兵庫教育大学　研究紀要　第60巻　2022年2月　pp.149-156

カタラン数に関わるある種の二重数列について

On a Double Sequence Relating to Catalan Numbers

濵　中　裕　明*　　岡　田　莉　奈**　　加　藤　智　大**
HAMANAKA Hiroaki　　OKADA Rina　　KATO Tomohiro

カタラン数C_nは，多種の数学的対象の数え上げ問題に対応しており，豊富な数学的題材の源泉となりうる数列である．例えばC_nは，葉を$n+1$枚もつ二分木の総数でもあり，同時に，縦横がいずれもnマスの正方形格子において対角線の両端を結び対角線の指定された片側のみを進む最短経路の総数とも一致している．今回，二分木の数え上げ問題を，カタラン数を導く際によく用いられる漸化式ではなく，もっと素朴で単純な漸化式によって解決しようと考察した結果，ある種の二重数列が見つかった．２つのインデックスをもつこの二重数列は，二分木の数え上げ問題において部分的な数え上げ問題と対応していて，一方のインデックスを固定し，他方のインデックスについて和をとると，カタラン数に一致する．さらに，二分木と経路という２つの数え上げの対応によって解釈を交換することにより，経路に関する非自明で興味深い数え上げ問題の答えを与えている．これらの結果は数学的に興味深いだけでなく，数学的活動の素材としての可能性も有している。

キーワード：カタラン数，母関数，数列，組合せ論，二分木
Key words：Catalan numbers, generating function, number sequence, combinatorial theory, binary tree

１．はじめに

カタラン数$C_n (n=0,1,2,\ldots)$は，多種の数学的対象の数え上げ問題に対応しており，初等組合せ論に関わる豊富な数学的題材の源泉となりうる数列である[1)]．その定義を，初期値と漸化式で与えるならば，$C_0=1$および，

$$C_{n+1}=\sum_{i=0}^{n} C_i\,C_{n-i}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+\cdots+C_nC_0$$

で定まる数列といえる．カタラン数の一般項を求める際には，上記の漸化式により，カタラン数の母関数を用いる方法が一般的である．カタラン数の母関数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i = C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots$$

を考えると，この級数はxの絶対値が小さい範囲で収束することはよく知られており（実際，後述する経路の数え上げ問題としての意味付けから，$C_n<\binom{2n}{n}$が容易に分かる），

$$f(x)^2=\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \times \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} C_i\,C_j\right)x^n$$

となるから，漸化式により

$$f(x)^2=\sum_{n=0} C_{n+1}\,x^n=(f(x)-1)/x$$

を得る．つまり，$xf(x)^2-f(x)+1=0$となるので，

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}\qquad (x\neq 0)$$

が得られる．そして，$f(x)$を級数展開したときの０次の項は$C_0=1$であることから，上の式の複号はマイナスと定まり，

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

が得られる．これをマクローリン展開することで，カタラン数の一般項

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が得られることもよく知られている（cf. 成嶋，1996）．

以上の議論は，きわめて一般的によく知られている計算であるが，このカタラン数の漸化式では，第$n+1$項を求める際に，第０項から第n項の全てを用いており，高校で一般的に学習するような隣接する有限項の間に成り立つ漸化式とはかなり形式の異なる漸化式となっている．

一方，今期の学部のゼミにおいてカタラン数の一般項を求める議論を，二分木や経路問題などの具体的な対象の数え上げ問題として検討し，そのなかでボトムアップ的に素朴な数え上げの手法を採用して議論を進めた結果，カタラン数に関わる二重数列が見つかり，それらの間の有限項間の漸化式を導き，解くことができた．

＊兵庫教育大学大学院教育実践高度化専攻理数系教科マネジメントコース 教授
＊＊兵庫教育大学学校教育学部教科・領域教育専修自然系コース
令和３年10月６日受理

さらに，２分木と経路問題という２つの数え上げ対象の間の対応を考えることにより，見つかった二重数列に対して，非自明な数え上げ問題としての意味を見出だすことができた．

こうした結果は数学的にも興味深いものであると同時に，内容は極めて初等的であり教材研究の素材や源泉としても意味があるように思われる．そこで，本稿では，これまでの議論の成果をまとめて報告しておきたい．以下，基本的な母関数の手法を用いるが，母関数の基本的な事項については成嶋（1996）やスタンレイ（1990）を参照されたい．

２．二分木

カタラン数の数え上げとしての意味付けに，二分木の数え上げ問題がある．まずは，公理的に二分木の定義を与える．

定義 2.1：有限有向グラフ T が次の条件を満たすとき，T は二分木であるという．

1．T のどの辺にも「右」「左」のいずれかのラベルが付いており，頂点xからyへ向かって「右」のラベルの辺が出ているとき，「yはxの**右の子**」，また「左」のラベルがついているとき，「yはxの**左の子**」という．いずれの場合にも「xはyの親」という

