兵庫教育大学　研究紀要　第48巻　2016年２月　pp. 43－50

黄金四角形の分類

Classification of golden quadrangles

濵　中　裕　明*　　大　森　慎　悟**　　常　友　翔　平**
HAMANAKA Hiroaki　　OMORI Shingo　　TSUNETOMO Shohei
福　井　恭　子**　　古　宅　尚　樹**
FUKUI Kyoko　　FURUTAKU Naoki

黄金長方形とは縦横比が黄金比の長方形のことで、この長方形は、自分自身と相似な長方形と正方形とに分割することができる。これがいわゆる黄金分割であるが、これを一般化する。すなわち、黄金四角形Ｘとは、ひとつの線分によって、自分自身と相似な四角形Ｘ'およびある図形Ｙとに分割できる凸四角形のこととする。本稿の目的は、黄金四角形の完全な分類についての結果を示し、この題材の複素平面・２次曲線等に関わる展開を述べることである。また、この結果は、論証を組み入れた数学的活動の素材としての可能性も有している。

キーワード：黄金分割、一般化、分類問題
Key words：golden section, generalization, classification problem

１．はじめに

中等教育における数学では、単なる計算ではなく数学の議論の展開、つまり証明する活動が重要となってくる。De Villiers（1990）は、数学における証明のもつ機能として、命題が真であることを確かめるという「立証」の機能のみがこれまで強調されてきたことを批判し、「立証」だけでなく、「説明」、「体系化」、「発見」、「コミュニケーション」等の諸機能を挙げ、証明に関わる数学的活動を意義深いものとしていくには、数学の本質としての証明の諸機能を顕在化させていく必要性を指摘している。また、De Villiers（1990）は「立証」が特に強調されがちであることの背景には、まず言明が提示されたのちに証明を考える、といった通常の授業における証明のステレオタイプな扱い方が遠因としてあることも指摘し、数学においては、むしろ、純粋に演繹的な推論、すなわち証明によって、後から言明が得られることのほうが自然であると主張している。

では、実際に証明による考察が先に生じ、その後に言明が得られるような数学的題材としてはどのようなものがあるだろうか。そのようなことを念頭に、2014年度の学部のゼミでは「黄金四角形」の分類というテーマでの探究を行った。詳しくは後述するが、これは数学における分類問題の一種である。数学においては「…を分類せよ」といった問題提示がある。これは、指定された数学的対象を、指定された分類法（正確には同値関係）によって探索・類別し、その完全代表系を求めよ、ということを意味し、数学の研究ではよく見られる問題である。例えば、「３辺の長さが整数であるような直角三角形を、相似なものは同一として、すべて列挙せよ」といったピタゴラス三角形の問題は典型的である。こうした問題においては探究開始時点で、課題意識や取り組むべき問題は明らかであるものの、当然のことながら結果としての命題はまだ分からない。よって、演繹的推論が先行することになる。濵中（2016）では、本稿で述べる黄金四角形の分類を例に挙げ、証明の「発見」機能に焦点を当てた、証明活動を組み入れた数学的活動についてその意義を考察した。本稿ではその黄金四角形の分類についての数学的な結果について詳述し、この題材の数学教材としての展開を述べる。

２．黄金四角形

いわゆる黄金比とは$1:(1+\sqrt{5})/2$のことだが、よく知られているように縦横比が黄金比である黄金長方形Ｘは、黄金長方形に相似な長方形Ｘ'と正方形Ｙとに分割することができる（図１）。通常、黄金分割といえばこの分割のことをいうが、これを一般化することを考える。すなわち、（一般化された）黄金四角形Ｘとは、１つの線分によって、図形Ｘに相似な四角形Ｘ'とある図形Ｙ（Ｘ'とＹは空ではない）とに分割可能な凸四角形のこととし、そのような分割を（一般化された）黄金分割とよぶことにする。また、その際の図形Ｙのことを除去図形とよぶことにする。このような定義のもとで、

＊兵庫教育大学大学院教育内容・方法開発専攻認識形成系教育コース 教授
＊＊兵庫教育大学学校教育学部教科・領域教育専修自然系コース
平成27年10月23日受理

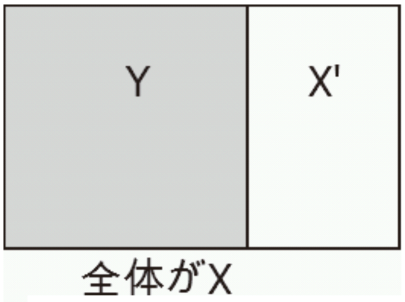

図１　黄金長方形

次のような問題を考えたい。
問題：黄金四角形を、相似なものは同一としてすべて求めよ。

すべて求めよといっても、単にひらめきに頼った発見的探索を行っても、議論は展開しない。そこで次のような補題から始める。すなわち、仮に凸四角形が黄金四角形であったとすると何が分かるか、という思考を展開するのである。これは、高等学校で学習する必要条件という概念を顕在化させるものでもある。

