

将棋の駒多面体について

On Shogihedra

濱 中 裕 明* 大久保 尚 輝** 小 川 星 治**
HAMANAKA Hiroaki OKUBO Naoki OGAWA Seiji

谷 口 琳太郎** 高 橋 忠 輝
TANIGUCHI Rintaro TAKAHASHI Tadaki

多面体は、空間図形として基本的といえるものであるが、中学校数学で扱う多面体といえば、多角柱、多角すい、正多面体にほとんど限定され、これは高校数学でもあまり変わらない。高校までには、空間座標や空間ベクトルなど、空間内の計量的な幾何学を扱う手法を学習しており、これらを活用する探究の場として、多面体の探究、具体的には将棋の駒多面体と呼ばれる多面体についての探究軌道を紹介したい。本稿で紹介する将棋の駒多面体とよばれる多面体はどれも、すべての面が線対称五角形となっていて、正多面体と同様の対称性を備えている。面を合同性で分類すると、1種あるいは2種となる。実際、これらの多面体の族に関する幾何的・計量的計算は、高校までの空間座標や空間ベクトル、その発展としての初歩的な線形代数の活用となりうる数学対象であり、と同時にこれらの多面体は鑑賞に堪える美しさを備えている。こうした多面体に関する計算や新しい多面体の発見は数学的に興味深いだけでなく、数学的活動の素材としての可能性も有している。

キーワード：幾何学、多面体、空間図形、ベクトル、線形代数

Key words : geometry, polyhedron, spatial figure, vector, linear algebra

はじめに

多面体は、空間図形として基本的といえるものであるが、中学校数学で扱う多面体といえば、多角柱、多角すい、正多面体にほとんど限定され、これは高校数学でもあまり変わらない。また、直方体（立方体）や角錐であれば、辺の長さや辺のなす角、面のなす二面角、あるいは頂点の座標といった計量的な性質が学習の対象となりうるが、正多面体に限っても、正12面体や正20面体についてそのような計量的な扱いが学校数学でなされることは稀である。また、角柱・角錐・正多面体以外の多面体を扱う教材研究として、例えば正多面体の定義を緩めた半正多面体（アルキメデスの立体）に関するものがあるが（例えば矢野, 1969；松崎, 2016；金見ら, 2020）、半正多面体では面が正多角形に限定されるため、幾何学というよりも、オイラーの多面体定理のような組み合わせ多面体としての探究教材が一般的である。

実際、高校までの数学では、空間座標や、空間ベクトルなどの空間内の幾何を計量的に扱う方法を学習している。しかし、こうした空間図形に関する計量的計算の手法が、生きた数学として必要性を伴って学習の場

に登場することは稀のように感じる。そこで本稿では、こうした空間の計量的な幾何学を活用する探究の場として、多面体の探究、具体的には将棋の駒多面体と呼ばれる多面体についての探究軌道を紹介したい。

まず、これまでの経緯を説明する。本稿の共著者である高橋は、インターネット上で興味深い多面体の画像を見つけ、その計量的な計算を行った。この画像のオリジナルは Sherman (2014) によるものであったが、Sherman はインタラクティブに数値を変化させることができる数値計算によりこの形状を発見しており、厳密解としての数値を計算してはいなかったのである。高橋は、すべての面が将棋の駒の形に類似したこの多面体を「将棋の駒多面体」(shogihedron) とよび¹⁾、インターネット上で紹介した。これは2020年に話題となりいくつかのネット記事でも紹介されている。

一方、本稿の主著者を含む濱中・大久保・小川・谷口は、学部でのゼミのテーマとして²⁾、将棋の駒多面体の計量的計算を扱うこととし、高橋とは別に将棋の駒多面体の計算を進めてきた。さらに、オリジナルの将棋の駒多面体をもとにして、これを発展させたいくつかの新しいタ

*兵庫教育大学大学院教育実践高度化専攻理数系教科マネジメントコース 教授

令和4年10月13日受理

**兵庫教育大学学校教育学部教科教育系数学グループ

イブの多面体を発見している。

さらに興味深いことに、探究がある程度成果を出したところで、高橋と濱中らでそれぞれの探究の軌道を確認したところ、まったく違う手法で探究を進めてきたことが分かった。このことは、この探究課題がさまざまな方法でアプローチ可能であることを示しており、その成果は数学的に興味深いだけでなく、数学的活動の素材として多くの可能性も有していることを示唆する。

そこで、本稿ではそれぞれのアプローチによる将棋の駒多面体の計量的な探究の方法をまとめ、さらに将棋の駒多面体を一般化した多面体の存在や構成について報告する。

2. 将棋の駒多面体

将棋の駒多面体とは、以下の画像のような鏡映対称でない多面体で、下に述べるような性質を有している。

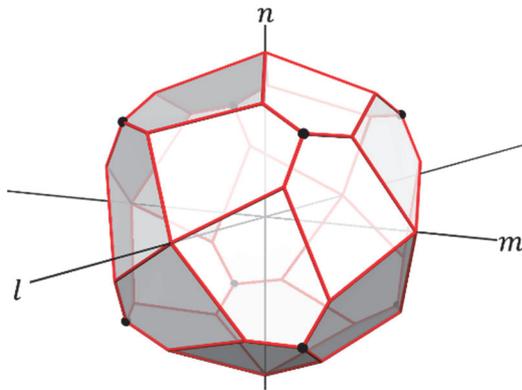


図 1 将棋の駒多面体

1. 24個の面から構成される凸多面体である。
2. すべての面が合同な線対称の五角形である。
3. 鏡映を含まない立方体の自己同型により不変であるという対称性を持つ。

3番目の性質について、少し説明を加えておこう。一つの立方体CをC自身に移すような空間の合同変換のことを立方体Cの自己同型という。立方体の自己同型は、立方体の中心を動かさないため、必然的に空間の回転(恒等変換を含む)あるいは鏡映となるが、回転による自己同型は24種類ある。将棋の駒多面体は、図1に小さな球体で示した点を頂点とする立方体Cの回転による自己同型24種によって、自分自身に移るという性質を持っている。特に、図1に示した3つの直線 l, m, n を軸とする 90° の回転で不変である。

いま、線対称な五角形に対して、その対称軸上にある頂点をこの五角形の頂角、対称軸と直交する辺を底辺とよぶことにすると、将棋の駒多面体では、立方体Cの頂点を中心に3つの面が頂角を共有するように集まっている。

さて、ここまで示した図と上記の性質だけで、ひとまず将棋の駒多面体は決定できるであろう。そこで、将棋の駒多面体の詳細な定義づけは、後述することにして、上述の性質から、まずはこの多面体の計量的性質を決定していこう。

3. 三面図法によるアプローチ

図1のオリジナルの将棋の駒多面体を以下 P_8 とよぶ。高橋は、 P_8 の計量的計算をいわゆる三面図法を用いた計算によって行っている。この手法をまず概説しよう。

P_8 は、立方体と同じ対称性を持っているので、図1に示した l, m, n の方向からの射影、つまり側面図、平面図、正面図が一致する。実際、 l に平行に射影した正面図は図2のようになる。

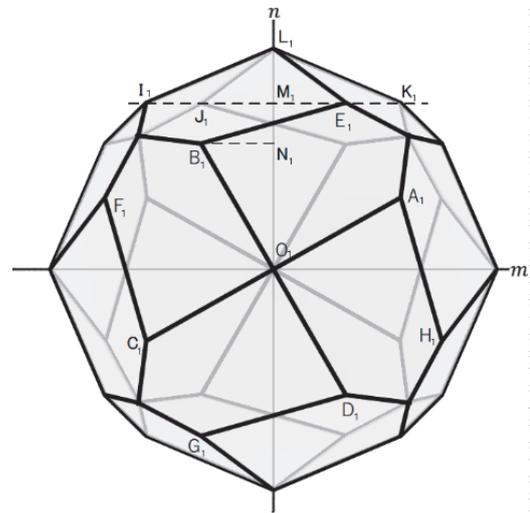


図 2 正面図

この図において、多面体 P_8 の頂点のいくつかに、 O および $A \sim M$ のラベルを付し、その頂点に対応する正面図における点をそれぞれ O_1 および $A_1 \sim M_1$ とよぶことにする。多面体の対称性により A_1C_1 と B_1D_1 の中点は O_1 で一致し、また A_1C_1 と B_1D_1 は直交している。