2．T のどの頂点xについても，「xの右の子とxの左の子は１つずつある」，もしくは，「xには右の子も左の子もいない」のいずれかである．T の頂点を**ノード**とよび，子のないノードを**葉**という．

3．**ルート**とよばれるノードが唯一つ存在し，ルートは親を持たず，ルート以外のノードはすべて唯一つの親を持つ．

4．ノードの列$x_1, x_2, \dots, x_m$について，x_{i+1}がx_iの子$(i = 1,2, \dots, m-1)$となるとき，x_mはx_1の子孫である，といわれる．そして，ルート以外の全てのノードはルートの子孫である．

上の定義の二分木は，子を持つときは必ず右と左の子をもち，「全二分木」と呼ばれることもある．二分木は通常，図１のようにルートを表す頂点から始めて，子を持つときは右下・左下に向かって辺を伸ばし，枝分かれしていくような樹形図の形で表される．

二分木はグラフとしての組み合わせ構造を示しているので，形は重要ではない．つまり，次のように同型の概念により，同型な二分木は「同じ二分木」として数え上げ問題を考えるのが普通である．

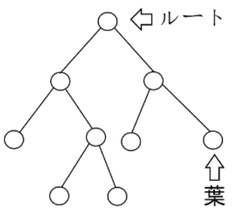

図１　葉が５つの二分木

定義 2.2：２つの二分木 T と T' が有向グラフとして同型であり，その同型写像によって「T で右の子（resp. 左の子）の関係にある２頂点は，T' での右の子（resp. 左の子）の関係にある２頂点に移る」とき，二分木として**同型**であるという．

これらの定義の下で，いま，葉の数が$n+1$枚であるような二分木の数え上げを考える．つまり，葉の数が$n+1$枚である二分木はB_n種類あるとして，数列B_nを求めよう．まず，B_nがカタラン数C_nに一致することを簡単に示しておく．

まず，葉が１つの二分木はルートのみから成るので，そのような二分木は１つしかなく，$B_0 = 1$である．次にB_n $(n \geq 1)$を考えるために葉が$n+1$個の二分木 T を考える．そのような二分木はルート以外のノードを持つため，ルートには右の子と左の子があるが，「右の子およびその子孫」と「左の子およびその子孫」もまた二分木となることが二分木の定義から容易に確かめられる．このときの「ルートの右の子（resp. 左の子）およびその子孫からなる二分木」のことを，T の**右部分木**（resp. **左部分木**）とよぶことにする（図２）．

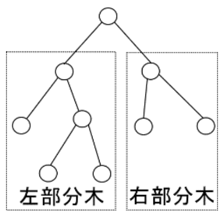

図２　左・右部分木

逆に，合わせて葉の数が$n+1$個となるような２つの二分木の組があれば，それらの二分木をそれぞれルートの左の子の下，右の子の下に配置することで，葉が$n+1$個の二分木が一つ求まる．ゆえに，B_nは

$$\sum_{a+b=n+1} (\text{葉}a\text{個の二分木の数}) \times (\text{葉}b\text{個の二分木の数})$$

つまり，

$$B_n = \sum_{a+b=n+1} B_{a-1} B_{b-1} = \sum_{i+j=n-1} B_i B_j$$

が成り立ち，これはB_nがカタラン数C_nに一致することを示している．

３．双葉の個数を指定した二分木の数え上げ

次に，葉の数が$n+1$個の二分木の個数と，葉の数が$n+2$個の二分木の個数の間の関係を考えていきたい．

そのために次に定義する双葉という構造に注目する.

定義 3.1：二分木 T において, 2つの葉xとyが同一のノードaの右の子と左の子になっているとき, この2つの葉の組(x, y)を T の**双葉**という（図3）.

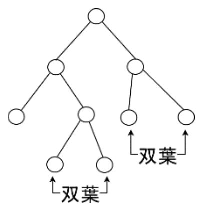

図3　双葉

まず, 次のことが成り立つ.

補題 3.2：ノードが2つ以上の二分木には双葉が少なくとも1つ存在する.

証明：数学的帰納法を用いる. ノードがちょうど2つの二分木は存在せず, ノードがちょうど3つの二分木には明らかに1つの双葉がある.

いま$n \geq 4$とし,「ノード数が2以上n未満の二分木には双葉がある」が正しいとして, ノード数がnの二分木 T を考える. T のルート以外のノードは3つ以上あるから, T の右部分木, 左部分木のいずれかはノードが2つ以上あり, 帰納法の仮定により双葉を持つ. よって T にも双葉が存在する. □

いま, 葉が$n+1$個の二分木（の同型類）の集合をX_nとしよう. 上の補題により, 任意の$T \in X_{n+1}$(ただし, $n \geq 0$)に対して, T には双葉が存在するので, 双葉の1つを葉に置き換えることで, X_nの二分木が得られる. このような対応で, X_{n+1}とX_nの元の個数の間に関係式を作れないかと考えた. ただし, この対応は双葉の個数に影響を受けるので, 次のように記号を設定する.