尚、以下で四角形 ABCD というとき、頂点 A,B,C,D は四角形の周りに時計回りもしくは反時計回りに順番に並んでいるものとする。

補題１：凸四角形 ABCD が黄金四角形であるとき、次が成り立つ。
（１）除去図形は三角形か四角形である。
（２）四角形 ABCD の頂点のラベルをうまくとれば、除去図形は辺 AD を含むようにできる。
（３）このとき、分割線 EF について、E と F はそれぞれ辺 AB 上、CD 上としても一般性を失わない。また除去図形が三角形のときは、E＝A もしくは F＝D となる。

証明：黄金四角形 ABCD の分割線 EF について、E と F の両方が四角形の頂点に一致することはあり得ない。もしも、E と F の一方が頂点にあったとすれば、このとき四角形 ABCD は三角形と四角形に分割されるから、除去図形は三角形となる（図２）。

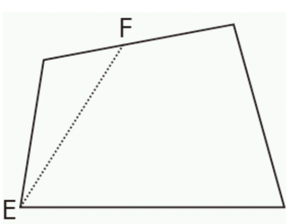

図２　除去図形が三角形（図は不正確）

また、E と F のどちらもが頂点と異なるとき、E と F が隣り合う辺上にあると分割後は三角形と五角形となり矛盾するから、E と F は対辺上にある。このときは四角形と四角形に分割されるので、除去図形が四角形となる（図３）。

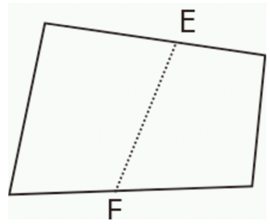

図３　除去図形が四角形（図は不正確）

また、上記の考察により、四角形 ABCD のラベルを適当に取り換えれば、E と F はそれぞれ、四角形 ABCD の対辺 AB と CD 上（ただし、除去図形が三角形のときは E＝A もしくは F＝D として端点も含める）にあり、四角形 ABCD が四角形 EFCB と相似（ただし、相似における頂点の対応順は不明）としてよいことが容易にわかる（図４）。

（証明終わり）

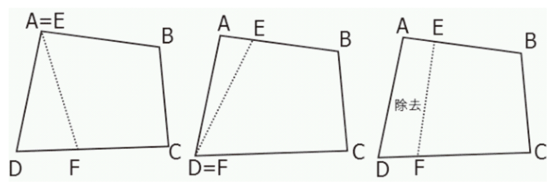

図４　頂点のラベル

補題１のように四角形 ABCD の頂点ラベルを定めるとき、四角形 ABCD と分割後の四角形 EFCB が適当な頂点対応により相似となるわけだが、その際、相似関係の向きによって次の定義をおく。

定義１：黄金四角形 ABCD において、分割後の除去図形を取り除いた四角形と四角形 ABCD が、同じ向きに相似であるとき、すなわち拡大縮小写像と回転・平行移動により重ね合わせることができるとき、四角形 ABCD を正の黄金四角形とよぶ。また、その相似関係が逆向きの相似であるとき、すなわち拡大縮小写像と回転・平行移動に加えて、一回の鏡映写像を合成した写像で重ね合わせることが出来るとき、四角形 ABCD を負の黄金四角形とよぶこととする。

仮に黄金四角形 ABCD が線対称な図形のときは、四角形 ABCD に適当な鏡映写像を行っても不変であることから、上記の正・負の分類は排他的ではない。つまり、正かつ負の黄金四角形もあり得る。（逆に、そのときは

黄金四角形が線対称ということになる)。

3．負の黄金四角形

まずは、負の黄金四角形について考察する。負の黄金四角形については次が成り立つ。

定理１：四角形が負の黄金四角形であるならば、除去図形は四角形であり、四角形の頂点を適当に A,B,C,D とおくとき、角 A＝角 C かつ AB≠BC がなりたつ。