いま $O_1A_1 = 1$ とすると、この射影図において $A_1B_1 = \sqrt{2}$ となるが、多面体の頂点 A, B, C, D は空間内で直線 l の周りに同一の点を 90° ずつ回転させた点であるので、 $A_1B_1 = AB$ つまり P_8 の面の対角線の長さ AB は $\sqrt{2}$ である。

また、 A, B, C, D と同様に I, J, E, K も直線 n の周りに 90° ずつ回転した点になっているので、図2において I_1, J_1, E_1, K_1 は、直線 n と垂直な同一直線上にある。図2においてこの直線と直線 n との交点を M_1 とし、 B_1 から n へおろした垂線の足を N_1 とする。そして、 $L_1M_1 = a, M_1N_1 = b$ とおく。

まず、 a と b の関係式を求める。空間内の線分として

LE と IB は平行であるから、射影された L_1E_1 と I_1B_1 も平行であり、このことから

$$L_1E_1 : I_1B_1 = a : b$$

が成り立つ。この平行関係と長さの比は n 方向に射影した平面図 (図3) においても成り立つ。よって、 $L_2E_2 : I_2B_2 = a : b$ となるが、この図で $L_2E_2 = 1$ であり、 L_2I_2 は L_2E_2 と I_2B_2 の両方に垂直なので、 $I_2B_2 = b/a$ で、

$$L_2B_2^2 = 1 + (b/a)^2$$

を得る。再び図2に戻って、頂点 L と B の高さの差を考え、空間内の三平方の定理を用いれば、

$$LB = 1 + (b/a)^2 + (a+b)^2 = \sqrt{2}^2$$

となり、これを b について解けば (2次方程式の解のうち、正の値をとって)

$$b = \frac{a(1-a^2)}{1+a^2} \quad ①$$

となる。

ここで再び正面図に戻って考えてみると (図4)、上と同様の議論により

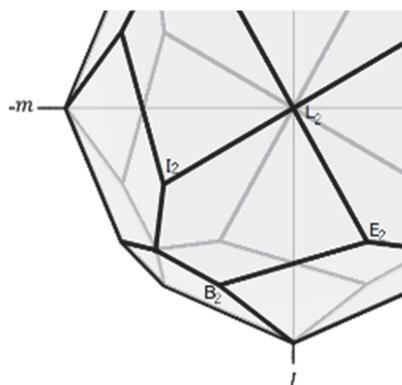


図3 平面図 (一部)

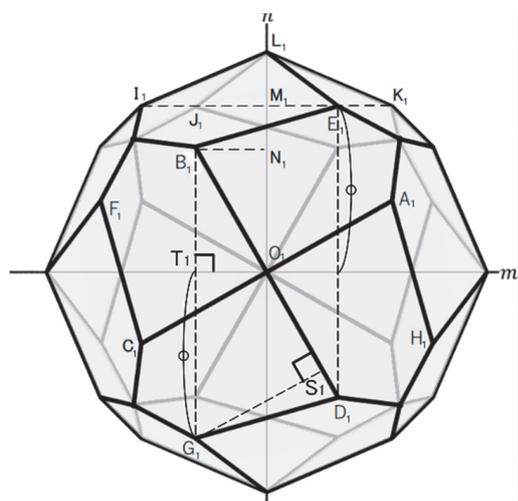


図4 正面図

$$B_1O_1 : O_1C_1 : C_1G_1 = a : a : b$$

であり、 G_1 から B_1D_1 へおろした垂線の足を S_1 、 B_1G_1 と m との交点を T_1 とすれば (多面体の対称性より B_1G_1 が直線 m と垂直であることに注意)、

$$B_1S_1 : S_1G_1 = B_1T_1 : T_1O_1 = a + b : a$$

などが得られる。この式と $B_1O_1 = 1$ から

$$B_1T_1 = \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2 + a^2}} \quad ②$$

$$T_1G_1 = \frac{2\sqrt{(a+b)^2 + a^2}}{a} - \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2 + a^2}} \quad ③$$

が得られ、最後に $T_1G_1 - B_1T_1 = b$ であることから、ここに①、②、③の式を代入することで a の方程式

$$a^6 + a^4 + 7a^2 - 1 = 0$$

が定まる。この方程式は正の範囲にただ一つの解をもち、①、②、③の式により正面図における各点の座標を求めることは難しくなく、三面図がすべて一致することから各点の座標が定まっていくこととなる。

4. 将棋の駒多面体の一般化 (1)

将棋の駒多面体 P_8 は、立方体の自己同型で不変であるという性質を持っていたが、このことが三面図法での計算を可能にしていたと考えられる。しかし、いまから述べるように、将棋の駒多面体の構成を一般化し、立方体以外の正多面体と同じ対称性をもつ多面体を構成していくには、三面図法による手法には限界がある。そこで濱中らは、空間ベクトルを用いた計算によって、将棋の駒多面体の計量計算を行った。

この計算を実行する前に、まず将棋の駒多面体の構成方法を見直し、以下のように一般化してみよう。将棋の駒多面体を、正多面体をもとにして構成することを考える。

まず、正 n 面体 R_n を考える ($n = 4, 6, 8, 12, 20$)。 R_n の頂点の集合を $\{A_i\}$ とし、 R_n の各面の中心の集まりを $\{B_s\}$ としよう。また、 R_n の一つの面の中心 B_s とその面の一つの辺 A_iA_j で出来る三角形を、この正多面体の小三角形 $\Delta_{i,j,s}$ と今後よぶことにする。ただし、 A_i, A_j, B_s は正多面体の外からみて反時計回りに並ぶものとする。

いまから、ある正の定数 k, x, y, z を用意し、正 n 面体 R_n から新たな多面体 P_n を構成することを考える。

(ステップ1) まず、 R_n の中心を O とし、以後 O を原点として考える。 O を端点として B_s を通る n 個の半直線を考え、この半直線上に O からの距離が、 $k \times OB_s$ の点 B'_s をとる。これにより n 個の点の集合 $\{B'_s\}$ が作られる。

(ステップ2) さらに、それぞれの小三角形 $\Delta_{i,j,s}$ に対して、あらたな点 $C_{i,j,s}$ を次の位置ベクトル $c_{i,j,s}$ で決まる点とする。

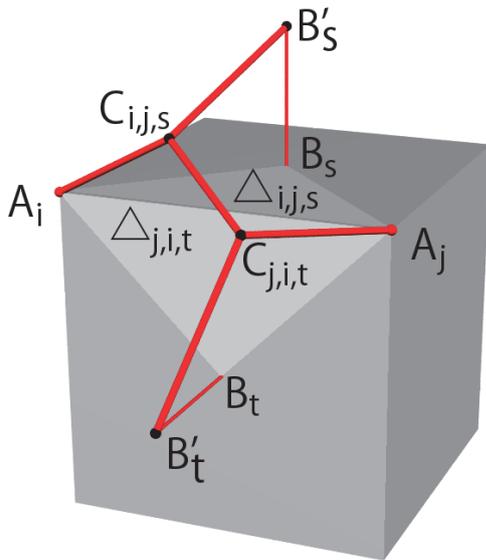


図 5 将棋の駒多面体の辺の構成

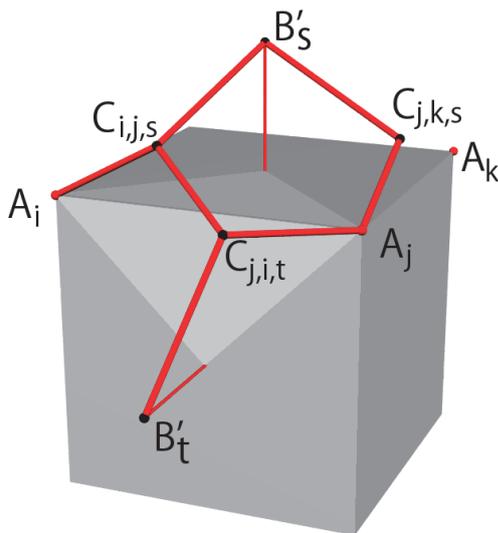


図 6 将棋の駒多面体の面の構成

$$c_{i,j,s} = xa_i + ya_j + zb_s$$

ただし、 a_i, a_j, b_s はそれぞれ A_i, A_j, B_s の位置ベクトルである。このとき、 $\{A_i\}, \{B'_s\}, \{C_{i,j,s}\}$ を合わせた集合を P_n の頂点集合とする（図5を参照）。