記号：葉が$n+1$個で双葉がm個の二分木の集合を$X_n^{(m)}$と書き, $X_n^{(m)}$の元の個数を$C_n^{(m)}$と表す. このとき, 明らかに

$$C_n = \sum_{m \geq 0} C_n^{(m)}$$

であり, 特に$C_n \geq C_n^{(m)}$となることを注意しておく.

さて, $X_{n+1}^{(m+1)}$に含まれる二分木 T から, その中の双葉のひとつを削除すると, 葉が一つでき, その二分木の葉は確かに一つ減少するが, 双葉の個数はどうだろうか. 実は次のように双葉が1つ減少する場合と双葉の個数が変わらない場合が存在する.

実際, T の双葉(x, y)の親となるノードaを考え, aの親ノードbを考える. このノードbのa以外の子cが葉でなければ, 双葉(x, y)を削除すると, 双葉が減る. しかし, cが葉であるときは, 双葉(x, y)を削除したとき(a, c)が新たな双葉となり, 双葉の個数は変化しない（図4）.

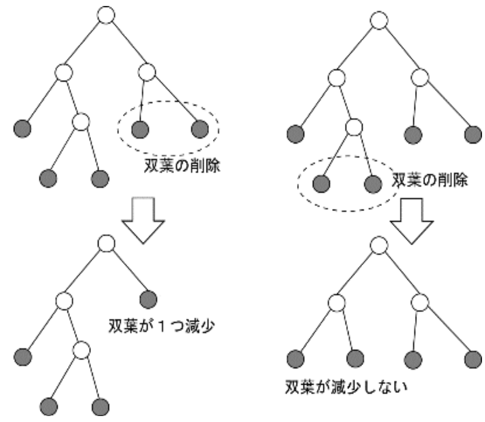

図4　双葉の削除

そこで, いまから$X_{n+1}^{(m+1)}$と$X_n^{(m)} \cup X_n^{(m+1)}$の間に多対多の対応を構成したい. そのために, 次のような二部グラフ G を考える（図5）. まず$X_{n+1}^{(m+1)} \coprod (X_n^{(m)} \cup X_n^{(m+1)})$を頂点集合として, $X_{n+1}^{(m+1)}$の元と$X_n^{(m)} \cup X_n^{(m+1)}$の元を結ぶ辺を次のように定める：

二分木$T \in X_{n+1}^{(m+1)}$と, T の双葉のうちの1つを葉に置き換えた二分木$T' \in X_n^{(m)} \cup X_n^{(m+1)}$を辺で結ぶ.

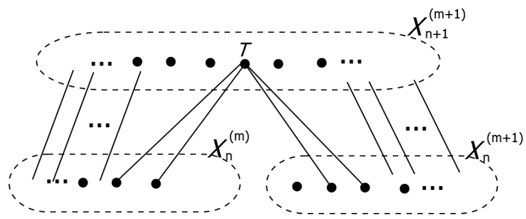

図5　グラフ G の構成

このように構成したグラフ G は, 各$T \in X_{n+1}^{(m+1)}$から$m+1$本の辺が出ているので, 明らかに辺の個数は

$$(m+1)C_{n+1}^{(m+1)}$$

である. 一方で, このグラフ G の辺の個数を, $X_n^{(m)} \cup X_n^{(m+1)}$の元ごとに数えていく.

定理 3.3：上記のグラフ G について次が成り立つ.

1. $T' \in X_n^{(m)}$に対して, T' に接続する辺は$n+1-2m$本である.
2. $T'' \in X_n^{(m+1)}$に対して, T'' に接続する辺は$2(m+1)$本である.

証明：1. G の辺の構成法から, $T' \in X_n^{(m)}$に対して, T' の葉を逆に双葉に置き換えれば, もとの T が得られるが, そのとき$T \in X_{n+1}^{(m+1)}$となるためには, 双葉に置き換える葉は, 双葉の対に含まれない葉であることが必要十分である. そのような葉は$n+1-2m$本ある.

2. 同じように, $T'' \in X_n^{(m+1)}$に対して, T'' の葉を双葉に置き換えることで, 葉が一つ多い二分木 T が得られ

るが，そのとき$T \in X_{n+1}^{(m+1)}$となるためには，双葉に置き換える葉は，双葉の対に含まれる葉であることが必要十分である．そのような葉は$2(m+1)$本ある．□

