

複素解析学の古典理論と複素関数の教材化の検討

2021年

兵庫教育大学大学院
連合学校教育学研究科
教科教育実践学専攻
(兵庫教育大学)
小山 剛史

はじめに

本論文は、第 I 部と第 II 部で構成されており、第 I 部で複素解析学における古典的な結果に関する研究により得られた成果について、第 II 部で複素関数の高等学校数学科での教材化について論じる。以下に各部の概要を述べる。

第 I 部では、複素解析学の古典理論における研究成果である Bloch 定数の評価に関する研究と、Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に関する研究について論じる。

複素解析学において古くから知られている結果の 1 つに Bloch の定理というものがある。この定理は、単位円板上で正則な関数の像領域には、関数に依らずある大きさの半径をもつ開円板が必ず含まれるというものである。この半径の上限は Bloch 定数と呼ばれており、定数の最良の値を求めることは古くから考えられてきた問題の 1 つで、未だ解決していない。

Bloch 定数の知られている最良の評価は、Riemann 面の理論を用いた高度なものであるが、初等的な複素解析学を用いても Bloch 定数の下からの評価を与えることが可能であることが知られている。そこで、3 つの文献 ([7], [40], [66]) を参考に、3 つの文献にある Bloch 定数の評価よりも良い評価を得ることができるのではないかと考えた。その結果、これらの文献で具体的に定数をとっていた部分に任意の実数を与えることにより、初等的な方法による評価を改善することができた。

また、複素解析学の分野の 1 つに、単位円板上で正則かつ単射である関数を扱う単葉関数論というものがある。Carathéodory の核収束定理とは、ある条件を満たす関数列と単位円板の像領域の列との間にある関係性について述べたものであり、単葉関数論における重要な結果の 1 つである。

私は岡山大学修士課程在籍時に、単葉関数論において大きな問題であった Bieberbach 予想の証明に興味を持ち、関連する研究に取り組んだ。Bieberbach 予想は 1980 年代に証明されたが、その証明において Carathéodory の核収束定理は重要な役割を果たしている。Bieberbach 予想の証明を再考する際に、Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明に関して幾つかの不明瞭な部分を見つけた。そこで、単葉関数論の国際的に広く知られている専門書 ([9], [21]) と Bieberbach 予想との関連について記述がある複数の文献 ([14], [15], [24]) を参考にしつつ、Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に取り組んだ。以上が第 I 部の主な内容である。以下、第 I 部の構成を章ごとに述べていく。

第 1 章では、第 I 部で必要な複素解析学における基本的な定義や正則関数のもつ性質についてまとめている。

第 2 章では、Bloch 定数の評価に関する研究で得られた成果について述べる。まず、Bloch の定理の定式化と、Bloch 定数の評価の歴史についてまとめている。次に、Bloch の定理の証明に必要な 2 つの補題の証明を行い、それら 2 つの補題を用いて Bloch の定理を初等的な手法で証明する。そして、Bloch 定数の初等的な方法による評価の改善に関する成果を述べる。

第 3 章では、単葉関数論の大きな問題の 1 つであった Bieberbach 予想と Carathéodory の核収束定理との関連について論ずる。まず、単葉関数論において重要な結果である Bieberbach の係数定理の証明を説明し、そこから導かれる幾つかの定理を紹介する。次に、Bieberbach 予想とその証明までの歴史について述べる。そして、Bieberbach 予想の証明について、Carathéodory の核収束定理と関連がある部分について Fitzgerald と Pommerenke に

よる論文 [12] をもとにまとめている。

第4章では、Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善について論じる。まず、Carathéodory の核収束定理を定式化するために必要な領域列の核と核収束を定義する。その後、Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明について不明瞭な部分とその改善について説明する。最後に、第3で述べた Bieberbach 予想の証明について、Carathéodory の核収束定理と関連がある部分の証明を説明する。

第5章では、複素解析学の特長、特に、複素関数と実関数の性質の違いについて、幾つかの定理を例に論じる。

第II部では、複素解析学の古典理論の研究の背景にある複素関数の見方や考え方を高等学校数学科で取り扱う方法とその可能性について論じる。平成30年告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2018[64]）によると、高等学校数学科において複素数は、数学IIの「いろいろな式」、および、数学Cの「平面上の曲線と複素数平面」という単元で扱われている。それでは、これらの単元の中で複素関数の見方・考え方はどの程度扱われているのだろうか。また、高等学校数学科で扱う価値のある、そして扱うことが可能な複素関数の見方や考え方は何なのか。これらの問題を考察するために、高等学校数学の教科書分析を行い、複素関数論に関する内容とその教材化の検討について論じた。以下、第II部の構成を章ごとに述べていく。

第6章では、高等学校数学科での複素数と複素関数の取り扱いについて論じる。教科書分析を行い、高等学校数学科でどの程度複素関数の考え方が扱われているのか、また、高校生が扱うことのできる複素関数の見方や考え方とは何かを述べる。

第7章では、複素関数論で扱う複素数平面上の重要な変換とその教材化について論じる。ここで扱う変換は、Möbius 変換と Joukowski 変換である。Möbius 変換については、円円対応という円または直線が Möbius 変換によって円または直線に移るという性質に注目し、簡単な場合である $w = \frac{1}{z}$ での教材化の検討について論じる。Joukowski 変換は、円を楕円や双曲線に移すという性質に注目し、数学Cの「式と曲線」の単元と関連させての教材化の検討について論じる。

第8章では、代数学の基本定理の位相幾何学的な証明を教材とした授業案とその授業実践について論じる。高等学校数学科において、代数学の基本定理は事実のみ記載されており、その厳密な証明は高校で学ぶ内容の範囲外である。しかし、位相幾何学的な証明は図を用いることで高校生でも直観的に理解することが可能であり、さらに複素関数の考え方を自然に扱うことが可能な教材であると考えた。そこで、本教材を用いた授業案の検討とその授業実践を行い、その成果と考察についてまとめている。

第9章では、第II部で得られた成果と今後の課題についてまとめている。

目次

はじめに	1
目次	3
第 I 部 複素解析学における古典的な結果に関する研究	5
第 1 章 複素解析学における基本的な定義, 定理	7
1.1 単連結	7
1.2 正則性から導かれる重要な定理	8
1.3 正規族と Montel の定理	13
1.4 Hurwitz の定理と Vitali の定理	15
第 2 章 Bloch の定理と Bloch 定数の評価	18
2.1 Bloch の定理と Bloch 定数の評価の歴史	18
2.2 Bloch の定理の証明	18
2.3 3つの文献に記載されていた Bloch 定数の評価の改善	25
第 3 章 Bieberbach 予想と Carathéodory の核収束定理	26
3.1 Bieberbach の係数定理とその応用	26
3.2 Bieberbach 予想とその歴史	38
3.3 Bieberbach 予想の証明と核収束定理の関連	39
第 4 章 Carathéodory の核収束定理とその証明	50
4.1 領域列の核と核収束の定義とその例	50
4.2 Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明	52
4.3 定理 3.17 の証明	57
第 5 章 複素関数の特徴と実関数との違い	66
第 II 部 複素関数の高等学校数学科での教材化の検討	69
第 6 章 高等学校数学科での複素数と複素関数の取り扱い	71
6.1 高等学校数学科での複素数の取り扱い	71
6.2 高等学校数学科での複素関数の取り扱い	72

第 7 章	複素数平面上の重要な変換とその教材化	75
7.1	$w = \frac{1}{z}$	75
7.2	円円対応とその教材化の検討	77
7.3	$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ の性質とその教材化への検討	82
第 8 章	代数学の基本定理とその教材化	86
8.1	代数学の基本定理とその高等学校での扱い	86
8.2	代数学の基本定理の証明	87
8.3	代数学の基本定理の教材化の検討	90
8.4	授業実践により得られた成果と考察	97
第 9 章	得られた成果と今後の課題	101
9.1	成果	101
9.2	課題	101
	謝辞	103
	参考文献	104

第I部

複素解析学における古典的な結果に関する 研究

第1章 複素解析学における基本的な定義, 定理

本章では, 本論文全体で用いる正則関数に関する定理やそれらの定式化に必要な定義をまとめている. 尚, 本章で紹介する定理は変数複素解析学における基本的な結果であるため, 証明は省略する. 証明や詳細については例えば [7], [8], [28], [41] を参照されたい.

注意. 1. \mathbb{N} は自然数全体の集合, \mathbb{Z} は整数全体の集合, \mathbb{R} は実数全体の集合, \mathbb{C} は複素数全体の集合を表す. 非負整数全体 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ を \mathbb{N}_0 と表す.

2. 点 $a \in \mathbb{C}$ 中心, 半径 $r > 0$ の開円板を $B(a, r)$, 閉円板を $\overline{B(a, r)}$, 点 a 中心, 半径 r の円周を $\partial B(a, r)$, 穴あき円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$ を $B_0(a, R)$ で表す. 特に, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし, これを単位円板という. さらに, $\mathbb{D}_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ と定める.

3. 複素変数対数関数の分枝と区別するために, 実変数の対数関数を $\ln x := \log_e x$ ($x > 0$) と表す.

1.1 単連結

まず, 本論文全体を通して重要な概念である単連結の定義を行う. そのための準備として, まず最初に曲線と領域の定義を行う. その後, Jordan の曲線定理の結果から単連結の定義を行う. Jordan の曲線定理の証明は1変数複素解析学の範囲を超えるので, 証明は省略する (詳細は [42] を参照のこと).

定義 1.1 (曲線, 領域). 1. $x(t), y(t)$ を $[0, 1]$ から \mathbb{R} への連続関数とする. このとき, 集合 $C := \{z(t) := x(t) + iy(t) \mid t \in [0, 1]\}$ を \mathbb{C} 内の曲線という. $z(0), z(1)$ をそれぞれ C の始点, 終点という. 曲線 C が $z(0) = z(1)$ を満たすとき, 閉曲線という. さらに, $t_1 < t_2$ となる任意の $t_1, t_2 \in [0, 1]$ に対して,

$$z(t_1) = z(t_2) \text{ ならば, } t_1 = 0 \text{ かつ } t_2 = 1$$

であるとき, 単純閉曲線という.

2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ をある開集合とする. このとき, 任意の $z_1, z_2 \in \Omega$ に対して, z_1 と z_2 をそれぞれ始点, 終点とするある曲線 $C \subset \Omega$ が存在するとき, Ω を領域という.

これより Jordan の曲線定理を定式化する.

定理 1.2 (Jordan の曲線定理). 任意の単純閉曲線 $C \subset \mathbb{C}$ に対して次の 2 条件を満たすある領域 Ω_1, Ω_2 が存在する :

1. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
2. $\mathbb{C} \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
3. Ω_1 は有界で, Ω_2 は非有界である.

さらに, $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = C$ である. Ω_1 を C の内部, Ω_2 を C の外部といい, Ω_1, Ω_2 をそれぞれ $C_{\text{int}}, C_{\text{ext}}$ と表す.

次に, 単連結を定義する. 尚, 以下で定義する単連結と同値である条件がいくつか知られているが, 本論文では単純閉曲線を用いて単連結を定義し, 議論していく.

定義 1.3 (単連結). Ω はある領域とする. Ω に含まれる任意の単純閉曲線 C に対して, $C_{\text{int}} \subset \Omega$ を満たすとき, Ω は単連結であるという.

1.2 正則性から導かれる重要な定理

本節では, 本論文全体で用いる正則関数に関する定理やそれらの定式化に必要な定義についてまとめている. まず, 複素微分の定義を行う.

定義 1.4. Ω はある領域で, $a \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする. このとき, 極限

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (1.1)$$

が存在するならば, 関数 f は点 a で複素微分可能であるという. f が点 a で微分可能であるとき, 極限 (1.1) を $f'(a)$ と表し, これを f の a における複素微分係数という.

正則関数と解析関数を定義する.

定義 1.5 (正則関数). f はある開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上定義された複素数値関数とする. f が Ω 上のすべての点で微分可能であるとき, f は Ω 上正則である, または Ω 上の正則関数という. 特に, \mathbb{C} 上で正則な関数を整関数という. Ω 上で正則な関数の全体を $H(\Omega)$ と表す.

定義 1.6 (解析関数). f はある開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上定義された複素数値関数とする. このとき, f が a で解析的である, または解析関数であるとは, a を中心とし, 0 でない収束半径をもつべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ が存在し, a のある近傍内のすべての z に対して,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

と表されることをいう. f が Ω 上のすべての点で解析的であるとき, f は Ω で解析的である, または Ω 上の解析関数という.

次に, 1 変数複素解析学において重要な結果である Cauchy の積分定理と Cauchy の積分公式を紹介する.

定理 1.7 (Cauchy の積分定理). 関数 f はある単連結領域 Ω で正則であるとする。このとき、任意の区分的に滑らかな閉曲線 $C \subset \Omega$ に対して、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ。

定理 1.8 (Cauchy の積分公式). 関数 f はある領域 Ω で正則であるとする。 $C \subset \Omega$ はある区分的に滑らかな単純閉曲線で、 $C_{\text{int}} \subset \Omega$ を満たすものとする。このとき、各 $z \in C_{\text{int}}$ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

が成り立つ。

定理 1.9 (導関数の Cauchy の積分公式). 関数 f はある領域 Ω 上正則であるとする。 $C \subset \Omega$ はある区分的に滑らかな単純閉曲線で、 $C_{\text{int}} \subset \Omega$ を満たすものとする。このとき、各 $z \in C_{\text{int}}$ において f は何回でも微分可能で、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

が成り立つ。

Cauchy の積分定理から原始関数の存在が導かれる。

定理 1.10 (原始関数の存在). f はある単連結領域 Ω 上正則であるとする。このとき、 Ω 上で正則な関数 F で、 Ω 上 $F' \equiv f$ を満たすものが存在する。 F を f の Ω における原始関数という。

Cauchy の積分公式に現れる積分の形で定義される関数は正則関数であることが知られている。

また、正則性と解析性は同値であることが知られている。この結果をもとに、複素解析学の世界は広がっていった。以下、同値性を2つに分けて定式化する。

定理 1.11 (解析的 \Rightarrow 正則). f はある領域 Ω で解析的であるとする。すなわち、任意の $a \in \Omega$ に対して、 a を中心とし、0でない収束半径をもつべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ が存在し、 a のある近傍 U 内のすべての z に対して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

と表されるとき。このとき、 f は Ω 上で正則である。特に、各 $z \in U$ に対して、

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1}$$

と表される。

定理 1.12 (正則 \Rightarrow 解析的). f はある領域 Ω で正則であるとする. $a \in \Omega$ を任意にとる. $R := \inf\{|z - a| \mid z \in \partial\Omega\}$ と定める. このとき,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (z \in B(a, R)) \quad (1.2)$$

と一意的に表される. 但し, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ の収束半径は R 以上である. さらに, 係数 c_n は, 任意の $\rho \in (0, R)$ に対して,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

と表される. 展開式 (1.2) を f の a における **Taylor 展開**, または $B(a, R)$ 上の **Taylor 展開** という.

次の Cauchy の評価式と Liouville の定理は, 主に第 3 章で用いられる.

命題 1.13 (Cauchy の評価式). f はある開円板 $B(a, R)$ 上正則で, ある定数 $M > 0$ が存在し, すべての $z \in B(a, R)$ に対して, $|f(z)| \leq M$ が成り立つとする. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

定理 1.14 (Liouville の定理). 有界な整関数は定数である.

以下の Weierstrass の定理, 最大絶対値の原理, 一致の定理は本論文全体を通して用いられる重要な結果である.

定理 1.15 (Weierstrass の定理). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある領域 Ω で正則な関数の列とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Ω 上ある関数 f に広義一様収束するならば, f は Ω で正則である. さらに, f_n の k 次導関数の列 $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上 f の k 次導関数 $f^{(k)}$ に広義一様収束する.

定理 1.16 (最大絶対値の原理). f はある領域 Ω で正則かつ定数ではないとする. このとき, 以下が成立:

1. $|f|$ は Ω で最大値をとらない.
2. Ω が有界で, かつ f が $\bar{\Omega}$ まで連続に拡張できるならば, $\max_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ が成り立つ. 特に, ある $z_0 \in \partial\Omega$ が存在し, すべての $z \in \bar{\Omega}$ に対して $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ が成り立つ.

定理 1.17 (Schwarz の補題). 関数 f はある開円板 $B(0, R)$ 上正則かつ $f(0) = 0$ を満たすものとする. さらに, ある定数 $M > 0$ が存在し, すべての $z \in B(0, R)$ に対して, $|f(z)| \leq M$ が成り立つものとする. このとき, すべての $z \in B(0, R)$ に対して,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z|$$

が成り立つ. また,

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$$

が成り立つ.

定理 1.18 (領域保存性の原理). f はある領域 Ω 上正則かつ定数でないとする。このとき、 $f(\Omega)$ は領域である。

定理 1.19. Ω はある単連結領域で、 f は Ω 上正則かつそこで $f \neq 0$ であるとする。任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、 $f(z_0) = e^{w_0}$ を満たす $w_0 \in \mathbb{C}$ を 1 つとる。このとき、 Ω 上正則なある関数 g で、すべての $z \in \Omega$ に対して、

$$e^{g(z)} = f(z) \text{ かつ } g(z_0) = w_0$$

を満たすものが存在する。

定理 1.20. 関数 f はある領域 Ω 上正則かつ単射であるとする。このとき、すべての $z \in \Omega$ に対して $f'(z) \neq 0$ である。

定理 1.21 (一致の定理). f, g はある領域 Ω で正則であるとする。 $A \subset \Omega$ は $A^d \cap \Omega \neq \emptyset$ を満たすものとする。ここで、 A^d は A の集積点全体のなす集合である。このとき、各 $z \in A$ に対して $f(z) = g(z)$ であるならば、 Ω 上で $f \equiv g$ となる。

f がある円環領域で正則であるとき、負べきの項が現れる級数に展開することができる。

定理 1.22 (Laurent 展開). f はある円環領域 $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$ (但し、 $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$) で正則であるとする。このとき、すべての $z \in \Omega$ に対して、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (1.3)$$

と一意的に表される。但し、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ は Ω 上絶対かつ広義一様収束するべき級数である。ここで、 c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), c_{-n} ($n = 1, 2, \dots$) は任意の $r \in (R_1, R_2)$ に対して、

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta$$

を満たす。この展開式 (1.3) を f の a における **Laurent 展開** という。

Laurent 展開を用いて、除去可能な特異点、極、真性特異点、留数を定義する。

定義 1.23 (除去可能な特異点、極、真性特異点、留数). f はある穴あき円板 $B_0(a, r)$ 上正則であるとする。

1. f が $B(a, r)$ においては正則でないとき、点 a を f の孤立特異点という。
2. f の $B_0(a, r)$ における Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in B_0(a, r))$$

と表す。 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ を f の a における Laurent 展開の主要部という。すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して、 $c_{-n} = 0$ であるとき、点 a を f の除去可能な特異点という。このとき、 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in B_0(a, r))$$

と表される。

3. ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (z \in B_0(a, r), c_{-k} \neq 0)$$

と表されるとき, 点 a を f の k 位の極という.

4. 主要部の 0 でない項が無数あるとき, 点 a を f の真性特異点という.

5. f の a における Laurent 展開の $\frac{1}{z-a}$ の係数 c_{-1} を f の a における留数といい, $\text{Res}(f, a)$ と表す.

上で定義した留数については, 留数定理という重要な結果がある.

定理 1.24 (留数定理). Ω はある領域で, $C \subset \Omega$ はある区分的に滑らかな単純閉曲線で, $C_{\text{int}} \subset \Omega$ であるとする. このとき, ある有限個の点 $a_1, a_2, \dots, a_m \in C_{\text{int}}$ が存在し, かつ, f が $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 上正則であるならば,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, a_j)$$

が成り立つ.

ここで, 正則関数の零点とその位数を定義する.

定義 1.25 (零点). Ω はある領域で, f は Ω 上で正則であるとする. このとき, $f(a) = 0$ を満たす点 $a \in \Omega$ を f の零点という. また, $n \in \mathbb{N}$ に対し $f^{(k)}(a) = 0$ ($0 \leq k \leq n-1$), $f^{(n)}(a) \neq 0$ であるとき, a は f の n 位の零点という.

定理 1.26. 関数 f はある領域 Ω で正則かつ Ω 上恒等的に 0 ではないとする. このとき, 任意の $a \in \Omega$ に対してある $r > 0$ が存在し, $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ かつすべての $z \in B_0(a, r)$ に対して $f(z) \neq 0$ が成り立つ.

正則関数 f の対数微分 $\frac{f'}{f}$ の線積分と零点の個数に関して次の結果がある.

定理 1.27. Ω はある区分的に滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた領域で, f は $\overline{\Omega}$ を含むある領域 E で正則かつ恒等的に 0 ではないとする. さらに, C 上には f の零点はないものとする. このとき, Ω 内の f の零点の個数を N とすれば,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

が成り立つ. 但し, 点 a が f の k 位の零点ならば, これを k 個の零点と考える.

2つの正則関数 f, g が与えられたとき, ある条件のもとで f と $f+g$ の零点の位数が等しいことを保証する Rouché の定理を紹介する.

定理 1.28 (Rouché の定理). Ω はある区分的に滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた領域で, 関数 f, g は $\overline{\Omega}$ を含むある領域 E 上正則かつ恒等的に 0 ではないとする. このとき, すべての $z \in C$ に対して,

$$|g(z)| < |f(z)|$$

が成り立つならば, Ω 内の f の零点の個数と Ω 内の $f+g$ の零点の個数は位数を込めて等しい.

最後に、Möbius 変換を定義し、 \mathbb{D} から \mathbb{D} への正則かつ全単射である Möbius 変換についてまとめておく。

定義 1.29 (Möbius 変換). $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。このとき、次の複素関数

$$S(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

を Möbius 変換という。

命題 1.30. $a \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$ とする。このとき、

$$S(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

の形で表される Möbius 変換は \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} から \mathbb{D} への全単射である。

1.3 正規族と Montel の定理

本節では、関数の族の 1 つである正規族に関する重要な結果である Montel の定理に証明を与える。まず、正規族を定義する。

定義 1.31 (正規族). \mathcal{F} はある開集合 Ω 上定義された関数の族とする。任意の $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対して $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列で、 Ω 上広義一様収束するものが存在するとき、 \mathcal{F} は Ω で正規族であるという。

次に、Montel の定理の定式化と定理の証明に必要な概念として、関数の族に対する一様有界と同程度連続を定義する。その後、同じく証明に用いられる有理点を定義する。

定義 1.32. \mathcal{F} はある集合 Ω 上定義された関数の族とする。

1. ある $M > 0$ が存在し、すべての $z \in \Omega$ と $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つとき、 \mathcal{F} は Ω 上一様有界であるという。
2. 任意の有界閉集合 $K \subset \Omega$ に対して、 \mathcal{F} が K 上一様有界であるとき、 \mathcal{F} は Ω 上局所一様有界であるという。
3. $a \in \Omega$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、すべての $z \in B(a, \delta)$ と $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つとき、 \mathcal{F} は $a \in \Omega$ で同程度連続であるという。 \mathcal{F} が Ω 内のすべての点で同程度連続であるとき、 \mathcal{F} は Ω 上同程度連続であるという。

定義 1.33 (有理点). $z \in \mathbb{C}$ で、 $\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z \in \mathbb{Q}$ を満たすものを有理点という。

以上の準備のもと、Montel の定理を証明する。この結果は、局所一様有界である正則関数の族は正規族であることを保証するもので、本論文全体で用いられる。

定理 1.34 (Montel の定理). \mathcal{F} はある開集合 Ω 上の正則関数からなる族で、 \mathcal{F} は Ω 上局所一様有界であるとする。このとき、 \mathcal{F} は Ω で正規族である。

証明. Step1. \mathcal{F} が Ω 上同程度連続であることを示す. $\alpha \in \Omega$ を任意にとり, 固定する. $\overline{B(\alpha, r)} \subset \Omega$ を満たすように $r > 0$ をとる. 仮定より, \mathcal{F} は Ω 上局所一様有界であるので, ある $M > 0$ が存在し, すべての $z \in \overline{B(\alpha, r)}$ と $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つ. 定理 1.8(Cauchy の積分公式) より,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\alpha)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(\alpha, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(\alpha, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(\alpha, r)} \frac{f(\zeta)(z - \alpha)}{(\zeta - z)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{|z - \alpha|}{2\pi} \int_{\partial B(\alpha, r)} \frac{|f(\zeta)|}{(|\zeta - \alpha| - |z - \alpha|)|\zeta - \alpha|} |d\zeta| \\ &\leq \frac{M \cdot 2\pi r}{2\pi} \cdot \frac{|z - \alpha|}{r(r - |z - \alpha|)} \\ &= \frac{M|z - \alpha|}{r - |z - \alpha|}. \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta := \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{\varepsilon r}{2M}\right\}$ と決めると, すべての $z \in B(\alpha, \delta)$ に対して,

$$|f(z) - f(\alpha)| \leq \frac{M|z - \alpha|}{r - |z - \alpha|} < \frac{M \cdot \frac{\varepsilon r}{2M}}{r - \frac{r}{2}} < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, \mathcal{F} は Ω 上同程度連続である.

Step2. \mathcal{F} が Ω で正規族であることを示す. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ を任意にとる. 有理点の集合は可算なので, Ω 内のすべての有理点の集合を $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ と表すことができる. \mathcal{F} は Ω 上局所一様有界であるので, 特に各 w_j ($j \in \mathbb{N}$) に対してある $M_{w_j} > 0$ が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|f_n(w_j)| \leq M_{w_j}$ が成り立つ. これより, 数列 $\{f_n(w_1)\}_{n=1}^\infty$ は有界で, 収束する部分列 $\{f_{n,1}(w_1)\}_{n=1}^\infty \subset \{f_n(w_1)\}_{n=1}^\infty$ をとることができる. また, 数列 $\{f_{n,1}(w_2)\}_{n=1}^\infty$ も有界であり, 収束する部分列 $\{f_{n,2}(w_2)\}_{n=1}^\infty \subset \{f_{n,1}(w_2)\}_{n=1}^\infty$ をとることができる. これを繰り返していくと, 数列 $\{f_{n,m-1}(w_m)\}_{n=1}^\infty$ も有界であり, 収束する部分列 $\{f_{n,m}(w_m)\}_{n=1}^\infty \subset \{f_{n,m-1}(w_m)\}_{n=1}^\infty$ をとることができる. $\{f_{n,m}(w_1)\}_{n=1}^\infty \subset \{f_{n,1}(w_1)\}_{n=1}^\infty$ かつ $\{f_{n,1}(w_1)\}_{n=1}^\infty$ は収束しているのだから, その部分列 $\{f_{n,m}(w_1)\}_{n=1}^\infty$ も収束する. $\{f_{n,m}(w_2)\}_{n=1}^\infty, \{f_{n,m}(w_3)\}_{n=1}^\infty$ についても同様に考えることができるので, 関数列 $\{f_{n,m}(z)\}_{n=1}^\infty$ は $z = w_1, w_2, \dots, w_m$ で収束する. ここで, $g_n := f_{n,n}$ とおき, 関数列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ を考える. $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty \subset \{f_{n,1}(z)\}_{n=1}^\infty$ であるから $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は $z = w_1$ で収束する. 同様にして, $\{g_n(z)\}_{n=2}^\infty \subset \{f_{n,2}(z)\}_{n=1}^\infty$ であるから $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は $z = w_2$ で収束する. これを繰り返していくと, $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は $z = w_j$ ($j \in \mathbb{N}$) で収束する. 点 $a \in \Omega$ を任意にとる. \mathcal{F} は Ω 上同程度連続より, ある $\delta_0 > 0$ が存在し, すべての $z \in B(a, \delta_0)$ と g_n ($n \in \mathbb{N}$) に対して, $|g_n(z) - g_n(a)| < \varepsilon/5$ が成り立つ. 有理数の稠密性より, ある $i \in \mathbb{N}$ が存在し, $|w_i - a| < \delta_0$ を満たす有理点 w_i が存在する. その点 w_i を固定すれば, $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は $z = w_i$ で収束するので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $k > l \geq N$ に対して, $|g_k(w_i) - g_l(w_i)| < \varepsilon/5$ が成り立つ. これより, $|z - a| < \delta_0$ を満たすすべての z とすべての $k > l \geq N$ に対して,

$$\begin{aligned} &|g_k(z) - g_l(z)| \\ &\leq |g_k(z) - g_k(a)| + |g_k(a) - g_k(w_i)| + |g_k(w_i) - g_l(w_i)| + |g_l(w_i) - g_l(a)| + |g_l(a) - g_l(z)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となり, 関数列 $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は $B(a, \delta_0)$ 上一様収束する. ここで, $0 < \rho < \delta_0$ を満たす ρ をとると, $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{D(a, \rho)}$ 上一様収束する. さらに, 点 a は Ω 内の任意の点であったから, $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上広義一様収束する. $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathcal{F} の任意の関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であったから, \mathcal{F} は Ω で正規族である. \square

Montel の定理を用いると, 複素解析学において非常に重要な結果の 1 つである Riemann の写像定理を証明することができる. Riemann の写像定理は第 4 章で用いるので, 結果のみ紹介しておく. 証明は参考文献 [28] を参照されたい.

定理 1.35 (Riemann の写像定理). 任意の単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ と任意の点 $z_0 \in \Omega$ に対して, Ω から \mathbb{D} への全単射である正則関数 f で, $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ を満たすものが唯 1 つ存在する.