（ステップ3）つぎに P_n の辺の構成方法を定めていこう。 R_n の辺 A_iA_j を共有する2つの小三角形 $\Delta_{i,j,s}$ と $\Delta_{j,i,t}$ の組ごとに、

$$A_iC_{i,j,s}, A_jC_{j,i,t}, B'_sC_{i,j,s}, B'_tC_{j,i,t}, C_{i,j,s}C_{j,i,t}$$

という5つの辺を追加する（図5参照）。

（ステップ4）そして、辺 A_iA_j, B_sA_j を共有する3つの小三角形 $\Delta_{i,j,s}, \Delta_{j,k,s}, \Delta_{j,i,t}$ の3つ組ごとに、次の五辺形

$$\text{五辺形 } B'_sC_{i,j,s}C_{j,i,t}A_jC_{j,k,s}$$

を面として構成していく（図6参照）。

上記のステップ1から4のように頂点、辺、面を定めたとき、

1. 各面の頂点が同一平面上にあり、
2. 各面が B'_s を頂角とする線対称五角形であり、
3. 全体として凸多面体である

ときに、これを正多面体 R_n に付随する将棋の駒多面体 P_n とよぶのである。

このように考えると、図1の将棋の駒多面体は正八面体に付随する将棋の駒多面体 P_8 であった事が分かる。

5. 空間ベクトルによるアプローチ

4節で述べたような一般化を行うならば、空間ベクトルを用いた計算を行うことは極めて自然であろう。実際、このように一般化されていけばすべての正多面体に付随する将棋の駒多面体の計算を統合して行うことが可能となる。

まず、基となる正多面体の中心 O を原点とし、正多面体の頂点や面の中心の位置ベクトルは与えられているものとして、計算を進めてよい。また、求めるべきは k, x, y, z ということになる。

図7のように正多面体の3つの小三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を考え（ここでは小三角形のラベルの付し方を、簡単なものに変えた）、ここに構成される5辺形が、同一平面上の線対称五角形を構成するための条件を考える。ここでは扱いやすいように図7に示す頂点に $A \sim E, C', D', X, Y$ および Z というラベルを付す。 A, B, C, D, E は3つの小三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ の頂点となる点である。 C' と D' はステップ1により C と D から定まる頂点である。そして、 X, Y, Z は、ステップ2によりそれぞれ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ に対応して定まる新たな頂点である。

このとき、五辺形 $DYXAZ$ が点 D' を頂角とする線対称五角形となるためには、

条件1 YZ と XA が平行。

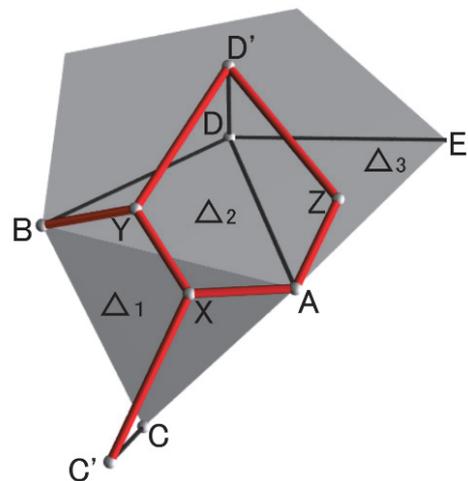


図 7 五辺形のまわりの頂点

条件2 D' , YZ の中点 P , XA の中点 Q が同一直線上であることが必要である。また、逆に1と2が満たされるとき、 D', Y, X, A, Z は必ず同一平面上に乗ることとなり、さらに X, Y, Z の構成方法により $D'Y = D'Z$ が必然的に満たされるため $D'P$ は YZ と垂直になるから、 $D'Q$ と XA も垂直となるので、結果として五辺形 $D'YXAX$ は同一平面上の線対称な図形となる。このとき、五辺形が自己交差しない五角形であるならば、線対称な五角形ということになる。そこで、1.と2.を満たす条件を式にすることを考える。

A, B, C, D, E は正多面体の頂点および面の中心であるから、与えられているものとして、それぞれの位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ で表す(同様に他の点についても位置ベクトルを頂点ラベルの太字の小文字で表す)。また、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は一次独立で、空間ベクトルの基底を成すから、 \mathbf{d} と \mathbf{e} を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合で表すことができる。そこで、

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + d_3\mathbf{c} \\ \mathbf{e} &= e_1\mathbf{a} + e_2\mathbf{b} + e_3\mathbf{c} \end{aligned}$$

とおく。この係数 d_i, e_i も正多面体から計算できる値である。さらに、正多面体の対称性から、 O と AB の中点と CD の中点は一直線上にあるから、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と $d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + (d_3 + 1)\mathbf{c}$ は平行であり、

$$d_1 : d_2 : (d_3 + 1) = 1 : 1 : 0$$

となる。よって $d_1 = d_2$, $d_3 = -1$ がわかる。よって

$$\mathbf{d} = d_1\mathbf{a} + d_1\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

と改めておくこととしよう。

次に、 X, Y, Z の位置ベクトルを考えよう。将棋の駒多面体の構成方法により、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &= x\mathbf{b} + y\mathbf{a} + z\mathbf{d} \\ \mathbf{z} &= x\mathbf{a} + y\mathbf{e} + z\mathbf{d} \end{aligned}$$

となる。これらを用いると YZ ベクトルと XA ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YZ} &= (x + (e_1 - 1)y)\mathbf{a} + (e_2y - x)\mathbf{b} + e_3y\mathbf{c} \\ \overrightarrow{XA} &= (1 - x)\mathbf{a} - y\mathbf{b} - z\mathbf{c} \end{aligned}$$

となる。それゆえ、条件1.は次の式と同値になる。

$$(x + (e_1 - 1)y) : (x - 1) = (e_2y - x) : y = e_3y : z$$

この式は次の2式と同値である。

$$(x + (e_1 - 1)y)y = (x - 1)(e_2y - x) \cdots [1]$$

$$(e_2y - x)z = e_3y^2 \cdots [2]$$

つぎに条件2.について考えよう。 D' は OD の延長上にあるから、条件2.が満たされるとき、 O, D, P, Q は同一平面上にある。つまり、このとき $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ は一次従属となる。このことを式に表そう。各点の位置ベクトルから $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ を求めるて並べると、

$$\mathbf{d} = d_1\mathbf{a} + d_1\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

$$2\mathbf{p} = (x + (e_1 + 1)y)\mathbf{a} + (x + e_2y)\mathbf{b} + e_3y\mathbf{c} + 2z\mathbf{d}$$

$$2\mathbf{q} = (x + 1)\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

となる。このとき、3つのベクトルの一次従属性は、どれかのベクトルのスカラー倍を他のベクトルに加えても変化しないので、 $2\mathbf{p}$ に $e_3y - 2z$ 倍の \mathbf{d} を加え、 $2\mathbf{q}$ に z 倍の \mathbf{d} を加えることで、求める条件はつぎの3つのベクトルの一次従属性になる。

$$d_1\mathbf{a} + d_1\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

$$(x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y)\mathbf{a} + (x + (e_2 + d_1e_3)y)\mathbf{b}$$

$$(x + 1 + d_1z)\mathbf{a} + (y + d_1z)\mathbf{b}$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は空間ベクトルの基底であったから、これらの一次従属性は

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_1 & -1 \\ x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y & x + (e_2 + d_1e_3)y & 0 \\ x + 1 + d_1z & y + d_1z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

つまり、

$$\begin{vmatrix} x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y & x + (e_2 + d_1e_3)y \\ x + 1 + d_1z & y + d_1z \end{vmatrix} = 0$$

となり、計算すれば

$$\begin{aligned} &(x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y)(y + d_1z) \\ &= (x + (e_2 + d_1e_3)y)(x + 1 + d_1z) \cdots [3] \end{aligned}$$