この定理により，G の辺を数え上げることで次の定理を得る．

定理 3.4：$n \geq 0$, $m \geq 0$ となる自然数n, mに対し，次が成り立つ：

$$C_{n+1}^{(m+1)} = 2C_n^{(m+1)} + \frac{n+1-2m}{m+1} C_n^{(m)}$$

また，双葉の数が 0 となるのはルートのみの二分木だけであり，また葉の数が 1 となるのもおなじくルートのみの場合だけなので，次が成り立つ．

命題 3.5：$n \geq 1$，$m \geq 1$となる自然数n, mに対し，

$$C_0^{(0)} = 1, \qquad C_0^{(m)} = 0, \qquad C_n^{(0)} = 0$$

命題 3.5 の値と定理 3.4 の漸化式から，$C_n^{(m)}$の値を次々と求めることが可能である．実際，これを計算すると表 1 のようになる．この表を見ると，いくつかの性質が直ちに推測される．実際，次が成り立つ．

表 1：$C_n^{(m)}$の値

		双葉の数m				
		0	1	2	3	4
n	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0
	2	0	2	0	0	0
	3	0	4	1	0	0
	4	0	8	6	0	0
	5	0	16	24	2	0
	6	0	32	80	20	0
	7	0	64	240	120	5
	8	0	128	672	560	70
	9	0	256	1792	2240	560

命題 3.6：$C_n^{(m)}$は次を満たす．

1．$m \neq 0$とする．$n < 2m-1$ならば$C_n^{(m)} = 0$.

2．$m = 1$, $n \geq 1$ のときは，$C_n^{(1)} = 2^{n-1}$

証明：$m \neq 0$のとき，m個の双葉を形成するには少なくとも $2m$個の葉が必要であるから，$n+1 < 2m$のとき，$C_n^{(m)} = 0$である．また，２．は定理 3.4 の漸化式において$m = 0$とし，命題 3.5 の初期値を代入すれば，直ちに得られる．□

つぎに，$C_n^{(m)}$の一般項を，定理 3.4 の漸化式から，母関数を用いて計算しよう．まず，次のようにmを固定して，$C_n^{(m)}$をnに関する数列と考えた母関数$\phi_m(x)$を設定する：

$$\phi_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m)} x^i = C_0^{(m)} + C_1^{(m)} x + C_2^{(m)} x^2 + \cdots$$

$C_n^{(m)} \leq C_n$であったから，十分小さなxに対して，このべき級数は収束し，$\phi_m(x)$は定義される．

このとき，命題 3.5 および命題 3.6 の 2. より

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{x}{1-2x}$$

であることが分かる．実は次が成り立つ．

定理 3.7：$m \geq 1$のとき，mごとに決まる実数k_mが存在して，次が成り立つ．

$$\phi_m(x) = k_m \left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-1} \qquad (1)$$

証明：mに関する数学的帰納法を用いる．上で述べたように$m = 1$では正しい．このとき$k_1 = 1$である．

次に，$m \geq 1$とし，式 (1) がmに対して正しいと仮定して，mを$m+1$に置き換えても正しいことを示す．そのために，まず次が成り立つことに注意する：

$$x \frac{d}{dx} \phi_m(x) = x \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m)} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m)} i x^i$$

このことを用いると，定理 3.4 より

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m+1)} x^i \\
&= C_0^{(m+1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(2C_{i-1}^{(m+1)} + \frac{i-2m}{m+1} C_{i-1}^{(m)}\right) x^i \\
&= 2x \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m+1)} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1-2m}{m+1} C_i^{(m)} x^{i+1} \\
&= 2x\phi_{m+1}(x) + \frac{1-2m}{m+1} x \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(m)} x^i \\
&\quad + \frac{1}{m+1} x \sum_{i=0}^{\infty} i C_i^{(m)} x^i \\
&= 2x\phi_{m+1}(x) + \frac{1-2m}{m+1} x \phi_m(x) \\
&\quad + \frac{1}{m+1} x^2 \frac{d}{dx} \phi_m(x)
\end{aligned}$$

となり，この右辺と左辺を整理すると，

$$\begin{aligned}
&(m+1)(1-2x)\phi_{m+1}(x) \\
&= (1-2m)x\phi_m(x) + x^2 \frac{d}{dx} \phi_m(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

を得る．このとき，帰納法の仮定を用いて上式 (2) の右

辺を計算すると，

$$(1-2m)x\phi_m(x)+x^2\frac{d}{dx}\phi_m(x)$$
$$=(1-2m)xk_m\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-1}$$
$$+x^2\frac{d}{dx}k_m\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-1}$$
$$=(1-2m)k_mx\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-1}$$
$$+k_mx^2(2m-1)\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-2}\frac{(1-2x)-(-2)x}{(1-2x)^2}$$
$$=(2m-1)k_m\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-2}\left\{\frac{-x^2}{1-2x}+\frac{x^2}{(1-2x)^2}\right\}$$
$$=(2m-1)k_m\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m-2}\frac{x^2-(1-2x)x^2}{(1-2x)^2}$$
$$=2(2m-1)k_m\frac{x^{2m+1}}{(1-2x)^{2m}}$$