証明：負の黄金四角形において、補題１のように頂点と分割線の端点に A,B,C,D,E,F とラベルをつける。（図４参照）

このとき、四角形 ABCD と、分割によって除去図形を除いた後の四角形 EBCF が相似になるわけだが、その相似における頂点対応で場合分けを行う。逆向きの相似であることから、頂点対応はつぎの４つのみが考えられる。

① A,B,C,D がそれぞれ F,C,B,E と対応

このとき、相似によって辺 BC と辺 CB が対応することから相似比が１：１となってしまい、除去図形が空となり矛盾する。

② A,B,C,D がそれぞれ C,B,E,F と対応

このとき、頂点の対応から角 A＝角 C である（図５）。また、相似比が１：１ではないことから、対応する辺の比についても AB：CB≠１：１となり、主張に従う。また、このとき角 A＝角 C＝角 BEF により、AD と EF が平行となるので、除去図形は四角形となる。

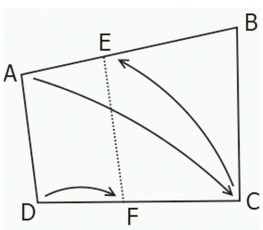

図５　負の黄金四角形

③ A,B,C,D がそれぞれ B,E,F,C と対応

このとき、相似における頂点の対応から角 A＝角 B、角 D＝角 C となるので、四角形 ABCD は AB と CD が平行で、AD＝BC の等脚台形となる（図６）。ところが、相似関係において辺 AD と BC が対応するから相似比が１となり矛盾する。

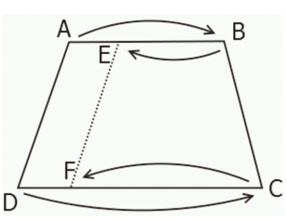

図６　矛盾するケース

④ A,B,C,D がそれぞれ E,F,C,B と対応

このとき各点のラベルの A と D、B と C、E と F を入れ替えれば、②の場合と一致する。

（証明終わり）

定理１は四角形 ABCD が負の黄金四角形となるための必要条件を与えている。よって、条件を満たす四角形が常に負の黄金四角形であることは直ちに従わない。しかし、例えば、適当に角 B をとり、AB と BC の長さを異なるように定め、角 A＝角 C の大きさを一つ定めれば、四角形 ABCD が一つ決定される。実際、そのような四角形の例を描いてみれば（図７）、次のように発見的探索では考えにくい負の黄金四角形の例の存在が直観的には明らかとなる。

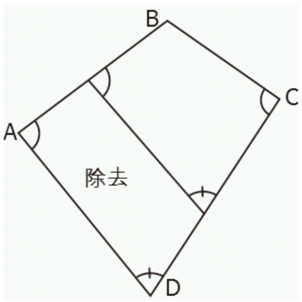

図７　負の黄金四角形

4．正の黄金四角形

次に、正の黄金図形について考える。正の黄金四角形について次が成り立つ。

定理２：四角形が正の黄金四角形であるとき、四角形の頂点を適当に A,B,C,D とおけば、角 B＝角 C＝角 D であり、さらに次のいずれかが成り立つ。

角 $A<90°$ かつ、$CD^2 \geqq AD \times BC$

角 $A=90°$ かつ、$CD>BC$

角 $A>90°$ かつ、$AB \times CD \geqq BC^2$

証明：補題１にそって正の黄金四角形の頂点および分割線の端点に A,B,C,D,E,F とラベルを定める。（図４を参照）

このとき、四角形 ABCD と分割後の四角形 EBCF が相似になるが、その相似における頂点対応で場合分けを行う。同じ向きの相似であることから、頂点の対応はつぎの４通りが考えられる。

① A,B,C,D がそれぞれ E,B,C,F と対応

このときは相似によって辺 BC が BC と対応するので、相似比が１となり矛盾。

② A,B,C,D がそれぞれ B,C,F,E と対応

このとき、A と D、B と C、E と F の頂点ラベルを入れ替えると、A,B,C,D が F,E,B,C と対応するという④の場合に帰着される（図８）。

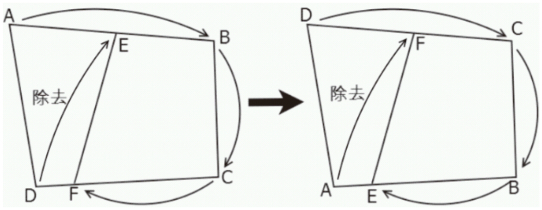

図８　頂点ラベルの入れ替え（図は不正確）

③　A,B,C,D がそれぞれ C,F,E,B と対応

このとき、頂点の対応により、角 C＝角 BEF、角 B＝角 EFC となるから、四角形 BCEF が平行四辺形となり、BC＝EF となる。ところが、相似によって BC と FE が対応するため、相似比が１となって、矛盾する。