となる。

ここまでで、 x, y, z に関する3つの条件式 [1], [2], [3] が得られた。そこで、[2]式を用いて[3]式の z を消去する。実際、[3]式に $(e_2y - x)$ をかけて、[2]を用いて z を消去すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} &(x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y)((e_2y - x)y + d_1e_3y^2) \\ &= (x + (e_2 + d_1e_3)y)((x + 1)(e_2y - x) + d_1e_3y^2) \end{aligned}$$

この式は x, y のみを未知数として含んでいるが、同次式となっていない。この式を同次式に変形するために、[1]式を用いる。すなわち、[1]の両辺に $(x + (e_2 + d_1e_3)y)$ をかけて、上の式に辺々加えると、次を得る。

$$\begin{aligned} &(x + (e_1 + 1 + d_1e_3)y)((e_2y - x)y + d_1e_3y^2) \\ &+ (x + (e_2 + d_1e_3)y)(x + (e_1 - 1)y)y \\ &= (x + (e_2 + d_1e_3)y)(2x(e_2y - x) + d_1e_3y^2) \end{aligned}$$

この式は、 x と y の同次3次式となっているので、 x^3 で割って、 $t = y/x$ とおくと、 t の3次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &e_1(e_2 + d_1e_3)t^3 + (e_2(1 - e_2 - d_1e_3) - 1)t^2 + d_1e_3t \\ &+ 1 = 0 \cdots [4] \end{aligned}$$

t が仮に求めれば、 $y = tx$ を[1]式に代入することで、次のように x を求めることが出来る。

$$x = \frac{1 - e_2t}{(e_1 - 1)t^2 + (1 - e_2)t + 1}$$

あとは、 $y = tx$ により y が定まって、[2]により、

$$z = \frac{e_3 y^2}{e_2 y - x}$$

が求まる. x, y, z の値が決まれば, 図7の点 X, Y, Z の位置が決まるので, 点 C' がそれらと同一平面上になるように k の値を定めるのは容易である.

6. 正多面体に付随する将棋の駒多面体

実際に, 5節の方法を5種の正多面体に適用してみよう.

まずは, 正八面体に付随する将棋の駒多面体 P_8 で計算を行う. 点 A, B, C, D, E の座標を次のように,

$$A(0,3,0), B(3,0,0), C(1,1,-1), D(1,1,1), E(0,0,3)$$

すれば,

$$d = 2/3a + 2/3b - c$$

$$e = a + b - 3c$$

となるので, $d_1 = 2/3, (e_1, e_2, e_3) = (1, 1, -3)$ となる.

これを[4]式に代入すると,

$$-t^3 + t^2 - 2t + 1 = 0$$

が得られる. この3次方程式は一つの実数解

$$t = 0.56984 \dots$$

をもち, これをもとに

$$x = 0.43016 \dots, y = 0.24512 \dots, z = 0.97415 \dots$$

が求まるので,

$$X \doteq (1.70952, 2.26463, -0.97415)$$

$$Y \doteq (2.26463, 1.70952, 0.97415)$$

$$Z \doteq (0.97415, 2.26463, 1.70952)$$

となり, これより

$$D' \doteq (1.8188, 1.8188, 1.8188)$$

が定まる. これらの情報をもとに, P_8 の一つの面の形を作図すると次のように将棋の駒によく似た形となるのである (図8).

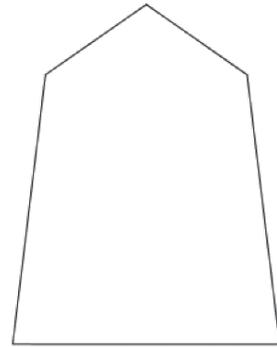


図8 将棋の駒多面体 P_8 の面の形

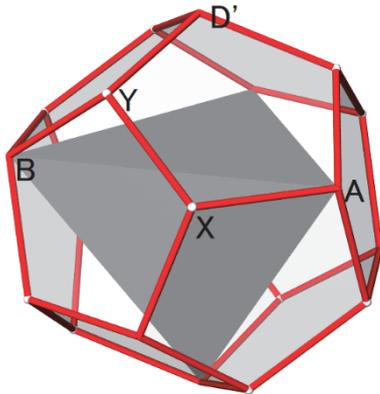


図9 P_4 としての正十二面体

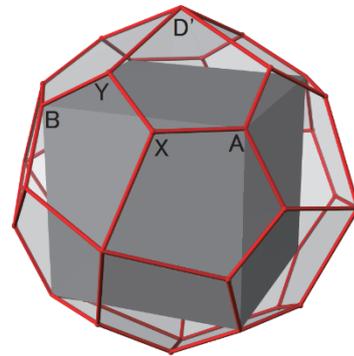


図10 P_6 としての五角二十四面体

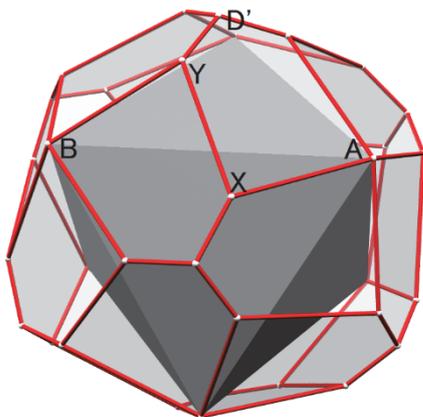


図11 将棋の駒多面体 P_8

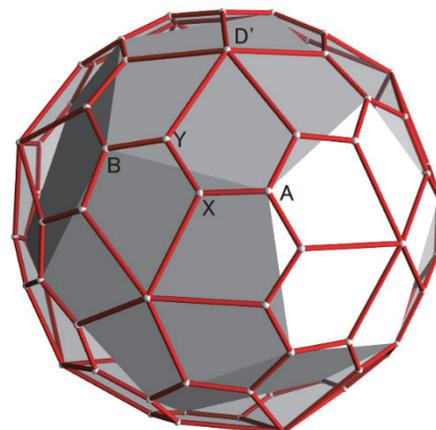


図12 P_{12} としての五角六十面体

同じように、5種の正多面体すべてに計算方法を適用すると、以下のことが分かる。

- 正四面体に付随する P_4
正四面体に対して、上と同様に[4]式を計算すると、3次の項が消え、2次方程式となる。このうちの1つの解では、面の形が自己交差する形となる。もう一方の解に対する将棋の駒多面体 P_4 を構成すると、実は、図9に示すように正十二面体に一致する。
- 立方体に付随する P_6
立方体に対して、[4]式を計算すると、これは実解を1つだけもつ3次方程式となり、この値を元に構成される P_6 は、五角二十四面体として知られる立体である事が分かる(図10)。
- 正八面体に付随する P_8
図11に示すように、これが第2節で述べた将棋の駒多面体である。
- 正十二面体に付随する P_{12}

この場合に[4]式を計算すると、やはり実解が1つだけ存在する3次方程式となり、その値をもとに多面体を構成すると、五角六十面体として知られる立体であることが分かる(図12)。

- 正二十面体に付随する P_{20}
この場合に[4]式を計算すると、やはり実解が1つだけの3次方程式となり、その値をもとに多面体を構成すると、新たな多面体 P_{20} を構成できる。 P_{20} は、線対称な五角形60個から構成される多面体である(図13)。 P_{20} の1つの面の形状を図に示しておく(図14)。

7. 将棋の駒多面体の一般化(2)

前節で5種の正多面体に付随する将棋の駒多面体が全て計算されたが、半正多面体に対しても同様の方法で将棋の駒多面体を構成できないだろうか。ここでは、立方八面体・十二面二十面体に付随する将棋の駒多面体 $P_{3,4}$ および $R_{3,5}$ を構成することを考える。