この結果を (2) 式に代入すれば，

$$\phi_{m+1}(x)=\frac{2(2m-1)k_m}{m+1}\left(\frac{x}{1-2x}\right)^{2m+1}$$

が得られる．

□

上の証明は，

$$k_{m+1}=\frac{2(2m-1)}{m+1}k_m \qquad (3)$$

ということも示しているので，次が得られる．

定理 3.8：$k_m=\frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3\cdot 1\times 2^{m-1}}{m!}$

証明：$k_1=1$，および (3) 式より明らか．□

系 3.9：$m\geq 1$に対して，$k_m=C_{m-1}$が成り立つ．

証明：上の式から変形して，

$$k_m=\frac{(2m-3)(2m-5)\cdots\ 3\cdot 1\times 2^{m-1}}{m!}$$

$$=\frac{(2m-2)!\times 2^{m-1}}{m!\,(m-1)!\,2^{m-1}}=\frac{1}{m}\binom{2(m-1)}{m-1}=C_{m-1}$$

□

定理 3.7，3.8 により母関数$\phi_m(x)$が求まったので，$C_n^{(m)}$の一般項を求めることができる．その準備として次を計算しておく．

補題 3.10：自然数hと 0 でない実数aに対し，$q_h(x)=\frac{1}{(1-ax)^h}$のマクローリン展開は以下の通り：

$$q_h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+h-1)!}{i!\,(h-1)!}a^ix^i \quad (4)$$

証明：hに関する帰納法を用いる．$h=1$の時は，等比級数の和の公式から正しい．

この式がある自然数hに対して正しいとして，hを$h+1$に置き換えた式を示す．すなわち (4) が正しいとして，この両辺を微分すれば，

$$\frac{ha}{(1-ax)^{h+1}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+h-1)!}{(h-1)!\,i!}a^iix^{i-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+h)!\,a^{i+1}(i+1)}{(h-1)!\,(i+1)!}x^i$$

よって，次が成り立ち，$h+1$でも正しい．

$$\frac{1}{(1-ax)^{h+1}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+h)!}{h!\,i!}a^ix^i$$

□

定理 3.11：$n\geq 2m-1$のとき，以下が成り立つ．

$$C_n^{(m)}=\frac{2^{n+1-2m}(n-1)!}{m!\,(m-1)!\,(n+1-2m)!}$$

証明：定理 3.7 より，

$$\phi_m(x)=k_m\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{2m-1}\times x^{2m-1}$$

であるから，$C_n^{(m)}$つまり，$\phi_m(x)$のマクローリン展開のn次の係数は，$n<2m-1$のとき 0 であり，一方，$n\geq 2m-1$のときは，補題 3.10 の結果に$a=2$，$h=2m-1$を代入して，次数を$2m-1$だけずらし，k_mをかければよいので，

$$C_n^{(m)}=k_m\frac{\big((n-(2m-1))+2m-2\big)!}{\big(n-(2m-1)\big)!\,(2m-2)!}2^{n-(2m-1)}$$

$$=\frac{(2m-2)!\,(n-1)!\,2^{n+1-2m}}{m!\,(m-1)!\,(n+1-2m)!\,(2m-2)!}$$

$$=\frac{2^{n+1-2m}(n-1)!}{m!\,(m-1)!\,(n+1-2m)!}$$

□

4．経路問題とカタラン数

これまで述べてきた様に，カタラン数は二分木の数え上げとして解釈できるが，一方で，次に示す正方格子の数え上げ問題としても解釈できることもよく知られている．

まず，座標平面上の格子点（xy座標がともに整数の点）と，ちょうど距離 1 だけ離れた格子点を結ぶ線分（辺という）の集合を以下，正方格子という．このとき，この正方格子の辺上を通って，座標平面の原点 O から点 R(n,n)へ最短で向かう経路のうち，対角線ORより上を通らない経路の集合をY_nとし，Y_nの元の個数をD_nとお

く．このとき，Y_nに含まれる経路のことをDyck経路という（図６）．ただし，Y_0は長さ０の経路のみを１つ含むとして，$D_0 = 1$と定めておく．

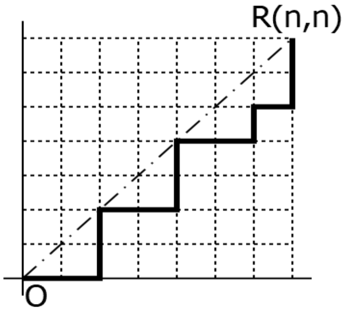

図６　Dyck経路

D_nもまたカタラン数に一致することを簡単に示しておこう．いま$n \geq 1$とする．Y_nに含まれる経路Pに対して，P上をＯからＲへ向かう際，Ｏを出発して最初に対角線OR上にきた場所を示す点をＱとする．最終的にＲに向かうので，Q=Ｒとなる場合も含めて考えれば，そのような点Ｑは必ず存在する．そこで，Ｑが点（1,1）からR(n, n)となる場合までのn通りに場合分けして，Y_nを数え上げることを考える（図７）．