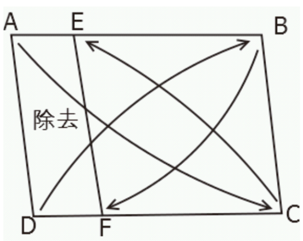

図９　矛盾するケース

①　A,B,C,D がそれぞれ F,E,B,C と対応

このとき、頂点の対応によって角 D＝角 C＝角 B となる。さらに角 A の大きさによって場合分けする。

（a）角 A＝90°のとき

このとき、CD と BC が相似によって対応するから、相似比を考えて CD＞BC である。なお、角 A＝90°であり、角 B＝角 C＝角 D より四角形 ABCD は（正方形ではない）長方形である。

（b）　角 A＞90°のとき

このとき、相似関係における辺の対応から、BC：EB＝CD：BC であり、また、AB 上に E があることから、次式が従う。

$AB \geqq BE = BC^2 / CD$

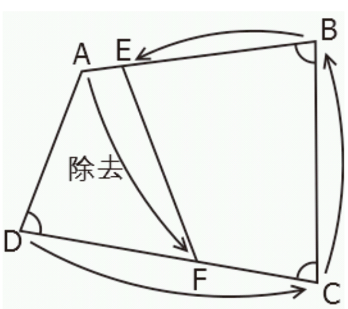

図10　∠A＞90°

（c）角 A＜90°のとき

このとき、相似関係における辺の対応から、CD：BC＝AD：CF であり、また CD 上に F があることから、次式が従う。

$CD \geqq CF = (AD \times BC) / CD$

（証明終わり）

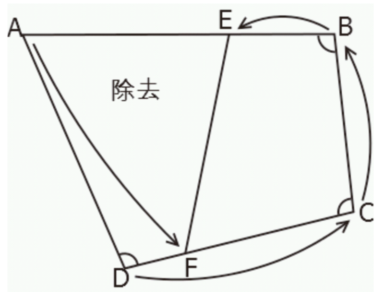

図11　∠A＜90°

定理２もまた、四角形が正の黄金四角形であるための必要条件を求めた定理であり、条件を満たせば正の黄金四角形になることが、自動的になりたつわけではない。しかし、適当な長さを選んで作図をしてみれば、この場合にも発見的探索では思いつくことが困難な黄金四角形の存在が見つかる（図12）。

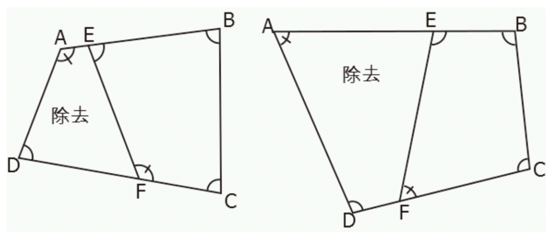

図12　正の黄金四角形の例

５．黄金四角形となるための十分性

定理１や定理２により、発見的探索では見つけることが困難な黄金四角形の存在が直観的には明らかとなってくるが、これはまだ分類問題の完全な答えとはならない。定理１、２は黄金四角形となるための必要条件を与えたにすぎないからである。この解決のためには、黄金四角形となるための必要十分条件を与えなければならない。すなわち、定理１や定理２の条件を満たす凸四角形がすべて黄金四角形となるのか、という思考が必須であり、これは黄金四角形となるための十分条件の吟味に他ならない。こうした考察によって、次の定理が得られることとなる。

定理３：以下の条件１．から４．のいずれかを満たす凸四角形 ABCD はすべて黄金四角形であり、また、逆に凸である黄金四角形はこれらのどれかに相似である。

（1）∠A＝∠C かつ AB≠BC（このとき、四角形 ABCD は負の黄金四角形）
（2）∠B＝∠C＝∠D＞∠A かつ AD×BC≦CD^2（このとき、四角形 ABCD は正の黄金四角形）
（3）∠B＝∠C＝∠D＜∠A かつ AB×CD≧BC^2（このとき、四角形 ABCD は正の黄金四角形）
（4）四角形 ABCD は正方形ではない長方形（このとき、四角形 ABCD は正かつ負の黄金四角形）

証明：定理1から負の黄金四角形は（1）（特別な場合として（4）を含む）を満たすこと、また、定理2より正の黄金四角形は（2）、（3）、（4）のいずれかを満たすことは示されているので、（1）から（4）の四角形が実際に黄金四角形となることを示せばよい。