1.4 Hurwitz の定理と Vitali の定理

本節では, Carathéodory の核収束定理の証明において重要な 3 つの結果に証明を与える. まず, ある条件のもとで, 正則関数列とその極限関数の零点の個数が位数を込めて等しくなるという Hurwitz の定理を証明する.

定理 1.36 (Hurwitz の定理). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある領域 Ω で正則な関数の列で, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上定数でないある関数 f に広義一様収束するものとする. $\overline{E} \subset \Omega$ はある区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた閉領域で, f は ∂E 上で零点をもたないとする. このとき, 十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n と f の E 内の零点の個数は位数を込めて等しい.

証明. 定理 1.15(Weierstrass の定理) より, f は Ω 上正則である. 特に, 有界閉集合 ∂E で連続なので, $m := \min_{z \in \partial E} |f(z)| > 0$ が存在する. すなわち, すべての $z \in \partial E$ に対して, $m \leq |f(z)|$ が成り立つ. 一方, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は特に ∂E 上 f に一様収束するので, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $n \geq n_0$ とすべての $z \in \partial E$ に対して, $|f_n(z) - f(z)| < m$ が成り立つ. これより,

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

となるので定理 1.28(Rouché の定理) より, f と f_n の E 内の零点の個数は位数を込めて等しい. \square

定理 1.36(Hurwitz の定理) を用いると, 正則かつ単射である関数列の極限関数が定数でないならば, それは正則かつ単射であることを導くことができる.

系 1.37. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある領域 Ω で正則かつ単射である関数の列とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Ω 上定数でないある関数 f に広義一様収束するならば, f も Ω で正則かつ単射である.

証明. 定理 1.15(Weierstrass の定理) より, f は Ω で正則である. f は Ω 上単射ではないと仮定する. このとき, ある $z_1, z_2 \in \Omega, z_1 \neq z_2$ が存在し, $f(z_1) = f(z_2)$ を満たす. $\alpha := f(z_1) = f(z_2)$ とおく. 関数 $f - \alpha$ は Ω 上定数ではないので定理 1.26 より, z_1, z_2 に対して, ある $\rho'_1 > 0, \rho'_2 > 0$ が存在し, $\overline{B(z_1, \rho'_1)} \subset \Omega$ かつ $B_0(z_1, \rho'_1)$ 上で $f(z) - \alpha \neq 0, \overline{B(z_2, \rho'_2)} \subset \Omega$ かつ $B_0(z_2, \rho'_2)$ 上で $f(z) - \alpha \neq 0$ となる. さらに, 正数 $\rho_1 < \rho'_1, \rho_2 < \rho'_2$ を十分小さくとれば, $B(z_1, \rho_1) \cap B(z_2, \rho_2) = \emptyset$ を満たす. いま, $\{f_n - \alpha\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上 $f - \alpha$ に

広義一様収束するので、定理 1.36(Hurwitz の定理) より、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n - \alpha$ と $f - \alpha$ の $B(z_1, \rho_1)$ 内の零点の個数は位数を込めて等しい。特に、 $f - \alpha$ は $B_0(z_1, \rho_1)$ 上で $f(z) - \alpha \neq 0$, $f(z_1) - \alpha = 0$ より、そこでの $f_n - \alpha$ の零点は唯 1 つである。すなわち、ある $w_1 \in B(z_1, \rho_1)$ が存在して、 $f_n(w_1) - \alpha = 0$ となる。 $B(z_2, \rho_2)$ 上の零点についても同様にして、ある $w_2 \in B(z_2, \rho_2)$ が存在して、 $f_n(w_2) - \alpha = 0$ を満たす。これより、 $f_n(w_1) = \alpha = f_n(w_2)$ かつ $w_1 \neq w_2$ となってしまう、 f_n が単射であることに矛盾する。よって、 f は Ω 上で単射である。 \square

次の定理は、正則関数列がある条件の下で各点収束すれば、広義一様収束まで保証するというものである。

定理 1.38 (Vitali の定理). $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ はある領域 Ω 上正則な関数の列で、 $A \subset \Omega$ は $A^d \cap \Omega \neq \emptyset$ を満たすものとする。ここで、 A^d は A の集積点全体のなす集合である。また、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は Ω で正規族であり、ある部分列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ で、 Ω 上ある関数 g に広義一様収束するものが存在し、さらに $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が A 上 g に各点収束すると仮定する。このとき、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は Ω 上広義一様収束する。

証明. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が A 上 g に各点収束するという仮定のもとで、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が Ω 上広義一様収束することを、背理法で示す。 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が Ω 上広義一様収束しないと仮定する。すると、ある有界閉集合 $K \subset \Omega$ とある $\varepsilon > 0$ が存在し、どのように $N \in \mathbb{N}$ をとってきても、ある番号 $n_0 > N$ とある $z_0 \in K$ で、

$$|f_{n_0}(z_0) - g(z_0)| \geq \varepsilon$$

を満たすものが存在する。つまり、

$$1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ とある } z_1 \in K \text{ が存在し、} |f_{n_1}(z_1) - g(z_1)| \geq \varepsilon$$

$$n_1 \text{ に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{ とある } z_2 \in K \text{ が存在し、} |f_{n_2}(z_2) - g(z_2)| \geq \varepsilon$$

⋮

$$n_{k-1} \text{ に対してある番号 } n_k > n_{k-1} \text{ とある } z_k \in K \text{ が存在し、} |f_{n_k}(z_k) - g(z_k)| \geq \varepsilon$$

を満たす部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ と点列 $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset K$ が存在する。 K は有界閉集合なので、Bolzano–Weierstrass の定理より、 $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ の部分列で、ある点 $z^* \in K$ に収束するものが存在する。これを改めて $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ と表す。 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が Ω で正規族であることから、部分列 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ で、 Ω 上広義一様収束するものが存在する。 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ の極限関数を h とする。 $\alpha \in A$ を任意にとる。 $\{g_n\}_{n=1}^\infty, \{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ は特に A 上各点収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\alpha) = g(\alpha)$, $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k_l}}(\alpha) = h(\alpha)$ となる。一方、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は A 上 g に各点収束するので、 $\{f_n(\alpha)\}_{n=1}^\infty$ は $g(\alpha)$ に収束する。このことと、 $\{f_{n_{k_l}}(\alpha)\}_{l=1}^\infty$ が $\{f_n(\alpha)\}_{n=1}^\infty$ の部分列であることから、

$$h(\alpha) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k_l}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = g(\alpha).$$

定理 1.15(Weierstrass の定理) より、 g, h は Ω で正則である。よって、定理 1.21(一致の定理) より、 Ω 上 $g \equiv h$ となる。一方、 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ は Ω 上 h に広義一様収束するので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $L_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、すべての $l \geq L_0$ に対して、 $|f_{n_{k_l}}(z_{k_l}) - h(z_{k_l})| < \varepsilon$

が成り立つ。また、 h は $z^* \in \Omega$ で連続なので、ある番号 $L_1 > L_0$ が存在し、すべての $l \geq L_1$ に対して、 $|h(z_{k_l}) - h(z^*)| < \varepsilon$ が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} |f_{n_{k_l}}(z_{k_l}) - h(z^*)| &\leq |f_{n_{k_l}}(z_{k_l}) - h(z_{k_l})| + |h(z_{k_l}) - h(z^*)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\{f_{n_{k_l}}(z_{k_l})\}_{l=1}^{\infty}$ は $h(z^*)$ に収束する。このことと、すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して、 $|f_{n_{k_l}}(z_{k_l}) - g(z_{k_l})| \geq \varepsilon$ であることから、 $z^* \in \Omega$ について、 $h(z^*) - g(z^*) \neq 0$ 、つまり $h(z^*) \neq g(z^*)$ となってしまう、 Ω 上 $g \equiv h$ であることに矛盾。よって、 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上広義一様収束する。 \square

第2章 Blochの定理とBloch定数の評価

本章では, Blochの定理の証明とBloch定数の評価について論じる. 第2.1節では, Blochの定理を定式化し, Bloch定数の評価の歴史について述べる. 第2.2節ではBlochの定理に自己完結した証明を与える. 第2.3節では第2.2節の証明内の議論を踏まえてBloch定数の評価について得られた結果についてまとめる. 尚, 本章の内容は, 著者らの論文 [17] に基づいている.

2.1 Blochの定理とBloch定数の評価の歴史

まず最初に, Blochの定理を定式化する.

定理 2.1 (Blochの定理). \mathbb{D} 上正則かつ $f'(0) = 1$ を満たす関数 f 全体を \mathcal{A} と表す. このとき, ある定数 $B > 0$ が存在し, 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, ある領域 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$ とある $z_f \in f(\Omega_f)$ で, f は Ω_f 上単射かつ, $B(z_f, B) \subset f(\Omega_f)$ を満たすものが存在する.

定理 2.1 に現れる定数 B の上限を **Bloch 定数** という. Bloch 定数の評価は複素解析学における重要な問題の 1 つである. Ahlfors と Grunsky [2] では次の結果が得られている:

$$B \leq \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/4)} = 0.4719\dots$$

さらに Ahlfors と Grunsky は, B の真の値が $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/4)}$ であると予想した. 下からの評価については, 1938 年に Ahlfors [1] によって, $\sqrt{3}/4 \leq B$ という評価が得られた. その後, 1990 年に Bonk [4] によって $\sqrt{3}/4 + 10^{-14} \leq B$ という評価が得られた. そして 1996 年に Chen と Gauthier [6] によって $\sqrt{3}/4 + 2 \times 10^{-4} \leq B$ という評価が得られた. 現在知られている中で最良の下からの評価は, 1998 年に Xiong [25] によって与えられた $\sqrt{3}/4 + 3 \times 10^{-4} \leq B$ である. 本章では, [7], [40], [66] を参考に, Bloch 定数の下からの評価の簡単な方法を与える. 3つの文献にある Bloch 定数の最良の評価は $B \geq \frac{1}{16 \ln 3}$ であるが, それよりも良い評価を得ることができる. また, 以下の方法は Bloch 定数の評価の方法だけでなく, 定理 2.1(Bloch の定理) に自己完結した初等的な証明も与える.

2.2 Blochの定理の証明

これより, Blochの定理の証明に必要な補題を定式化し, その証明を行う. 補題 2.2 は, 積分で定義された関数の正則性に関する結果であり, 補題 2.3 の証明に用いられる. 補題 2.3 は, 開円板上の正則関数の像領域は関数に依存せずある一定の半径の開円板を含むというもので, Bloch 定数の評価の際に重要な役割を果たす. 補題 2.2 の証明には定理

1.15(Weierstrass の定理), 定理 1.16(最大絶対値の原理), 定理 1.34(Montel の定理), 定理 1.38(Vitali の定理) を用いる.

補題 2.2. Ω はある領域で, C はある円周とする. $\Omega \times C$ 上で定義された 2 変数関数 $f(z, \zeta)$ は次の 2 条件を満たすものとする.

- (a) $f(z, \zeta)$ は $\zeta \in C$ を固定するごとに z の関数として Ω 上正則である. また, $z \in \Omega$ を固定するごとに ζ の関数として C 上で連続である.
- (b) 各 $c \in \Omega$ に対して, ある $r_c > 0$ と $M_c > 0$ が存在し, $B(c, r_c) \subset \Omega$ かつすべての $z \in \partial B(c, r_c)$ と $\zeta \in C$ に対して, $|f(z, \zeta)| \leq M_c$ が成り立つ.

このとき,

$$F(z) := \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

は Ω 上正則である.

証明. C のパラメータ表示を, $\zeta = \zeta(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\zeta_\nu := \zeta\left(\frac{\nu}{n}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

と定める. さらに,

$$S_n(z) := \sum_{\nu=1}^n f(z, \zeta_\nu)(\zeta_\nu - \zeta_{\nu-1}) \quad (z \in \Omega)$$

と定義する. 仮定 (a) より, 各 $n \in \mathbb{N}$ において $S_n(z)$ は Ω 上正則である. さらに, 線積分の定義より, 各 $z \in \Omega$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = F(z)$ である. C の長さを L とする. 仮定 (b) より, $z \in \partial B(c, r_c)$ ならば,

$$\begin{aligned} |S_n(z)| &\leq \sum_{\nu=1}^n |f(z, \zeta_\nu)| |\zeta_\nu - \zeta_{\nu-1}| \\ &\leq M_c \cdot \sum_{\nu=1}^n |\zeta_\nu - \zeta_{\nu-1}| \\ &\leq M_c \cdot L \end{aligned}$$

が成り立つ. 定理 1.16(最大絶対値の原理) より, $\max_{z \in \overline{B(c, R)}} |S_n(z)| \leq M_c \cdot L$ が成り立つ. つまり, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ は Ω 上局所一様有界であるので, 定理 1.34(Montel の定理) より, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ は Ω で正規族である. したがって, 定理 1.38(Vitali の定理) より, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ は Ω 上 F に広義一様収束する. 定理 1.15(Weierstrass の定理) より, F は Ω 上正則である. \square

補題 2.3. 関数 f はある開円板 $B(0, R)$ 上正則かつ $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする. さらに, ある定数 $M > 0$ が存在し, すべての $z \in B(0, R)$ に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つものとする. このとき, ある領域 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$ で, $B\left(0, \frac{R^2}{6M}\right) = f(\Omega_f)$ かつ, f が Ω_f 上単射であるものが存在する.

証明. ある定数 $C \in \mathbb{C}$ が存在し, $B(0, R)$ 上 $f(z) - z = C$ である場合を考える. 仮定より, $f(0) = 0$ なので $C = 0$ である. したがって, $f(z) = z$ となり, この場合は結論は正しい. 以下, $f(z) - z$ が $B(0, R)$ 上定数ではないと仮定する.

Step1. 各 $w \in B\left(0, \frac{R^2}{6M}\right)$ に対して, ある $z_w \in B\left(0, \frac{R^2}{4M}\right)$ が唯一つ存在し, $w = f(z_w)$ を満たすことを示す. f の $B(0, R)$ における Taylor 展開を, $f(0) = 0, f'(0) = 1$ に注意して,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \quad (2.1)$$

と表す. 定理 1.17(Schwarz の補題) より, $|f'(0)| \leq M/R$ が成り立つ. $f'(0) = 1$ より $R \leq M$ である. 以下, $r := \frac{R^2}{4M}$ と表す. このとき,

$$r = \frac{R^2}{4M} \leq \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4} < R \leq M. \quad (2.2)$$

一方, $f(z) - z$ は有界閉集合 $\partial B(0, r)$ で連続なので, $M(r) := \max_{z \in \partial B(0, r)} |f(z) - z|$ が存在する. いま, f は $\overline{B(0, r)}$ を含むある領域で正則なので, 命題 1.13(Cauchy の評価式) より, すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して,

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M}{R^n}$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} M(r) &= \max_{z \in \partial B(0, r)} |f(z) - z| = \max_{z \in \partial B(0, r)} \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| r^n \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^n = \frac{M}{R^2} \cdot r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方, (2.2) より $r/R \leq 1/4$ であるので,

$$M(r) \leq \frac{M}{R^2} \cdot \left(\frac{R^2}{4M} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{R^2}{16M} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{R^2}{12M} = \frac{r}{3} < r \quad (2.3)$$

が成り立つ. 今, $f(z) - z$ は有界領域 $B(0, r)$ で正則かつ $f'(0) = 1$ であることからそこで定数ではない. また, $\overline{B(0, r)}$ で連続なので, 定理 1.16(最大絶対値の原理) より, すべての $z \in B(0, r)$ に対して $|f(z) - z| \leq M(r)$ が成り立つ. さらに, $z = 0$ で $f(z) - z = 0$ なので, $f(z) - z$ に定理 1.17(Schwarz の補題) を用いると, すべての $z \in B(0, r)$ に対して,

$$|f(z) - z| \leq M(r) \cdot \frac{|z|}{r}$$

が成り立つ. 不等式 (2.3) より $M(r) < r$ であるので, すべての $z \in B(0, r) \setminus \{0\}$ に対して,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z + f(z) - z| \\ &\geq |z| - |f(z) - z| \\ &\geq |z| - M(r) \cdot \frac{|z|}{r} \\ &= |z| \left(1 - \frac{M(r)}{r} \right) > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

が成り立つ. また, 不等式 (2.3) より, すべての $z \in \partial B(0, r)$ に対して,

$$|f(z)| \geq |z| - |f(z) - z| \geq r - M(r) > \frac{2}{3}r = \frac{R^2}{6M}$$

が成り立つ. ここで, $w \in B(0, \frac{2}{3}r)$ を任意にとる. すべての $z \in \partial B(0, r)$ に対して $|f(z)| > |w|$ が成り立つので, 定理 1.28(Rouché の定理) より, $B(0, r)$ における f の零点の個数と $f(z) - w$ の零点の個数は位数を込めて等しい. (2.1) より, $z = 0$ は f の 1 位の零点である. 不等式 (2.4) と合わせて $B(0, r)$ における f の零点は $z = 0$ のみである. ゆえに, $f(z) - w$ の $B(0, r)$ における零点も唯 1 つである. 以上より, ある $z_w \in B(0, r)$ が唯 1 つ存在し, $f(z_w) - w = 0$ となる.

Step2. ここで, $f(B(0, r)) \subset B(0, \frac{2}{3}r)$ とは限らないので, $\Omega_f \subset B(0, r)$ で, $f : \Omega_f \rightarrow B(0, \frac{2}{3}r)$ が全単射であるような集合 Ω_f を考える. すなわち, Ω_f を以下で定める.

$$\Omega_f := \left\{ z \in B(0, r) \mid f(z) \in B\left(0, \frac{2}{3}r\right) \right\}.$$

さらに, 任意の $w \in B(0, \frac{2}{3}r)$ に対して, $f : \Omega_f \rightarrow B(0, \frac{2}{3}r)$ の逆関数 f^{-1} を $f^{-1}(w) := z$ と定める. f^{-1} は定数ではないことに注意する. もし, f^{-1} が $B(0, \frac{2}{3}r)$ 上正則であるならば, 定理 1.18(領域保存性の原理) より, $f^{-1}(B(0, \frac{2}{3}r)) = \Omega_f$ は領域である. 以下, f^{-1} の正則性を 2 段階に分けて証明する.

Step2-1.

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta \quad (2.5)$$

と表されることを示す. $B(0, r) \subset \mathbb{D}$, $\partial B(0, r)$ 上で $f \neq w$ に注意すると, 変数 ζ の関数 $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ は $B(0, r)$ を含むある領域から z を除いたところで正則で, $\zeta = z$ は $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ の 1 位の極で, その留数は,

$$\text{Res} \left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}, z \right) = \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) \cdot \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\zeta f'(\zeta)}{\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}} = \frac{z f'(z)}{f'(z)} = z = f^{-1}(w)$$

である. したがって, 定理 1.24(留数定理) より,

$$f^{-1}(w) = \text{Res} \left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}, z \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

と表される.

Step2-2. f^{-1} が $B(0, \frac{2}{3}r)$ 上で正則であることを示す. (2.5) の被積分関数は, $\zeta \in \partial B(0, r)$ を固定することにより w について正則で, $w \in B(0, \frac{2}{3}r)$ を固定することにより ζ について連続である. さらに, 各 $c \in B(0, \frac{2}{3}r)$ に対して, $r_c > 0$ を $B(c, r_c) \subset B(0, \frac{2}{3}r)$ を満たすようにとれば, すべての $w \in \partial B(c, r_c)$ と $\zeta \in \partial B(0, r)$ に対して,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \right| &\leq \frac{r \max_{\zeta \in \partial B(0, r)} |f'(\zeta)|}{|f(\zeta)| - |w|} \\ &\leq \frac{r \max_{\zeta \in \partial B(0, r)} |f'(\zeta)|}{\min_{\zeta \in \partial B(0, r)} |f(\zeta)| - r_c} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 補題 2.2 より, f^{-1} は $B(0, \frac{2}{3}r)$ 上で正則である. \square

これより, 上述した補題を用いて定理 2.1(Bloch の定理) を証明する.

定理 2.1 の証明. $\varepsilon, \varepsilon_0 \in (0, 1)$ を任意にとり, 固定する. 定理 2.1 に現れる定数 B が, $B = \frac{\varepsilon_0}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ であることを示す.

(I) f が \mathbb{D} を含むある領域で正則である場合を考える.

StepI-1. 関数 $(1 - |z|^2)|f'(z)|$ を評価する. $(1 - |z|^2)|f'(z)|$ は有界閉集合 $\overline{\mathbb{D}}$ で連続なので, $M := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} (1 - |z|^2)|f'(z)|$ が存在する. つまり, ある $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ で, $(1 - |\alpha|^2)|f'(\alpha)| = M$ を満たすものが存在する. 仮定より, $f'(0) = 1$ であるので $M \geq (1 - |0|^2)|f'(0)| = 1$ である. 加えて, すべての $\beta \in \partial\mathbb{D}$ に対して $(1 - |\beta|^2)|f'(\beta)| = (1 - 1)|f'(\beta)| = 0$ となるので, $\alpha \in \mathbb{D}$ である. ゆえに, \mathbb{D} 上で正則な関数

$$z(\zeta) := \frac{\alpha - \zeta}{1 - \bar{\alpha}\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

を定義できる. 命題 1.30 より, これは \mathbb{D} から \mathbb{D} への全単射である.

StepI-2. 次の形で定義される関数

$$F(\zeta) := f(z(\zeta)) = f\left(\frac{\alpha - \zeta}{1 - \bar{\alpha}\zeta}\right) \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

を評価する. F は \mathbb{D} 上正則かつ $F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$ であることに注意する. すべての $\zeta \in \mathbb{D}$ に対して $z(\zeta) \in \mathbb{D}$ であるので, StepI-1 より,

$$(1 - |z(\zeta)|^2)|f'(z(\zeta))| \leq M$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} (1 - |\zeta|^2)|F'(\zeta)| &= (1 - |\zeta|^2)|f'(z(\zeta))z'(\zeta)| \\ &= (1 - |\zeta|^2) \frac{|\bar{\alpha}\zeta - 1 - (\alpha - \zeta)(-\bar{\alpha})|}{|1 - \bar{\alpha}\zeta|^2} |f'(z(\zeta))| \\ &= \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |\alpha|^2)}{|1 - \bar{\alpha}\zeta|^2} |f'(z(\zeta))| \\ &= \frac{|1 - \bar{\alpha}\zeta|^2 - |\alpha - \zeta|^2}{|1 - \bar{\alpha}\zeta|^2} \cdot |f'(z(\zeta))| \\ &= (1 - |z(\zeta)|^2)|f'(z(\zeta))| \tag{2.6} \\ &\leq M \tag{2.7} \end{aligned}$$

が得られる.

StepI-3. $z(0) = \alpha$ と等式 (2.6) より, $|F'(0)| = (1 - |\alpha|^2)|f'(\alpha)| = M$ である. これより, \mathbb{D} 上で正則な関数

$$g(\zeta) := \frac{F(\zeta) - F(0)}{F'(0)} \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

を定義できる. $g(0) = 0$ かつ $g'(0) = F'(0)/F'(0) = 1$ である. さらに, 不等式 (2.7) を用いると, すべての $\zeta \in \mathbb{D}$ に対して,

$$|g'(\zeta)| = \frac{|F'(\zeta)|}{|F'(0)|} = \frac{|F'(\zeta)|}{M} \leq \frac{M}{(1 - |\zeta|^2)M} = \frac{1}{1 - |\zeta|^2}$$

が成り立つ。ここで、 $\zeta_0 \in B(0, \varepsilon)$ を任意にとる。このとき、ある $r_0 \in [0, \varepsilon)$ とある $\theta_0 \in \mathbb{R}$ が存在し、 $\zeta_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ と表される。 l を 0 から ζ_0 を結ぶ線分とする。 l のパラメータ表示を $\zeta(r) := r e^{i\theta_0}$ ($r \in [0, r_0]$) とする。 $l \subset B(0, \varepsilon)$ である。 g' は $B(0, \varepsilon)$ 上で連続かつそこで原始関数 g をもつので、

$$\begin{aligned} |g(\zeta_0)| &= |g(\zeta_0) - g(0)| = \left| \int_l g'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_0^{r_0} g'(r e^{i\theta_0}) e^{i\theta_0} dr \right| \\ &\leq \int_0^{r_0} |g'(r e^{i\theta_0})| dr \leq \int_0^{r_0} \frac{1}{1 - |r e^{i\theta_0}|^2} dr \\ &= \int_0^{r_0} \frac{1}{1 - r^2} dr = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_0}{1 - r_0} < \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 g に対して補題 2.3 を用いると、ある領域 $\Omega \subset \mathbb{D}$ で、 $B\left(0, \frac{\varepsilon^2}{6 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) = B\left(0, \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) = g(\Omega)$ かつ、 g が Ω 上単射であるものが存在する。これより、

$$B\left(0, \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) = g(\Omega) \subset g(\mathbb{D}).$$

StepI-4. $B\left(f(\alpha), \frac{M}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset f(z(\Omega))$ を示す。 $w \in B\left(f(\alpha), \frac{M}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)$ を任意にとる。このとき、

$$\begin{aligned} |w - f(\alpha)| &< \frac{M}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \\ \left| \frac{w - f(\alpha)}{F'(0)} \right| &= \left| \frac{w - f(\alpha)}{M} \right| < \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、 $\frac{w - f(\alpha)}{F'(0)} \in B\left(0, \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)$ である。StepI-3 より、ある $\zeta' \in \Omega$ が存在し、

$$\begin{aligned} \frac{w - f(\alpha)}{F'(0)} &= g(\zeta') = \frac{f(z(\zeta')) - f(\alpha)}{F'(0)}, \\ w &= f(z(\zeta')) \end{aligned}$$

となる。 $z(\zeta') \in z(\Omega)$ であるので、 $w = f(z(\zeta')) \in f(z(\Omega))$ である。

StepI-5. $B\left(f(\alpha), \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset f(z(\Omega))$ を示す。 $M \geq 1$ と StepI-4 より、

$$B\left(f(\alpha), \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset B\left(f(\alpha), \frac{M}{\frac{3}{\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset f(z(\Omega))$$

が成り立つ。

StepI-6. $z(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $z(\Omega)$ は領域で、さらに f が $z(\Omega)$ 上単射であることを示す。 $\Omega \subset \mathbb{D}$ より、 $z(\Omega) \subset \mathbb{D}$ は明らか。また、 $z(\zeta)$ の定義と定理 1.18 (領域保存性の原理) より、 $z(\Omega)$ は領域である。任意に $z_1, z_2 \in z(\Omega)$, $z_1 \neq z_2$ をとる。 $z(\zeta)$ は特に Ω から $z(\Omega)$ への全単射で

あることから, ある $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega$ で, $\zeta_1 \neq \zeta_2, z(\zeta_1) = z_1, z(\zeta_2) = z_2$ を満たすものが存在する. StepI-3 より, g は Ω 上単射なので,

$$\begin{aligned} g(\zeta_1) &\neq g(\zeta_2), \\ \frac{F(\zeta_1) - F(0)}{F'(0)} &\neq \frac{F(\zeta_2) - F(0)}{F'(0)}, \\ f(z(\zeta_1)) &= F(\zeta_1) \neq F(\zeta_2) = f(z(\zeta_2)) \end{aligned}$$

となるので, $f(z_1) \neq f(z_2)$ が成り立つ. したがって, f は領域 $z(\Omega)$ 上単射である. (II) f が \mathbb{D} 上正則である場合を考える. このとき, $B(0, 1/\varepsilon_0)$ 上で正則な関数

$$g_0(z) := \frac{1}{\varepsilon_0} f(\varepsilon_0 z)$$

を定義できる. $\bar{\mathbb{D}} \subset B(0, 1/\varepsilon_0)$ と $g'_0(0) = f'(0) = 1$ であることに注意して (I) の結果を g_0 に用いると, ある領域 $\Omega \subset \mathbb{D}$ とある $z_{g_0} \in g_0(\Omega)$ で, g_0 は Ω 上単射かつ, $B\left(z_{g_0}, \frac{1}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset g_0(\Omega)$ を満たすものが存在する. さらに, ある $\alpha_0 \in \Omega$ を用いて, $z_{g_0} = g_0(\alpha_0)$ と表される. StepII-1. f が領域 $\Omega_{\varepsilon_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varepsilon_0 \xi, \xi \in \Omega\}$ 上で単射であることを示す. 任意に $z_1, z_2 \in \Omega_{\varepsilon_0}, z_1 \neq z_2$ をとる. このとき, ある $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$ で, $\xi_1 \neq \xi_2, z_1 = \varepsilon_0 \xi_1, z_2 = \varepsilon_0 \xi_2$ を満たすものが存在する. このとき,

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(\varepsilon_0 \xi_1) = \varepsilon_0 g_0(\xi_1), \\ f(z_2) &= f(\varepsilon_0 \xi_2) = \varepsilon_0 g_0(\xi_2), \\ g_0(\xi_1) &\neq g_0(\xi_2) \end{aligned}$$

であるので, $f(z_1) \neq f(z_2)$ である. したがって, f は Ω_{ε_0} 上で単射である.