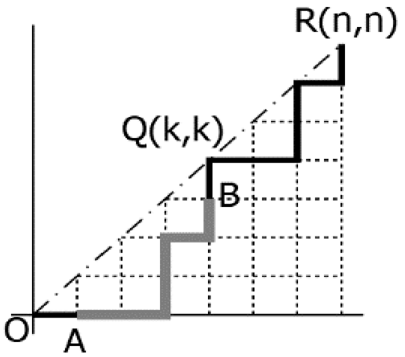

図７　漸化式の証明

点Ｑが(k, k)であるとき，経路ＰはＯからまずはA(1,0)に進み，(k, k)の一つ手前でB$(k, k-1)$を通ることになる．また，Ｑは最初に対角線OR上にくる点であるので，ＡからＢへ進むとき，直線ABより上に行くことがない．これにより，ＡからＢへの経路の場合の数はY_{k-1}の個数，つまりD_{k-1}に一致する．そして，ＱからＲへ向かう経路の場合の数は明らかにY_{n-k}の個数，つまりD_{n-k}に一致する．これにより，次が成り立ち，

$$D_n = D_0 D_{n-1} + D_1 D_{n-2} + \cdots + D_{n-1} D_0$$

これはD_nがカタラン数に一致することを示している．

５．経路と二分木の対応

ところで，これまで述べてきた二分木の数え上げと経路の数え上げの答えがいずれもカタラン数として一致するならば，計算結果としての値が一緒なだけでなく，二分木の集合X_nと経路の集合Y_nの間に直接の全単射を作ることができないだろうか．実は，この対応はポーランド記法という概念をもちいて実現される[2)]．

定義5.1：いま，二分木$T \in X_n$に対して，次のように定まる文字列を$P(T)$と表す．

１．$P(T)$は「＊」と「〇」から文字列である．以下，文字列は[ ]で囲んで示す．また，SとTが文字列であるとき，SのうしろにTを続ける文字列を$S\#T$と表す．

２．Tがルートのみの二分木であるとき，

$$P(T) = [\circ]$$

とおく．

３．Tがルートのみではなく，Tの左部分木がT_1，Tの右部分木がT_2であるとき，

$$P(T) = [*]\#P(T_1)\#P(T_2)$$

とおく．

このとき，次が成り立つ．

命題5.2：二分木$T \in X_n$に対して，

１．$P(T)$はn個の＊と$n+1$個の〇から成る．

２．$P(T)$の最後の文字は〇である．また，Tがルートのみの二分木でないなら，$P(T)$の最初の文字は＊である．

３．$k = 1, 2, \ldots, 2n$に対して，$P(T)$の最初のk文字をみると，その中にある〇の個数は＊の個数を超えない．

証明：１．２．はnに関する帰納法によって容易に示される．

3．についてもnに関する帰納法を用いる．$n = 0$のときは明らかに正しい．二分木Tの葉の個数がn未満のときは正しいとして，$T \in X_n$ $(n \geq 2)$のときを考える．ここで，

「$P(T)$の最初のk文字をみると，その中にある〇の個数は＊の個数を超えない」

という主張を（＃）とする．

いまTの左部分木，右部分木をそれぞれ$T_1 \in X_a$，$T_2 \in X_b$とすると（このとき$a + b + 1 = n$），帰納法の仮定から$P(T_1)$についても主張は正しく，$k = 1, 2, \ldots, 2a + 1$において，（＃）は正しい．さらに，$P(T_1)$について命題5.2の１が成立するので，初めの$2(a+1)$文字については，〇と＊の個数が一致する．その後，$P(T_2)$についても主張が成立するので，$k = (2a+2) + 1, \ldots, (2a+2) + 2b$についても（＃）が成立する．よって，すべての二分木について主張は正しい．□

ここで，二分木$T \in X_n$に対して，$P(T)$の最後の一文字を削除した文字列を$P(T)$と表すことにする．このと

き，命題 5.2 により，$P(T)$は次の性質を有する：

$P(T)$はn個の○とn個の$*$から成り，$P(T)$の先頭から途中までの部分列においては, 常に（○の個数）≦（$*$の個数）となる.

この性質により，$T \in X_n$ に対して，座標平面の原点から始まる正方格子上の経路を,「$P(T)$を先頭から読んでいって，○があれば上に，$*$があれば右に 1 進む」と定めると，これはY_nに含まれる経路となることが分かる．このように定まる写像を

$$\rho: X_n \to Y_n$$

と表すこととしよう．このとき次が成り立つ.

定理 5.3：$\rho: X_n \to Y_n$は全単射である.