まず、ここでは立方八面体を $R_{3,4}$ とよぶ。 $R_{3,4}$ とは正三角形の面8個と正方形の面6個から成る多面体で、こ

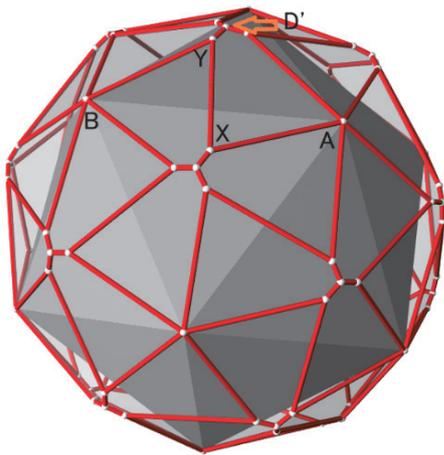


図13 将棋の駒多面体 P_{20}

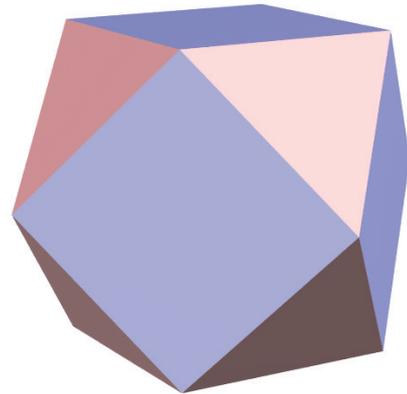


図15 立方八面体 $R_{3,4}$

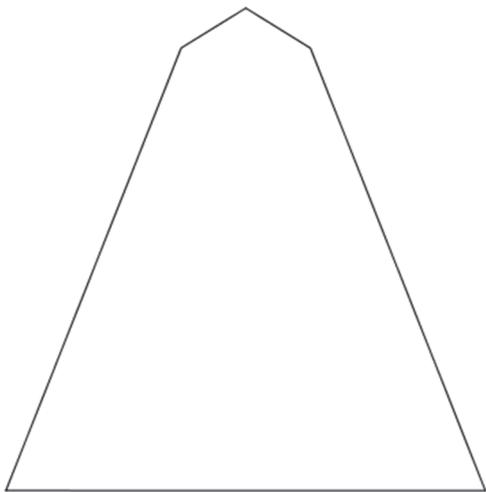


図14 P_{20} の面の形状

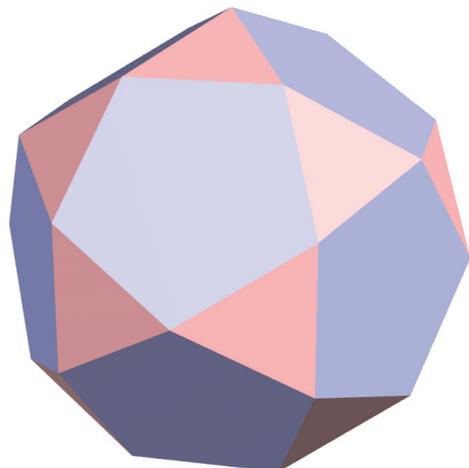


図16 十二面二十面体 $R_{3,5}$

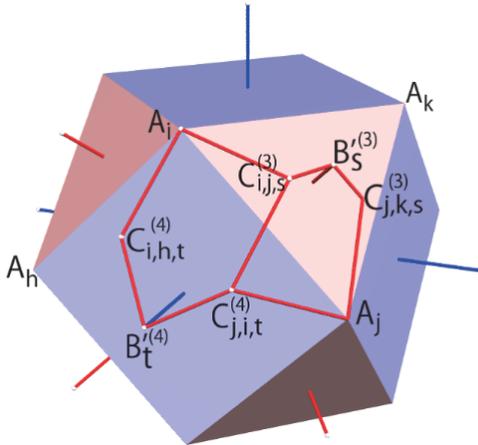


図 17 $P_{3,4}$ の構成

の多面体ではどの頂点の周りにも正方形と正三角形が交互に2つずつ配置される (図 15)。

また、十二面二十面体をここでは $R_{3,5}$ とよぶ。 $R_{3,5}$ は正三角形の面 20 個と正五角形の面 12 個から成る多面体で、この多面体ではどの頂点の周りにも正三角形と正五角形が交互に2つずつ配置される (図 16)。

以下、 $R_{3,4}$ および $R_{3,5}$ からそれぞれ、 $P_{3,4}$ と $P_{3,5}$ を構成する方法を統一的に述べていく。これらの構成法は、基本的には第 4 節での一般化と類似している。まず、 $R_{3,p}$ (p は 4 あるいは 5 である) の頂点の集合を $\{A_i\}$ とする。そして、 $R_{3,p}$ の正三角形の面の中心の集合を $\{B_s^{(3)}\}$ 、正 p 角形の面の中心の集合を $\{B_t^{(p)}\}$ とする。第 2 節と同様に、 $R_{3,p}$ の中心 O を原点とし、点の位置ベクトルを点と同じラベル文字の太い小文字で表す。 $P_{3,p}$ は、 $R_{3,p}$ を基にして、8 つの正の定数 $k, k', x, y, z, x', y', z'$ により、以下のように構成される多面体で、後述する性質を満たすもの、と定義するのである。

(ステップ 1) 点 $B_s^{(3)}$ に対し、位置ベクトルが $kb_s^{(3)}$ である点を $B_s'^{(3)}$ とし、点 $B_t^{(p)}$ に対し、位置ベクトルが $k'b_t^{(p)}$ である点を $B_t'^{(p)}$ と名付ける (図 17, 図 18)。

(ステップ 2) $R_{3,p}$ の各辺 A_iA_j に対して、次のように点 $C_{i,j,s}^{(3)}$ と点 $C_{j,i,t}^{(p)}$ を構成する。まず、この辺の両側には正三角形の面と正方形の面があるが、正三角形の面の中心を $B_s^{(3)}$ とし、正 p 角形の面の中心を $B_t^{(p)}$ とする。このとき、 A_i と A_j のラベルは、

$$A_i, A_j, B_s^{(3)}, \quad A_j, A_i, B_t^{(p)}$$

が三角形の頂点として、多面体の外側からみて反時計回りにならぶようにする。そして、次のベクトル

$$c_{i,j,s}^{(3)} = xa_i + ya_j + zb_s^{(3)}$$

$$c_{j,i,t}^{(p)} = x'a_j + y'a_i + z'b_s^{(p)}$$

を位置ベクトルとする点をそれぞれ $C_{i,j,s}^{(3)}, C_{j,i,t}^{(p)}$ とする

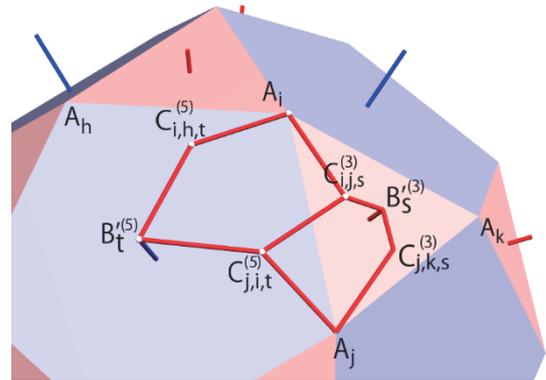


図 18 $P_{3,5}$ の構成

のである。このとき、 $P_{3,p}$ の頂点集合は $\{A_i\}, \{B_s'^{(3)}\}, \{B_t'^{(p)}\}$ および $\{C_{i,j,s}^{(3)}, C_{j,i,t}^{(p)}\}$ を合わせた集合とする。

(ステップ 3) 次に、 $P_{3,p}$ の辺を構成する。 $R_{3,p}$ の各辺 A_iA_j に対し、上と同様にその両側の面の中心を $B_s^{(3)}$ と $B_t^{(p)}$ であるとして、

$$A_iC_{i,j,s}^{(3)}, A_jC_{j,i,t}^{(p)}, B_s'^{(3)}C_{i,j,s}^{(3)}, B_t'^{(p)}C_{j,i,t}^{(p)}, C_{i,j,t}^{(3)}C_{j,i,t}^{(p)}$$

の 5 つの辺を構成する (図 17, 図 18)。

(ステップ 4) 最後に面の構成方法であるが、 $R_{3,p}$ の各辺 A_iA_j に対して、 A_i と A_j にそれぞれ接続する辺 A_hA_i と A_jA_k を図 17 のようにとり、次の 2 つの五辺形

$$\text{五辺形 } B_s'^{(3)}C_{i,j,s}^{(3)}C_{j,i,t}^{(p)}A_jC_{j,k,s}^{(3)}$$

$$\text{五辺形 } B_t'^{(p)}C_{j,i,t}^{(p)}C_{i,j,s}^{(3)}A_iC_{i,h,t}^{(5)}$$

を面として構成する。

上記のステップ 1 から 4 のように頂点・辺・面を定めたとき、第 2 節と同様に、

1. 各面の頂点が同一平面上にあり、
2. 各面が $B_s'^{(3)}$ あるいは $B_t'^{(p)}$ を頂角とする線対称五角形であり、
3. 全体として凸多面体である