StepII-2. 結論を示す. $w \in B\left(f(\varepsilon_0 \alpha_0), \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)$ を任意にとる. このとき,

$$\begin{aligned} |w - f(\varepsilon_0 \alpha_0)| &< \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \\ \left| \frac{w}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} f(\varepsilon_0 \alpha_0) \right| &< \frac{1}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり, $w/\varepsilon_0 \in B\left(g_0(\alpha_0), \frac{1}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)$ である. いま, $B\left(g_0(\alpha_0), \frac{1}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset g_0(\Omega)$ であるので, ある $z_0 \in \Omega$ が存在し,

$$\begin{aligned} \frac{w}{\varepsilon_0} &= g_0(z_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} f(\varepsilon_0 z_0), \\ w &= f(\varepsilon_0 z_0) \end{aligned}$$

を満たす. つまり, $w \in f(\Omega_{\varepsilon_0})$ である. よって, $B\left(f(\varepsilon_0 \alpha_0), \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset f(\Omega_{\varepsilon_0})$ が成り立つ. \square

2.3 3つの文献に記載されていた Bloch 定数の評価の改善

上の証明に従うと, ある領域 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$ と $z_f \in f(\Omega_f)$ が存在し,

$$B\left(z_f, \frac{\varepsilon_0}{\frac{3}{\varepsilon^2} \log \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) \subset f(\Omega_f)$$

が成り立つことがわかる. ここで, $\varepsilon, \varepsilon_0 \in (0, 1)$ をうまくとれば,

$$\frac{1}{16 \log 3} < \frac{\varepsilon_0}{\frac{3}{\varepsilon^2} \log \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad (2.8)$$

が成り立つ. 実際, $\varepsilon = 4/5, \varepsilon_0 \in (\frac{75}{128}, 1)$ ととれば,

$$\frac{\frac{3}{\varepsilon^2} \log \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{16 \log 3} = \frac{\frac{75}{16} \log 9}{16 \log 3} = \frac{75}{128} < \varepsilon_0,$$

つまり, (2.8) を満たす. これより, [66] で与えられていた $B \geq \frac{1}{16 \log 3}$ よりもよい評価を得ることができた.

第2.1節で挙げた3つの文献[7], [40], [66]では, あらかじめ特定の値を決めて証明を行っていた. 具体的には, ε の部分に $1/2$, ε_0 の部分に $3/4$ という値を定めて, $B\left(z_f, \frac{1}{16 \log 3}\right) \subset f(\Omega_f)$ が成り立つことを証明していた. 本稿では, 任意に実数 $\varepsilon_0, \varepsilon$ をとることで, 3つの文献で与えられている結論よりもさらに一般化された形で Bloch の定理を示すことができた. その結果, 3つの文献で与えられている評価よりも良い評価を得ることができた.

第3章 Bieberbach 予想と Carathéodory の核収束定理

本章では、第4章での議論に必要な単葉関数論に関する基本的な結果と、単葉関数論において重要な問題であった Bieberbach 予想と Carathéodory の核収束定理の関連について論じる。第3.1節では、単葉関数の定義と単葉関数論において重要な結果である Bieberbach の係数定理とそこから導かれる性質について述べる。

3.1 Bieberbach の係数定理とその応用

本節では、後に説明する Bieberbach 予想の部分的な結果である Bieberbach の係数定理に証明を与え、係数定理から導かれるいくつかの結果について説明する。まず、単葉という言葉进行定義する。

定義 3.1 (単葉). f はある領域 Ω で定義された関数とする。 f が Ω 上単射であるとき、 f は Ω 上単葉であるという。

注意. 単葉を定義する際には、文献によっては正則であることも仮定している場合がある。しかし、本論文内では領域上で単射であることを単葉であると定義して議論する。

次の公式は、Green の定理から導かれる領域の面積に関するものである。証明は省略する。 [26] 参照。

補題 3.2. Ω はある区分的に滑らかな単純閉曲線の内部とする。このとき、 Ω の面積は、

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \bar{z} dz$$

で与えられる。

この補題を用いて次の面積定理を証明する。この定理は Bieberbach の係数定理を証明する際に重要な役割を果たす。

定理 3.3 (面積定理). g は $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ 上正則かつ単葉で、 $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ において

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

と Laurent 展開されるものとする。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

が成り立つ。特に、 $|b_1| \leq 1$ であり、 $|b_1| = 1$ となるのは、ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し、 $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上 $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\beta}}{z}$ と表される場合に限る。

証明. $r \in (1, \infty)$ を任意にとる. $C_r := g(\partial B(0, r))$ とおく. $\partial B(0, r)$ のパラメータ表示を $z = z(t) := re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) とする. すると, C_r のパラメータ表示は $w = w(t) = g(re^{it})$ ($t \in [0, 2\pi]$) と表される. C_r のパラメータ表示より, $w(0) = g(r), w(2\pi) = g(r)$ となるので C_r は閉曲線である. また, 任意の $t_1, t_2 \in (0, 2\pi), t_1 \neq t_2$ に対して, $re^{it_1} \neq re^{it_2}$ となる. このことと, g が $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上単葉であることから $g(re^{it_1}) \neq g(re^{it_2})$ となるので, C_r は単純である. さらに, $z(t)$ は各 $t \in [0, 2\pi]$ で微分可能であり, g は $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上正則なので, $w(t) = g(re^{it})$ は各 $t \in [0, 2\pi]$ で微分可能である. つまり, C_r は滑らかな曲線である. よって, 命題 3.2 を適用すると, 滑らかな単純閉曲線 C_r で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_{C_r} \bar{w} dw &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{w(t)} \cdot \frac{d}{dt} w(t) dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{it})} \cdot \frac{d}{dt} g(re^{it}) dt \end{aligned}$$

で与えられる. ここで, $\frac{d}{dt} g(re^{it})$ について考える. 仮定より, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ は $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上絶対かつ広義一様収束するので, 特に $\partial B(0, r)$ 上絶対かつ一様収束する. つまり, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} e^{-int}$ は t について $[0, 2\pi]$ 上絶対かつ一様収束する. よって, 項別微分可能で,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(re^{it}) &= \frac{d}{dt} \left(re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} e^{-int} \right) \\ &= ire^{it} + \left(-i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{r^n} e^{-int} \right) \\ &= i \left(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{r^n} e^{-int} \right) \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{it})} \cdot \frac{d}{dt} g(re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\left(re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} e^{-int} \right)} \cdot i \left(re^{it} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^m} e^{-imt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{r^n} e^{int} \right) \cdot \left(re^{it} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^m} e^{-imt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^{m-1}} e^{-i(m+1)t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{r^{n-1}} e^{i(n+1)t} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{r^n} e^{int} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^m} e^{-imt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} r^2 dt - \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^{m-1}} e^{-i(m+1)t} dt + \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{r^{n-1}} e^{i(n+1)t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{r^n} e^{int} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^m} e^{-imt} dt \right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

と表される。ここで、積分の中身の級数について考える。

Step1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b_n}}{r^n} e^{int}$ が t について $[0, 2\pi]$ 上一様収束することを示す。いま、 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{b_n}{r^n} e^{-int} \right|$ は $[0, 2\pi]$ 上収束するので、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{r^n} < +\infty$ である。 $t \in [0, 2\pi]$ と $n \in \mathbb{N}_0$ を任意にとる。このとき、

$$\left| \frac{\overline{b_n}}{r^n} e^{int} \right| = \frac{|\overline{b_n}|}{r^n} |e^{int}| = \frac{|b_n|}{r^n}$$

となるので $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{r^n}$ は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b_n}}{r^n} e^{int}$ の優級数である。いま、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{r^n}$ は収束しているので M-判定法より、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b_n}}{r^n} e^{int}$ は $[0, 2\pi]$ 上一様収束する。

Step2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{r^n} e^{-int}$ が $[0, 2\pi]$ 上一様収束することを示す。いま、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} e^{-int}$ は $[0, 2\pi]$ 上一様収束するので項別微分可能であり、項別微分したものも $[0, 2\pi]$ 上一様収束する。つまり、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{r^n} e^{-int}$ も $[0, 2\pi]$ 上一様収束する。

Step1, Step2 より、特に $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mb_m}{r^{m-1}} e^{-i(m+1)t}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b_n}}{r^{n-1}} e^{i(n+1)t}$ も $[0, 2\pi]$ 上一様収束する。以上を踏まえて積分と級数の順序交換を行い、すべての $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

であることに注意して積分を計算すると、

$$\begin{aligned} (3.1) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} r^2 dt - \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{mb_m}{r^{m-1}} e^{-i(m+1)t} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{b_n}}{r^{n-1}} e^{i(n+1)t} dt \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{mb_m \overline{b_n}}{r^{n+m}} e^{i(n-m)t} dt \right) \\ &= \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n}} \right) \end{aligned}$$

が得られる。さらに、 $\frac{1}{2i} \int_{C_r} \overline{w} dw \geq 0$ と $r > 1$ であることから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n}} &\leq r^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n+2}} &\leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

Step3. $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ が成り立つことを示す。 $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 > 1$ が成り立つと仮定する。このとき、 $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると $\sum_{n=1}^N n|b_n|^2 > 1$ が成り立つ。ここで、 $F(r) := \sum_{n=1}^N \frac{n|b_n|^2}{r^{2n+2}}$ ($r \in (1, \infty)$) と定めると、これは $[1, \infty)$ 上で連続である。仮定より $F(1) > 1$ であるから $G(r) := F(r) - 1$ とおくと、 $G(r)$ も $[1, \infty)$ 上で連続で、 $G(1) > 0$ である。これより、 $r = 1$ と $G(1)/2 > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、 $1 < r < 1 + \delta$ を満たすすべての r に対して、

$$\begin{aligned} |G(1) - G(r)| &< \frac{G(1)}{2}, \\ G(1) - G(r) &< \frac{G(1)}{2}, \\ G(r) &> \frac{G(1)}{2} > 0. \end{aligned}$$

これより,

$$0 < F(r) - 1,$$

$$1 < F(r) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n+2}}$$

となつてしまい矛盾が生じる. したがって, $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ が成り立つ.

Step4. 等号成立を示す. $|b_1| = 1$ と仮定する. このとき, ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して, $b_1 = e^{i\beta}$ と表される. $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ であるので, すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $b_n = 0$ となる. つまり, すべての $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ に対して,

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = z + b_0 + \frac{b_1}{z} = z + b_0 + \frac{e^{i\beta}}{z}$$

と表される. 一方, $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\beta}}{z}$ と仮定すると, $|b_1| = |e^{i\beta}| = 1$ となる. \square

ここで, 単葉関数論において最も基本的かつ重要な関数の族 \mathcal{S} を定義する.

定義 3.4 (族 \mathcal{S}). 次の条件を満たす関数 f の族を \mathcal{S} で表す:

1. f は \mathbb{D} 上で正則かつ単葉である.
2. $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ である.

族 \mathcal{S} において重要な関数の1つである Koebe 関数を紹介する.

命題 3.5 (Koebe 関数). ある $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて表される次の関数を **Koebe 関数** という:

$$f(z) := \frac{z}{(1 + e^{i\beta}z)^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Koebe 関数は \mathcal{S} に含まれる.

証明. すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $(1 + e^{i\beta}z)^2 \neq 0$ であるので, $f \in H(\mathbb{D})$ で, $f(0) = 0$ である. f の導関数は,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(1 + e^{i\beta}z)^2 - 2z(1 + e^{i\beta}z)e^{i\beta}}{(1 + e^{i\beta}z)^4} \\ &= \frac{(1 + e^{i\beta}z) - 2ze^{i\beta}}{(1 + e^{i\beta}z)^3} \\ &= \frac{1 - ze^{i\beta}}{(1 + e^{i\beta}z)^3} \end{aligned}$$

であるので $f'(0) = 1$ である. $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$ を任意にとる. このとき,

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{z_1}{(1 + e^{i\beta}z_1)^2} - \frac{z_2}{(1 + e^{i\beta}z_2)^2} \\ &= \frac{z_1(1 + e^{i\beta}z_2)^2 - z_2(1 + e^{i\beta}z_1)^2}{(1 + e^{i\beta}z_1)^2(1 + e^{i\beta}z_2)^2} \\ &= \frac{z_1 - z_2 + e^{2i\beta}z_1z_2(z_2 - z_1)}{(1 + e^{i\beta}z_1)^2(1 + e^{i\beta}z_2)^2} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(1 - e^{2i\beta}z_1z_2)}{(1 + e^{i\beta}z_1)^2(1 + e^{i\beta}z_2)^2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となるので, f は \mathbb{D} 上単葉である. □

Koebe 関数は, 単葉関数論におけるいくつかの不等式の等号成立に現れる. これより, Bieberbach の係数定理に証明を与える.

定理 3.6 (Bieberbach の係数定理). $f \in \mathcal{S}$ とする. f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

と表す. このとき,

$$|c_2| \leq 2$$

であり, $|c_2| = 2$ となるのは f が Koebe 関数である場合に限る.

証明. すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{f(z^2)}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \left(z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2} \end{aligned}$$

と表される. $f(z^2)/z^2 \in H(\mathbb{D}_0)$ である. $\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ は \mathbb{D} 上絶対収束するので, $\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2}$ も \mathbb{D} 上絶対収束する. これより, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z^2)}{z^2} = 1$ となる. よって, $z = 0$ で 1 という値をとり, \mathbb{D}_0 では $1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2}$ という値をとる関数を改めて $\frac{f(z^2)}{z^2}$ とすれば, $f(z^2)/z^2 \in H(\mathbb{D})$ かつ \mathbb{D} で偶関数である. また, f は \mathbb{D} 上単葉かつ $f(0) = 0$ であるので, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $f(z) \neq 0$, つまりそこで $f(z^2)/z^2 \neq 0$ である. $z = 0$ のときは $f(z^2)/z^2 = 1$ である. したがって, すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z^2)/z^2 \neq 0$ である. よって, 定理 1.19 より, ある $h_0 \in H(\mathbb{D})$ で, $h_0(0) = 0$ かつ

$$e^{h_0(z)} = \frac{f(z^2)}{z^2}$$

を満たすものが存在する. h_0 は偶関数である. これを用いると,

$$\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} := \exp\left(\frac{1}{2}h_0(z)\right)$$

を定義できる. $\sqrt{f(z^2)/z^2}$ も \mathbb{D} 上一価正則な偶関数である. これより, $h(z) := z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ とおけば, h は \mathbb{D} 上一価正則な奇関数である. h の定義より, $h(0) = 0$ で, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $h(z) \neq 0$ であるので, ある $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_0$, $z_1 \neq z_2$ が存在し, $h(z_1) = h(z_2)$ が成り立つと仮定する. 両辺 2 乗すると,

$$\begin{aligned} (h(z_1))^2 &= (h(z_2))^2, \\ z_1^2 \frac{f(z_1^2)}{z_1^2} &= z_2^2 \frac{f(z_2^2)}{z_2^2}, \\ f(z_1^2) &= f(z_2^2) \end{aligned}$$

が得られる。仮定より、 f は \mathbb{D} 上単葉であるので、 $z_1^2 = z_2^2$ である。いま、 $z_1 \neq z_2$ であるので、 $z_1 = -z_2$ である。このことと、 h が奇関数で、 $h(z_1) = h(z_2)$ であることから

$$\begin{aligned} h(z_1) &= h(-z_2) = -h(z_2) = -h(z_1), \\ h(z_2) &= h(-z_1) = -h(z_1) = -h(z_2) \end{aligned}$$

となり、 $h(z_1) = h(z_2) = 0$ 、つまり $z_1 = z_2 = 0$ となり矛盾が生じる。よって、 h は \mathbb{D} 上単葉である。 $G(z) := \sqrt{f(z^2)/z^2}$ とおくと、 G は \mathbb{D} 上正則なので、 G の \mathbb{D} 上の Taylor 展開は

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

と表される。ここで、係数 a_n を $n = 0, 1, 2$ まで具体的に求めてみる。まず、 $G(0) = 1$ より、 $a_0 = 1$ である。 G の 1 階導関数は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(G(z))^2 &= \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z^2)}{z^2} \right), \\ 2G(z)G'(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} (2n-2)c_n z^{2n-3}, \\ G'(z) &= \frac{1}{2G(z)} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (2n-2)c_n z^{2n-3} \end{aligned}$$

より、 $G'(0) = 0$ である。よって、 $a_1 = 0$ である。 G の 2 階導関数は

$$\frac{d}{dz}G'(z) = \frac{1}{4(G(z))^2} \left\{ 2G(z) \sum_{n=2}^{\infty} (2n-2)(2n-3)c_n z^{2n-4} - 2G'(z) \sum_{n=2}^{\infty} (2n-2)c_n z^{2n-3} \right\}$$

より、 $G''(0) = \frac{1}{4}(2G(0) \cdot 2c_2 - 0) = c_2$ である。よって、 $a_2 = c_2/2$ である。これより、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$\begin{aligned} h(z) &= zG(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \\ &= z + \frac{c_2}{2} z^3 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^{n+1} \end{aligned}$$

と表される。このことから、

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{c_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

は $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上正則である。また、すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $h(z) \neq 0$ より、 $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上で $h(1/z) \neq 0$ である。これより、 $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 上正則かつそこで単葉である奇関数

$$g(z) := \frac{1}{h\left(\frac{1}{z}\right)}$$

を定義できる. ここで, $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ における g の Laurent 展開を行い, z, z^{-1} の係数を具体的に求める. \mathbb{D}_0 上正則な関数 $F(z) := 1/h(z)$ を考える. このとき, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{h(z)} \\ &= \frac{1}{z + \frac{c_2}{2}z^3 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c_2}{2}z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{G(z)} \end{aligned}$$

と表される. G は \mathbb{D} 上正則かつそこで $G(z) \neq 0$ である. つまり, $1/G(z)$ も \mathbb{D} 上正則である. よって, $F(z) = 1/h(z)$ は $z = 0$ を 1 位の極にもつ. このことと, F が奇関数であることから, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して,

$$F(z) = \frac{b_{-1}}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n-1}$$

と表される. ここで, $z = 1/w$ と置き換えると, すべての $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ に対して,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{1}{h\left(\frac{1}{w}\right)} \\ &= b_{-1}w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{w^{2n-1}} \\ &= g(w) \end{aligned}$$

と表される. ここで得られた $g(w)$ の Laurent 展開と $h(1/w)$ の Taylor 展開と, $g(w)h(1/w) = 1$ を用いて係数比較を行うと,

$$\left(b_{-1}w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{w^{2n-1}}\right) \left(\frac{1}{w} + \frac{c_2}{2} \cdot \frac{1}{w^3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{w^{n+1}}\right) = 1$$

より, $b_{-1}w \cdot \frac{1}{w} = 1$ より, $b_{-1} = 1$ となる. $b_{-1}w \cdot \frac{c_2}{2} \cdot \frac{1}{w^3} + \frac{b_1}{w} \cdot \frac{1}{w} = 0$ より, $b_1 = -c_2/2$ となる. これより,

$$g(w) = w - \frac{c_2}{2} \cdot \frac{1}{w} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{w^{2n-1}}$$

と表される. よって, 定理 3.3(面積定理) より, $|-c_2/2| \leq 1$, つまり $|c_2| \leq 2$ となる.

等号成立を示す. まず, $|c_2| = 2$, つまり $|c_2/2| = 1$ と仮定する. このとき, ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $z \in \mathbb{D}_0$ に対して

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\beta}z)^2}$$

と表されることを示す. $z = re^{i\theta}$ ($r \in (0, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$) と表し, $z_0 := \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}}$ とおくと, $|z_0| = 1/r^{\frac{1}{2}} > 1$ であり, $z_0^2 = 1/z$ である. このとき, g に対して定理 3.3(面積定理)

を用いると、等号成立条件より、ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し、 $g(z_0) = z_0 + \frac{e^{i\beta}}{z_0}$ と表される。
 $g(z_0) = 1/h(1/z_0)$ より、

$$\frac{1}{h\left(\frac{1}{z_0}\right)} = z_0 + \frac{e^{i\beta}}{z_0}$$

と表される。変形していくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{f(z_0^{-2})}{z_0^{-2}}}} &= z_0 + \frac{e^{i\beta}}{z_0}, \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}} &= 1 + \frac{e^{i\beta}}{z_0^2} = 1 + ze^{i\beta}, \\ \frac{f(z)}{z} &= \frac{1}{(1 + ze^{i\beta})^2}, \\ f(z) &= \frac{z}{(1 + ze^{i\beta})^2}. \end{aligned}$$

一方、仮定より $f(0) = 0$ である。よって、 $z = 0$ でも成立する。

次に、 f が Koebe 関数である、すなわちある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z) = z/(1 + ze^{i\beta})^2$ と表されると仮定する。このとき、 $ze^{i\beta} \in \mathbb{D}$ より、

$$\frac{1}{1 + ze^{i\beta}} = \frac{1}{1 - (-ze^{i\beta})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{i\beta} z)^n$$

と表される。両辺 z について微分すると、右辺は項別微分可能で、

$$\frac{-e^{i\beta}}{(1 + ze^{i\beta})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-e^{i\beta})^n z^{n-1}$$

と表される。これより、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-ze^{i\beta}}{-e^{i\beta}(1 + ze^{i\beta})^2} \\ &= \frac{z}{-e^{i\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} n(-e^{i\beta})^n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(-e^{i\beta})^{n-1} z^n. \end{aligned}$$

したがって、 $n = 2$ のとき、

$$|2(-e^{i\beta})| = 2.$$

□

第2章で、 \mathbb{D} 上で正則な関数の像領域の内部にどのくらいの大きさの半径をもつ開円板が含まれるかという Bloch の定理と、それに関連する Bloch 定数の評価について考えた。Bloch の定理の仮定に単葉を加えた場合については次の Koebe の 1/4 定理というものがある。

定理 3.7 (Koebe の 1/4 定理). $f \in \mathcal{S}$ とする. このとき, $B(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D})$ が成り立つ.

証明. $f(\mathbb{D})^c \subset \mathbb{C} \setminus B(0, 1/4) = B(0, 1/4)^c$ を示す. f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

と表す. 定理 3.6 (Bieberbach の係数定理) より $|c_2| \leq 2$ である. 任意に $\zeta_0 \in f(\mathbb{D})^c$ をとる. 但し, $f(0) = 0$ より $\zeta_0 \neq 0$ である. このとき, \mathbb{D} 上で正則な関数

$$g(z) := \frac{\zeta_0 f(z)}{\zeta_0 - f(z)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を定義できる. $g(0) = 0$ である. g の導関数は,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\zeta_0 f'(z)(\zeta_0 - f(z)) + \zeta_0 f(z)f'(z)}{(\zeta_0 - f(z))^2} \\ &= \frac{\zeta_0^2 f'(z)}{(\zeta_0 - f(z))^2} \end{aligned}$$

より, $g'(0) = 1$ である. $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$ を任意にとる. このとき, f の単葉性に注意すると,

$$\begin{aligned} g(z_1) - g(z_2) &= \frac{\zeta_0 f(z_1)}{\zeta_0 - f(z_1)} - \frac{\zeta_0 f(z_2)}{\zeta_0 - f(z_2)} \\ &= \frac{\zeta_0 f(z_1)(\zeta_0 - f(z_2)) - \zeta_0 f(z_2)(\zeta_0 - f(z_1))}{(\zeta_0 - f(z_1))(\zeta_0 - f(z_2))} \\ &= \frac{\zeta_0^2 (f(z_1) - f(z_2))}{(\zeta_0 - f(z_1))(\zeta_0 - f(z_2))} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となるので, g は \mathbb{D} 上単葉である. よって, $g \in \mathcal{S}$ である. g の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

と表す. g の 2 階導関数は,

$$\begin{aligned} g''(z) &= \frac{\zeta_0^2 f''(z)(\zeta_0 - f(z))^2 + \zeta_0^2 f'(z)2(\zeta_0 - f(z))f'(z)}{(\zeta_0 - f(z))^4} \\ &= \frac{\zeta_0^2 f''(z)(\zeta_0 - f(z)) + \zeta_0^2 f'(z)2f'(z)}{(\zeta_0 - f(z))^3} \end{aligned}$$

であることから,

$$g''(0) = \frac{\zeta_0^2 f''(0)\zeta_0 + 2\zeta_0^2}{\zeta_0^3} = 2c_2 + \frac{2}{\zeta_0}$$

が得られる. これより, $a_2 = \frac{1}{2} \left(2c_2 + \frac{2}{\zeta_0} \right) = c_2 + \frac{1}{\zeta_0}$ である. したがって,

$$g(z) = z + \left(c_2 + \frac{1}{\zeta_0} \right) z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$$

と表される。よって、定理 3.6(Bieberbach の係数定理) より $\left|c_2 + \frac{1}{\zeta_0}\right| \leq 2$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\zeta_0}\right| - |c_2| &\leq 2, \\ \left|\frac{1}{\zeta_0}\right| &\leq 2 + |c_2| \leq 4, \end{aligned}$$

すなわち、 $|\zeta_0| \geq 1/4$ となる。 \square

Koebe の 1/4 定理から、 $f \in \mathcal{S}$ とその導関数の絶対値に関する次の不等式が得られる。

定理 3.8 (Koebe の歪曲定理). $f \in \mathcal{S}$ とする。このとき、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して、

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}, \quad (3.2)$$

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \quad (3.3)$$

が成り立つ。

証明. $z \in \mathbb{D}$ を任意にとる。

不等式 (3.2) の証明. $z = 0$ のときは不等式は成立。以下、 $z \neq 0$ と仮定する。

$$w = w(\zeta) := \frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

を考える。 w は \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} から \mathbb{D} への全単射で、 $w(0) = z$ である。 f は \mathbb{D} 上正則かつ単葉なので、定理 1.20 より $f'(z) \neq 0$ である。よって、 \mathbb{D} 上で正則な関数

$$G(\zeta) := \frac{f(w(\zeta)) - f(z)}{f'(z)(1 - |z|^2)}$$

を定義できる。 $G(0) = 0$ である。 G の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を、

$$G(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

と表す。 G と w の導関数はそれぞれ、

$$\begin{aligned} G'(\zeta) &= \frac{f'(w(\zeta))w'(\zeta)}{f'(z)(1 - |z|^2)}, \\ w'(\zeta) &= \frac{1 + \bar{z}\zeta - (\zeta + z)\bar{z}}{(1 + \bar{z}\zeta)^2} = \frac{1 - |z|^2}{(1 + \bar{z}\zeta)^2} \end{aligned}$$

であることから、 $G'(0) = \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{f'(z)(1 - |z|^2)} = 1$ が得られる。さらに、 G は \mathbb{D} 上単葉である。これより、 G に対して定理 3.6(Bieberbach の係数定理) を用いると、 $|b_2| \leq 2$ となる。 G, w の 2 階導関数は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} G'(\zeta) &= \frac{f''(w(\zeta))w'(\zeta)w'(\zeta) + f'(w(\zeta))w''(\zeta)}{f'(z)(1 - |z|^2)}, \\ \frac{d}{d\zeta} w'(\zeta) &= \frac{-(1 - |z|^2)2(1 + \bar{z}\zeta)\bar{z}}{(1 + \bar{z}\zeta)^4} = -\frac{(1 - |z|^2)2\bar{z}}{(1 + \bar{z}\zeta)^3} \end{aligned}$$

であることから,

$$\begin{aligned} G''(0) &= \frac{f''(z)(1-|z|^2)(1-|z|^2) - f'(z)(1-|z|^2)2\bar{z}}{f'(z)(1-|z|^2)} \\ &= \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z} \end{aligned}$$

が得られる. したがって,

$$b_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z} \right\}.$$

これより,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z} \right| &\leq 4, \\ \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2} \right| &\leq \frac{4}{1-|z|^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

が得られる. ここで, 0 から z を結ぶ線分 l を考える. $z = |z|e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と表す. l のパラメータ表示を $l: \rho(t) := te^{i\theta}$ ($0 \leq t \leq |z|$) とする. すべての $\rho \in \mathbb{D}$ に対して $f'(\rho) \neq 0$ であることから, 次の線積分

$$\int_l \left\{ \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} - \frac{2\bar{\rho}}{1-|\rho|^2} \right\} d\rho$$

を定義できる. これより,

$$\begin{aligned} \left| \int_l \left\{ \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} - \frac{2\bar{\rho}}{1-|\rho|^2} \right\} d\rho \right| &= \left| \int_0^{|z|} \left\{ \frac{f''(\rho(t))}{f'(\rho(t))} - \frac{2\overline{\rho(t)}}{1-|\rho(t)|^2} \right\} e^{i\theta_0} dt \right| \\ &\leq \int_0^{|z|} \left| \frac{f''(\rho(t))}{f'(\rho(t))} - \frac{2\overline{\rho(t)}}{1-|\rho(t)|^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^{|z|} \frac{4}{1-|\rho(t)|^2} dt \\ &= \int_0^{|z|} \frac{4}{1-t^2} dt = 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} \end{aligned}$$

が得られる. 一方, 定理 1.19 より, ある \mathbb{D} 上で正則な関数 h で, $h(0) = 0$ かつ, \mathbb{D} 上 $e^h = f'$ を満たすものが存在する. $\log f' := h$ と定めると, $\log f'(0) = h(0) = 0$ で,

$$\frac{d}{dz} \log f' = \frac{f''}{f'}$$

であることに注意すると,

$$\log f'(z) - \log f'(0) = \int_l \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} d\rho.$$