証明：まず全射や単射であることを，証明するために何を示せばよいかを明らかにしよう．そのために任意の経路$P \in Y_n$を一つ取り，P に沿って原点から(n,n)まで進むとき，右に進む辺に$*$を，上に進む辺に○を対応させて，文字列$S_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2n}]$をつくる．ただしここで各$i = 1,2,\dots,2n$に対し，$a_i$は○か$*$を表す．さらに，$S_0$の最後に○を加えた文字列を S とする．なお，$P \in Y_0$が長さ 0 の経路だったとき, S=[○] となることに注意する.

このとき，$P \in Y_n$は$y \le x$の領域で原点から(n,n)へ進む経路であるから，原点から進む途中で，上に進む辺の登場回数が，右向きの辺の登場回数を上回ることはない．よって，上のように定めた$S = [a_1, \dots, a_{2n+1}]$は次の性質をもつ.

（条件 A）$S = [a_1, \dots, a_{2n+1}]$は○が$n+1$個，$*$が$n$個の文字列であり，$1 \le j \le 2n$となる各 j に対して，$a_1, a_2, \dots, a_j$のなかでは,（○の個数）≦（$*$の個数）となる.

さて，ρが全射であることを示すには，$P(T) = S$となるような二分木$T \in X_n$の存在を示せばよい．そこで，いまから，条件 A を満たす文字列 S に対し，$P(T) = S$となる二分木$T \in X_n$が存在することを，nに関する帰納法で示す.

$n = 0$のときは明らかに正しい．次に N を 1 以上の整数とし，$n < N$に対して上の主張が正しいと仮定して，$n = N$でも正しいことを示していく．まず，条件 A を満たす文字列$S = [a_1, a_2, \dots, a_{2N+1}]$をひとつとる．条件 A の中の不等式は，$j = 2N$のとき等号成立となるので，$1 \le j \le 2N$のうち，

$a_1, a_2, \dots, a_j$のなかで,（○の個数）＝（$*$の個数）

となる最小の j が存在する．そのような j は明らかに偶数なので，その最小値を$2k$とおく．このとき，$a_1, \dots, a_{2k-1}$では（○の個数）＜（$*$の個数）であるから，a_{2k}は○である．また，a_1は$*$である．よって，S の 2 番から$2k$番までの部分列$S_1 = [a_2, a_3, \dots, a_{2k}]$もまた，条件 A を満たすので，帰納法の仮定により，$P(T_1) = S_1$となる$T_1 \in X_{k-1}$が存在する.

さらに，$a_1, \dots, a_{2k}$では○と$*$の個数が等しいので，$S_2 = [a_{2k+1}, a_{2k+2}, \dots, a_{2N+1}]$ もまた条件 A を満たす．よって，$P(T_2) = S_2$となる$T_2 \in X_{N-k}$が存在する.

このようにすると$S = [*]\#P(T_1)\#P(T_2)$であるから，T_1，T_2 をそれぞれ左部分木，右部分木とする二分木を T とすれば，$P(T) = S$である．このとき，T_1，T_2 の葉の個数はそれぞれ，$k, N-k+1$であるから，T の葉の個数は$N+1$であり，$T \in X_N$であるから，主張が証明された.

次に，単射であることを示そう．そのためには，条件 A を満たす文字列$S = [a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}]$に対して，$P(T) = S$となる二分木$T \in X_n$が唯一であることを示せばよい．このことを，やはり$n$に関する数学的帰納法で示す．$n = 0$のときは明らかに正しい．$N \ge 1$とし，$n < N$のとき正しいと仮定して，$n = N$のときにも正しいことを示す．そのために，条件 A を満たす文字列$S = [a_1, \dots, a_{2N+1}]$をとる．$\rho$が全射であることはすでに示したので，$P(T) = S$となる二分木$T \in X_N$が一つは存在する．このとき，$N \ge 1$であるから，$T$ の左部分木$T_1 \in X_{k-1}$と左部分木$T_2 \in X_{N-k}$が存在し,

$$[a_1, a_2, \dots, a_{2N+1}] = [*]\#P(T_1)\#P(T_2)$$

となる．とくに，$[a_1, a_2, \dots, a_{2k}] = [*]\#P(T_1)$であり，$a_1, \dots, a_{2k}$に含まれる○と$*$の個数は等しく，$P(T_1)$が条件 A を満たすことから，$j < 2k$のとき，$a_1, \dots, a_j$に含まれる$*$の個数は○の個数はより真に多い．このことは,「$a_1, a_2, \dots, a_{2k}$に含まれる○の個数と$*$の個数が等しくなるような最小の$k$」として，$T_1$ の葉の個数が文字列 S から決まってしまうことを示している．つまり，条件 A を満たす文字列 S に対し，$P(T') = S$となる二分木の左部分木T_1'と右部分木T_2'が他にもあるとすれば,

$$P(T_1') = [a_2, \dots, a_{2k}], P(T_2') = [a_{2k+1}, \dots, a_{2N+1}]$$

となるが，帰納法の仮定によりそのようなT_1', T_2'はそれぞれ唯一であるから，結局 $T = T'$ となり単射性も従う.
□

6．$C_n^{(m)}$の経路数え上げとしての解釈

では，前節で説明した二分木と経路の数え上げの対応によって，$C_n^{(m+1)}$に対応する二分木の集合$X_n^{(m)}$は，経路の集合Y_nのどのような部分集合に対応するのだろうか．結論から言うと次が成り立つ.