四角形が（1）を満たすときを考える。このとき、一般性を失うことなく AB＞BC としてよい。よって、（BC^2／AB）＜ BC＜AB であるから、BE＝（BC^2／AB）となる点 E を辺 AB 上にとることが出来る（図13）。

このとき、三角形 ABC と三角形 CBE において、BE：BC＝BC：BA となり、∠B が共通となることから、これらの三角形は相似である。

次に、E を通る AD の平行線 m を考え、m と直線 CD との交点 F を考える。まず、m は AD と平行だから F が辺 CD の D 側の延長（D を含む）にあることはない。一方、同位角と上記の相似関係などから、

∠BEF＝∠A＝∠C＞∠BCA＝∠BEC

であり、F が辺 CD の C 側の延長（C を含む）となることもなく、F は C と D の間にある。そこで、EF を分割線として考えることが出来る。

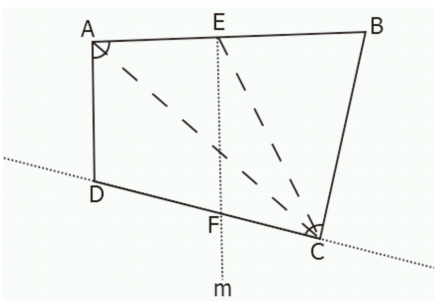

図13　（1）の場合

最後に三角形 CAD と三角形 ECF においても、平行線の同位角や前述の相似関係等から対応する2角が等しいことが示され、相似となる。よって、三角形 ABC と三角形 CAD を組み合わせた四角形 ABCD と、三角形 CBE と三角形 ECF を組み合わせた四角形 CBEF も相似となる。

次に、（2）の場合を考える。まず、仮定より（AD×BC）／CD≦CD なので、CD 上に CF＝（AD×BC）／CD となる点 F をとることができる（F＝D となる場合もある）。このとき、FC：AD＝CB：DC と∠C＝∠D より、三角形 ADC と三角形 FCB は相似となる。

さらに、図14のように四角形の外部の点 X を、∠CFX＝∠A となるようにとる。このとき、

・上記の相似から、∠BFC＝∠CAD＜∠A であり、∠BFC＜∠XFC となるから、FX が辺 BC と交わることはない。
・∠XFD＋∠D＞∠XFD＋∠A＝180°なので、FX が辺 AD と交わることも無い。

よって、FX は辺 AB と交わる。つまり、その交点を E とすれば、E は A と B の間にある。そこで、EF を分割線として考えることができる。このとき、三角形 BCA と三角形 EBF の相似は、対応する2組の角の相等から容易に示すことが出来、三角形 ADC と三角形 BCA を組み合わせた四角形 ABCD 及び、三角形 FCB と三角形 EBF を組み合わせた四角形 FEBC が相似となる。

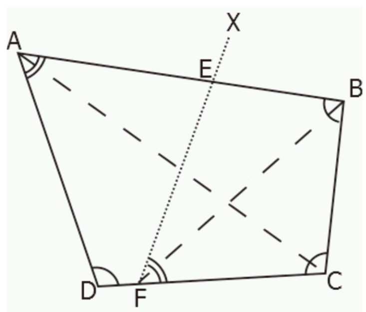

図14　（2）の場合

（3）の場合を考える。このときは、仮定より（BC^2／CD）≦AB なので、辺 AB 上に点 E を BE＝（BC^2／CD）となるようにとることが出来る（E＝A となる場合もある）。このとき、∠C＝∠B および BC：CD＝EB：BC より三角形 BCD と三角形 EBC は相似となる。

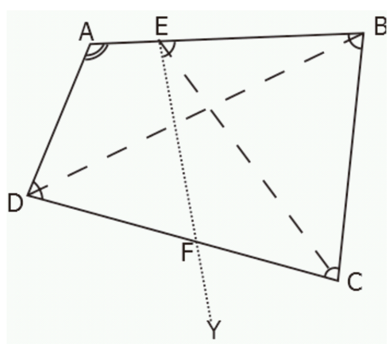

図15　（3）の場合

いま、図15のように∠BEY＝∠B となる点 Y を四角形の外部にとる。このとき、

・∠A＋∠AEY＞∠B＋∠AEY であり、Y のとり方から∠B＋∠AEY＝∠BEY＋∠AEY＝180°なので、EY は辺 AD と交わらない。
・上記の相似関係により、∠BEC＝∠CBD＜∠B＝∠BE