これより,

$$\begin{aligned}
\int_l \left\{ \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} - \frac{2\bar{\rho}}{1-|\rho|^2} \right\} d\rho &= \int_l \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} d\rho - \int_0^{|z|} \frac{2te^{-i\theta_0}}{1-t^2} e^{i\theta_0} dt \\
&= \log f'(z) - \log f'(0) - 2 \int_0^{|z|} \frac{t}{1-t^2} dt \\
&= \log f'(z) + \ln(1-|z|^2), \\
|\log f'(z) + \ln(1-|z|^2)| &\leq 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}.
\end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(\log f'(z)) = \ln |f'(z)|$ であることから,

$$\begin{aligned}
|\ln |f'(z)| + \ln(1-|z|^2)| &\leq 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \\
|\ln\{|f'(z)|(1-|z|^2)\}| &\leq 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \\
-2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} &\leq \ln\{|f'(z)|(1-|z|^2)\} \leq 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \\
\frac{(1-|z|)^2}{(1+|z|)^2} \cdot \frac{1}{1-|z|^2} &\leq |f'(z)| \leq \frac{(1+|z|)^2}{(1-|z|)^2} \cdot \frac{1}{1-|z|^2}, \\
\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} &\leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.
\end{aligned}$$

不等式 (3.3) の証明. 上からの評価を行う. $z=0$ のときは不等式は成立. 以下, $z \neq 0$ と仮定する. 0 から z を結ぶ線分 l を考える. $z = |z|e^{i\theta_0}$ と表す. l のパラメータ表示を $l: \rho(t) := te^{i\theta_0}$ ($0 \leq t \leq |z|$) とする. これより,

$$f(z) - f(0) = \int_l f'(\rho) d\rho$$

と表される. $f(0) = 0$ と不等式 (3.2) より,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |f(z) - f(0)| = \left| \int_l f'(\rho) d\rho \right| = \left| \int_0^{|z|} f'(\rho(t)) e^{i\theta_0} dt \right| = \int_0^{|z|} |f'(\rho(t))| dt \\
&\leq \int_0^{|z|} \frac{1+|te^{i\theta_0}|}{(1-|te^{i\theta_0}|)^3} dt = \int_0^{|z|} \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.
\end{aligned}$$

下からの評価を行う. $|z|/(1+|z|)^2 \leq 1/4$ なので, $|f(z)| \geq 1/4$ のときは不等式が成り立つ. 以下, $|f(z)| < 1/4$ と仮定する. このとき, 定理 3.7(Koebe の 1/4 定理) より, 0 から $f(z)$ を結ぶ線分 $l \subset f(\mathbb{D})$ をとることができる. $C := f^{-1}(l)$ と定めると, f^{-1} が \mathbb{D} 上正則かつ単葉であることと l は線分であることから, C は 0 から z 滑らかな単純曲線である. $C: \gamma := \gamma(t)$ ($t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = z$) とパラメータ表示する. これより, $l = f(C): w = w(t) = f(\gamma(t))$ とパラメータ表示される. l は線分なので, $f(\gamma(t)) = tf(z)$ ($t \in [0, 1]$) と表される. 逆関数を考えると, $\gamma(t) = f^{-1}(tf(z))$ と表され

る. ここで, $s := |\gamma(t)|$ とおく. すると, $t = t(s)$ と表すことができる. いま,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(0)| = \left| \int_C f'(\gamma) d\gamma \right| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right|, \\ \gamma'(t) &= (f^{-1})'(tf(z))f'(z), \\ f'(\gamma(t))\gamma'(t) &= \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(tf(z)) = f'(z), \\ |f(z)| &= \int_C |f'(\gamma)| |d\gamma| = \int_0^1 |f'(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_0^{|z|} |f'(\gamma(t(s)))\gamma'(t(s))t'(s)| ds. \end{aligned}$$

ここで, $|\gamma(t(s))| = s$, $|\gamma(t(s + \Delta s))| = s + \Delta s$, $\Delta s \neq 0$ とすると,

$$\begin{aligned} |\gamma(t(s + \Delta s)) - \gamma(t(s))| &\geq |\gamma(t(s + \Delta s))| - |\gamma(t(s))| = |\Delta s|, \\ \frac{|\gamma(t(s + \Delta s)) - \gamma(t(s))|}{|\Delta s|} &\geq 1. \end{aligned}$$

ここで, $\Delta s \rightarrow 0$ とすれば, $|\frac{d}{ds}\gamma(t(s))| \geq 1$ が得られる. さらに, $|\gamma(t(s))| = s$ と不等式 (3.2) より,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_0^{|z|} |f'(\gamma(t(s)))\gamma'(t(s))t'(s)| ds \geq \int_0^{|z|} \frac{1 - |\gamma(t(s))|}{(1 + |\gamma(t(s))|)^3} ds \\ &= \int_0^{|z|} \frac{1 - s}{(1 + s)^3} ds = \frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \end{aligned}$$

が得られる. □

3.2 Bieberbach 予想とその歴史

1916 年に Bieberbach [3] は定理 3.6(Bieberbach の係数定理) を証明した. さらに続けて Bieberbach は次を予想した.

予想 (Bieberbach 予想). $f \in \mathcal{S}$ とする. f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表す. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|a_n| \leq n$$

が成り立つ. 等号成立は f が Koebe 関数である場合に限る.

Koebe 関数を Taylor 展開すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して展開係数の絶対値が n に等しくなることがわかる. 実際, Taylor 展開の一意性に注意して,

$$f(z) = \frac{-ze^{i\beta}}{-e^{i\beta}(1 + ze^{i\beta})^2} = \frac{z}{-e^{i\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} n(-e^{i\beta})^n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-e^{i\beta})^{n-1} z^n$$

と表される。 Bieberbach 予想は正則関数であることと解析関数であることの同値性、つまり正則性と Taylor 展開可能であることの同値性という複素解析学における重要な結果をもとに、 \mathbb{D} における正則性と単葉性という条件のみを仮定した関数の族 \mathcal{S} に含まれる関数の展開係数の大きさがどのくらいになるかという問題である。

以下、 Bieberbach 予想解決の歴史を部分的に提示する。

- ・ 1923 年, Löwner[18] が $n = 3$ の場合を証明した。
- ・ 1955 年, Garabedian と Schiffer[13] が $n = 4$ の場合に予想が成り立つことを証明した。
- ・ 1969 年, 小澤 [19] が $n = 6$ の場合に予想が成り立つことを証明した。
- ・ 1972 年, Pederson と Schiffer[20] が $n = 5$ の場合に予想が成り立つことを証明した。

この予想は単葉関数論における大きな問題の 1 つで、長い間解決されなかった。しかし、 Bieberbach 予想に世界の数学者が取り組むことで単葉関数論は発展していった。そして 1985 年に de Branges [5] が予想が正しいことを証明した。その後、 Fitzgerald と Pommerenke の 2 人によって別証明 [12] が与えられた。別証明の方は単葉関数論とのつながりが深かったため、私はこちらを研究対象とした。

3.3 Bieberbach 予想の証明と核収束定理の関連

以下、 Fitzgerald と Pommerenke による Bieberbach 予想の証明の手順を説明する。まず、 Robertson 予想と予想の定式化に必要な命題を記載する。

命題 3.9. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対して次の 2 条件を満たすある関数 $g \in \mathcal{S}$ が存在する：

- (i) すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $(g(z))^2 = f(z^2)$.
- (ii) g は \mathbb{D} 上の奇関数。

証明. $f \in \mathcal{S}$ を任意にとる。 f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表す。 また、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $z^2 \in \mathbb{D}$ であることより、 \mathbb{D} 上で正則な関数

$$h(z) := f(z^2)$$

を定義できる。 h の \mathbb{D} 上の Taylor 展開は、

$$h(z) = z^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k} = z^2 \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k-2} \right)$$

と表される。 $1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k-2}$ は \mathbb{D} 上絶対収束する。 よって、 $h_1(z) := 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k-2}$ とおけば、 h_1 は \mathbb{D} 上で正則な偶関数で、 $h_1(0) = 1$ である。 また、 f は \mathbb{D} 上単葉かつ $f(0) = 0$

であることと, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $z^2 \neq 0$ であることから $f(z^2) \neq f(0) = 0$, つまり,

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{z^2} = \frac{f(z^2)}{z^2} \neq 0$$

である. よって, 定理 1.19 より, ある \mathbb{D} 上で正則な関数 g_0 で, $g_0(0) = 0$ かつ, \mathbb{D} 上 $e^{g_0} = h_1$ を満たすものが存在する. g_0 は偶関数である. これを用いて,

$$\sqrt{h_1(z)} := \exp\left(\frac{1}{2}g_0(z)\right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

を定義できる. $\sqrt{h_1}$ も \mathbb{D} 上で正則な偶関数である. これより, \mathbb{D} 上で正則な奇関数

$$g(z) := z\sqrt{h_1(z)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を定義できる. また,

$$g(z)^2 = z^2 e^{g_0(z)} = z^2 h_1(z) = h(z) = f(z^2)$$

と表される. $g(0) = 0$ である. さらに, $g_0(0) = 0$ に注意して,

$$g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\sqrt{h_1(z)}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{2}g_0(z)\right) = 1$$

である. $g(0) = 0$ と, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $g(z) \neq 0$ であることから, ある $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_0$, $z_1 \neq z_2$ が存在し, $g(z_1) = g(z_2)$ が成り立つと仮定する. 両辺 2 乗すると,

$$f(z_1^2) = f(z_2^2)$$

である. f の単葉性より, $z_1^2 = z_2^2$ である. 仮定より, $z_1 \neq z_2$ なので $z_1 = -z_2$ である. このことと, g が奇関数で, $g(z_1) = g(z_2)$ であることから,

$$g(z_1) = g(-z_2) = -g(z_2) = -g(z_1)$$

となり, $g(z_1) = 0$ より $z_1 = 0$ となってしまう, 矛盾が生じる. よって, g は \mathbb{D} 上単葉であるから $g \in \mathcal{S}$ である. \square

予想 (Robertson 予想). $f \in \mathcal{S}$ を任意にとる. f に対して命題 3.9 を用いて得られる関数を g とする. g の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を, g が奇関数であることに注意して,

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}$$

と表す. このとき, 各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して,

$$1 + \sum_{k=2}^n |c_{2k-1}|^2 \leq n$$

が成り立つ.

この Robertson 予想を仮定すると, Bieberbach 予想が成り立つことを証明できる.

定理 3.10. Robertson 予想が真であるならば, Bieberbach 予想は真である.

証明. $f \in \mathcal{S}$ を任意にとる. f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開は

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表される. f に対して命題 3.9 を用いて得られる関数を g とすると, すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $g(z)^2 = f(z^2)$ と表される. このことと, f と g の Taylor 展開より,

$$\begin{aligned} z^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k} &= \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

と表される. 但し, $c_1 = 1$ である. さらに,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1} =: \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \quad \left(\text{但し, } b_k := \begin{cases} c_k & (k \text{ は奇数}) \\ 0 & (k \text{ は偶数}) \end{cases} \right)$$

と表す. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ は \mathbb{D} 上絶対収束するので, (3.5) の最右辺に対して Cauchy 積を用いると,

$$(3.5) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k b_i b_{k-i} z^k$$

と表される. これより, 各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して z^{2n} について係数比較を行うと,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{2n} b_i b_{2n-i} \\ &= b_1 b_{2n-1} + b_2 b_{2n-2} + \cdots + b_{2n-2} b_2 + b_{2n-1} b_1 + b_{2n} b_0 \\ &= c_1 c_{2n-1} + c_3 c_{2n-3} + \cdots + c_{2n-3} c_3 + c_{2n-1} c_1 \\ &= \sum_{i=1}^n c_{2i-1} c_{2n-2i+1} \end{aligned}$$

である. さらに, Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$|a_n| = \left| \sum_{i=1}^n c_{2i-1} c_{2n-2i+1} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |c_{2i-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |c_{2n-2i+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n |c_{2i-1}|^2$$

が成り立つ. いま, Robertson 予想が真であると仮定しているので,

$$|a_n| \leq \sum_{i=1}^n |c_{2i-1}|^2 \leq n$$

が成り立つ. □

Robertson 予想は、次の Milin 予想を仮定すると証明することができる。

予想 (Milin 予想). 任意に $f \in \mathcal{S}$ をとる. f に対して \mathbb{D} 上で正則な関数 h で, $h(0) = 0$ かつ \mathbb{D} 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{f(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる. h の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k \quad (3.6)$$

と表す. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0 \quad (3.7)$$

が成り立つ.

定理 3.11. Milin 予想が真であるならば, Robertson 予想は真である.

定理 3.11 を証明するための準備を行う.

補題 3.12 (部分求和公式). $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$ をある有限個の複素数からなる点列とする. 但し, $N \geq 2$ とする. 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して $B_k := \sum_{n=1}^k b_n$ とおく. このとき,

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

が成り立つ.

証明. 仮定より, $b_1 = B_1$ で, $2 \leq k \leq N$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ に対して, $b_k = B_k - B_{k-1}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + \sum_{n=2}^N a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_1 b_1 - a_1 B_1 + \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=2}^N a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \end{aligned}$$

が成り立つ. □

補題 3.13. $\{a_n\}_{n=1}^N$ をある有限個の複素数からなる点列とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^N (N+1-n) a_n = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k a_n$$

が成り立つ.

証明. $N = 1$ のときは明らか. 以下, $N \geq 2$ のときを考える. 補題 3.12(部分求和公式) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (N+1-k)a_k &= (N+1-N) \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^{N-1} \{N+1-k - (N+1-k-1)\} \sum_{n=1}^k a_n \\ &= \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^k a_n \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k a_n \end{aligned}$$

が成り立つ. □

次の不等式は, 単葉関数論において重要な不等式の 1 つである.

定理 3.14 (Lebedev–Milin の不等式). 関数 ϕ はある開円板 $B(0, R)$ で正則かつ $\phi(0) = 0$ であるとする. また, ϕ の $B(0, R)$ 上の Taylor 展開を,

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

と表す. さらに, ϕ を用いて定義される $B(0, R)$ で正則な関数 e^ϕ の $B(0, R)$ 上の Taylor 展開を,

$$e^{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k, \quad \beta_0 = 1$$

と表す. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{k=0}^n |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}$$

が成り立つ.

証明. e^ϕ の Taylor 展開よりその導関数は,

$$\frac{d}{dz} e^{\phi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k z^{k-1}$$

と表される. 一方,

$$\frac{d}{dz} e^{\phi(z)} = \phi'(z) e^{\phi(z)}$$

であることから, すべての $z \in B(0, R)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k z^{k-1} &= \phi'(z)e^{\phi(z)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\alpha_{k+1} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (j+1)\alpha_{j+1}\beta_{k-j} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)\alpha_{j+1}\beta_{k-j-1} z^{k-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

と表される. 但し, (3.8) は $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\alpha_{k+1}z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ は $B(0, R)$ 上絶対収束することから Cauchy 積を用いた. よって, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して z^{m-1} について係数比較を行うと,

$$m\beta_m = \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)\alpha_{j+1}\beta_{m-j-1} = \sum_{j=1}^m j\alpha_j\beta_{m-j}$$

と表される. よって, Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$m^2|\beta_m|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m j^2|\alpha_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m |\beta_{m-j}|^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^m j^2|\alpha_j|^2 \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} |\beta_j|^2 \right)$$

が成り立つ. ここで,

$$A_m := \sum_{j=1}^m j^2|\alpha_j|^2, \quad B_{m-1} := \sum_{j=0}^{m-1} |\beta_j|^2$$

とおく. すると,

$$m^2|\beta_m|^2 \leq A_m B_{m-1}$$

と表される. $n \in \mathbb{N}$ を任意にとり, 固定する. すると,

$$B_n = B_{n-1} + |\beta_n|^2 \leq B_{n-1} \left(1 + \frac{A_n}{n^2} \right) = \frac{n+1}{n} \left\{ 1 + \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right\} B_{n-1}$$

となる. ここで, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $1 + x \leq e^x$ であることを用いると,

$$\begin{aligned}
B_n &\leq \frac{n+1}{n} \exp \left\{ \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right\} B_{n-1} \\
&\leq \frac{n+1}{n} \exp \left\{ \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right\} \frac{n}{n-1} \exp \left\{ \frac{A_{n-1} - (n-1)}{(n-1)n} \right\} B_{n-2} \\
&\vdots \\
&\leq \frac{n+1}{n} \exp \left\{ \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right\} \frac{n}{n-1} \exp \left\{ \frac{A_{n-1} - (n-1)}{(n-1)n} \right\} \times \cdots \\
&\quad \cdots \times \frac{1+1}{1} \exp \left\{ \frac{A_1 - 1}{1(1+1)} \right\} B_{1-1} \\
&= (n+1) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k - k}{k(k+1)} \right\} \\
&= (n+1) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. $n = 1$ と仮定すると,

$$\begin{aligned}
B_1 &\leq 2 \exp \left\{ \frac{1}{2} (|\alpha_1|^2 - 1) \right\}, \\
\sum_{k=0}^1 |\beta_k| &\leq 2 \exp \left\{ \frac{1}{2} (|\alpha_1|^2 - 1) \right\}
\end{aligned}$$

となるので, $n = 1$ のとき不等式は成り立つ. 以下, $n \geq 2$ と仮定する. ここで, $\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)}$ について考える. 各 $l = 1, 2, \dots, n$ に対して $X_l := \sum_{k=1}^l \frac{1}{k(k+1)}$ とおく. そして, $\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)}$ に補題 3.12(部分求和公式) を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} (A_k - A_{k+1}) X_k + A_n X_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) (-(k+1)^2 |\alpha_{k+1}|^2) + \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-(k+1)^2 |\alpha_{k+1}|^2) + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) |\alpha_{k+1}|^2 + \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)^2 |\alpha_{k+1}|^2 + \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 - \sum_{k=2}^n k(k-1) |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^n k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2
\end{aligned}$$

となる。これより,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^n k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2|\alpha_k|^2 + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n (n+1)k|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n k^2|\alpha_k|^2 + n+1 - \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{k} - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left\{ (n+1)k|\alpha_k|^2 - k^2|\alpha_k|^2 + 1 - \frac{n+1}{k} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。但し、最後の等号は補題 3.13 を用いた。以上より,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |\beta_k|^2 &= B_n \\
&\leq (n+1) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right\} \\
&= (n+1) \exp \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

次の結果は, $f \in \mathcal{S}$ の, f/z に対して $z=0$ で値 0 をとるような \mathbb{D} 上で正則な対数の分子が存在することを保証するものである。

命題 3.15. $f \in \mathcal{S}$ とする。このとき, \mathbb{D} 上で正則な関数 h で, $h(0) = 0$ かつ

$$e^{2h(z)} = \frac{f(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものを定義できる。

証明. f の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表す。このとき, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z} \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}$$

と表される. $f(z)/z$ は \mathbb{D}_0 で正則である. また, $\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}$ は \mathbb{D} 上絶対収束するので, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1$ となる. これより, $f(z)/z$ を改めて $z = 0$ で 1 , $z \in \mathbb{D}_0$ で $1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}$ という値をとる関数と定義すれば, $f(z)/z$ は \mathbb{D} 上で正則である. また, f は \mathbb{D} 上単葉かつ $f(0) = 0$ であることから, すべての $z \in \mathbb{D}_0$ に対して $f(z)/z \neq 0$ で, さらに $z = 0$ で $f(z)/z = 1$ であることから, \mathbb{D} 上で $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ である. よって, 定理 1.19 を $\frac{f(z)}{z}$ に用いると, ある \mathbb{D} 上で正則な関数 g で, $g(0) = 0$ かつ

$$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものが存在する. これより, $h := g/2$ と定義すれば, h は \mathbb{D} 上正則かつ $h(0) = 0$ で, さらに \mathbb{D} 上で

$$e^{2h(z)} = e^{2 \cdot \frac{1}{2} g(z)} = \frac{f(z)}{z}$$

と表される. □

以上を踏まえて, 定理 3.11 を証明する.

定理 3.11 の証明. $f \in \mathcal{S}$ を任意にとる. f に対して命題 3.9 を用いると, ある \mathbb{D} 上の奇関数 $g \in \mathcal{S}$ が存在し, すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $g(z)^2 = f(z^2)$ と表される. g が奇関数であることに注意して, \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}, \quad c_1 = 1$$

と表す. すべての $z \in \mathbb{D} \setminus (-1, 0]$ に対して,

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z \quad (-\pi < \text{Arg } z \leq \pi)$$

を定義できる. $\text{Log } z$ は $\mathbb{D} \setminus (-1, 0]$ 上正則である. さらに,

$$\sqrt{z} := \exp\left(\frac{1}{2} \text{Log } z\right)$$

を定義できる. \sqrt{z} も $\mathbb{D} \setminus (-1, 0]$ 上正則かつ $\sqrt{z} \in \mathbb{D}_0$ である. これより,

$$\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)^2 = \frac{f(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D} \setminus (-1, 0])$$

と表される. 命題 3.15 の証明内の議論より, $f(z)/z$ は \mathbb{D} 上正則かつそこで $f(z)/z \neq 0$ である. 一方, $\mathbb{D} \setminus (-1, 0]$ 上で

$$\begin{aligned} \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} &= \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (\sqrt{z})^{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (\sqrt{z})^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^k \end{aligned}$$

と表される. $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^k$ は \mathbb{D} 上正則であるので, $(-1, 0]$ 上で $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^k$ という値をとる関数を改めて $g(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ と定義すれば, $g(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ は \mathbb{D} 上で正則となる. これより, $(g(\sqrt{z})/\sqrt{z})^2$ も \mathbb{D} 上正則である. したがって, 定理 1.21(一致の定理) より \mathbb{D} 上で

$$\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)^2 \equiv \frac{f(z)}{z}$$

と表される. つまり, \mathbb{D} 上で $g(\sqrt{z})/\sqrt{z} \neq 0$ であるので命題 1.19 より, ある \mathbb{D} 上で正則な関数 \tilde{h} で, \mathbb{D} 上

$$e^{\tilde{h}(z)} = \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

を満たすものが存在する. これより,

$$\begin{aligned} e^{2\tilde{h}(z)} &= \left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)^2 \\ &= \frac{f(z)}{z} \\ &= e^{2h(z)}, \\ e^{h(z)} &= \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^k \end{aligned} \tag{3.9}$$

と表される. よって, 式 (3.6), (3.9) に対して定理 3.14(Lebedev–Milin の不等式) を用いると, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{k=0}^n |c_{2k+1}|^2 \leq (n+1) \exp \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}$$

が成り立つ. いま, Milin 予想が真であると仮定しているので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |c_{2k+1}|^2 &\leq n+1, \\ 1 + \sum_{k=2}^{n+1} |c_{2k-1}|^2 &\leq n+1 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, Robertson 予想は真である. □

以上より, Fitzgerald と Pommerenke による別証明に従うと, Bieberbach 予想を証明するためには, Milin 予想を証明すればよいということがわかる.

次に, Carathéodory の核収束定理と Bieberbach 予想の証明の関連について説明するために必要な截線領域, 截線写像を定義する. 尚, 「截線」という言葉は小松 [39] から引用した.

定義 3.16 (截線領域, 截線写像). $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $z = z(t)$ で, $t \in [0, t_0)$ で連続, $z(0) = z_0$ かつ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |z(t)| = +\infty$$

を満たすものを z_0 から無限遠点 ∞ を結ぶ曲線の方程式という. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ を, ある点 $z_0 \in \mathbb{C}$ から ∞ を結ぶある単純曲線とする. このとき, 単連結領域 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ を截線領域という. さらに, \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} からある截線領域への全単射である関数を截線写像という.

次の定理 3.17 を証明するために Carathéodory の核収束定理が用いられる.

定理 3.17. $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ を截線写像の族とする. このとき, 各 $g \in \mathcal{S}^*$ に対してある \mathbb{D} 上で正則な関数 h で, $h(0) = 0$ かつ \mathbb{D} 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{g(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる. h の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

と表すとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$$

が成り立つならば, Milin 予想は真である.

定理 3.17 によって, 部分族 $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ に対して Milin 予想の結論の不等式 (3.7) が成り立つことを証明すれば Bieberbach 予想が証明されることになる. つまり, 族 \mathcal{S} 自身ではなく, \mathcal{S} よりも条件を少し強くした部分族 \mathcal{S}^* について考えればよいということになる. 定理 3.17 の証明については, 第 4.3 節で述べる.

尚, 本論文内では, 定理 3.17 以降の Bieberbach 予想の証明については触れない. 予想の証明については Fitzgerald と Pommerenke の論文や, 参考文献 [8], [14], [15], [24] に記述がある.

第4章 Carathéodory の核収束定理とその証明

本章では, Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に関する研究に関する成果について論じる. 第4.1節では, Carathéodory の核収束定理の定式化に必要な領域列の核と核収束の定義を行い, その例を挙げる. 第4.2節では, 第3.1節で述べた単葉関数論における主要な結果を用いて, Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明について不明瞭な部分の改善を行う. 第4.3節では, 第3.3節の最後に述べた定理3.17の証明について述べる. 尚, 本章の第4.1節, 第4.2の内容は [16] に基づいている.

4.1 領域列の核と核収束の定義とその例

まず, Carathéodory の核収束定理を定式化するために必要な概念である領域の列の核と核収束を定義する.

定義 4.1 (領域の列の核, 核収束). $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in D_n$ を満たすある領域の列とする. 集合 D' を次で定める:

$$D' := \{w \in \mathbb{C} \mid \{0, w\} \subset H \text{ を満たすある領域 } H \text{ が存在し,} \\ \text{十分大きなすべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } H \subset D_n\}.$$

このとき,

$$D := \{0\} \cup D'$$

と定め, これを $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核という. $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ のすべての部分列が $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ と同じ核 D をもつとき, $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D に核収束するといい, $D_n \rightarrow D$ と書く.

注意. $D' = \emptyset$ のとき, $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核 D は $D = \{0\}$ である.

領域の列の核と核収束について3つの例を紹介する. 具体例からも分かるように, 領域の列の核は単に番号 n を限りなく大きくしたときに現れるものとは必ずしも一致しない.