ときに、これを $R_{3,p}$ に付随する将棋の駒多面体 $P_{3,p}$ とよぶのである。このとき、実際にそのような性質を満たすように $k, k', x, y, z, x', y', z'$ を定めることができるのか、が問題となる。

8. 立方八面体に付随する将棋の駒多面体

まずは、立方八面体に付随する将棋の駒多面体についての計算からはじめる。図 19 のように、1 つの辺 AB をとり、 AB を辺に含む正三角形、正方形の面の中心をそれぞれ C, D とする。また、正三角形、正方形の面の頂点として E, F を図 19 のように定める。

将棋の駒多面体の構成のステップ 1 で、 C, D から定まる点を C', D' とし、ステップ 2 で、

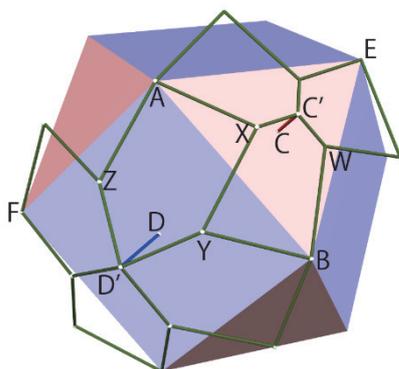


図 19 頂点のラベル

- A, B, C から定まる点を X
- B, E, C から定まる点を W
- B, A, D から定まる点を Y
- A, F, D から定まる点を Z

とする (図 19)。

このとき、点 A, B, C, D, E, F は立方八面体の頂点であるから、その座標を計算するのは容易である。立方八面体の中心を原点として、それらの位置ベクトルを小文字の太字で表す。明らかに、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は一次独立で 3 次元ベクトル空間の基底をなすので、 $\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合で表すことができる。その係数を

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + d_3\mathbf{c} \\ \mathbf{e} &= e_1\mathbf{a} + e_2\mathbf{b} + e_3\mathbf{c} \\ \mathbf{f} &= f_1\mathbf{a} + f_2\mathbf{b} + f_3\mathbf{c} \end{aligned}$$

とおく。

多面体 $P_{3,4}$ の構成方法により、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= k\mathbf{c}, \mathbf{d}' = k'\mathbf{d} \\ \mathbf{x} &= x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} \\ \mathbf{w} &= x\mathbf{b} + y\mathbf{e} + z\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &= x'\mathbf{b} + y'\mathbf{a} + z'\mathbf{d} \\ \mathbf{z} &= x'\mathbf{a} + y'\mathbf{f} + z'\mathbf{d} \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、将棋の駒多面体としての性質が成り立つためには、

1. YZ と XA が平行
2. D' , YZ の中点, XA の中点が一直線上
3. XW と YB が平行
4. C' , XW の中点, YB の中点が一直線上

となる必要がある。実際、上の 4 条件が満たされるとき、第 5 節と同様の議論により、それぞれの五边形は同一平面上にあり、五边形が自己交差しない形なら、線対称な五角形となることがわかる。それゆえ、上記の 4 条件を満たすような $k, k', x, y, z, x', y', z'$ を求めよう。

条件 1. まず、条件 1. については、前述の式により \overrightarrow{YZ} と \overrightarrow{XA} をそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合で表せば、

$$\overrightarrow{YZ} = ((f_1 - 1)y' + x')\mathbf{a} + (f_2y' - x')\mathbf{b} + f_3y'\mathbf{c}$$

$$\overrightarrow{XA} = (1 - x)\mathbf{a} + (-y)\mathbf{b} + (-z)\mathbf{c}$$

となるので、条件 1. は次の連比の式に同値である。

$$((f_1 - 1)y' + x') : (f_2y' - x') : f_3y' = x - 1 : y : z$$

これを 2 つの比の式に分け、内項・外項の積をとって x, y, z の式として整理すれば、次の 2 式となる。

$$(f_3y')x - ((f_1 - 1)y' + x')z - f_3y' = 0 \cdots (1A)$$

$$(f_3y')y - (f_2y' - x')z = 0 \cdots (1B)$$

条件 2. 次に、条件 2. を考える。 YZ の中点, XA の中点の位置ベクトルを 2 倍したものは、それぞれ

$$((f_1 + 1)y' + x')\mathbf{a} + (f_2y' + x')\mathbf{b} + f_3y'\mathbf{c} + 2z'\mathbf{d}$$

$$(x + 1)\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

であり、 D' の位置ベクトルは、

$$k'\mathbf{d} = k'd_1\mathbf{a} + k'd_2\mathbf{b} + k'd_3\mathbf{c}$$

である。条件 2. を満たすには、これら 3 つのベクトルが一次従属であることが必要であるから、

$$((f_1 + 1)y' + x')\mathbf{a} + (f_2y' + x')\mathbf{b} + f_3y'\mathbf{c}$$

$$(x + 1)\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

$$d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + d_3\mathbf{c}$$

が一次従属、つまり次の行列式が 0 となる必要がある。なお、逆にこの 3 つのベクトルが一次従属であれば、 k' をうまくとることで条件 2. は満たされる。

$$0 = \det \begin{pmatrix} (f_1 + 1)y' + x' & f_2y' + x' & f_3y' \\ x + 1 & y & z \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

さらに、行列式の線形性により、上式の右辺は図 20 に示す 3 つの和に分解することができ、このうちの第 1 項は条件 1 の連比の式により 0 となるから、第 2 項と第 3 項の和を計算して、 x, y, z の式として整理すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} (f_1 - 1)y' + x' & f_2y' - x' & f_3y' \\ x - 1 & y & z \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \\ & + \det \begin{pmatrix} (f_1 - 1)y' + x' & f_2y' - x' & f_3y' \\ 2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \\ & + \det \begin{pmatrix} 2y' & 2x' & 0 \\ x + 1 & y & z \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

図 20 行列式の分解

$$(-d_3x')x + (d_3y')y + (d_1x' - d_2y')z + (d_2f_3 - d_3f_2)y' = 0 \cdots (2)$$

条件3. 次に条件3. を式にしよう. 条件1. と同様に, \overline{XW} と \overline{YB} を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合で表すと,

$$\overline{XW} = (e_1y - x)\mathbf{a} + ((e_2 - 1)y + x)\mathbf{b} + (e_3y)\mathbf{c}$$

$$\overline{YB} = (-y' - d_1z')\mathbf{a} + (-x' - d_2z' + 1)\mathbf{b} + (-d_3z')\mathbf{c}$$

となるから, 条件3. は連比の式,

$$(e_1y - x) : ((e_2 - 1)y + x) : e_3y \\ = (y' + d_1z') : (x' + d_2z' - 1) : d_3z'$$

であり, これを2つの比の式に分け, 内項・外項の積をとって, 次の2式を得る.

$$(e_1y - x)d_3z' = e_3y(y' + d_1z') \\ ((e_2 - 1)y + x)d_3z' = e_3y(x' + d_2z' - 1)$$

実はこれら2つの式は, x, y の式として整理すると次のようになる.

$$(e_1d_3z' - e_3(y' + d_1z'))y = d_3z'x \cdots (3A)$$

$$(-d_3(e_2 - 1)z' + e_3(x' + d_2z' - 1))y \\ = d_3z'x \cdots (3B)$$

条件4. 最後に条件4. について考えよう. XW, YB の中点の位置ベクトルの2倍は, それぞれ

$$(e_1y + x)\mathbf{a} + ((e_2 + 1)y + x)\mathbf{b} + (e_3y + 2z)\mathbf{c}$$

$$(y' + d_1z')\mathbf{a} + (x' + d_2z' + 1)\mathbf{b} + (d_3z')\mathbf{c}$$

と求められ, 条件2. と同様に, これと \mathbf{c} が一次従属であることが必要となるので, 次の行列式が0となる.

$$0 = \det \begin{pmatrix} e_1y + x & (e_2 + 1)y + x & e_3y + 2z \\ y' + d_1z' & x' + d_2z' + 1 & d_3z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1y + x)(x' + d_2z' + 1) - ((e_2 + 1)y + x)(y' + d_1z')$$