Y となり、EY は辺 BC とも交わらない。

よって、EY は辺 CD と交わることとなる。つまり、その交点を F とおけば、F は C と D の間にあり、EF を分割線とすることができる。このとき、三角形 BAD と三角形 EFC の相似関係は対応する２組の角が相等しいことから容易に示すことが出来、三角形 BCD と三角形 BAD を組み合わせた四角形 ABCD および、三角形 EBC と三角形 EFC を組み合わせた四角形 FEBC が相似となる。

最後に（４）の場合だが、この場合には AB＞BC として、図16のように分割線 EF を BC と平行で、

EB：BC＝BC：BA

となるようにとれば四角形 ABCD と四角形 CBEF が相似となることは自明だろう。

（証明終わり）

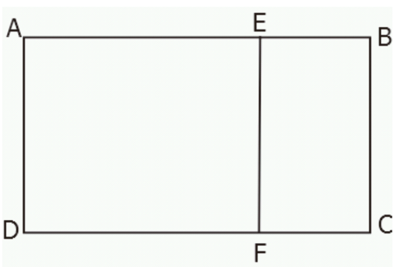

図16　（４）の場合

このように、黄金四角形の分類問題の考察過程においては、問題提起の時点では未知であった数学的言明が、証明を伴う考察活動の過程のなかで得られることとなる。また、その考察の過程には、必要条件・十分条件といった概念が必然的に顕在化するという特徴がある。

６．複素平面や２次曲線との関わり

実は、黄金四角形は複素平面や２次曲線とも関係がある。本節ではそうした関わりについての展開を述べよう。

定理３の分類の結果をよく見ると、除去図形が三角形となるのは定理３の（２）において $AD\times BC=CD^2$ となる場合と、（３）において $AB\times CD=BC^2$ となる場合のみで、（２）、（３）のなかではこのように等号が成立する場合が特に重要である。実際、次の図17のように等号が成立した場合の図から、（２）の場合には BC を、（３）の場合には AD を元の辺と平行に変化させていくことで、等号が成立しない場合と相似な四角形がすべて得られるからである。

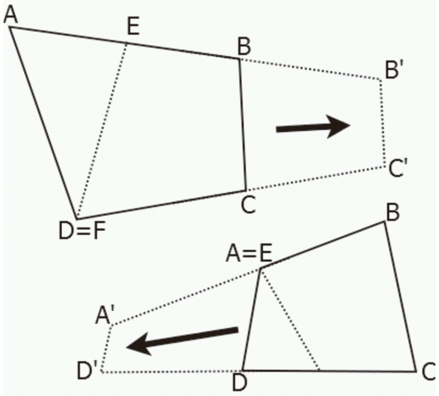

図17　等号成立の図を基に変形

そこで、除去図形が三角形となる場合を詳しくみてみるために、定理３（２）の図14で D＝F となる場合を、向きを変えて再考してみる（図18）。

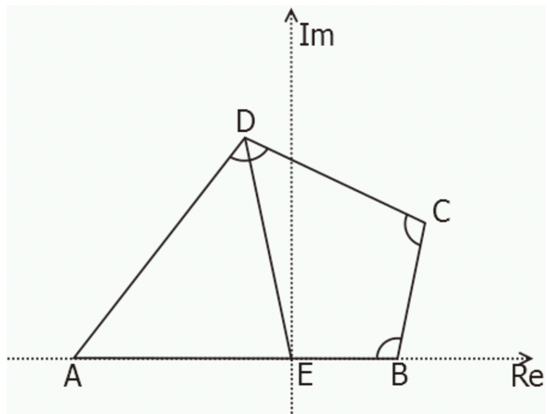

図18　定理３の（２）の図再考

図18において、四角形 DEBC と四角形 ABCD の相似関係により EB が BC に、BC が CD に、CD が DA に対応し、EB、BC、CD、DA の長さは等比数列となる。さらに、∠B＝∠C＝∠D なので、$\overrightarrow{EB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$の向き、つまり偏角は同じ量ずつ変化している。このように、長さの比が一定で、偏角の差が一定となれば、複素平面を用いて頂点の位置を考察するのは自然であろう。

そこで次の図18のように、頂点の位置を複素平面上で考えることとし、特に E＝０、B＝１で C の虚部が正となるように複素座標をとる。いま $C=1+\alpha$ とすれば、上述の考察から、$\overrightarrow{EB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$に対応する複素数は等比数列であり、1、α、α^2、α^3 となる。また、A が EB の延長上にあることと、複素座標のとりかたから、α は次の式を満たすことになる。