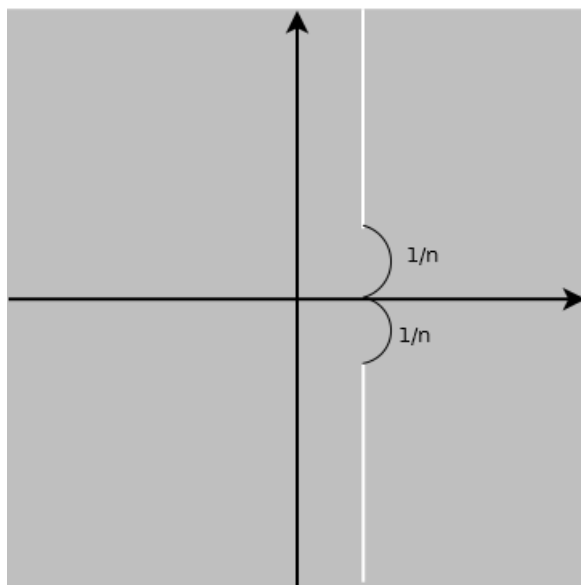
例 4.2. (i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \left\{ 1 + it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ を考える. このとき, $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核 D は,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 1\}$$

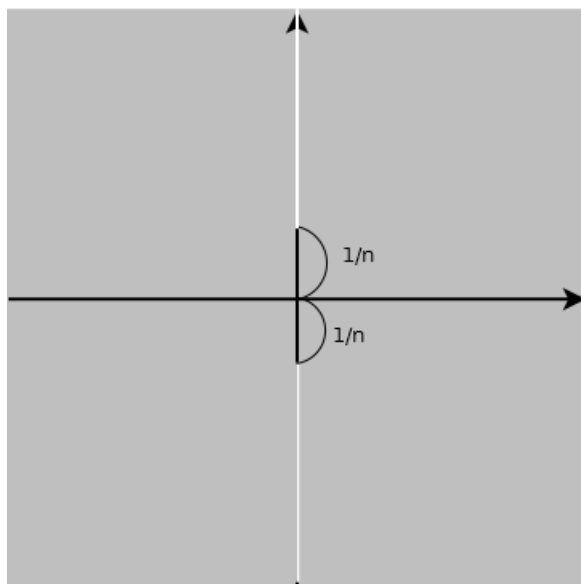
である。さらに、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので、 $D_n \rightarrow D$ である。



(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \left\{ it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ を考える。すると、どのように $\varepsilon \in (0, 1)$ をとってきてもある $n_0 \in \mathbb{N}$ で、 $B(0, \varepsilon) \not\subset D_{n_0}$ となってしまうので、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核 D は $D = \{0\}$ である。さらに、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので、 $D_n \rightarrow D$ である。



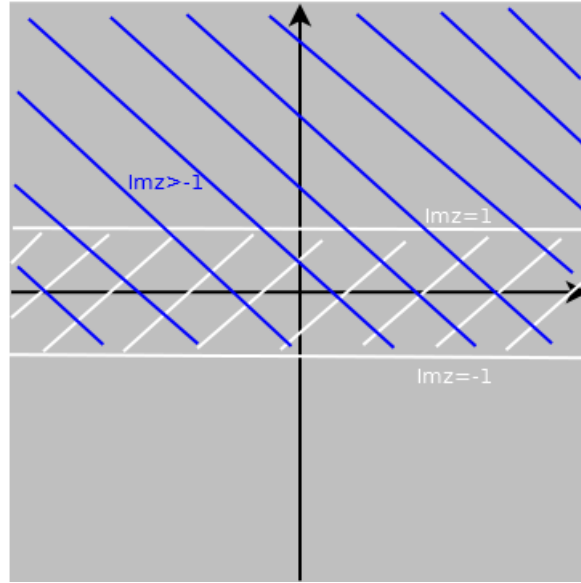
(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z = (-1)^n\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ を考える。すると、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核 D は、

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > -1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z < 1\}$$

だが、部分列 $\{D_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ の核は $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z < 1\}$ となってしまう、 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D に核収束しない。



4.2 Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明

Carathéodory の核収束定理については様々な文献に結果と証明が書かれている。それらの中でも特に [9], [21] は単葉関数論の古典的な名著であり, [14], [15], [24] は Bieberbach 予想の証明についても解説がある。これら 5 つの文献 ([9], [14], [15], [21], [24]) を調べたところ, 以下のような不明瞭な部分が見つかった。

- ・ 関数列と領域の列の評価について (Vitali の定理, Riemann の写像定理の一意性)。
- ・ 単連結領域の列の核は単連結領域であるか。

さらに, Carathéodory の核収束定理は今回参考にした 5 つの文献には必要十分条件の形で 1 つの定理として書かれていた。上記の不明瞭さ, 特に単連結性の扱いを精密にするために, 私は以下の 2 つの定理に分けて定式化した。以下の定理 4.3, 定理 4.4 は [16] による。

定理 4.3 (Izuki-K. 2018). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{D} 上正則かつそこで単葉である関数の列で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$ を満たすとする。 $D_n := f_n(\mathbb{D})$ と表し, 領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする。このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が \mathbb{D} 上ある関数 f に広義一様収束するならば, $f(\mathbb{D}) = D$ である。

定理 4.4 (Izuki-K. 2018). $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n \subsetneq \mathbb{C}$ かつ $0 \in D_n$ を満たすある単連結領域の列とする。 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{D} 上正則単葉なある関数の列で, \mathbb{D} から D_n への全射で, $f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$ を満たすとする。 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする。このとき, 以下が成立:

- $D_n \rightarrow D$ かつ $D = \{0\}$ であるならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{D} 上 0 に広義一様収束する。
- $D_n \rightarrow D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ が単連結領域であるならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{D} 上定数でないある関数 f に広義一様収束し, $f(\mathbb{D}) = D$ である。

参考にした5つの文献には、定理4.4の証明に関する内容について、先程述べたような不明瞭な部分があった。Step3, Step4でそれらを改善した。Step3でRiemannの写像定理の写像の一意性と定理4.3を用いる。Step4では定理1.38(Vitaliの定理)と定理4.3を用いる。

定理4.3の証明. (I) まず, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の極限関数 f が定数ではないときを考える。このとき、定理1.37より f は \mathbb{D} 上正則単葉である。すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 0$ より、

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

StepI-1. $f(\mathbb{D}) \subset D$ を示す。 $w_0 \in f(\mathbb{D})$ を任意にとる。 $w_0 = 0$ のとき、 $0 = f(0)$ より $w_0 \in D$ 。以下、 $w_0 \neq 0$ と仮定する。ある $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在し、 $w_0 = f(z_0)$ と表される。 $r \in (|z_0|, 1)$ を1つとる。 $H := f(B(0, r))$ と定義すれば、 f は $B(0, r)$ 上正則かつ定数ではないので、定理1.18(領域保存性の原理)より、 H は領域で、 $0 \in H$ かつ $w_0 \in H$ を満たす。ここで、どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても、ある $N > n$ で、 $H \not\subset D_N$ を満たすものが存在すると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} &1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在し, } H \not\subset D_{n_1} \\ &n_1 \text{ に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{ が存在し, } H \not\subset D_{n_2} \\ &\quad \vdots \\ &n_k \text{ に対してある番号 } n_{k+1} > k \text{ が存在し, } H \not\subset D_{n_{k+1}}, \end{aligned}$$

つまり、ある部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \{n\}_{n=1}^\infty$ と、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_k \in H$ かつ $\alpha_k \notin D_{n_k}$ を満たす点列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する。 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ の構成より、すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k > k$ が成り立つ。任意の $K > 0$ に対して Archimedes の公理より、 $L > K$ を満たすある $L \in \mathbb{N}$ が存在する。すべての $l \in \mathbb{N}$, $l > L$ に対して、 $n_l > n_L > L > K$ となるので、 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ は正の無限大に発散する。いま、 f は $\overline{B(0, r)}$ で連続なので、 $M := \max_{z \in \overline{B(0, r)}} |f(z)|$ が存在する。つまり、すべての $z \in B(0, r)$ に対して、 $|f(z)| \leq M$ が成り立つ。したがって、 H は有界領域である。よって、 H の閉包 \overline{H} も有界である。よって、Bolzano–Weierstrass の定理より、 $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \subset \overline{H}$ の部分列で、ある点 $\alpha^* \in \overline{H}$ に収束するものが存在する。これを改めて $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ と表す。いま、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_k \notin D_{n_k}$ かつ $D_{n_k} = f_{n_k}(\mathbb{D})$ なので、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して、

$$f_{n_k}(z) - \alpha_k \neq 0$$

となる。一方、 $\{f_{n_k} - \alpha_k\}_{k=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 $f - \alpha^*$ に広義一様収束し、 $f - \alpha^*$ は \mathbb{D} 上単葉なので、ある $z_1 \in \mathbb{D}$ が存在し、 $f(z_1) - \alpha^* \neq 0$ を満たす。よって、定理1.36(Hurwitzの定理)より、 \mathbb{D} 上で $f(z) - \alpha^* \neq 0$ 、つまり $f(z) \neq \alpha^*$ となってしまう、 $\alpha^* \in \overline{H} \subset f(\mathbb{D})$ に矛盾する。よって、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $H \subset D_n$ が成り立つ。いま、領域 H は $0 \in H$ かつ $w_0 \in H$ であるので、核の定義より $w_0 \in D$ である。ゆえに、 $f(\mathbb{D}) \subset D$ である。

StepI-2. $D \subset f(\mathbb{D})$ を示す。 $w_0 \in D$ を任意にとる。 $w_0 = 0$ のとき、 $0 = f(0)$ より $w_0 \in f(\mathbb{D})$ である。以下、 $w_0 \neq 0$ と仮定する。核の定義より、 $0 \in H$ かつ $w_0 \in H$ を満たすある領域 H が存在し、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $H \subset D_n$ が成り立つ。そのような n を1つとり、 N と表す。いま、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} から D_n へ

の全単葉なので、 D_n 上で f_n の逆関数 $\varphi_n := f_n^{-1}$ を定義できる。 φ_n は \mathbb{D} 上正則かつ単葉で、 $\varphi_n(0) = 0$ である。 特に、すべての $n \geq N$ に対して $H \subset D_n$ より、 H 上で正則な関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ を考えることができる。 φ_n は H から \mathbb{D} への写像なので、すべての $n \geq N$ とすべての $w \in H$ に対して、 $|\varphi_n(w)| < 1$ である。 つまり、 $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ は H 上一様有界であるので、定理 1.34 (Montel の定理) より、 $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ は H で正規族である。 すなわち、ある部分列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ で、 H 上広義一様収束するものが存在する。 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限関数を φ とする。 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して系 1.37 を用いると、 φ は \mathbb{D} 上正則単葉である。 また、

$$\varphi(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

で、各 $w \in H$ に対して $\{\varphi_{n_k}(w)\}_{k=1}^{\infty}$ は収束するので、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_{n_k}(w)| = |\varphi(w)| \text{ かつ } |\varphi_{n_k}(w)| < 1$$

より、 $|\varphi(w)| \leq 1$ である。 いま、 φ は H 上正則かつ定数ではないので、定理 1.16 (最大絶対値の原理) より、 $|\varphi(w)| < 1$ となる。 よって、 $z_0 := \varphi(w_0)$ とすれば、 $z_0 \in \mathbb{D}$ である。 いま、 f は特に z_0 で連続なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、 $B(z_0, \delta) \subset \mathbb{D}$ かつすべての $z \in B(z_0, \delta)$ に対して、 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ が成り立つ。 また、 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は w_0 で収束するので、 $\delta > 0$ に対してある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、すべての $k \geq k_0$ に対して、 $|\varphi_{n_k}(w_0) - \varphi(w_0)| < \delta$ を満たす。 さらに、部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は特に $\overline{B(z_0, \delta)}$ 上一様収束するので、ある $k_1 \geq k_0$ が存在し、すべての $k \geq k_1$ とすべての $z \in \overline{B(z_0, \delta)}$ に対して、 $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。 これより、

$$\begin{aligned} |f(z_0) - w_0| &= |f(z_0) - f(\varphi_{n_k}(w_0)) + f(\varphi_{n_k}(w_0)) - w_0| \\ &\leq |f(z_0) - f(\varphi_{n_k}(w_0))| + |f(\varphi_{n_k}(w_0)) - w_0| \\ &= |f(z_0) - f(\varphi_{n_k}(w_0))| + |f(\varphi_{n_k}(w_0)) - f_{n_k}(\varphi_{n_k}(w_0))| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

となるので、 $w_0 = f(z_0) \in f(\mathbb{D})$ である。 したがって、 $D \subset f(\mathbb{D})$ である。 Step I-1, Step I-2 より、 $f(\mathbb{D}) = D$ が成り立つ。

(II) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 f が定数である、すなわちある $C \in \mathbb{C}$ が存在し、 $f \equiv C$ と仮定する。 このとき、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n(0) = 0$ なので、

$$C = f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0,$$

つまり、 $f(\mathbb{D}) = \{C\} = \{0\}$ である。 $D \neq \{0\}$ と仮定すると、ある $w \in D \setminus \{0\}$ が存在する。 核の定義より、 $\{0, w\} \subset H$ を満たすある領域 H が存在し、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $H \subset D_n$ が成り立つ。 H は特に開集合かつ $0 \in H$ なので、ある $\rho > 0$ が存在し、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B(0, \rho) \subset H \subset D_n$ が成り立つ。 f_n は \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} から D_n への全単葉なので、 D_n 上で f_n の逆関数 $\varphi_n := f_n^{-1}$ を定義できる。 φ_n は D_n 上正則単葉なので定理 1.20 より、 D_n 上 $\varphi_n' \neq 0$ である。 特に、 φ_n は $B(0, \rho)$ 上正則かつそこで $|\varphi_n(w)| < 1$ で、さらにさらに $\varphi_n(0) = 0$ である。 ここで、 φ_n に対して定理 1.17 (Schwarz の補題) を用いると、

$$|\varphi_n'(0)| \leq \frac{1}{\rho}$$

が成り立つ。また、各 $w \in B(0, \rho)$ に対して、

$$\begin{aligned} f_n(\varphi_n(w)) &= w, \\ f'_n(\varphi_n(w))\varphi'_n(w) &= 1, \\ f'_n(\varphi_n(0))\varphi'_n(0) &= 1, \\ f'_n(0) &= \frac{1}{\varphi'_n(0)} \end{aligned}$$

となることから、

$$|f'_n(0)| = \frac{1}{|\varphi'_n(0)|} \geq \rho > 0$$

となり、点列 $\{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束しない。一方、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 $f \equiv 0$ に広義一様収束するので、定理 1.15(Weierstrass の定理) より $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 0 に広義一様収束する。特に、 $z = 0$ で $\{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束してしまい矛盾が生じる。よって、 $D = \{0\}$ である。以上より、 $f(\mathbb{D}) = D$ となる。□

これより、定理 4.4 に自己完結した証明を与える。

定理 4.4 の証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f'_n(0) > 0$ より、 \mathbb{D} 上で正則かつそこで単葉である関数

$$F_n(z) := \frac{f_n(z)}{f'_n(0)}$$

を定義できる。 $F_n(0) = 0$, $F'_n(0) = 1$ より、 $\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ である。

(i) の証明. Step1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$ を示す。もし 0 に収束しないならば、ある $\varepsilon > 0$ が存在し、どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても、ある $n_0 \geq n$ で、 $f'_{n_0}(0) \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する。つまり、

$$\begin{aligned} 1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在し, } f'_{n_1}(0) &\geq \varepsilon, \\ n_1 \text{ に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{ が存在し, } f'_{n_2}(0) &\geq \varepsilon, \\ &\vdots \\ n_{k-1} \text{ に対してある番号 } n_k > n_{k-1} \text{ が存在し, } f'_{n_k}(0) &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

を満たす $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が存在する。ここで、各 F_{n_k} に対して定理 3.7(Koebe の 1/4 定理) を用いると、

$$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset F_{n_k}(\mathbb{D})$$

が成り立つ。ここで、 $w \in B(0, f'_{n_k}(0)/4)$ を任意にとると、 $|w| < f'_{n_k}(0)/4$, $|w|/f'_{n_k}(0) < 1/4$ である。これより、ある $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在し、

$$\frac{w}{f'_{n_k}(0)} = F_{n_k}(z_0) = \frac{f_{n_k}(z_0)}{f'_{n_k}(0)}$$

と表される。つまり、 $w = f_{n_k}(z_0)$ となる。したがって、

$$B\left(0, \frac{f'_{n_k}(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ。これより,

$$\begin{aligned} B\left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right) &\subset B\left(0, \frac{f'_{n_k}(0)}{4}\right) \\ &\subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k} \end{aligned}$$

で, $\{D_{n_k}\}$ の核は少なくとも $B(0, \frac{\varepsilon}{4})$ を含んでしまい, $D_n \rightarrow \{0\}$ であることに矛盾する.
Step2. 広義一様収束することを示す. 有界閉集合 $K \subset \mathbb{D}$ を任意にとる. 関数 $|z|/(1-|z|)^2$ は K 上で連続なので, $M_1 := \max_{z \in K} \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ が存在する. 各 F_n に対して定理 3.8(Koebe の歪曲定理) を用いると, K 上

$$|F_n(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq M_1$$

が成り立つ。これより,

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= |F_n(z)| |f'_n(0)| \\ &\leq |f'_n(0)| M_1 \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

となるので, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 0 に広義一様収束する.

(ii) の証明. Step1. $\{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ は上に有界であることを示す. $\{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ は上に有界でないと仮定する. このとき, 部分列 $\{f'_{n_k}(0)\}_{k=1}^\infty \subset \{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ で, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(0) = +\infty$ を満たすものが存在する. 各 F_{n_k} に対して定理 3.7 (Koebe の 1/4 定理) を用いると, (i) の Step1 の証明内の議論から,

$$B\left(0, \frac{f'_{n_k}(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ. いま, $f'_{n_k}(0) \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$) であるので, $\{D_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は \mathbb{C} を核にもつ. これは $D_n \rightarrow D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ に矛盾する. よって, $\{f'_n(0)\}_{n=1}^\infty$ は上に有界である.

Step2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} で正規族であることを示す. Step1 より, ある定数 $M_2 > 0$ が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f'_n(0)| \leq M_2$ が成り立つ. 各 F_n に対して定理 3.8(Koebe の歪曲定理) を用いると, すべての $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &\leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \\ |f_n(z)| &= |F_n(z)| |f'_n(0)| \\ &\leq M_1 M_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は K 上一様有界であるので, 定理 1.34(Montel の定理) より, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} で正規族である.

Step3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} で正規族であるので, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ で, \mathbb{D} 上広義一様収束するものが存在する. $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ の極限関数を g とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が \mathbb{D} 上 g に各点収束することを示す. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が \mathbb{D} 上各点収束しないと仮定する. すると, ある $\alpha \in \mathbb{D}$ と

$\varepsilon > 0$ が存在し、どのように $N \in \mathbb{N}$ をとってきても、ある番号 $n > N$ で、 $|f_n(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する。つまり、

$$\begin{aligned} &1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在し, } |f_{n_1}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon, \\ &n_1 \text{ に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{ が存在し, } |f_{n_2}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon, \\ &\quad \vdots \\ &n_{k-1} \text{ に対してある番号 } n_k > n_{k-1} \text{ が存在し, } |f_{n_k}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

を満たす部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する。再び $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が \mathbb{D} で正規族であることを用いると、 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ の部分列 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ で、 \mathbb{D} 上広義一様収束するものが存在する。 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ の極限関数を f とする。さらに、すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$$

を満たしているので、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha) \neq 0,$$

つまり、 $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ である。一方、 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty$ に対して定理 4.3 を用いると、 $f(\mathbb{D}) = D$ かつ $g(\mathbb{D}) = D$ である。また、

$$f(0) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k_l}}(0) = 0$$

であり、定理 1.15(Weierstrass の定理) より、 $\{f'_{n_{k_l}}(0)\}_{l=1}^\infty$ は $f'(0)$ に収束するので、

$$f'(0) = \lim_{l \rightarrow \infty} f'_{n_{k_l}}(0) \geq 0$$

となる。 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上正則かつ単葉なので、系 1.37 より f も \mathbb{D} 上で正則かつ単葉である。したがって、 \mathbb{D} 上で $f'(z) \neq 0$ 、つまり $f'(0) > 0$ である。同様にして、 $g(0) = 0$ かつ g は \mathbb{D} 上で正則かつ単葉で、 $g'(0) > 0$ である。このことと、 f, g は \mathbb{D} 上正則かつ \mathbb{D} から単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ への全単葉なので、Riemann の写像定理の写像の一意性より、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z) = g(z)$ となってしまう、 $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ に矛盾する。よって、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 g に各点収束する。

Step4. 定理の結論を示す。Step3 より、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 g に各点収束するので、定理 1.38(Vitali の定理) より、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上広義一様収束する。 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ に対して定理 4.3 を用いると、 $g(\mathbb{D}) = D$ となる。□

4.3 定理 3.17 の証明

最後に、Carathéodory の核収束定理が Bieberbach 予想の証明の一部にどのように用いられているかを紹介する。まず、正則関数がある条件のもとでは単葉となることを保証する Darboux の定理を証明する。

定理 4.5 (Darboux の定理). $C \subset \mathbb{C}$ はある区分的に滑らかな単純閉曲線で、 f は $\overline{C_{\text{int}}}$ を含むある領域 Ω で正則であるとする。さらに、 f は C 上単射であるとする。このとき、 C の f による像曲線 $\Gamma := f(C)$ は区分的に滑らかな単純閉曲線で、 f は C_{int} から Γ_{int} への全単射である。

証明. C のパラメータ表示を,

$$C : z = z(t) \quad (t \in [a, b], z(a) = z(b))$$

とする. このとき, Γ のパラメータ表示は,

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表される. f が C 上単射であることから Γ は単純で, 加えて $z(a) = z(b)$ より, Γ は閉曲線である. C は区分的に滑らかなので, C は有限個の滑らかな曲線 C_1, C_2, \dots, C_n を繋いでできる曲線である. 各 $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$ のパラメータを,

$$z = z_k(t) \quad (t \in [a_k, b_k], a_1 = a, b_n = b)$$

と表せば, $z_k(t)$ は $[a_k, b_k]$ で微分可能である. f が特に C 上で微分可能であることから, $f(z_k(t))$ は $[a_k, b_k]$ で微分可能である. よって, Γ は区分的に滑らかである. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ を任意にとる. このとき, 関数 $f - \alpha$ は Ω 上正則かつ C 上 $f - \alpha \neq 0$ であるので, 定理 1.27 より, $f - \alpha$ の零点の個数を N とすると,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz$$

と表される. 各 $z \in C$ に対して $w = f(z)$ と表せば, 線積分が積分路のパラメータ表示に依らないことから,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - \alpha}$$

と表される. ここで, α について次の 2 通りを考える.

(i) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}}$ と仮定する. このとき, $\frac{1}{w - \alpha}$ を変数 w の関数としてみると, $\frac{1}{w - \alpha}$ は $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ 上正則である. よって, 定理 1.7 (Cauchy の積分定理) より,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - \alpha} = 0$$

となる. よって, $N = 0$ である.

(ii) $\alpha \in \Gamma_{\text{int}}$ と仮定する. このとき, 定数関数 1 に対して定理 1.9 (Cauchy の積分公式) を用いると,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - \alpha} = 1$$

となる. よって, $N = 1$ である.

(i), (ii) より, C_{int} 内の $f - \alpha$ の零点の個数は, $\alpha \in \Gamma_{\text{int}}$ ならば 1 個, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}}$ ならば 0 個である. つまり, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}}$ ならば, どのように $z \in C_{\text{int}}$ をとってきても $f(z) \neq \alpha$ となる. よって, f は C_{int} から $\overline{\Gamma_{\text{int}}}$ への写像である. ここで, ある $z_0 \in C_{\text{int}}$ で, $f(z_0) \in \Gamma$ を満たすものが存在すると仮定する. 定理 1.18 (領域保存性の原理) より, $f(C_{\text{int}})$ は領域, 特に関集合であるので, ある $\rho > 0$ が存在し, $B(f(z_0), \rho) \subset f(C_{\text{int}})$ を満たす. 一方, 背理法の仮定より, どのように $\varepsilon > 0$ をとってきても, $B(f(z_0), \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}}) \neq \emptyset$ である. よって, ある $\beta_\varepsilon \in B(f(z_0), \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}})$ が存在する. 一方, $f(C_{\text{int}}) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}}) = \emptyset$ なので, $\beta_\rho \in B(f(z_0), \rho) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_{\text{int}}})$ を満たすものは存在しない. よって矛盾が生じる. したがって, どのように $z \in C_{\text{int}}$ をとってきても, $f(z) \notin \Gamma$ である. つまり, f は C_{int} から Γ_{int} への写像である. いま, 各 $\alpha \in E$ に対してある $z \in \Omega$ が唯 1 つ存在し, $\alpha = f(z)$ となるので, f は C_{int} から Γ_{int} への全単射である. \square

次の定理 4.6 は, S に含まれる関数は S に含まれるある截線写像の列で近似できることを保証する. この定理が定理 3.17 の証明に重要な役割を果たし, 定理の証明に定理 4.4 が用いられる.

定理 4.6. 任意の $f \in S$ に対して以下を満たすある関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ が存在する:

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は截線写像であり, かつ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{D} 上 f に広義一様収束する.

証明の前に, \mathbb{C} とは一致しない領域と曲線の関係についての補題を 1 つ紹介する.

補題 4.7. E を \mathbb{C} とは異なる \mathbb{C} の領域とし, $z_1 \in E, z_2 \in E^c$ とする. このとき, z_1 と z_2 を結ぶ曲線 L をどのようにとってきても, ある $\alpha \in L \cap \partial E$ が存在する.

証明. $E \subsetneq \mathbb{C}$ より, $E^c \neq \emptyset$ であることに注意する. $z_1 \in E$ と $z_2 \in \overline{E^c}$ を結ぶ曲線 L を任意にとる. L のパラメータを $z = z(t)$ ($t \in [0, 1]$), $z(0) = z_1, z(1) = z_2$ とする. $A := \{t \in [0, 1] \mid z(t) \in E\}$, $t_0 := \sup A$ と定める. $z(t)$ は特に $t = t_0 \in [0, 1]$ で連続なので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $\delta_n > 0$ が存在し, すべての $t \in B(t_0, \delta_n) \cap [0, 1]$ に対して,

$$|z(t) - z(t_0)| < \frac{1}{n}.$$

ここで, $0 < t_0 - t_n < \min\{\delta_n, \frac{1}{n}\}$ かつ $t_n \in [0, 1]$ を満たす t_n をとると, $t_n \in A, z(t_n) \in E$ で,

$$t_n \rightarrow t_0, z(t_n) \rightarrow z(t_0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす. これより, $z(t_0)$ は E の集積点であるので, $z(t_0) \in \overline{E} = E \cup \partial E$. 一方, $0 < t'_n - t_0 < \min\{\delta_n, \frac{1}{n}\}$ かつ $t'_n \in [0, 1]$ を満たす t'_n をとると, $t'_n \in A^c, z(t'_n) \in E^c$ で,

$$t'_n \rightarrow t_0, z(t'_n) \rightarrow z(t_0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす. これより, $z(t_0)$ は E^c の集積点であるので, $z(t_0) \in \overline{E^c} = E^c \cup \partial E^c$ となる. 以上より, $z(t_0) \in \partial E$ である. \square

定理 4.6 の証明. $f \in S$ を任意にとる. 定理 1.18 (領域保存性の原理) より, $f(\mathbb{D})$ は領域である.

(I) $f(\mathbb{D})$ がある区分的に滑らかな単純閉曲線の内部である場合を考える. 特に, $f(\mathbb{D})$ は単連結領域である. $w_0 \in \partial f(\mathbb{D})$ を 1 つとる. $\partial f(\mathbb{D})$ のパラメータ表示を,

$$\partial f(\mathbb{D}) : w = w(t) \quad (0 \leq t \leq 1), w(0) = w(1) = w_0$$

とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\partial f(\mathbb{D})$ 上の点 w_n を,

$$w_n := w \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

と定義すれば, $n \rightarrow \infty$ で $w_n \rightarrow w_0$ を満たす. C_n を $\partial f(\mathbb{D})$ に沿って w_0 から w_n を結ぶ単純曲線とする. Γ を, w_0 から ∞ を結ぶ単純曲線の向きを逆にしたもので, かつ $\Gamma \cap f(\mathbb{D}) = \{w_0\}$ を満たすものとする. さらに,

$$\Gamma_n := \Gamma \cup C_n,$$

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$$

と定義すると, $D_n \subsetneq \mathbb{C}$ かつ D_n は単連結領域である. よって, Riemann の写像定理より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{D} 上正則な関数 g_n で, \mathbb{D} から D_n への全単射かつ $g_n(0) = 0, g'_n(0) > 0$ を満たすものが唯1つ存在する. いま, Γ_n の定義より,

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset \Gamma_n \subset \cdots$$

であるので,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma \cup \partial f(\mathbb{D})$$

である. D_n の定義より,

$$D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots$$

であるので,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup \partial f(\mathbb{D}))$$

である. ここで, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D と表す.

StepI-1. $f(\mathbb{D}) \subset D$ を示す. $w \in f(\mathbb{D})$ を任意にとる. $w = 0$ のときは核の定義より $w \in D$ は正しい. $w \neq 0$ と仮定する. $f(\mathbb{D})$ は特に連結なので, 0 と w を結ぶある曲線 $L_1 \subset f(\mathbb{D})$ が存在する. $f(\mathbb{D})$ は特に開集合なので, 各 $a \in L_1$ に対してある $r_a > 0$ が存在して, $B(a, r_a) \subset f(\mathbb{D})$ を満たす. $\{B(a, r_a)\}_{a \in L_1}$ は L_1 の開被覆である. さらに, L_1 は有界閉集合なので, Heine–Borel の被覆定理より, $\{B(a, r_a)\}_{a \in L_1}$ から有限個の $B(a_k, r_{a_k})$ ($k = 1, 2, \dots, m$) で,

$$L_1 \subset \bigcup_{k=1}^m B(a_k, r_{a_k})$$

を満たすものが存在する. $E := \bigcup_{k=1}^m B(a_k, r_{a_k})$ とおく. E は領域で, $\{0, w\} \subset E$ かつ $E \subset f(\mathbb{D})$ である. いま, どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても $f(\mathbb{D}) \subset D_n$ だから $E \subset D_n$ である. よって, $w \in D$ であるので, $f(\mathbb{D}) \subset D$ である.

StepI-2. $D \subset f(\mathbb{D})$ を背理法で示す. すなわち, ある $w' \in D$ で, $w' \notin f(\mathbb{D})$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, 核の定義より, $\{w', 0\} \subset H$ を満たすある領域 H で, 十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $H \subset D_n$ を満たすものが存在する. もし $w' \in \Gamma$ ならば, どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても $\Gamma \cap D_n = \emptyset$, つまり $w' \notin D_n$ であるので $w' \notin \Gamma$ である. これより,

$$\begin{aligned} & w' \notin f(\mathbb{D}) \text{ かつ } w' \notin \Gamma \\ & \iff w' \in (\overline{f(\mathbb{D})} \setminus \partial f(\mathbb{D}))^c \text{ かつ } w' \in \Gamma^c \\ & \iff w' \in (\overline{f(\mathbb{D})}^c \cup \partial f(\mathbb{D})) \text{ かつ } w' \in \Gamma^c \\ & \iff (w' \in \overline{f(\mathbb{D})}^c \cap \Gamma^c) \text{ または } (w' \in \partial f(\mathbb{D}) \cap \Gamma^c) \end{aligned}$$

である. まず, $w' \in \partial f(\mathbb{D}) \cap \Gamma^c$ の場合を考える. このとき, 特に $w' \in \partial f(\mathbb{D}) \setminus \{w_0\}$ であるので, $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば $w' \in C_n$ を満たす. これより, $w' \in \Gamma_n$ となるので $w' \notin \mathbb{C} \setminus \Gamma_n = D_n$ である. つまり $H \not\subset D_n$ となってしまう, 矛盾が生じる. 次に, $w' \in \overline{f(\mathbb{D})}^c \cap \Gamma^c$ の場合, つまり $w' \in \mathbb{C} \setminus (\overline{f(\mathbb{D})} \cup \Gamma)$ の場合を考える. $0 \in f(\mathbb{D})$ に注意すると, 補題4.7より, 0 から w' を結ぶ曲線 L をどのようにとってきても, ある $\alpha \in L \cap \partial f(\mathbb{D})$

が存在する。いま、 H は領域なので、 0 から w' を結ぶある曲線 $L_2 \subset H$ が存在する。上の議論より、ある $\alpha_2 \in L_2$ で、 $\alpha_2 \in \partial f(\mathbb{D})$ を満たすものが存在する。つまり、 $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば、 $\alpha_2 \in C_n$ を満たす。これより、 $\alpha_2 \in \Gamma_n$ となるので、 $\alpha_2 \notin \mathbb{C} \setminus \Gamma_n = D_n$ 、つまり $H \not\subset D_n$ となってしまう、矛盾が生じる。よって、 $D \subset f(\mathbb{D})$ である。StepI-1, StepI-2 より、 $D = f(\mathbb{D})$ である。

StepI-3. 結論を示す。 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{D_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ を任意にとる。すると、

$$\Gamma_{n_1} \subset \Gamma_{n_2} \subset \cdots \subset \Gamma_{n_k} \subset \cdots$$

であるので、

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_{n_k} = \Gamma \cup \partial f(\mathbb{D})$$

である。 D_n の定義より、

$$D_{n_1} \supset D_{n_2} \supset \cdots \supset D_{n_k} \supset \cdots$$

であるので、

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D_{n_k} = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup \partial f(\mathbb{D})).$$

よって、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の核の議論と同様にして $\{D_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ の核が $f(\mathbb{D})$ であることを示すことができる。よって、 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は $f(\mathbb{D})$ に核収束する。よって、核収束定理（定理 4.4）より、 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上ある関数 g に広義一様収束し、 $g(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$ となる¹。これより、

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \\ g'(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(0) \geq 0 \end{aligned}$$

である。特に、 g は \mathbb{D} 上正則単葉であるので、 $g'(0) > 0$ である。一方、 f は \mathbb{D} 上正則単葉かつ \mathbb{D} から $f(\mathbb{D})$ への全射で、 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 1$ である。よって、Riemann の写像定理の写像の一意性より、 \mathbb{D} 上で $f \equiv g$ となる。つまり、 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 f に広義一様収束する。これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(0) = f'(0) = 1$$

である。よって、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{D} 上で正則単葉である関数

$$h_n(z) := \frac{g_n(z)}{g'_n(0)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を定義できる。 $h_n(0) = 0$ 、 $h'_n(0) = 1$ より、 $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ である。さらに、 g_n が截線写像であることから h_n は截線写像で、 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 $f(z)/f'(0) = f(z)$ に広義一様収束する。(II) 次に、 $f(\mathbb{D})$ が一般の場合を考える。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $r_n := 1 - \frac{1}{n+1}$ と定める。このとき、すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して、

$$\begin{aligned} |r_n z| &= \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| |z| \\ &\leq 1 - \frac{1}{n+1} \\ &< 1 \end{aligned}$$

¹この部分に Carathéodory の核収束定理（定理 4.4）が用いられている

が成り立つので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{D} を含むある領域 E_n 上で正則単葉である関数

$$f_n(z) := \frac{f(r_n z)}{r_n} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を定義できる. f_n は特に \mathbb{D} 上正則単葉で, $f_n(0) = 0, f'_n(0) = 1$ であるので, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ である.