この式を x, y の式として整理すると, 次が得られる.

$$(-e_1x' + (e_2 + 1)y' + (e_2d_1 - e_1d_2 + d_1)z' - e_1)y \\ = (x' - y' + (d_2 - d_1)z' + 1)x \cdots (4)$$

ここまで, 6変数 x, y, z, x', y', z' に関する6つの式 (1A), (1B), (2), (3A), (3B), (4) が得られたわけであるが, (3A), (3B), (4) をよく見ると, これら3つの式はすべて x と y の比率を表す式となっている. 解が存在するためには, x, y の比率は同じでなければならないので, (3A) と (3B) の式を比較して,

$$e_1d_3z' - e_3(y' + d_1z') \\ = -d_3(e_2 - 1)z' + e_3(x' + d_2z' - 1)$$

を得る. これを x', y', z' の式として整理すると,

$$e_3x' + e_3y' + (e_3(d_1 + d_2) + d_3(1 - e_1 - e_2))z' \\ = e_3 \cdots (5)$$

という x', y', z' に関する1次式が得られる. また, (3A) と (4) 式からも, x, y の比率が等しいことから,

$$d_3z'(-e_1x' + (e_2 + 1)y' + (e_2d_1 - e_1d_2 + d_1)z' - e_1) \\ = (e_1d_3z' - e_3(y' + d_1z'))(x' - y' + (d_2 - d_1)z' + 1)$$

$\cdots (6)$

という x', y', z' だけの2次式が得られる.

さて, x', y', z' が (5), (6) 式を満たすとき, (3A), (3B), (4) の3つの式は, x, y に関する式として同値な1次式になる. ここに, さらに, x, y, z に関する1次式 (1A), (1B), (2) 式があり, x, y, z の解が存在するためには, (1A), (1B), (2), (3A) の4つの式が表す x, y, z 空間での平面が同一の共有点をもつ必要がある. この条件は, (1A), (1B), (2), (3A) の係数を並べた4次行列 M の行列式が0となることと同値である (図21).

この行列の第4列の成分はすべて y' を因数にもつので, 行列式 $\det M$ は y' で割り切れる. つまり,

$$0 = \frac{\det M}{y'} \cdots (7)$$

は, x', y', z' に関する3次式となる. この式を (7) 式とする.

さて, x', y', z' のみに関する3つの式 (5), (6), (7) が得られた. このうち, (5) 式は1次式だから, 容易に z' について解くことができ, その式を (6), (7) 式に代入すれば, x', y' についての2次式, 3次式が得られるので, これらを (x', y') 平面にプロットすることで, x', y' の解の有無, また, その解の数値計算が可能となる.

具体的に, 立方八面体の中心を原点として, 頂点の座標を次のようにとることができ,

$$A(1,0,1), B(1,1,0), E(0,1,1), F(1,-1,0)$$

そのとき, 面の中心の C, D は,

$$C\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), D(1,0,0)$$

となり,

$$d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = -3/2 \\ e_1 = -1, e_2 = -1, e_3 = 3 \\ f_1 = 2, f_2 = 1, f_3 = -3$$

$$M = \begin{pmatrix} f_3y' & 0 & -x' - (f_1 - 1)y' & -f_3y' \\ 0 & f_3y' & x' - f_2y' & 0 \\ -d_3x' & d_3y' & d_1x' - d_2y' & (d_2f_3 - d_3f_2)y' \\ -d_3z' & e_1d_3z' - e_3(y' + d_1z') & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

図 21 行列 M

となる. これを (5), (6), (7) に代入して数式処理ソフト maxima を用いて, (x', y') 平面に 2 つの曲線をプロットしたのが図 22 である.

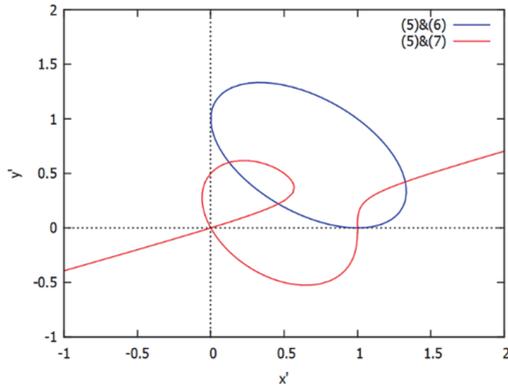


図 22 立方八面体での (x', y') の関係式

これにより, 第 1 象限内に 3 つの交点があることがわかる. 実際にその交点の座標の近似値を求めると,

$$(x', y') = (0.4606 \dots, 0.2206 \dots) \dots (8)$$

$$(x', y') = (0.1251 \dots, 0.6007 \dots) \dots (9)$$

$$(x', y') = (1.3260 \dots, 0.4220 \dots) \dots (10)$$

である. この値から, (5) 式により, z' の値が定まり, これらを (1A), (1B), (2) 式に代入すれば, x, y, z の値が定まる. ただし, (9) の解からは, z の値が負となって, 五边形 $D'YXAZ$ に自己交差が生じてしまい, また, (10) の解からは, z' の値が負となって, 五边形 $C'XYBW$ が自己交差する形となる.

一方で (8) の解からは, $z' = 0.6376 \dots$ で,

$$x = 0.373 \dots, y = 0.220 \dots, z = 0.608 \dots$$

と値が定まり, これらから, 条件 2. と 4. を満たすように, k, k' の値を決めれば,

$$k = 1.246 \dots, k' = 1.517 \dots$$

が得られる. これらの値をもとに, 多面体 $P_{3,4}$ を構成し

たのが図 23 である. この多面体を構成する 2 種類の面の形を図 24 に示す.

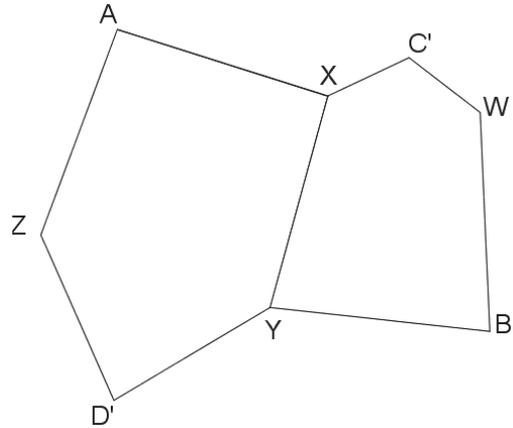


図 24 $P_{3,4}$ の面の形状

9. 十二面二十面体に付随する将棋の駒多面体

前節の $P_{3,4}$ の計算は, 定数の値を変更すれば十二面二十面体に付随する将棋の駒多面体 $P_{3,5}$ の計算にそのまま適用できる. 実際, 図 25 のように点 $A \sim F$ および, X, Y, Z, W を設定するとき, 前節の議論はまったく同様に適用可能である.

実際, $P_{3,5}$ の頂点の座標をうまくとると, 点, A, B, E, F の座標を次のようにとることができる. 以下 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし,

$$A(\tau, 1, \tau + 1), B(\tau + 1, \tau, 1),$$

$$E(1, \tau + 1, \tau), F(\tau, -1, \tau + 1),$$

また, このとき面の中心 C と D は

$$C\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{3+\sqrt{5}}{3}\right), D\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)$$

と計算できる. これらから,

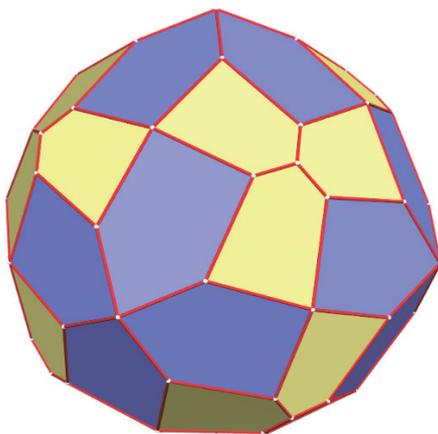


図 23 将棋の駒多面体 $P_{3,4}$

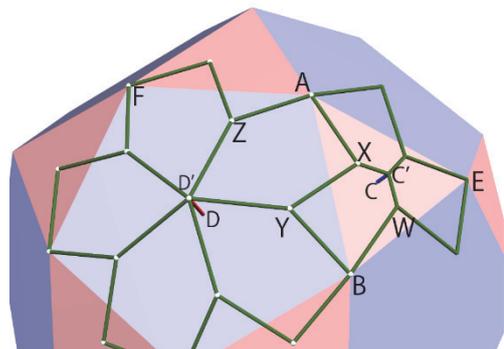


図 25 頂点のラベル

$$d_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}, d_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}, d_3 = -\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}$$

$$e_1 = -1, e_2 = -1, e_3 = 3$$

$$f_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, f_2 = 1, f_3 = -3$$

が定まり、これらの値を (5), (6), (7) 式に代入して、数式処理ソフト *maxima* を用い、 (x', y') 平面上に (5) と (6), および (5) と (7) から得られる関係をプロットしたのが図 26 である。