$\mathrm{Im}\,(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)=0$　①

$\mathrm{Re}\,(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)<0$　②

$\mathrm{Im}\,(\alpha)>0$　③

また、逆に上式を満たすとき、

$E=0$、$B=1$、$C=1+\alpha$、$D=1+\alpha+\alpha^2$

であり、これらの座標に α 倍して１を加えるという操作、つまり拡大・回転・平行移動の操作を施すと、４頂点がそれぞれ、

$B=1$、$C=1+\alpha$、$D=1+\alpha+\alpha^2$、

$A=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$

に移ることから、除去図形が三角形の黄金四角形が得られることが確認できる。

一方、定理３（３）の場合を考える。やはり、図15で

A＝E となる場合の図を、向きを次のように変えて考える（図19）。

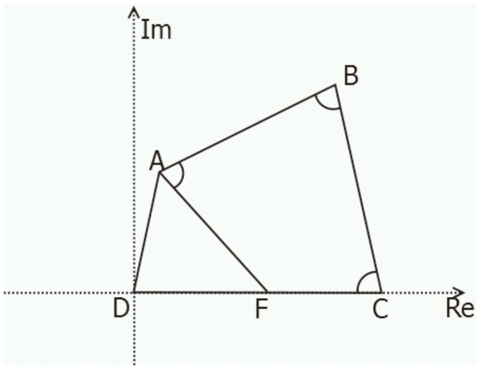

図19　定理３の（３）の図再考

この場合にも、四角形 ABCD と四角形 FABC の相似関係において、DC が CB に、CB が BA に、BA が AF に対応するので、DC、CB、BA、AF の長さは等比数列となり、また、∠C＝∠B＝∠BAF であることから、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AF}$の偏角が同じ量ずつ変化する。よって、やはり複素平面上で考えることとし、今回は図のように D＝０、C＝１で B の虚部が正となるように複素座標をとる。このとき、B＝１＋αとすれば、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AF}$はそれぞれ１、α、α^2、α^3となり、F が C と D の間にあることから、αは次の式を満たすこととなる。

$\mathrm{Im}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)=0$　　①

$0<\mathrm{Re}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)<1$　　②'

$\mathrm{Im}(\alpha)>0$　　③

また、（２）の場合と同様、上の式をαが満たすならば、

$D=0$、$C=1$、$B=1+\alpha$、$A=1+\alpha+\alpha^2$

であり、これらの座標にα倍して１を加える操作、つまり拡大・回転・平行移動の操作を施せば、４頂点はそれぞれ、

$C=1$、$B=1+\alpha$、$A=1+\alpha+\alpha^2$、

$F=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$

に移ることから、やはり黄金四角形が得られることが確かめられる。

ところで、（２）と（３）の両方のケースに登場する①式は何だろうか。①式を満たすαの集合はどのような図形となるのだろうか。そこで、

$\alpha=x+iy$

というように実部と虚部を文字で表して、①式を計算してみれば、

$y+2xy+3x^2y-y^3=0$

を得る。しかし $y>0$ であるので、上式を y で割って、

$1+2x+3x^2-y^2=0$　　④

を得る。この２次式は高校で習う双曲線の式となっている。

定理３の（２）の場合には C＝１＋α、（３）の場合には B＝１＋αであるから、黄金四角形の１つの頂点は④で定まる双曲線を実軸方向に１平行移動した曲線上にある。また、複素平面上の0,1も黄金四角形の頂点である。そして実際、計算機を用いてプロットを行うと、次の図20に示すように、④の双曲線のうち②、②'、③により指定される部分について、その上の各点に応じて黄金四角形が一つずつ定まることになる。