StepII-1. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が \mathbb{D} 上 f に広義一様収束することを示す. 有界閉集合 $K \subset \mathbb{D}$ を任意にとる. f は K 上で連続なので, K 上一様連続である. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し, $|z_1 - z_2| < \delta$ かつ $z_1, z_2 \in K$ ならば, $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ が成り立つ. また, $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束するので, $\frac{\delta}{\max_{z \in K} |z|} > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $n \geq n_0$ に対して $|\frac{1}{n+1}| < \frac{\delta}{\max_{z \in K} |z|}$ が成り立つ. これより, すべての $n \geq n_0$ と $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} |r_n z - z| &= |z| |r_n - 1| \\ &= |z| \left| 1 - \frac{1}{n+1} - 1 \right| \\ &\leq \max_{z \in K} |z| \left| \frac{1}{n+1} \right| \\ &< \delta \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $\{1/r_n\}_{n=1}^\infty$ は 1 に収束するので, $\frac{\varepsilon}{\max_{z \in K} |f(z)|} > 0$ に対してある番号 $n_1 > n_0$ が存在し, すべての $n \geq n_1$ に対して $\left| \frac{1}{r_n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{\max_{z \in K} |f(z)|}$ が成り立つ. これより, すべての $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{r_n} - f(z) \right| &= |f(z)| \left| \frac{1}{r_n} - 1 \right| \\ &< \max_{z \in K} |f(z)| \cdot \frac{\varepsilon}{\max_{z \in K} |f(z)|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より, すべての $n \geq n_1$ と $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \frac{f(r_n z)}{r_n} - \frac{f(z)}{r_n} + \frac{f(z)}{r_n} - f(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{|r_n|} |f(r_n z) - f(z)| + \left| \frac{f(z)}{r_n} - f(z) \right| \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon \end{aligned}$$

となるので, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 f に広義一様収束する.

StepII-2. 結論を示す. f_n は特に滑らかな単純閉曲線 $\partial\mathbb{D}$ 上単射であるので定理 4.5 (Darboux の定理) より, $f_n(\partial\mathbb{D})$ は滑らかな単純閉曲線で, f_n は \mathbb{D} から $(f_n(\partial\mathbb{D}))_{\text{int}}$ への全単射である. したがって, f_n は (I) の仮定を満たす. つまり, $n \in \mathbb{N}$ を固定すると, f_n に対してある関数列 $\{g_{n,k}\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ で, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $g_{n,k}$ は截線写像で, かつ \mathbb{D} 上 f_n に広

義一様収束するものが存在する。特に, $\{g_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\overline{B(0, r_n)} \subset \mathbb{D}$ 上一様収束するので, n と $\overline{B(0, r_n)} \subset \mathbb{D}$ と $\varepsilon > 0$ に依存するある $k_n \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $z \in \overline{B(0, r_n)} \subset \mathbb{D}$ に対して,

$$|g_{n,k_n}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ. $\alpha := \max_{z \in K} |z|$ とおくと, $0 \leq \alpha < 1$ である. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束するので, $1 - \alpha > 0$ に対してある番号 $n_2 > n_1$ が存在し, すべての $n \geq n_2$ に対して,

$$\begin{aligned} |r_n - 1| &< 1 - \alpha, \\ -|r_n| + 1 &< 1 - \alpha, \\ \alpha &< r_n \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり, $K \subset \overline{B(0, r_n)}$ が成り立つ. したがって, すべての $n \geq n_2$ とすべての $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} |g_{n,k_n}(z) - f(z)| &\leq |g_{n,k_n}(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| \\ &< \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 截線写像の列 $\{g_{n,k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ は \mathbb{D} 上 f に広義一様収束する. \square

以上を踏まえて定理 3.17 を証明する.

定理 3.17 の証明. $f \in \mathcal{S}$ を任意にとる. このとき, 定理 4.6 より, f に対してある $\{f_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ で, \mathbb{D} 上 f に広義一様収束するものが存在する. これより, 各 $l \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{D} 上正則な関数 h_l で, $h_l(0) = 0$ かつ,

$$e^{2h_l(z)} = \frac{f_l(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものを定義できる. $F_l(z) := e^{2h_l(z)}$ と表す. さらに, h_l の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を,

$$h_l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(l) z^k$$

と表す. f に対しても同様に, \mathbb{D} 上で正則な関数 h で, $h(0) = 0$ かつ,

$$e^{2h(z)} = \frac{f(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものを定義できる. $F(z) := e^{2h(z)}$ と表す. h の \mathbb{D} 上の Taylor 展開を,

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k$$

と表す. いま, h_l と h の 1 階導関数は,

$$\begin{aligned} 2h'_l(z)e^{2h_l(z)} &= F'_l(z), \\ h'_l(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F'_l(z)}{F_l(z)}, \\ 2h'(z)e^{2h(z)} &= F'(z), \\ h'(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} \end{aligned}$$

と表される.

Step1. $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ が \mathbb{D} 上 F に各点収束することを示す. $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 f に広義一様収束するので, 特に各点収束する. よって, 任意の $z \in \mathbb{D}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $l_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $l \geq l_0$ に対して,

$$|f_l(z) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ. これより, $z \neq 0$ のときは

$$|F_l(z) - F(z)| = \left| \frac{f_l(z)}{z} - \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{1}{|z|} |f_l(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z|}$$

が成り立つ. $z = 0$ のときは $F_l(0) - F(0) = 1 - 1 = 0$ である. よって, $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 F に各点収束する.

Step2. $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ が \mathbb{D} 上 F に広義一様収束することを示す. 有界閉集合 $K \subset \mathbb{D}$ を任意にとる. $f_l \in \mathcal{S}$ なので定理 3.8(Koebe の歪曲定理) より, すべての $l \in \mathbb{N}$ と $z \in K$ に対して,

$$|f_l(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \leq \max_{z \in K} \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$

が成り立つ. これより, $z \neq 0$ ならば,

$$|F_l(z)| = \left| \frac{f_l(z)}{z} \right| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \cdot \frac{1}{|z|} \leq \max_{z \in K} \frac{1}{(1 - |z|)^2} =: M_K$$

が成り立つ. $z = 0$ ならば, $F_l(0) = 1$ である. これより, $M := \max\{1, M_K\}$ とすれば, すべての $l \in \mathbb{N}$ と $z \in K$ に対して,

$$|F_l(z)| \leq M$$

が成り立つので定理 1.34(Montel の定理) より, $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} で正規族である. すなわち, ある部分列 $\{F_{l_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{F_l\}_{l=1}^\infty$ で, \mathbb{D} 上広義一様収束するものが存在する. Step1 より, $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 F 各点収束するので, $\{F_{l_k}\}_{k=1}^\infty$ の極限関数も F である. したがって定理 1.38(Vitali の定理) より, $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上広義一様収束する.

Step3. 結論を示す. $\{F_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 F に広義一様収束するので, 定理 1.15(Weierstrass の定理) より, $\{F'_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 F' に広義一様収束する. よって, $\left\{ \frac{F'_l}{F_l} \right\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 $\frac{F'}{F}$ に広義一様収束する. つまり, $\{h'_l\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 h' に広義一様収束する. $\{h'_l\}_{l=1}^\infty$ に対して定理 1.15(Weierstrass の定理) を用いると, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\{h_l^{(k)}\}_{l=1}^\infty$ は \mathbb{D} 上 $h^{(k)}$ に広義一様収束する. 特に, $\{h_l^{(k)}(0)\}_{l=1}^\infty$ は $h^{(k)}(0)$ に収束する. いま, 仮定より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |\gamma_k(l)|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$$

が成り立つ. この不等式と,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_k(l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{h_l^{(k)}(0)}{k!} = \frac{h^{(k)}(0)}{k!} = \gamma_k$$

であることから,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k \lim_{l \rightarrow \infty} |\gamma_k(l)|^2 - \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k(l)|^2 - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

が成り立つ.

□

第5章 複素関数の特徴と実関数との違い

本論文では、ここまで複素解析学の古典理論に関する研究成果について論じてきた。複素解析学は関数論とも呼ばれ、実関数の解析学にはない美しい性質を備えている。もちろん高校生にそうしたことをすべて伝えることは困難であるが、複素関数を高校数学でも扱いたいと筆者が考える動機はそうした複素関数のもつ美しい特性にある。そこで本章では、複素解析学に見られる複素関数の特性、特に、複素関数（正則関数）と実関数（微分可能な関数）の違いを本論文で紹介してきた幾つかの定理をもとに具体例も挙げながら述べていく。

高階微分可能

正則関数の重要な性質の1つに、一階微分可能であるならば n 階微分可能であるというものがある。この性質は、実関数では見られない性質の1つである。実際に、以下のような一階微分可能であっても二階微分可能ではない例が存在する。

例 5.1. \mathbb{R} 上の関数 f を、

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

によって定義すると、 f は \mathbb{R} 上で微分可能であり、その導関数は、

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

と表される。しかし、 f' は明らかに $x = 0$ で微分可能ではない。

Taylor 展開可能

複素関数論において、複素微分可能であることと Taylor 展開可能であることが同値であるというものがある。実関数では、以下のように微分可能であっても Taylor 展開可能でない例が存在する。

例 5.2. \mathbb{R} 上の関数 f を、

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (5.1)$$

によって定義すると、 f は \mathbb{R} 上で n 階微分可能である。しかし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f^{(n)}(0) = 0$ となり、 $x = 0$ で Taylor 展開できない。

この関数の $x > 0$ の部分を複素関数として、 $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ を考えると、これは $z = 0$ で Laurent 展開可能であり、さらに $z = 0$ は真性特異点であることが知られている。つまり、式 (5.1) の $(0, \infty)$ での関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ を \mathbb{R} 上で微分可能な関数に拡張できたのは、複素関数の真性特異点を実軸上のみで観察したことで生じるもので、 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) を \mathbb{C} における 0 の近傍で正則な関数に拡張することはできないのである。

一致の定理

一致の定理とは、ある領域 Ω で正則な関数 f と g について、その領域内のある近傍または曲線上で $f \equiv g$ が成り立つならば、 Ω 上で $f \equiv g$ であるというものであった。特に、 \mathbb{C} 上で正則な 2 つの関数について、 \mathbb{R} 上で一致すれば、 \mathbb{C} 上で一致することがいえる。この事実を用いれば、 \mathbb{R} における三角関数の加法定理や指数法則を \mathbb{C} 上に拡張することができる。また、 \mathbb{C} のある領域で定義された関数 f が、その領域内のある近傍または曲線上で 0 となれば、 f は定数関数になってしまう。しかし、関数 (5.1) のように、実関数の世界では、 \mathbb{R} 上で何回でも微分可能で、 $(-\infty, 0)$ において恒等的に 0 であるが、 \mathbb{R} 上全体で定数ではない関数が存在する。

Liouville の定理

Liouville の定理とは、 \mathbb{C} 上で正則かつ有界である関数は定数関数であるというものであった。しかし、実関数で考えると、 $f(x) = \sin x$ は \mathbb{R} 上で微分可能かつ有界であるが、明らかに定数ではない。実は、一致の定理により、 $f(x) = \sin x$ も一意的に \mathbb{C} 上の正則関数として拡張され、それを具体的にかければ

$$\sin(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$

であり、その大きさは、

$$|\sin(x + iy)| = \frac{1}{2} \sqrt{(e^y - e^{-y})^2 \cos^2 x + (e^y + e^{-y})^2 \sin^2 x}$$

と表される。この式は、 $y \rightarrow \infty$ で、 $|\sin(x + iy)| \rightarrow \infty$ となる。つまり、 $\sin x$ は、複素関数 $\sin(x + iy)$ を実軸上だけに限定して観察しているのだから、有界性が見られるのである。

Bloch の定理

Bloch の定理とは、単位円板 \mathbb{D} 上で定義された正則関数について、原点での微分係数の値が 1 であれば、それがどんな関数であっても、その関数の像はある一定の大きさの開円板を含んでおり、その正則関数は単位円板の一部を開円板に単射に移す、というものであった。では、実関数の場合に Bloch の定理のアナロジーを考えるとどうなるだろうか。つまり、

开区間 $(-1, 1)$ 上で定義された微分可能関数について、原点での微分係数の値が 1 であれば、それがどんな関数であっても、その関数の像はある一定の大きさの开区間を含む

(5.2)

は成り立つだろうか。実際は以下のような成り立たない例が存在する。

例 5.3. k は 0 でない実数とする. $(-1, 1)$ 上の関数 f を,

$$f(x) := \frac{\sin(kx)}{k}$$

によって定義する. f は $(-1, 1)$ 上で微分可能であり, $f'(x) = \cos(kx)$ より, $f'(0) = 1$ となるので, この関数は (5.2) の仮定を満たしている. 一方, この関数の像 $f((-1, 1))$ は, k の値を大きくとればいくらでも小さくできるため, ある一定の大きさの开区間をとることはできない. したがって, (5.2) は成り立たない.

このように正則関数は, 微分可能な実関数とは異なる不思議で美しい性質を有しているが, もちろん, 高校生にそうした複素関数論をそのまま伝えることは非現実的である. しかし, この面白さ, 美しさの一端でも, 高校生に伝えていきたいと考えた.

後に見ていくように, 高等学校数学科における現状の扱いでは, 複素関数の概念すら十分に扱われていないが, 逆に言えば, 一次変換などの平面上の変換の扱いが高校数学のカリキュラムから減っているなかで, 複素関数のような 2 次元から 2 次元の写像の概念は重要のようにも思える. 複素関数の具体例に触れさせ, 複素関数のもつ美しさを伝えるために, どうすればよいかを第 II 部では考察していく.

第II部

複素関数の高等学校数学科での教材化の 検討

第6章 高等学校数学科での複素数と複素関数の取り扱い

6.1 高等学校数学科での複素数の取り扱い

複素関数やその考え方を高校数学で扱うことを検討するまえに，現在の高等学校数学で，複素数に関する内容がどのように扱われているのかを概観しておこう。

平成30年告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2018[64]）によれば，高等学校数学科において複素数は，数学Ⅱの「いろいろな式」という単元，および，数学Ⅲの「平面上の曲線と複素数平面」という単元で扱われる。これまでの平成21年告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2009[63]）での，数学Ⅱでの内容はほぼそのまま，数学Ⅲの内容の「平面上の曲線と複素数平面」の内容が数学Ⅲに移った形となっている。

2 二次方程式

解の公式

実数 a, b, c を係数とする二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \dots\dots ①$$

と変形できる。複素数の範囲では負の数の平方根も求められるから，判別式 $D=b^2-4ac$ がどのような値であっても，①から，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

となる。

一般に，実数を係数とする二次方程式は，複素数の範囲まで考えると必ず解をもつ。

例 19 二次方程式 $2x^2+x+3=0$ の解を求めてみよう。

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

問 43 解の公式を用いて，次の二次方程式を解け。

- (1) $x^2-3x+6=0$ (2) $5x^2+2x+3=0$

注 二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$

図 6.1: 二次方程式の解の公式 [46]

に負の数の平方根を定義する。その後，二次方程式の解の公式を導く過程を負の数の平方根に注目して再考することで，実数を係数とする二次方程式は，複素数の範囲で常に解をもつことを確認している。その後，判別式による虚数解を含めた解の種類の判別や共役な複素数を用いた高次方程式の考察について扱っている。また，いずれの教科書にも，高次方程式の部分で，「一般に，複素数の範囲で考えると， n 次方程式は常に n 個の解をもつことが知られている」という代数学の基本定理の事実のみが記述されている。ここでの学習の焦点は，複素数の計算と複素数の範囲での二次方程式の解についての考察である。つまり，この単元での複素数の扱いは代数的な部分に限定されている。

次に，高等学校の数学で複素数を扱うもう一つの内容である，複素数平面に関する単元

をみてみよう。平成30年告示の学習指導要領では複素数平面の扱いは数学Cで行うこととなっているが、現在は学習指導要領の移行時期にあたるため、それに対応する教科書がまだ発行されていない。しかし、現行の数学IIIでの内容が移行するものとなっているため、現行の数学IIIでの教科書の内容（高橋ほか，2018[47]），（俣野ほか，2019[61]），（大島ほか，2019[29]）から、その扱いをみてみよう。現行の指導要領のもとでの、数学IIIの複素数平面における取り扱いについては、まず座標平面上の点に複素数を対応させることにより複素数平面の導入を行う。その後、複素数の四則演算の図形的な意味について扱い、それを用いて、ド・モアブルの定理、累乗根の図形的な意味なども扱う。図形への応用としては、ある点を中心とする複素数の回転や半直線のなす角、複素数を用いた垂直二等分線や円の方程式を扱っている。この単元では、複素数を平面上の点と対応させることで、回転移動や平行移動といった動的な見方が少し含まれている。後述するように、こうした見方は複素関数につながるものである。

6.2 高等学校数学科での複素関数の取り扱い

上述の高等学校数学の複素数に関する内容のなかに、複素関数の考え方はどの程度含まれているだろうか。また、今後含めようとするならば、どのような意義があるだろうか。まず、複素関数の考え方とは何かを確認しておこう。複素関数とは、複素数を変数にもち、複素数を値にとる関数のことである。よって、複素数に値をとる文字を含む式があったとしても、その文字が特定の複素数のみを指し示す未知数や定数として扱われている場合には、複素関数の考え方が含まれているとはいえない。つまり、複素関数の考え方とは、複素数に値をとるような文字（例えば z ）を含む式において、 z の値を変化させたときの式の値 w の変化を考えることであるといえる。特に、複素数は1つの変数が2次元の自由度をもつので、関数の変化の様子をグラフとしてとらえることが難しいが、こうした z と w の対応をとらえることが複素関数の考え方であろう。

ただし、複素関数の考えのよさや面白さを感じさせるという点からみると、複素数変数の関数ならなんでもよいとは思えない。第1部でみたように、複素関数をもつ主要な性質は、正則関数でのみ見られるものであるからである。実際、

$$w = (\operatorname{Re} z)^2 + i\operatorname{Im} z$$

といった関数は、複素数で考えるよりも実多変数関数として扱うべき話題であろう。確かに、高校生に複素関数の正則性の定義を与えることは、非現実的であるはあるが、高校生にとって自然に考えることができるような素朴な関数（例えば多項式や有理式）は、すべて正則な関数であるので、正則性を明示せずとも、そうした複素関数を扱うことで、暗黙裡に正則な複素関数のもつ不思議さ、数学的な美しさ、おもしろさを感じさせることができるのではないだろうか。

上記の視点をもとに、数学IIの「いろいろな式」の複素数に関する内容を改めて振り返ってみよう。この単元では、前述したように、複素数の四則演算に習熟すること、2次方程式が複素数の範囲では常に解をもつことを理解することが重視されており、複素数の代数的な側面しか見られなかった。特に、複素数は指定された2次方程式の解として登場しており、変数としての扱いがない。したがって、数学IIの「いろいろな式」において複素関数としての扱いはないといってよい。

例題 4 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、複素数 $w = i(z+1)$ で表される点 w は、どのような図形を描くか。

考え方 複素数 z は、 $|z|=1$ を満たす。この式を w を用いて表す。

解 点 z は、原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあるから、
 $|z|=1$ ①
 $w = i(z+1)$ より、
 $z = \frac{w}{i} - 1 = \frac{w-i}{i}$
これを①に代入すると、
 $|\frac{w-i}{i}| = 1$
 $|\frac{w-i}{i}| = 1$
 $|w-i| = |i|$
 $|w-i| = 1$
よって、点 w は、点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

例題 4 において、点 w の描く図形は、次のように考えることもできる。
 z に 1 を加えると、点 z は実軸方向に 1 だけ平行移動され、さらに i を掛けるとその点は原点 O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転されるから、点 w は、点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

図 6.2: 図形の移動の問題 (高橋ほか, 2018[47])

$w = \alpha z$ を扱うことが重要であるが、そのような扱いはあまりされていない。

これ以降に複素関数としての扱いはあるのだろうか。濱中・吉川 [55] は、図 2 に示す『数学 III』の教科書 (高橋ほか, 2018[47]) の例題を取り上げ、次のように分析している。実際、この例題では、「点 z が原点 O を中心とする円周上を動くとき、複素数 $w = i(z+1)$ で表される点 w は、どのような図形を描くか」といった問題が扱われている。この教科書では 2 つの解答が与えられている。最初に与えられている解答は、文法的かつ形式的な代数操作のみで解決を行っており、そこに図形の演算の幾何学的意味や動的な変換の考え方は全く見られない。一方、その下に別解として与えられている解法は、複素数の演算を「変換」として捉えており、図形的で動的な考察となっている [55]。他の数学 III の教科書 (俣野ほか, 2019[61])、(大島ほか, 2019[29]) でも同様の例題が扱われており、代数的な解法と「変換」の考え方をを用いた別解がそれぞれ記述されている。しかし、教科書では、複素数平面上で図形の問題を考える際には、与えられた図形上の点からその図形の条件を満たす方程式を考え、代数的な処理で式変形を行い、その結果得られた方程式から描かれる図形を読みとることが重視されているため、この別解は補足的な取り扱いとなっている。そのため、平面上の変換という複素関数の考え方は控えめな扱いとなっている。

以上を踏まえると、高等学校数学科においては、複素数平面上の点の移動としての扱いが重視されており、複素関数 $w = f(z)$ としての意味である z -平面から w -平面への写像としての扱いはあまりなされていない。一方で、 $w = z + \alpha$ 、 $w = \alpha z$ などの変換式の z に具体的な入力値を入れ、入力値と出力値を平面上の点として捉えることは、大学での数学の線形代数にもつながる、平面上の変換という重要な考え方の基礎になるものである [55]。

まとめれば、本稿が提案する高校数学での複素関数の考えとは、複素数平面上での図形の移動を考える際に、個々の点の移動として捉えるだけではなく、 z -平面上の図形が、

次に、数学 III の「平面上の曲線と複素数平面」について、現行の三社の教科書 (高橋ほか, 2018[47])、(俣野ほか, 2019[61])、(大島ほか, 2019[29]) から複素関数の考え方がどの程度含まれているのかを見ていこう。いずれの教科書においても、複素数の極形式を定義した後に複素数平面上の点 α の平行移動、拡大回転である $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ についての扱いがある。つまり、ここでは複素数平面上の点 α に β を足したり、 β を掛けることで点 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ がどのような位置にあるのかという記述しかされておらず、点の移動としての扱いにとどまっている。この部分について濱中・吉川 [55] は、複素数同士の演算において、一方を定数、他方を変数とし「変換」として扱うことで、特定の複素数の移動ではなく、任意の点 (複素数) を同時に動かすという平面全体の変換を考えることの重要性を示唆している。複素関数の立場からすれば、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ という個々の点の移動としてではなく、 z を変数として $w = z + \alpha$ 、

ある複素関数によって w -平面上のどのような図形に移されるかを視覚的にとらえ考察することである。つまり、複素関数の考え方を、複素関数を2次元から2次元への動きとして捉えることと考えている。合同変換や平行移動、回転移動は複素関数として書くことができるが、これらの移動の考え方は中学校段階で学習し、それらの動的な見方ができるようになるのはそれほど難しくはない。しかし、一般に複素関数の変換を考えようとするとき、たとえ $w = \frac{1}{z}$ のように単純な式であっても線形な動きでなく、曲がったりするため動的に捉えることが難しい。

では、どのようにすればそのような2次元の変換を動的に捉えることができるのだろうか。複素関数論において、複素数平面上の領域がある写像によってどのような領域に移されるのかを考えることはよくあることであるが、その際にいきなり領域の動きを見るのではなく、まずは領域内に含まれる点や曲線が写像によってどのように動くのかを考えることが多い。その後、点の集まりや曲線の集まりがどのような動きをするのかを調べ、それを手掛かりに領域が写像によってどのように移されるのかを考える。つまり、いきなり2次元から2次元という見方をするのではなく、まずは1次元から考え、1次元的なものの動きの集まりとして2次元的な動きを考えていくことが有用であると考えられる。

そこで次節では、複素関数を高等学校数学科で取り扱うための教材として高校数学の内容と関わりのある複素数平面上の変換をいくつか提示する。そして、それらの関数が \mathbb{C} の領域をどのように移しているのかを視覚的、動的に高校生に捉えさせるための手立て、教材を考察する。つまり、高校生にとって計算可能な直線、あるいは曲線の族で考えている複素関数による像が考察可能な事例を考えていく。

こうした複素関数の考え方をする意義はどこにあるだろうか。2次元的な変換の様子をとらえることそのものにも楽しさはあるともいえるが、複素数を用いた代数的な手法では解決することが難しい問題に対して、生徒に複素関数の考えを用いることで解決できることを経験させることができれば、現行の高等学校数学科における複素数の扱いでは見ることができない複素数に対する新たな側面を生徒に発見させることができると考える。具体的には第8章で後述するが、複素関数を用いた代数学の基本定理の証明がまさに複素関数の考え方のよさを実感できる教材の一つとなっている。

第7章 複素数平面上的の重要な変換とその教材化

濱中・吉川 [55] は、1 次変換と複素数平面がこれまで交替的に高等学校数学の学習指導要領に含められてきていることから、複素数平面が 1 次変換に含められていた主要な考えである平面上の変換を学習する機会となっているだろうか、と考え、APOS 理論の視点から $w = \alpha z + \beta$ を変換として扱う教材について提案している。しかしここでは、さらに発展的に 1 次式以外の複素関数についても、高等学校の数学科の教材としての可能性を検討していきたい。もちろん、複素関数は多種多様なものがあり、高等学校で何でも扱えばよいというものではなく、初等的な複素関数であり、かつ、それを変換としてとらえたとき、高等学校で扱う他の数学の内容と関わりがあるような複素関数が望ましい。そこでここでは、複素関数論における重要な変換である Möbius 変換、Joukowski 変換という 2 つの変換の性質とそれらの高等学校数学科で扱うための教材化の可能性について考えていきたい。

7.1 $w = \frac{1}{z}$

Möbius 変換と呼ばれる複素関数（複素数平面上の変換）の族がある。第 1 章で定義したが、もう一度確認しておこう。

定義 7.1 (Möbius 変換). $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。このとき、次の複素関数

$$S(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (7.1)$$

を **Möbius 変換** という。Möbius 変換全体のなす集合を A と書く。

Möbius 変換の定義になぜ $ad - bc \neq 0$ という条件が付されているのか注意しておく。もし $ad - bc = 0$ とすれば、 $ad = bc$ となるので、

(1) $cd \neq 0$ ならば、 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ とすれば、 $S(z) = \frac{ckz + dk}{cz + d} = k$ となってしまう。

(2) $c = d = 0$ ならば、 $S(z)$ は定義できない。

(3) $c = 0, d \neq 0$ ならば、 $a = 0$ より、 $S(z) = \frac{b}{d}$ となってしまう。

(4) $c \neq 0, d = 0$ ならば、 $b = 0$ より、 $S(z) = \frac{a}{c}$ となってしまう。

つまり、 $ad - bc \neq 0$ という条件がなければ Möbius 変換は定数になってしまう。

さて、2つの Möbius 変換 $S(z)$, $T(z)$ を、

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

とする。このとき、Möbius 変換の合成 $S \circ T$ は

$$S \circ T(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + \alpha\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}$$

と表される。ここで、 S , T , $S \circ T$ に現れる係数を見ると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & \alpha\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

という行列の積の関係がある。このとき、積の行列式の性質より、

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (\alpha\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

が成り立つ。いま、 S , T が Möbius 変換であることから右辺が 0 にはならない。つまり、係数を直接計算しなくても、行列を用いることで Möbius 変換の合成 $S \circ T$ も Möbius 変換であることがわかる。このことを踏まえて、以下のような行列と Möbius 変換の間の写像を定義する。

定義 7.2. 写像 Φ を以下で定める。

$$\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \in A.$$

但し、 $GL_2(\mathbb{C})$ は複素 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad - bc \neq 0$ を満たすもの全体のなす集合である。

ここで、 $f, g \in GL_2(\mathbb{C})$ を $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とすると、写像 Φ について、先程の行列の計算より、

$$\Phi(f) \circ \Phi(g)(z) = S \circ T(z) = \Phi(fg)$$

が成り立つ。また、単位行列 $I \in GL_2(\mathbb{C})$ について、 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より、 $\Phi(I)$ は恒等写像で $\Phi(I)(z) = z$ である。さらに、 f には逆行列 f^{-1} があり、

$$\begin{aligned} \Phi(f) \circ \Phi(f^{-1})(z) &= \Phi(ff^{-1})(z) = \Phi(I)(z) = z, \\ \Phi(f^{-1}) \circ \Phi(f)(z) &= \Phi(f^{-1}f)(z) = \Phi(I)(z) = z \end{aligned}$$

となることから $\Phi(f^{-1})$ は $\Phi(f) = S$ の逆変換であり、これも Möbius 変換である。このことから、 A は演算 \circ に関して群をなす。そして、写像 Φ は群準同型写像である。

上では詳述しなかったが, $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ は $z = -\frac{d}{c}$ において定義されていない. しかし, 仮想的な点 ∞ を導入し,

$$S\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad S(\infty) := \frac{a}{c}$$

と定義することで, Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の自己同型を与えることが知られている (参考文献 [44]).

