学的概念を基準にしながらの直接の問題分類の結果を分析した。同じグループに分類された問題間に0，別のグループに分類された問題間に1を付与し，生徒ごとに問題間の類似性マトリックスを作成した。同様に内容構造における問題間の類似性マトリックスを作成し，両マトリックス間の差の絶対値の総和を，各生徒の内容構造における問題分類とのズレの指標とした。各群におけるその値を表9に示した。

このズレについて，群を要因とする1要因の分散分析を実施した。その結果，有意な主効果が見られ，多重比較の結果，上位・中位・下位群の順で内容構造とのズレが有意に小さかった。すなわち，成績上位の生徒の問題分類ほど内容構造における問題分類に近いことが明らかになった。

次に，問題分類パターンのうち，その出現頻度が高いもの5つを群ごとに表10に示した。上位群の分類パターンは内容構造での問題分類に近似しており，その出現率も比較的高くなっていた。一方，中位・下位群の分類パターンには単独分類（1問題を1グループとする分類）が多く，出現率もやや低く，内容構造での問題分類との差異が大きくなっていた。

表9　群別のズレの平均と標準偏差

群	上位(n=33)	中位(n=51)	下位(n=21)
	4.09(1.85)	5.78(1.74)	6.57(1.40)

表10　各群における問題分類パターン（上位5つ）とその出現度数（相対度数）

順位／群	上位群		中位群		下位群	
1	【②】	(.139)	【②】	(.086)	【③】	(.086)
2	【①③④】	(.122)	【①③】	(.081)	【⑨】	(.086)
3	【⑦⑧⑨】	(.104)	【⑧】	(.076)	【②】	(.074)
4	【③④】	(.096)	【⑨】	(.071)	【④】	(.062)
5	【⑦⑨】	(.060)	【④】	(.061)	【⑧⑨】	(.062)

【　】内は同グループに分類された問題の番号
（　）内の数値は相対度数

総合考察

問題の類似性判断から推定された問題分類は，成績が上位の生徒ほど内容構造における問題分類に近いことが明らかになった。すなわち，問題分類の最終的結果のみをもとに認知構造を推定すれば，従来の研究とほぼ同様に，成績が上位の生徒ほど内容構造に近い認知構造を形成しているといえる。

これに加えて本研究では，分類過程においてその基準となった数学的概念及びその組合せの観点からも認知構造を推定し，内容構造との関連性の様相を検討した。その結果，成績上位の生徒でも，論証の際には適切に概念を想起できていても，分類の基準となる概念あるいはそれらの組合せが不適切な場合があり，教師が教授上伝達を意図した概念間の構造性が十分に形成されていないことが示された。すなわち，問題ごとに見れば想起された概念は適切であるにもかかわらず，概念同士の関係性の理解という点では不十分であり，これが認知構造と内容構造の差異として現れていることが明らかになった。このように，問題の分類過程も考慮して推定された認知構造は内容構造との差異を詳細に指摘することができた。

最後に本研究で得られた結果をもとに，中学校数学科図形領域における教授学習上の示唆について考察する。通常の授業では，単元を数時間にわたって実施し，教師が必要であると判断する数学的概念を生徒が理解できるように工夫する。そして，単元の学習中や終了後に評価が実施され，教師が定めた基準に達していれば，生徒はその数学的概念を理解したものと判断される。しかし，成績が上位の生徒でも，数学的概念を個別に理解しているだけで，概念相互の関係や単元全体での概念の構造を理解していない場合が考えられる。すなわち，個々の問題を的確に解くことができても，概念の構造的な理解にまで至っていない生徒がいると考えられる。

概念の構造的な理解の必要性について，安西（1983）

は次のように述べている。知識は経験が記号化され，対象化されたもの，あるいはその可能性を持つものであるとはいっても，個々の知識がばらばらに獲得されたものであれば，それに基づく行為や認識はきわめて断片的なものになる。また，高久（1979）も次のように述べている。学習者が「はっきりわかる」というのは，1つ1つの事がらをばらばらに理解するのではない。事がらの間で，何が中核となり，何が周辺的なものにあたるものであるかを区別し，それらの関連をとらえることができるときをさす。そして，学習の要素が平板に相互関係をなすのではなく，立体層的な相互関係をもったときはじめて「構造」の名に値するものがつくられるのである。

これらの指摘と同様に，本研究の結果も数学的概念の相互の関係性あるいは構造性の理解を促す教授学習過程の必要性を示すものと考えられる。すなわち，生徒が図形領域に関わる個々の数学的概念の獲得を意図する教授をおこなうことはもちろんであるが，それにとどまらず，生徒が獲得する数学的概念が，対象とする学習領域全体でどのような構造をなしているかを理解させる過程が必要である。さらに，学習者の数学的概念の獲得の量，あるいは問題の解決の正否を捉えるだけでは，必ずしも数学学習に有効な認知構造を形成しているかどうかの評価とはならないと考えられる。したがって，教授する側にも，生徒がどのような認知構造を形成しているかを把握するための教授上の工夫が必要であると考えられる。

引用文献

安西祐一郎 1980 問題解決における理解について 心理学評論, 23, 7-36.

安西祐一郎 1983 学習における知識の役割 数理科学, 240, 20-32.

ガニエ, E. D. 1989 赤堀 侃・岸 学（監訳）学習指導と認知心理学 パーソナルメディア Pp.360-376.（Gagné, E. D. 1985 *The cognitive psychology of school learning.* Glenview, Illinois: Scott, Foresman & Company.）

Geeslin, W. E. & Shavelson, R. J. 1975 Comparison of content structure and cognitive structure in high school students' learning of probability. *Journal of Research in Mathematics Education,* 6, 109-120.

クラスカル, J. B.・ウィッシュ, M. 高根芳雄（訳） 1980 人間科学の統計学 1 多次元尺度法 朝倉書店（Kruskal, J. B. & Wish, M. 1978 *Multidimensional Scaling,* London: Publications.）

Resnick, L. B. & Ford, W: W. 1981 *The psychology of mathematics for instruction,* Lawrence Elbaum Associates.

Shepard, R. N. & Chipmans, S. 1970 Second-order isomorphism of internal representations: Shapes of states. *Cognitive Psychology,* 1, 1-17.

佐伯卓也 1980 数学教育における認知構造の測定 岩手大学教育学部研究年報，40, 195-201.

崎谷真也 1988 生徒の数学の知識構造についての考察 数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会), 14, 1-8.

高久正吉 1979 教育実践の原理 協同出版 Pp.111-119.

植田敦三 1991 文章題の類似性判断から見た内的表象間の関係の変容 数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会), 17, 9-20.

吉田 甫 1982 課題分析から教授の処方へ 波多野誼余夫（編）認知心理学講座 4 学習と発達 東京大学出版会 Pp.203-218.

弓野憲一 1981 対数－線型モデルによる質的データの解析とそのためのBASICプログラム 静岡大学教育学部研究紀要（自然科学篇), 32, 189-215.

（2006.9.1 受稿，2006.10.17 受理）