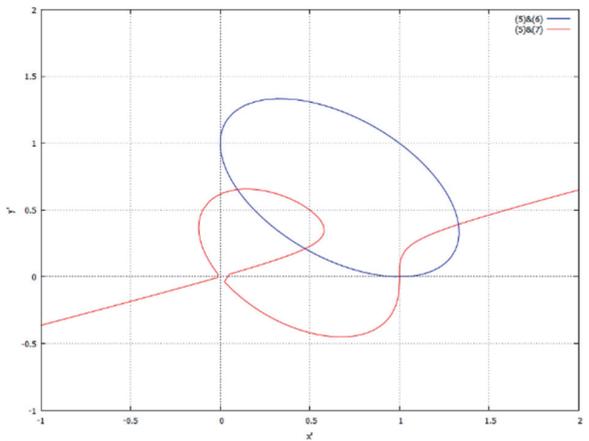


図 26 $P_{3,5}$ での (x', y') の関係式

図をみるとわかるように、2つの曲線は第1象限において3か所で交わっており、それらの交点の座標を数値計算により求めると、以下のようになる。

$$(x', y') = (0.4739 \dots, 0.2103 \dots) \dots (11)$$

$$(x', y') = (0.0963 \dots, 0.6528 \dots) \dots (12)$$

$$(x', y') = (1.3300 \dots, 0.3919 \dots) \dots (13)$$

これらのうち、(12) の解のときには、 z の値が負となり、五边形 $D'YXAZ$ が自己交差する形となる。また、(13) の解のときには、 z' の値が負となり、五边形 $C'XYBW$ が自己交差する形となる。

そして、(10) のときには、 $z' = 0.4364 \dots$

$$x = 0.350 \dots, y = 0.210 \dots, z = 0.503 \dots$$

$$k = 1.076 \dots, k' = 1.233 \dots$$

と定まり、図 26 に示す多面体を得られるのである。この多面体の面となる2種類の線対称五角形を図 27 にしめす。

10. 今後の展望

本稿では、Sherman (2014) の発見した合同な24個の線対称五角形を面にもつ多面体について、厳密な幾何構造の計量計算を示すとともに、その構成を正多面体や立方八面体・十二面二十面体を元にしたものとして、統合的に拡張し、一般化された将棋の駒多面体の幾何構造の計量計算の手法を示してきた。

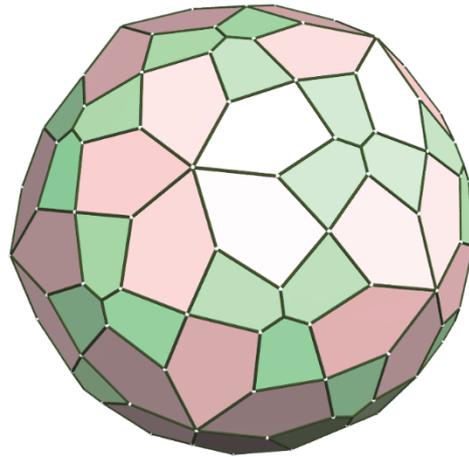


図 26 将棋の駒多面体 $P_{3,5}$

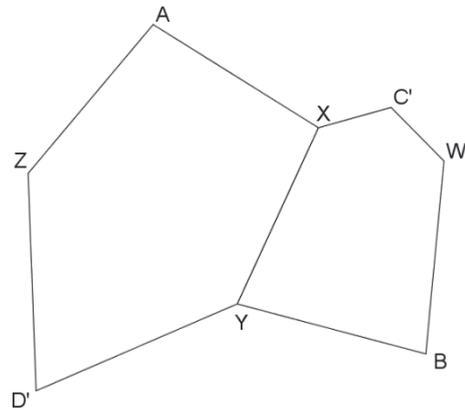


図 27 $P_{3,5}$ の面の形状

実は、これらの多面体は、組み合わせ多面体の構造としては新しいものではない。J. H. Conway は、正多面体などの元となる多面体から、ある規則によって元の多面体と同様の対称性をもった別の多面体を構成する手法を体系的にまとめ、Conway 記法として提案しており、将棋の駒多面体の構成は、組み合わせ多面体としては Conway 記法の g (gyro) という構成操作に相当する (Conway et al., 2008, p.288)。しかしながら、Conway 記法は、組み合わせ多面体としての構造のみを指定するもので、幾何構造を指定しない。指定された組み合わせ多面体に対して標準形態 (canonical form) を指定することはできるが (Ziegler, 1995, pp.117-118)、標準形態では将棋の駒多面体のような性質 (各面が線対称五角形となる) は発生しないのである。その意味で、ここで示した将棋の駒多面体、特に $P_{3,4}$ と $P_{3,5}$ は幾何的に新しい多面体の発見といえよう。 $P_{3,4}$ と $P_{3,5}$ の面の形状については、辺と対角線の比率 (近似値) を表 1 に付しておく (この表での頂点のラベルは図 19, 24, 25, 27 に基づく)。

ところで、正多面体、および立方八面体・十二面二十

面体という2種の半正多面体に対して、将棋の駒多面体を構成できることが確認されたが、他の半正多面体に対して、同様の構成をおこなうことができるのであろうか。

今回、正多面体に対する構成では、3つの変数に関する3つの2次式を解くことに帰着され、立方八面体・十二面二十面体では、6つの変数に関する6つの2次式を解く問題に帰着された。現在、切頂多面体と呼ばれる5種の半正多面体に対して、同様の構成を試みているところであるが、9つの変数に関する9つの2次式を解く問題となりそうである。これらについてはまだ結論が出ていない。まだまだ新たな将棋の駒多面体が見つかるのかもしれない。

Ziegler, G. M. (1995) . "Lectures on Polytopes", Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag.

表1 $P_{3,4}$, $P_{3,5}$ の面における辺・対角線の比率

辺	$P_{3,4}$	$P_{3,5}$
$XY(=AZ, AX, BW, BY)$	1	1
$XB(=WY)$	1.300	1.290
$C'X(=C'W)$	0.406	0.386
$YA(=ZX)$	1.444	1.501
$D'Y(=D'Z)$	0.825	1.118

註

- 1) Scott Sherman は、この多面体を Bilateral pentagonal icositetrahedron と名付けている (Sherman, 2014)。
- 2) 大久保・小川・谷口は今期の演中ゼミ所属の学部生である。

引用文献

- 金児 正史, 松崎 和孝, 松岡 隆 (2020). 「オイラーの多面体定理を帰納的に捉える指導の実証的研究－位相幾何の視点で頂点, 辺, 面を捉える指導－」. 『数学教育学会誌』. 61 (1). pp.17-31.
- 松崎 和孝 (2016). 「課題学習についての一考察－オイラーの多面体定理を題材として－」全国数学教育学会誌『数学教育学研究』. 22 (1), pp.105-113. 矢野 晋平 (1969), 「等角半正多面体について」. 日本数学教育学会 (旧日本数学教育会)『日本数学教育会雑誌』51 (9) pp.167-173.
- Conway, J. H., Burgiel, H., Goodman-Strauss, C. (2008) . "Chapter 21: Naming Archimedean and Catalan polyhedra and tilings". The Symmetries of Things. AK Peters.
- Sherman, S., (2014) "Day 257 - Saturday Guest: Scott Sherman's Isohedra". Laura Taalman のブログ上のゲスト記事.
http://makerhome.blogspot.com/2014_05_10_archive.html
 最終閲覧 2022/09/30