ところで, Möbius 変換 $S(z)$ は, $c \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a(cz+d)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} \\ &= -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

と変形でき, $c = 0$ のとき, $S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ であることから, Möbius 変換は次の 3 種の変換

1. $w = z + \alpha$
2. $w = \beta z$
3. $w = \frac{1}{z}$

の合成で表すことができる.

高等学校で Möbius 変換自体を取り扱うのは難しいかもしれないが, Möbius 変換が 3 つの変換 $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \frac{1}{z}$ の合成で表されることを踏まえると, $w = z + \alpha$, $w = \beta z$ の関数は複素数平面の単元で学習済みであるため, $w = \frac{1}{z}$ のみを取り扱うだけでも十分意味があると考えられる. 実際, Möbius 変換の性質を調べる際に, $w = \frac{1}{z}$ の性質に注目して考えることがある.

7.2 円円対応とその教材化の検討

Möbius 変換のもつ著しい性質として, 次の円円対応というものがある. これは, $w = \frac{1}{z}$ を用いて次のように示すことができる.

定理 7.3 (円円対応). $S(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ とするとき, z -平面上の円または直線は S によって w -平面上の円または直線に移される.

証明. Möbius 変換は次の 3 種の変換 $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \frac{1}{z}$ の合成で表すことができる. 前半 2 つの変換は平行移動と拡大縮小を表すので, この 2 つの変換によって円が円に, 直線が直線に移ることは明らかである. よって, 以下, $w = \frac{1}{z}$ について考える. まず, 円

を Möbius 変換で移すとどうなるかを考える. C を z -平面上の点 α を中心とする半径 r の円とすると, C 上の点 z は $|z - \alpha| = r$ を満たす. このとき, $z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 - r^2 = 0$ と表される.

Step1. C が原点を通らない場合を考える. このとき, $|\alpha| \neq r$ である. よって, $|\alpha|^2 - r^2 \neq 0$ に注意して,

$$\frac{z\bar{z}}{|\alpha|^2 - r^2} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}z - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\bar{z} + 1 = 0$$

両辺 $\frac{1}{z\bar{z}}$ を掛けると,

$$\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} \frac{1}{z} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2} \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z\bar{z}} = 0$$

となる. ここで, $w = \frac{1}{z}$ とすると,

$$w\bar{w} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}w - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\bar{w} + \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} = 0,$$

$$\left| w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} \right| = \frac{r}{|\alpha|^2 - r^2}$$

となる. よって, C 上の点 z は $w = \frac{1}{z}$ によって w -平面上の点 $-\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$ を中心とする半径 $\frac{r}{|\alpha|^2 - r^2}$ の円上に移される. したがって, 原点を通らない円は Möbius 変換によって円に移ることが示された.

Step2. C が原点を通る場合を考える. このとき, $|\alpha| = r$ であるので, $z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = 0$ と表される. 両辺 $\frac{1}{z\bar{z}}$ を掛けると,

$$1 - \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{z} - \alpha \cdot \frac{1}{\bar{z}} = 0$$

となる. ここで, $w = \frac{1}{z}$ とすると,

$$w\bar{\alpha} + \bar{w}\alpha - 1 = 0$$

と表される. これは直線の方程式である. したがって, 原点を通る円は Möbius 変換によって直線に移ることが示された.

次に, 直線を Möbius 変換で移すとどうなるかを考える. 直線の方程式を, 定数 $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて, $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + c = 0$ と表す.

Step1. 原点を通らない直線について考える. このとき, $c \neq 0$ である. 両辺に $\frac{1}{z\bar{z}c}$ を掛けると,

$$\frac{\beta}{c} \cdot \frac{1}{\bar{z}} + \frac{\bar{\beta}}{c} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} = 0$$

となる. ここで, $w = \frac{1}{z}$ とすると,

$$w\bar{w} + \frac{\beta}{c}w + \frac{\bar{\beta}}{c}\bar{w} = 0,$$

$$\left| w - \frac{\beta}{c} \right| = \left| \frac{\beta}{c} \right|$$

と表される。これは原点を通る円の方程式を表している。したがって、原点を通らない直線は、Möbius 変換によって原点を通る円に移ることが示された。

Step2. 原点を通る直線，すなわち $c = 0$ のとき，両辺に $\frac{1}{z\bar{z}}$ を掛けると，

$$\beta \cdot \frac{1}{\bar{z}} + \bar{\beta} \cdot \frac{1}{z} = 0$$

となる。ここで， $w = \frac{1}{z}$ とすると，

$$\beta\bar{w} + \bar{\beta}w = 0$$

となり，これは原点を通る直線の方程式である。したがって，原点を通る直線は，Möbius 変換によって原点を通る直線に移ることが示された。□

こうした円円対応の内容を複素関数の考え方を強調して高校数学で教材化することは可能か，またどのように教材化すればよいだろうか。高等学校の教科書 [47] では，発展的な内容として，円円対応の特別な場合である，

$w = \frac{1}{z}$ が描く図形

点 $P(z)$ がある図形上を動くとき， $w = \frac{1}{z}$ の描く図形を考えてみよう。

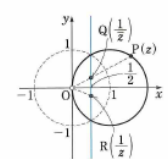
例1 原点 O と異なる点 $P(z)$ が，点 $C(1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くときの w が描く図形を考えてみよう。

$|z-1|=1$ であるから， $|\frac{1}{w}-1|=1$

両辺を $|w|$ 倍して， $|1-w|=|w|$

すなわち， $|w|=|w-1|$

よって，点 w は，原点と点 1 からの距離が等しい点であるから，実軸上の点 $\frac{1}{2}$ を通り，実軸に垂直な直線を描く。



例2 点 $P(z)$ が，実軸上の点 $\frac{1}{4}$ を通り，実軸に垂直な直線上を動くときの w が描く図形を考えてみよう。

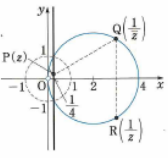
$|z|=|z-\frac{1}{2}|$ より， $|\frac{1}{w}|=|\frac{1}{w}-\frac{1}{2}|$

両辺を $|2w|$ 倍して， $|2|=|2-w|$

すなわち， $|w-2|=2$

よって，点 w は中心が点 2 で，半径 2 の円を描く。

ただし， $w = \frac{1}{z} \neq 0$ より，円のうち原点，つまり， $w=0$ を除く。



一般に， z が円または直線上を動くとき， $w = \frac{1}{z}$ も円または直線上を動くことを示すことができる。

図 7.1: $w = \frac{1}{z}$ の扱い [47]

教科書 [47] の図 7.1 における例 2 では，実軸上の点 $\frac{1}{4}$ を通る実軸に垂直な直線を，原点と実軸上の点 $\frac{1}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線とみなし，それを表す方程式 $|z| = |z - \frac{1}{2}|$ を用いて解答を行っている。それでは，実軸に対して垂直とは限らない直線ではどうだろうか。例えば，以下のような問題を考えてみる。

例 7.4. 点 $P(z)$ が，実軸上の点 1 を通り，実軸となす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線 l 上を動くときの $w = \frac{1}{z}$ が描く図形はどのようなになるか。

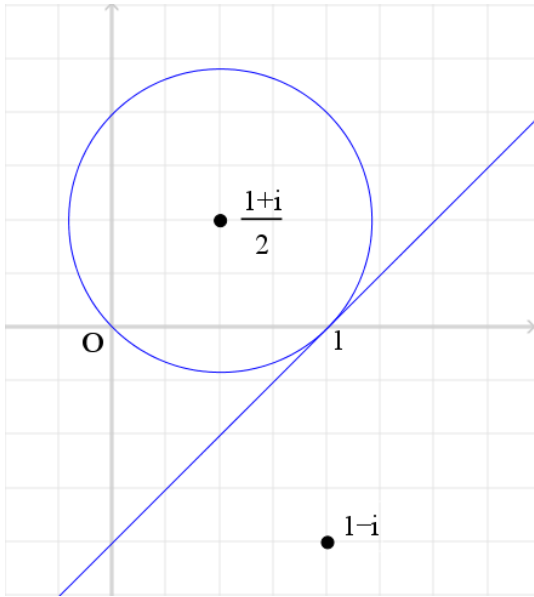


図 7.2: 例 7.4 の問題場面

このような問題に対しても，教科書 [47] の考え方を引用することができる．実際，直線 l は，原点 O と複素数平面上の点 $1-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線とみなすことができるので，直線 l の方程式は $|z| = |z - (1-i)|$ と表せる．よって， z を移した w の式は $|\frac{1}{w}| = |\frac{1}{w} - (1-i)|$ と表される．ここで，両辺に $|\frac{w(1+i)}{2}|$ を掛けると，

$$\left| \frac{1+i}{2} \right| = \left| \frac{1+i}{2} - w \right|,$$

$$\left| w - \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，点 w は中心が点 $\frac{1+i}{2}$ ，半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描く．

このように，教科書で扱われている $w = \frac{1}{z}$ のもつ性質（実軸に垂直な直線が原点を通る円に移る）は，ほぼ同じ解法で，原点を通らない直線が原点を通る円に移るといふところまで一般化して扱うことができる．

それではそこに複素関数的な要素はどの程度含まれているだろうか．[47]，[29] のどちらの教科書にも $w = \frac{1}{z}$ と明記されており，複素関数としての形を見ることができる．しかし，問題解決の方法は代数的な処理によるものとなっており，平面から平面への写像という複素関数の見方はされていない．そこで，複素関数の見方である，複素数の演算を「変換」として捉えた，図形的で動的な捉え方を生徒に経験させるにはどうすればよいだろうか．

第 6 章で述べたように，2次元から2次元への動きを捉えるためには，曲線の集まりがどのような動きをするのかを調べ，それを手掛かりに領域が写像によってどのように移されるのかを考える必要がある．それでは， $w = \frac{1}{z}$ に関わって，高等学校数学科でこのような見方，考え方に触れさせるためにはどのような問題を扱うべきだろうか．河野（1999）は格子点を用いて，実軸・虚軸に平行な直線が $w = \frac{1}{z}$ によってどのように動くかという問題を扱っている [36]．ここでは，以下のような直線群を扱った問題を検討してみる．

例 7.5.1 1 を通り，方向ベクトルの偏角がそれぞれ $-\frac{\pi}{4}$ ， 0 ， $\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{2}$ の直線上を z が動くとき， $w = \frac{1}{z}$ が描く図形はそれぞれどのようなになるか．

図 7.3 のように，題意の 4 直線を l_1 ， l_2 ， l_3 ， l_4 とする．

まず， z が直線 l_1 上を動くときの $w = \frac{1}{z}$ の動きを考えてみる．このとき， z は実軸全体を動く，つまり反比例の関数であるから w も実軸上を動くことは明らかであるが，その動きをもう少し細かく見てみよう．図のように，実軸を 3 つの部分 $A = (0, 1]$ ， $B = [1, \infty)$ ， $C = (-\infty, 0)$ に分けて考えると，以下のことがわかる．

- ・ z が A 上を 1 から 0 に向かって動くとき， w は実軸上を 1 から ∞ に向かって動く (A')．
- ・ z が B 上を 1 から ∞ に向かって動くとき， w は実軸上を 1 から 0 に向かって動く (B')．

- ・ z が C 上を 0 から $-\infty$ に向かって動くとき, w は実軸上を $-\infty$ から 0 に向かって動く (C').

このときに得られる軌跡を C_1 とする.

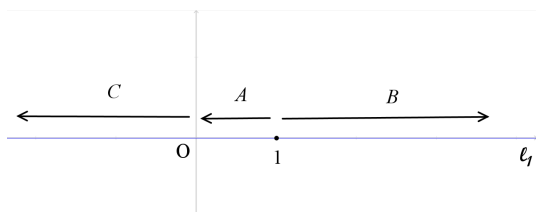


図 7.4: l_1 上の点 z の動き

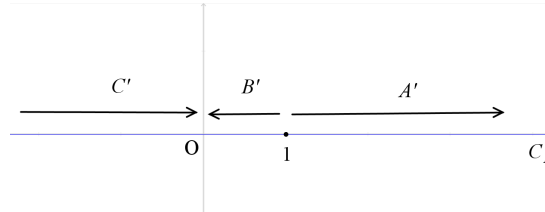


図 7.5: $w = \frac{1}{z}$ の動き

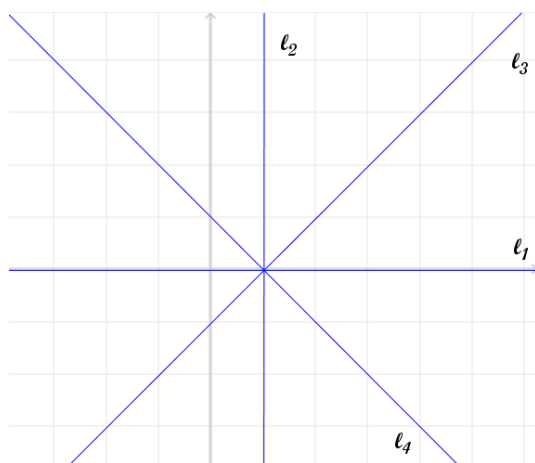


図 7.3: 例 7.4 の問題場面

$w = \frac{1}{z}$ を満たす点 w は中心が点 $\frac{1}{2}$, 半径が $\frac{1}{2}$ の円を描く. この軌跡を C_2 とする. このときの w の動きをもう少し細かく見ておこう. $z = 1$ のとき w の値は 1 である. z の大きさが大きくなるにつれて $w = \frac{1}{z}$ の大きさは 0 に近づく. また, $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ であるから $\text{Im}z$ と $\text{Im}w$ は符号が逆である. 以上のことと, $w = \frac{1}{z}$ が連続であることから, 図の A の部分が A' の部分に, B の部分が B' の部分に移ることがわかるだろう.

次に, z が直線 l_2 上を動くときの $w = \frac{1}{z}$ の動きを考えてみる. このとき, l_2 は原点と実軸上の点 2 を結ぶ線分の垂直二等分線とみなすことができるので, 直線 l_2 の方程式は $|z| = |z - 2|$ と表せる. よって,

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{1}{w} - 2 \right|$$

となり,

$$\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

と表される. よって, z が直線 l_2 上を動くとき,

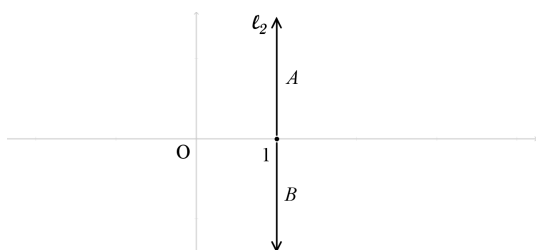


図 7.6: l_1 上の点 z の動き

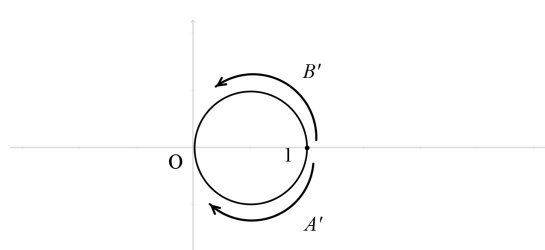


図 7.7: $w = \frac{1}{z}$ の動き

z が直線 l_3 上, l_4 上を動くときの $w = \frac{1}{z}$ の動きは, 例 7.4 と同様に考えることで, z が直線 l_3 上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ を満たす点 w は中心が点 $\frac{1+i}{2}$, 半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描き, z が直線 l_4 上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ を満たす点 w は中心が点 $\frac{1-i}{2}$, 半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描く. この

軌跡をそれぞれ C_3, C_4 とする. さらに, C_3, C_4 でも C_2 と同じように考えると, $z = 1$ のとき $w = 1$ で, z が直線上を 1 から離れていくにしたがって w は C_3, C_4 上を 0 に向かって動いていくことがわかる.

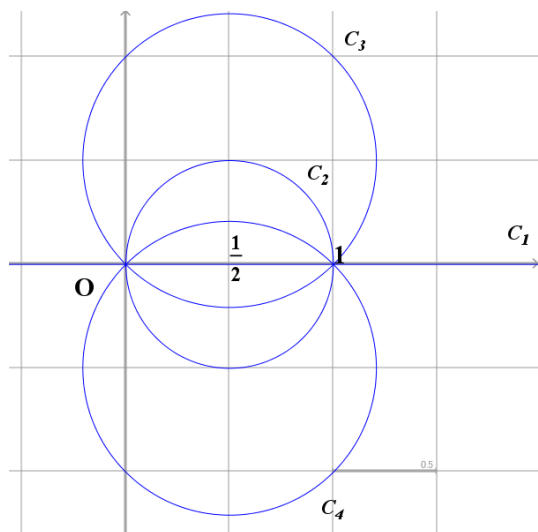


図 7.8: 例 7.8 の 4 本の直線の像
のように対応するのかを生徒に考えさせる活動がある.

以上を踏まえて, 図 7.8 に C_1 から C_4 を図示してみる. すると, C_1 から C_4 のいずれも原点と 1 を通ること, C_3 と C_4 は実軸に関して対称であることが視覚的にわかる. 特に, 4 本の直線を $z = 1$ を端点とする 8 本の半直線と考えると, $z = 1$ を中心とした放射状の半直線の族が $w = 1, 0$ を端とする円弧の族に移っているのが見てとれる (図 7.9, 7.10).

このように, 4 本の直線を $w = \frac{1}{z}$ で移した像を同時に考え, 図示することでそれらの共通な性質や対称性について視覚的に確認することができる. さらにここから考えられる活動として, なす角が $\pm\frac{\pi}{4}$ から変化すると, C_3, C_4 はどのように変化するのかを生徒に予想させたり, 直線上の点の動きと移した像における点の動きがど

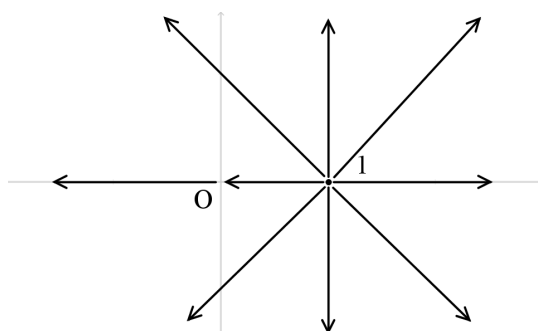


図 7.9: 8 本の半直線上の動き

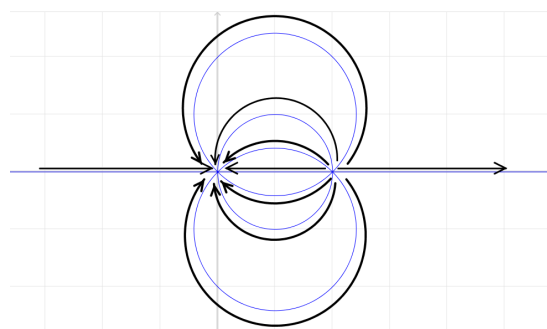


図 7.10: 円弧上の動き

7.3 $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ の性質とその教材化への検討

ここまで Möbius 変換という 1 次の分数式で表される複素関数について述べてきた. ここでは, Joukowski 変換と呼ばれる 2 次の有理関数の形で表される複素関数について考えていく.

定義 7.6 (Joukowski 変換). 次の複素関数

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \tag{7.2}$$

を Joukowski 変換という.

Joukowski 変換の性質に $|z| < 1$, $|z| > 1$ で 1 対 1 であることがある。また, Joukowski 変換のもつ, Möbius 変換での円円対応に相当するような性質として, 次のものがある。

定理 7.7. z -平面上の原点中心半径 $r > 0$ の円は Joukowski 変換によって w -平面上の楕円もしくは実軸上の線分 $[-1, 1]$ に移される。また, z -平面上の原点から伸びる半直線は Joukowski 変換によって w -平面上の双曲線または実軸上の 2 本の半直線 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ に移される。

証明. まず, z -平面上の原点を中心とする半径 $r > 0$ の円 C を Joukowski 変換 $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ で移すとどのようになるかを考える。このとき, C 上の点 z は $|z| = r$ を満たすので, ある $\theta \in [0, 2\pi]$ を用いて, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表される。 $r \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \cdot \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

と表される。ここで, w の実部を u , 虚部を v とおくと, $w = u + iv$ より, 上式の実部と虚部を比較して,

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (7.3)$$

と表される。この式と, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より,

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1$$

と表される。これは w -平面上の焦点が ± 1 である楕円の方程式である。一方, $r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \theta + i \sin \theta + \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

と表される。これは w -平面上の実軸上の線分 $[-1, 1]$ である。

次に, z -平面上の原点から伸びる半直線 L を考える。 L が実軸上にないとき, 実軸と半直線とのなす角を $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ とする。このとき, L 上の点 z は, $z = r(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ ($r \in (0, \infty)$) と表される。このことと, (7.3) より,

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta_0} = \frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 = 1$$

と表される。これは w -平面上の焦点が ± 1 である双曲線の方程式である。

半直線が実軸上にあるときは， L 上の点 z は， $z = r$ もしくは $z = -r$ ($r \in (0, \infty)$) と表される． $z = r$ のとき，

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$$

より，これは w -平面上の実軸上の半直線 $[1, \infty)$ である． $z = -r$ のときも同様に考えることにより， L は Joukowski 変換によって w -平面上の実軸上の半直線 $(-\infty, -1]$ に移されることがわかる．□

ここで，楕円と双曲線の高等学校における扱いを見てみよう．楕円，双曲線は平成 30 年告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2018[64]）によれば，数学 C の「平面上の曲線と複素数平面」という単元で扱われる．上記の定理の証明内に出てくる楕円の方程式の標準形，双曲線の方程式の標準形は高等学校数学科で扱う内容である．よって，上記の定理の内容を高等学校数学科で扱うことを検討してみる．具体的には，Möbius 変換で分析したことを踏まえて，以下のような円群と半直線群を用いた問題を考えてみよう．

例 7.8. 原点を中心とする半径 1, 2, 3 の円周上を z が動くとき， $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ が描く図形はそれぞれどのようなようになるか．

まず最初に， z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くときを考えてみる．このとき，ある $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いて， $z = \cos \theta + i \sin \theta$ と表せば，上記の定理の証明内の議論より，

$$w = \cos \theta$$

と表される．このとき， $\cos \theta \in [-1, 1]$ より， w は実軸上の線分 $[-1, 1]$ 上を動くことは明らかであるが，その動きをもう少し細かく見てみよう．図のように，円周を上半分 (A) と下半分 (B) に分けて考えると，以下のことがわかる．

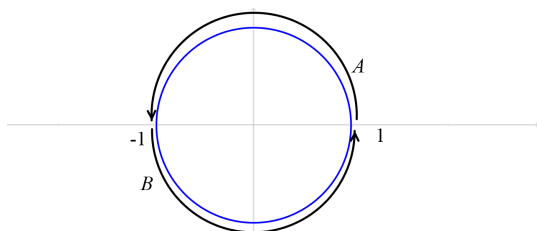


図 7.11: 半径 1 の円周上の点 z の動き

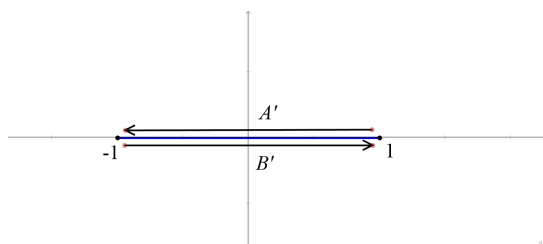


図 7.12: $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ の動き

- ・ z が A 上を 1 から -1 に向かって動くとき， w は実軸上を 1 から -1 に向かって動く (A')．
- ・ z が B 上を -1 から 1 に向かって動くとき， w は実軸上を -1 から 1 に向かって動く (B')．

次に， z が原点中心，半径 2 の円周上を動くときの $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ の動きを考えてみる．このとき，円周上の点 z は $|z| = 2$ を満たすので，ある $\theta \in [0, 2\pi]$ を用いて， $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$

と表される。これより、

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2} \left\{ 2(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 2(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) \cos \theta + i \cdot \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) \sin \theta \\
 &= \frac{5}{4} \cos \theta + i \cdot \frac{3}{4} \sin \theta
 \end{aligned}$$

と表される。ここで、 w の実部を u 、虚部を v とおくと、 $w = u + iv$ より、上式の実部と虚部を比較して、

$$u = \frac{5}{4} \cos \theta, \quad v = \frac{3}{4} \sin \theta$$

と表される。この式と、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より、

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

と表される。これは w -平面上の焦点が ± 1 である楕円の方程式である。原点中心、半径が 3 の円の場合も同様に考えることで、

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1$$

という焦点が ± 1 の楕円の方程式を導くことができる。

ここで、半径が 1, 2, 3 の円周と、それらを $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ で移した像である半直線と楕円を同一平面上に描いてみると、以下のようなになる。

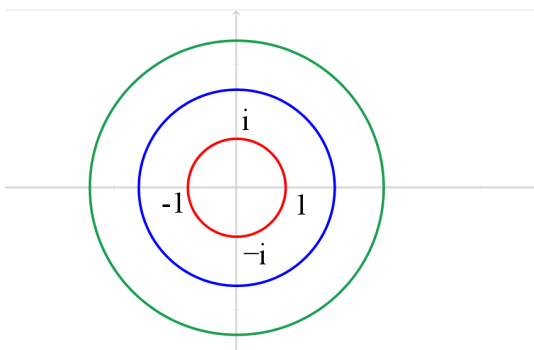


図 7.13: 半径 1 の円周上の点 z の動き

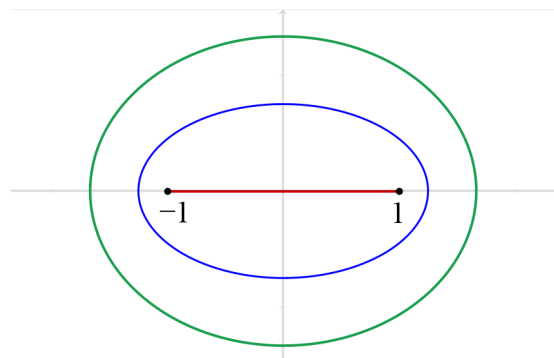


図 7.14: $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ の動き

半径を 1 から大きくするにつれて、楕円の長軸、短軸の長さも大きくなっていることが見てとれる。さらにここから考えられる活動として、半径が 1, 2, 3 以外のとき $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ はどのような図形を描くかを生徒に予想させたり、 z が円周上を反時計回りに動くと、 $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ は楕円上をどのように動くかを点を取りながら考えさせ、線分 $[-1, 1]$ 上の動きとどのような関係があるかを考えさせる活動がある。

第8章 代数学の基本定理とその教材化

ここまでは、複素関数論における重要な変換である Möbius 変換と Joukowski 変換にという具体例を用いて、本稿における複素関数の見方として考えている複素関数を2次元から2次元への動きとして捉えることを生徒に学習させるための教材研究を行ってきた。

一方で、現行の高等学校数学科で扱う複素数に関する問題は、複素数平面における変換に関わる問題であっても、代数的な計算による手法で解決されるものが多く、複素関数の見方のよさを最大限に伝えるための問題としては物足りないと考える。特にそのような見方の意義を伝えるためには、第6.2節の最後に述べたように、これまでの複素数の考え方では解決することは困難であるが、2次元から2次元への動きとして捉える複素関数の見方をするによって解決することが可能となる問題を扱う必要があるのではないだろうか。そのような問題を通して、生徒自身が複素関数の見方のよさを見出すことがなければ、複素関数の見方、考え方を単に押し付けるだけとなってしまいかねない。