定理 6.1：$P \in Y_n$について，$P \in \rho\left(X_n^{(m)}\right)$となるための必要十分条件は，次の条件である：

$(0,0)$から(n,n)に進む経路 P の最後に上向きの辺を加えて，$(0,0)$から$(n,n+1)$への経路 P' としたとき，P' の中に上向きに連続して 2 以上進む部分がm箇所あること.

証明：二分木$T \in X_n$の中で,「親ノードにつながる 2 つの葉」という双葉を形成する構造があるたびに，文字列

$P(T)$のなかに［ ∗◯◯ ］という部分列が生じる．この部分列の後ろに◯がくることもあるので，◯がいくつ連続するかは分からないが，２つ以上連続する部分が生じる．このとき，［ ∗◯◯ ］から始まる◯の連続がつながることはないので，もし T が双葉をm個もつならば，$P(T)$は２個以上連続する◯の列がm以上ある．

「$T \in X_n$に対し，T の双葉の個数と$P(T)$の◯が２個以上連続する部分の個数が一致する」ことをnに関する数学的帰納法によって示す．$n = 0, 1$のときは明らかに正しい．$k \geq 2$とし，$n < k$のときには上の主張が正しいとして，$n = k$のときを示す．このとき，$T \in X_k$に対し，T の左部分木 T_1 と右部分木 T_2 を考えると，$k \geq 2$より T_1 と T_2 の両方がルートのみということはないから，T の双葉の数は，T_1，T_2 の双葉の個数の和に等しい．そして，帰納法の仮定により T_1，T_2 の双葉の個数はそれぞれ，$P(T_1)$, $P(T_2)$の◯が２以上連続する部分の数に等しい．

このとき，T_2 がルートのみではないとすると，$P(T_2)$は∗から始まるので，$P(T) = [*]\#P(T_1)\#P(T_2)$において，$P(T_1)$, $P(T_2)$の◯が２以上連続する部分がつながってしまうことはなく，$P(T)$の◯の２以上連続する部分の個数は，$P(T_1)$, $P(T_2)$の◯が２以上連続する部分の数の和に等しく，T の双葉の個数に等しい．

一方，T_2 がルートのみとしても，$P(T_2)$は［ ◯ ］のみなので，$P(T) = [*]\#P(T_1)\#P(T_2)$において，$P(T)$の◯の２以上連続する部分の個数は，$P(T_1)$, ◯が２以上連続する部分の数に等しく，T の双葉の個数に等しい．

最後に，$\rho(T)$は，$P(T)$から最後の右端の「◯」を取り除いて，◯を上向き，∗を右向きの辺の移動に置き換えたものなので，主張が従う．□

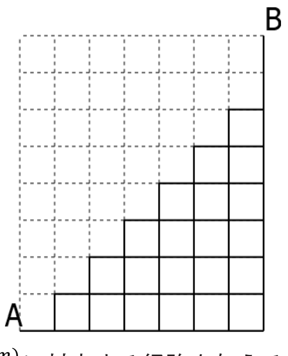

図６　$C_n^{(m)}$に対応する経路を与える格子図形

結局，図８に実線で示した格子上の図形（図は$n = 7$の場合）の上を，A から B まで最短で進む際，上向きに連続して２以上進む箇所がm箇所であるような経路の数が，

$$C_n^{(m)} = \frac{2^{n+1-2m}(n-1)!}{m!\,(m-1)!\,(n+1-2m)!}$$

ということになる．例えば，表１の$n = 7$の欄を見れば，図８において A から B まで進む際，上に連続して２以上進む箇所が１，２，３，４か所であるような最短経路の数は，それぞれ，64 通り，240 通り，120 通り，5 通りということになる．これは極めて非自明な結果といえよう．

註

１）R. P. Stanley は，答えがカタラン数に一致する数え上げ問題を 207 種，収集しまとめている（Stanley, 2013）．

２）D. Singmaster（1978）は，ポーランド記法・逆ポーランド記法を用いた，カタラン数の一般項を求める極めて初等的な方法を紹介している．

引用文献

スタンレイ，R.（1990），『数え上げ組合せ論Ｉ』（成嶋 弘 ほか 訳）．日本評論社．

成島 弘 (1996) ,『数え上げ組合せ論入門』．日本評論社．

Stanley, R. P.（2013），"Catalan Addendum." 15 May. 2013. http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf　最終閲覧 2021/09/17.

Singmaster, D.（1978）"An Elementary Evaluation of the Catalan Numbers." Amer. Math. Monthly 85, pp.366-368.