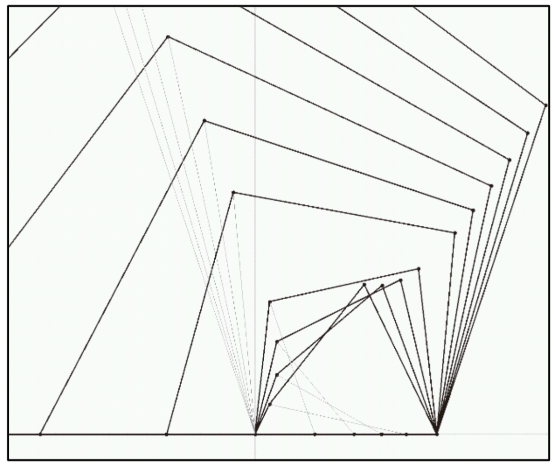

図20　双曲線上の点毎に定まる黄金四角形

７．展望

最後に関係する研究と今後の展望・課題について述べておく。

黄金四角形と関係の深い用語に、グノモン（gnomon）というものがある。グノモンという言葉の歴史は古く古代ギリシャの頃から使われているもので、ユークリッド原論の第２巻のなかにも平行四辺形の頂点からそれと相似な小さい平行四辺形を取り除いた形を指す用語として登場する（図21）。後に、アレクサンドリアのヘロンは、このグノモンという用語を、ある図形に加えることで元の図形と相似な図形が得られるような図形のこと、と一般化した定義を与えた（Thompson（1917), p.181）。つまり、本稿で述べてきた黄金四角形の除去図形は、グノモンである。

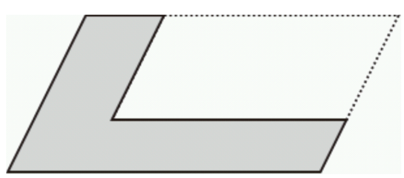

図21　グノモン

ユークリッド原論にあるグノモンのように、凸でないものも含めると、グノモンを追加して相似形となる図形は何でもよいことになってしまうが、では凸多角形であるようなグノモンに限定したときはどうだろうか。いわ

ゆる黄金比による黄金長方形は、正方形がグノモンとなり得ることを示している。本稿では、凸四角形の一般化された黄金分割を考察することで、三角形・四角形のグノモンが多数登場している。では、凸多角形となるグノモンの辺数はどのような数をとり得るか。またそこから、凸のグノモンを相似なものは等しいとして分類せよ、といった問題が考えられる。

これに対して、J.M.Aarts & J.Fokkink（2003）は、凸多角形であるグノモンの辺数は６本以下である、という結果を示している。逆に、三角形・四角形・五角形・六角形のグノモンは存在する。実際、彼らの証明にあるように、凸多角形であるグノモンは、combinatorial には四角形もしくは六角形であり、三角形や五角形は内角が平角となるような特別な場合と考えることができる。さらに、彼らは正多角形となるグノモンは正三角形と正方形のみであることも示している。

グノモン G_0 の追加により相似図形が得られる図形（一般黄金四角形はその例である）F があったとき、逆に F から G_0 と相似な G_1 を除去しても F と相似な図形 F'が得られるはずであり、F'もまた G_0 と相似な G_2 を取り除いてより小さな相似形にできる。これを繰り返すと、F の内部が G_0 と相似な図形の無限系列で埋め尽くされることになる（図22）。

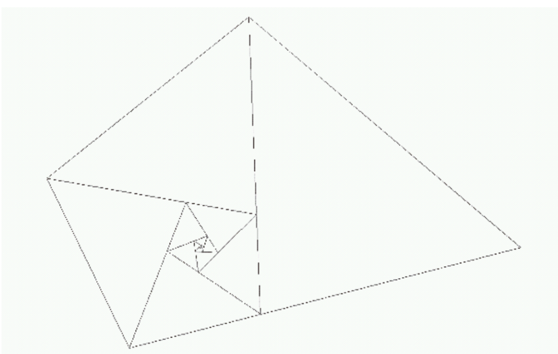

図22　グノモンの系列によるタイリング

Sushida ら（2012）は、このスパイラル状のタイリングという観点から特に三角形・四角形をタイルとするスパイラルタイリングを分類している。これは結果的に、三角形・四角形のグノモンの分類であり、combinatorial に四角形となるグノモンの分類と見ることもできる。

では、combinatorial に六角形となるグノモンの分類はどうなるだろうか。複素平面やトポロジーの手法によってこうした考察も可能であるが、その結果についてはまた別稿を期したい。

引用文献

濵中裕明（2016），「高校で可能な証明活動を組み入れた数学的活動についての考察 ― 証明の多面的機能のケーススタディ―」全国数学教育学会会誌『数学教育学研究』，第22巻第１号，pp.171-178.

Jan M. Aarts & Robbert J. Fokkink（2003），“On Gnomons”, Mat. Vesnik 55, no.3-4, pp.59-64.

T. Sushida, A. Hizume & Y. Yamagishi（2012），“Triangular Spiral Tilings”, J. Phys. A 45, no. 23, 235203, 22 pp.

D’arcy Thompson（1917），“On Growth and Form”, Cambridge University Press.

De Villiers, M（1990）“The role and function of proof on mathematics” Pythagoras, Vol.24, 17-24, 1990.