そこで本章では、代数学の基本定理という、高等学校数学科でも事実として使われているものの、その証明については触れられていない定理をとりあげ、複素関数の見方に着目した教材化の検討とその教材を用いた授業実践について述べていきたい。

8.1 代数学の基本定理とその高等学校での扱い

最初に、複素係数の代数方程式を定義し、代数学の基本定理を定式化する。

定義 8.1 (複素係数代数方程式). $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ とし、

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

と定める。このとき、 $P(z)$ を複素係数 n 次多項式といい、 $P(z) = 0$ を複素係数 n 次代数方程式という。

それでは代数学の基本定理を定式化していこう。

定理 8.2 (代数学の基本定理). 複素係数 n 次代数方程式は重複も込めて n 個の複素数解をもつ。

第6.1節で述べたように、複素数の範囲での高次方程式の解は、数学Ⅱの「いろいろな式」で扱われているが、教科書(高橋ほか, 2018[46]), (俣野ほか, 2019[60]), (大島ほか, 2019[34]) を見てみると、扱われている方程式の種類は具体的な4次方程式にとどまっている。一方で、いずれの教科書にも、高次方程式を扱っている部分で、「一般に、複素数の範囲で考えると、 n 次方程式は常に n 個の解をもつことが知られている」という代数学の基本定理の事実のみが記述されている。高校生に代数学の基本定理を証明してみせるこ

とは難しく、ひとこと事実として触れられる程度なのが実情である。しかし、この事実は複素数まで数の範囲を広げることの重要な意義にかかわるものであり、可能ならその原理的な理解が可能な説明を高校生に示したいと考える。

前述したように、複素関数などの動的な視点から取り扱うことで、それまでに解決できなかったが新たに解決することができるような、具体的な数学的成果を示すことが、複素関数的な見方のよさを生徒に理解させるために重要と考えるが、本章で述べる代数学の基本定理の位相幾何学的な証明を用いた教材にその可能性があると考えている。まずは次節で代数学の基本定理の証明について見ていこう。

8.2 代数学の基本定理の証明

定理 8.2(代数学の基本定理)には、幾つかの証明方法が知られているが、ここでは複素関数論の世界ではよく知られている証明の1つを紹介する。この証明は、第I部で紹介した複素関数論における重要な結果の1つである定理 1.14(Liouville の定理)を用いた証明である。

定理 1.14(Liouville の定理) を用いた証明。 P を複素係数 n 次多項式とし、

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

と表す。

Step1. 複素係数 n 次代数方程式 $P(z) = 0$ が少なくとも1つ複素数解をもつことを背理法を用いて示す。もし、複素係数 n 次代数方程式 $P(z) = 0$ が解をもたないとならば、 \mathbb{C} 上 $P(z) \neq 0$ である。このことと、 P が整関数であることから $\frac{1}{P}$ も整関数である。 $z \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{P(z)} \right| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right|} \\ &\leq \frac{1}{|a_n z^n| \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^n} \right)} \\ &\rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

となるので、1 に対してある $R > 0$ が存在し、 $|z| > R$ ならば、 $\left| \frac{1}{P(z)} \right| < 1$ が成り立つ。

一方、 $\frac{1}{P}$ の連続性より、 $M := \max_{z \in B(0, R)} \left| \frac{1}{P(z)} \right|$ が存在する。したがって、 $z \in \mathbb{C}$ ならば、

$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \max\{M, 1\}$ となるので、 $\frac{1}{P}$ は有界な整関数である。よって、Liouville の定理

(定理 1.14) より、 $\frac{1}{P}$ は定数関数となる。つまり、 P も定数関数となってしまい、複素係数 n 次多項式であることに矛盾する。したがって、 $P(z) = 0$ は少なくとも1つ複素数解をもつ。

Step2. 結論を示す. Step1 より, ある $z_n \in \mathbb{C}$ で, $P(z_n) = 0$ を満たすものが存在する. このとき, 因数定理より, ある $n-1$ 次多項式 Q で, $P(z) = (z - z_n)Q(z)$ を満たすものが存在する. Q に対して Step1 の議論を適用すれば, ある $z_{n-1} \in \mathbb{C}$ で, $Q(z_{n-1}) = 0$ を満たすものが存在する. この議論を繰り返せば, ある $z_{n-2}, \dots, z_1 \in \mathbb{C}$ で,

$$P(z) = (z - z_n)(z - z_{n-1})(z - z_{n-2}) \cdots (z - z_1)$$

を満たすものが存在する. これより, n 個の複素数 z_n, \dots, z_1 は P の零点である. したがって, $P(z) = 0$ は重複度も込めて n 個の解をもつ. \square

この証明は, 極限を用いて有界性を確認し, Liouville の定理を用いて矛盾を導くというものである. しかし, それらの定理自体の証明には複素関数に関する解析的な予備知識が必要であり, 高校生に理解させるのは容易ではない.

一方, 次に示す位相幾何学的な証明は, 確かに位相幾何学的な議論の厳密性を要求するなら難しいが, そうした議論の多くが直観的には明らかであり, 高校生にとっても, 複素数平面の動的な見方が可能であれば, 直観的理解が可能なものとなっている. 証明の前に, 閉曲線の回転数を定義する (参考文献 [44]).

定義 8.3 (回転数). $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ はある区分的に滑らかな閉曲線で, ある点 $\alpha \in \mathbb{C}$ を通らないものとする. このとき, コーシーの積分定理と積分公式により,

$$n(C, \alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - \alpha}$$

は整数であることが示される. この整数 $n(C, \alpha)$ を, 点 α に関する曲線 C の回転数という.

回転数 $n(C, \alpha)$ とは, 複素線積分を用いて定義することもできるが, 簡単に言えば, 動点 C_t が閉曲線上を 1 周するとき, その動点が指定された複素数平面上の点 α のまわりを何周しているかを表すものであり, 複素関数論を知らなくても直観的な理解が可能である.

次の定理は, 位相幾何学においてよく知られている重要な結果であるが, 関数 $f(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ が複素数平面上の点 α を除いて正則であることに注意すると, コーシーの積分定理から明らかである.

定理 8.4. 複素数平面上の 2 つの閉曲線 C と C' について, ある点 $\alpha \in \mathbb{C}$ を通らずに C から C' へ連続的に変形できるとき, $n(C, \alpha) = n(C', \alpha)$ である.

以上を踏まえて, 位相幾何学的な証明のアイデアについて述べていく.

位相幾何学的な証明のアイデア. P を n 次多項式とし,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

と表す. $P(z) = 0$ が 1 つ解をもつことが示せれば, Liouville の定理を用いた証明の Step2. と同様にして n 個の解をもつことが示されるので, 以下, $P(z) = 0$ が 1 つ解をもつことを示していく.

$P(z) = 0$ の解を求める際に, $a_n = 1$ と仮定しても一般性を失わないので,

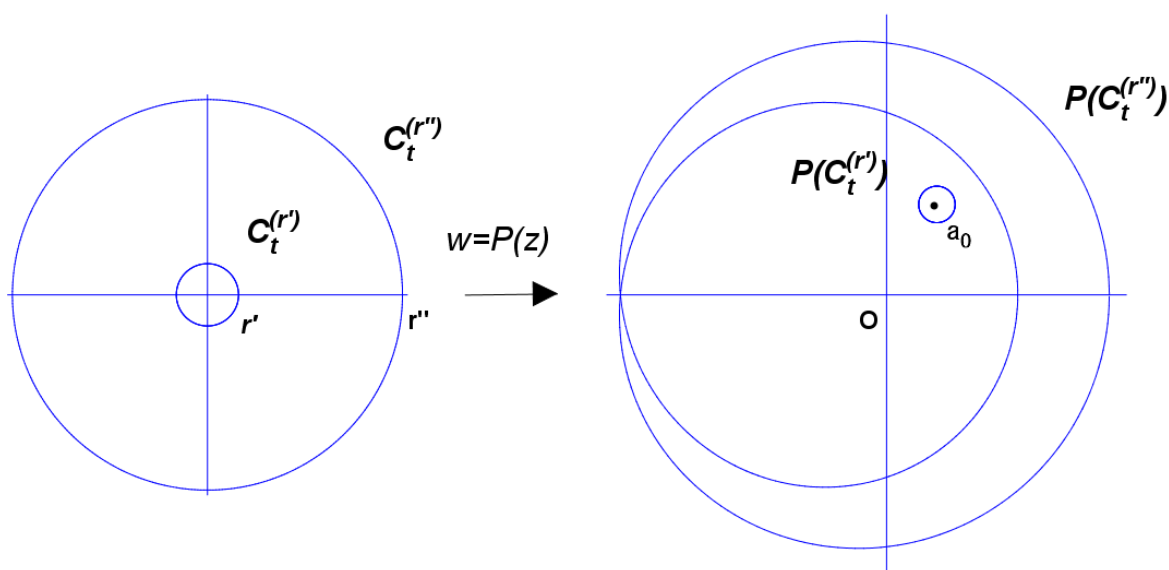
$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

と表す. さらに, もし, $a_0 = 0$ ならば, $z = 0$ は解であるから, $a_0 \neq 0$ と仮定する.
 $w = P(z)$ とおく. $r > 0$ に対して, 原点を中心とする半径 r の円周を,

$$C_t^{(r)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

と表す. つまり, $C_t^{(r)} = re^{2\pi it}$ とおく. z が 0 に収束するとき, $w = P(z)$ は a_0 に収束するので, $r' > 0$ を十分小さく取れば, $z = C_t^{(r')}$ が 1 周するとき, w は常に a_0 の近傍に存在し, 原点のまわりを周らない. 一方, $r'' > 0$ を十分大きく取ると, z^n に比べて, $n-1$ 次以下の項は無視できるようになるので, $z = C_t^{(r'')}$ が 1 周するとき, w は原点の周りを大きく n 周する.

P の連続性より, 閉曲線 $P(C_t^{(r)})$ は r について連続的に依存する. つまり, $P(C_t^{(r)})$ は $P(C_t^{(r'')})$ に連続的に変形することができる. ここで, もし, $P(C_t^{(r)})$ が原点を通らないとすると, $P(C_t^{(r')})$ と $P(C_t^{(r'')})$ の原点のまわりの回転数は等しくなければならないが, r' , r'' のとり方より, $n(C_t^{(r')}, 0) = 0$ で, $n(C_t^{(r'')}, 0) = n$ であるので, 原点における $P(C_t^{(r')})$ と $P(C_t^{(r'')})$ の回転数は異なっている. これより, $P(C_t^{(r')})$ が $P(C_t^{(r'')})$ に連続的に変形するとき必ず原点を通る. よって, ある $r_1 \in (r', r'')$ で, $P(C_t^{(r_1)})$ が原点を通るものが存在する. したがって, ある $z_1 \in C_t^{(r_1)}$ で, $P(z_1) = 0$ を満たすものが存在する.



□

この証明のアイデアの重要な点は, 点 a_0 の周りを小さく 1 周している閉曲線 $P(C_t^{(r')})$ と, 原点のまわりを大きく n 周している閉曲線 $P(C_t^{(r'')})$ の原点のまわりの回転数が異なっていることである. 原点のまわりの回転数が異なっているということは, $P(C_t^{(r')})$ から $P(C_t^{(r'')})$ に連続的に変形させるとき必ず原点を通らなければならないので, $P(z) = 0$ に少なくとも 1 つ解があることがわかる. 定理 8.4 の厳密な証明を高校生に理解させるのは難しいが, 上記の証明において回転数を用いている部分は図を用いて説明することができるため, 複素関数的な見方を用いることができれば, 高校生にも直観的にわかる内容となっているはずである. そこで, この証明の手法に基づき, 以下のように高等学校数学科において教材化の検討を行っていく.

8.3 代数学の基本定理の教材化の検討

位相幾何学的な証明の手法ならば直感的に理解できるとはいえ、高校生に対して代数学の基本定理についての一般的な話をいきなり行うことは難しい。そのため、具体的な方程式を扱いながら解をもつことを理解させていく必要がある。ここで扱おうと考えている方程式は、実数解をもたない4次方程式である。生徒は2次方程式は解の公式より複素数の範囲で解を必ずもつこと、3次方程式はグラフの形より実数解を必ずもつことを知っているの、実数解をもつかどうか一目ではわかりにくいであろう4次方程式を選んだ。この具体的な4次方程式を複素数の多項式関数とみなし、2次元から2次元への動きとして捉えることを通して、代数学の基本定理の証明のアイデアが見えるような教材化、授業化を行っていきたい。ここで証明のアイデアが見えるとは、単にここで扱う4次方程式に解があることの確認に留まらず、他の方程式に対しても同様の方法が適用可能であり、方程式が複素数の範囲で常に解をもつことの原理が生徒に伝わるということである。尚、動的な見方を補うために、動的幾何学ソフトを積極的に用いていく。

以下に詳細な授業化について述べていく。この授業は、2時間で構成される。第1時では、代数学の基本定理の証明のアイデアを扱うために必要な複素数の加法と乗法、べき乗の図形的な意味を復習する。そして、第2時は代数学の基本定理の証明のアイデアを理解させることを意図している。ただし、第1時は、ただ復習をするのではなく、2時間の授業全体を通して考えていきたい問題（与えられた4次方程式は解をもつのか）をはっきりさせ、解決に向けての方向性（複素数の範囲で考えると解がありそうである）を示したうえで学習に文脈をもたせて復習を行っていく。

授業の構想（第1時）

本時の目標は、以下の2つである。

- (a) 方程式を複素数の範囲で考えると解がありそうだということを図形的に理解する。
- (b) 複素数の加法と乗法の図形的な意味を確認し、 z が円上を動くときの z^4 の動きを理解する。

学習活動は、以下の流れで行う。

- ① 4次方程式 $x^4 + x + 1 = 0$ に実数解、複素数解があるのかを、動的幾何学ソフト「シンデレラ」を用いて考える。
- ② (1) ベクトルの手法を用いて、複素数の加法とその図形的な意味を確認する。
(2) 複素数の絶対値と偏角を用いて、複素数の乗法の図形的な意味を確認する。
- ③ 複素数の乗法の図形的な意味を踏まえて、複素数のべき乗を考える。
- ④ (1) 1と虚数単位 i を4乗するとどこに移るのかを確認する。
(2) z が半径1の円上の $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲を動くとき、 z^4 はどこを動くのかを考える。
(3) z が半径1の円上を1周するとき、 z^4 はどこを動くのかを考える。

- ⑤ (1) 2 と $2i$ を 4 乗するとどこに移るのかを確認する.
- (2) 半径 2 の円上 $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲の点を 4 乗することでどこに移動するのかを考える.
- (3) z が半径 2 の円上を 1 周するとき, z^4 はどこを動くのかを考える.

目標 (a) を達成するための教材や発問 (学習活動①)

まず最初に, 「 $x^4 + x + 1 = 0$ に解はあるか?」と板書し, 生徒に課題を提示する. この 4 次方程式は, 実数解をもたない方程式である. そのため, 具体的に数を代入していく活動を行っても 0 にはならないため, 生徒に「解はあるのだろうか」という疑問が生まれる. その後, 動的幾何学ソフト「シンデレラ」を用いた教材を提示する (図 8.1). このソフトで作成した教材は, 数直線が 2 本あり, 一方には x が数直線上に図示されており, もう一方には $x^4 + x + 1$ が図示されており, x を動かすと $x^4 + x + 1$ の値も変化するというものである.

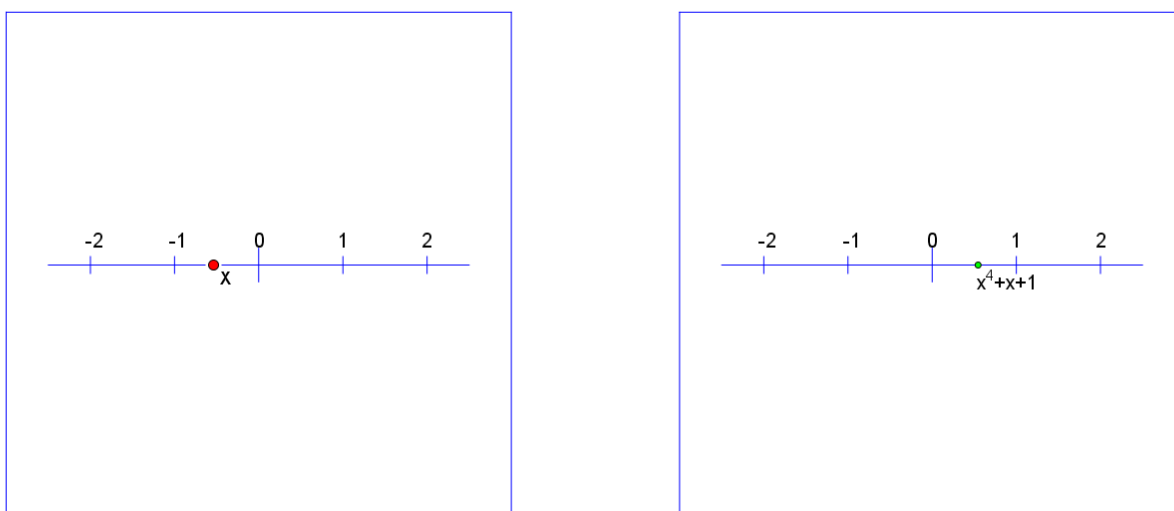


図 8.1: $x^4 + x + 1 = 0$ が実数解をもたないことを確認させる教材

この教材を用い, x をいろいろと動かして, x がどのように変化しても $x^4 + x + 1$ が 0 になりそうにないことを動的に見せることで, \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像 $f(z) = x^4 + x + 1$ について, $f(x) = 0$ となる x を探すという見方を促し, 方程式 $x^4 + x + 1 = 0$ は実数解をもたないことを確認させる. その後, 「複素数では解をもつか?」と発問することで, 自然に複素関数 $f(z) = z^4 + z + 1$ について, $f(z) = 0$ となる z を探すという文脈が生じる. そして, 動的幾何学ソフト「シンデレラ」を用いた別の教材を提示する (図 8.2). このソフトで作成した教材は, 座標平面が 2 つあり, 一方には複素数 z が平面上に図示されており, もう一方には複素数 $z^4 + z + 1$ が図示されており, z を動かすと $z^4 + z + 1$ の値も変化するというものである.

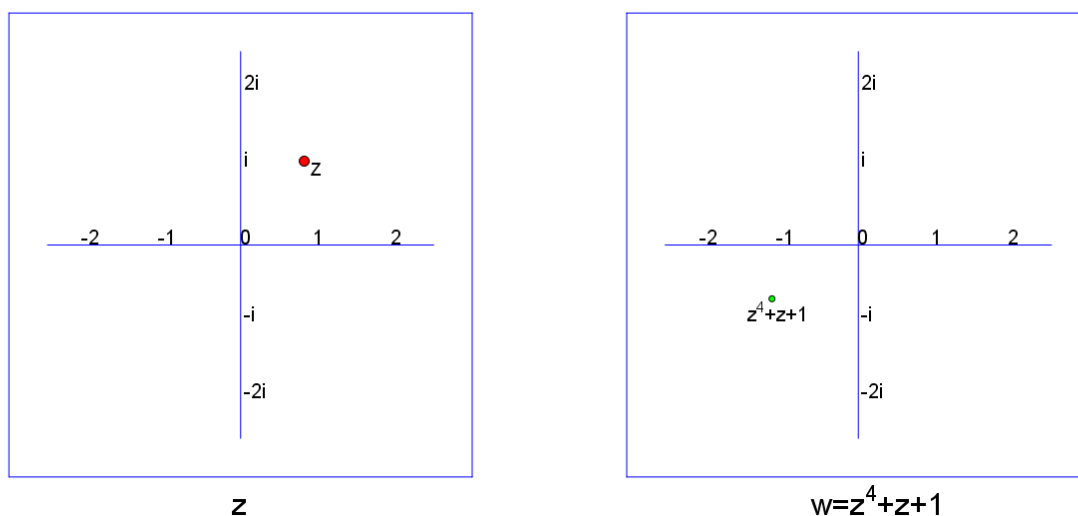


図 8.2: $z^4 + z + 1 = 0$ に複素数解がありそうであることを確認させる教材

この教材を用いて複素数 z を縦方向にも動かし、 $z^4 + z + 1$ が 0 に近づきそうで近づかない動きを見せることで、解がありそうだとすることを理解させる。その際に、「解がありそうだがよくわからないので解があることを論理的に考えよう」と発問し、「複素数 z の値に対して $z^4 + z + 1$ の位置がどのように決まるのか考えよう」と板書し、2 時間全体の授業で考えさせたいことを明確にする。

目標 (b) を達成するための教材や発問 (学習活動②～⑤)

代数学の基本定理の位相幾何学的な証明を直観的に理解するためには、複素数の和とべき乗の図形的な意味の理解が必要不可欠である。ここでの生徒は、複素数平面の単元で複素数の計算については学習済みであり、複素数の四則演算とその図形的な意味も確認しているが、授業では複素数の代数的な計算に重点を置いているため、図形的な意味の定着までは不十分であると想定している。そこで、「 $z^4 + z + 1$ の動きを考えるには複素数の加法、乗法や z^4 の動きを考える必要があるね」と伝え、複素数の加法と乗法の図形的な意味と、乗法の図形的な見方を踏まえてべき乗の図形的な意味を確認していく。

学習活動②について… 複素数の加法の図形的な意味については、加法の定義がベクトルの和であったことをパワーポイントを用いて矢印をつなぎ合わせる操作を通して確認させる。複素数の乗法の図形的な意味については、まず「複素数の掛け算を考える際にどこに注目していたかな」と発問し、偏角と絶対値に注目させる。その後、偏角と絶対値を図示しながら偏角の和と絶対値の積を考えることで、複素数同士を掛けた点がどのあたりに位置するのかをパワーポイントで図に示しながら確認させる。

学習活動③について… 複素数のべき乗は、同じ複素数同士の掛け算であるため、学習活動②で確認した積の図形的な意味を振り返らせながら複素数のべき乗を考えていく。具体的には、まずは偏角と絶対値に注目しながら z^2 , z^3 , z^4 の偏角と絶対値が z と比べてどのくらい変化しているかを表にまとめさせながら確認する。その後、パワーポイントを用いて z^2 , z^3 , z^4 がどこに位置するのかを確認する。その際、 z^4 は画面からはみ出してしまうので、4 乗するという事は値がかなり大きくなるということにも注目させる。

学習活動④, ⑤について… z が半径1, 半径2の円をそれぞれ1周すると, z^4 はそれぞれどのように動くのかを考えさせる場面である.

まずは1と i を4乗するとそれぞれどこに移動するのかを考えさせる. その際, どちらも1になることに注目させ, 間がどうなっているのかという疑問を持たせる. その疑問を解決するため, 中間の絶対値が1, 偏角が 45° の複素数の4乗を考えさせ, その後一般の複素数 z について考えさせる. つまりいくつかの点の移り先からはじめ, 複素数の乗法の図形的な意味を踏まえて途中の動きを補完的に現像させていく. こうした活動を通して, z の偏角 θ が $0^\circ \sim 90^\circ$ のときの 4θ の範囲を確認することで, 「 z が半径1の円周上を1から i まで動くとき, z^4 はどのように動くか」と発問したときに, 「 z^4 は半径1の円周を1周する」と生徒は答えると予想する. この答えが出てくれば, 同様に i から -1 まで, -1 から $-i$ まで, $-i$ から1まで z が動くときも, z^4 はそれぞれ半径1の円周を1周することを生徒は理解できると考える. これより, 生徒は z が半径1の円を1周すると, z^4 は半径1の円を4周することを理解することができる.

半径2の円周についても, 絶対値が変化することに注意すれば, 同様の手順で考えさせることで, 生徒は z が半径2の円を1周すると, z^4 は半径16の円を4周することを理解できると考える.

授業の構想 (第2時)

本時の目標は, 以下の2つである.

- (a) 複素数の加法とべき乗を用いて与えられた4次方程式が複素数の範囲で解をもつことを直観的に理解する.
- (b) 代数学の基本定理の幾何学的な証明の議論を通して, 複素数の動的な部分の見方を身につけさせる.

学習活動は, 以下の流れで行う.

- ① 前時の活動の振り返りをする.
- ② (1) z が半径3の円上を1周するとき, z^4 , z , 1がそれぞれどのように動くのかを考える.
(2) z が半径3の円上を1周するとき, $z^4 + z + 1$ がどのように動くのかを考える.
- ③ (1) z が半径 $\frac{1}{3}$ の円上を1周するとき, z^4 , z , 1がそれぞれどのように動くのかを考える.
(2) z が半径 $\frac{1}{3}$ の円上を1周するとき, $z^4 + z + 1$ がどのように動くのかを考える.
- ④ 学習活動②と学習活動③で考えた動き方から, $z^4 + z + 1 = 0$ の解があると言えるかを考える.
- ⑤ 動的幾何学ソフト「シンデレラ」を用いて, 4次方程式 $z^4 + z + 1 = 0$ が常に解をもつことを確認する.

目標 (a) を達成するための教材や発問

学習活動①について…最初に「前時にどんなことを考えたかな」と発問を行い、「 z^4+z+1 の動きを見たいので、 z が円上を動くときの z^4 の動きを考えた」ことと、「 z が半径 r の円を一周すると z^4 は半径 r^4 の円を一周する」ことを振り返らせることで、 z^4+z+1 の動きを考えるモチベーションを高める。

学習活動②(1)について… z^4+z+1 の動きを考えやすくするために、 z^4 、 z 、 1 それぞれ個別に考えるよう指導する。パワーポイントで図を提示しながら、 z が半径3の円周を一周するとき、 z^4 は半径81の円を一周すること、 z は半径3の円を一周すること、 1 は定数なので1であることを確認する。その際に、半径1は半径81と比べて小さいことに注目しておくことで、 z^4+z+1 の動きを考える部分につながっていく。

学習活動②(2)について…複素数の加法の図形的な意味を振り返らせながら、 z^4+z+1 の動きを考えさせる。その際に、「81は1や3と比較すると大きい数であるといえるので、おおまかな動きをとらえるには1と3は無視しても大丈夫である」ことを確認させる。それによって、 z^4+z+1 の動きは z^4 の動きに強く依存することを押さえ、 z が半径3の円周を一周するとき、 z^4+z+1 は原点のまわりを大きく4周することを理解させる。

学習活動③(1)について…学習活動②(1)のときと同様に、 z^4 、 z 、 1 それぞれ個別に考えるよう指導する。パワーポイントで図を提示しながら、 z が半径 $\frac{1}{3}$ の円周を一周するとき、 z^4 は半径 $\frac{1}{81}$ の円を一周すること、 z は半径 $\frac{1}{3}$ の円を一周すること、 1 は定数なので1であることを確認する。その際に、「 z^4 は原点のまわりを小さく4周すること」、「半径 $\frac{1}{81}$ は小さい数であること」の2点に注目しておくことで、 z^4+z+1 の動きを考える部分につながっていく。

学習活動③(2)について…複素数の加法の図形的な意味を振り返らせながら、 z^4+z+1 のおよその動きを考えさせる。困っている生徒には、大きい数から注目するほうが考えやすいことを伝え、 $z+1$ の動きから考えるように指導する。 z^4+z+1 の動きを考えさせる際には、「 $\frac{1}{81}$ は小さい数であるので、無視しても大丈夫である」ことを確認させる。それによって、 z^4+z+1 の動きは $z+1$ の動きに強く依存することを押さえ、 z が半径 $\frac{1}{3}$ の円を一周するとき、 z^4+z+1 は1のまわりを小さく1周することを理解させる。

学習活動④について…話し合いをさせて、学習活動②と学習活動③の結果から $z^4+z+1=0$ に解があると言えるかを考えさせる。困っている生徒には、「複素数の範囲で解をもつことの図形的な意味は何か」、「2つの図のうち、一方は原点のまわりを周っていないが、他方は原点のまわりを周っていること」を確認させる。予想される生徒の反応として、「半径が大きくなると z^4+z+1 が動いたときにできる図形も大きくなるからどこかで原点を通ると思う」、「どちらも原点を周っていないから解をもつとは言えない」等の考えがあげられる。ある程度意見が出たら、パワーポイントで図を見せながら生徒に次のような1本の杭とつながったロープの話をする：

杭が原点で、ロープは z が円周上を1周するときの z^4+z+1 の軌跡と考えてみよう。杭をまたぐにはロープを杭の上を通さなければならない。つまり、 z^4+z+1 の軌跡の一方が原点のまわりを周っており、他方が原点のまわりを周っていないということはどこかで原点を通っているはずである。したがって、 $z^4+z+1=0$ に解はある。

上記のロープの話が、前節で述べた代数学の基本定理の位相幾何学的な証明のアイデアで重要な部分であった、「2つの閉曲線の原点のまわりの回転数が異なっていれば、連続的に変形させるときにどこかで原点を通らなければならないこと」の直観的な説明である。

学習活動⑤について… 動的幾何学ソフトソフト「シンデレラ」を用いて、 z が動く円の半径を動かしながら、 z^4+z+1 が原点を通ることを実際に見せることで、4次方程式が常に解をもつことを理解させる。このソフトで作成した教材は、2つの座標平面のうちの左側が z の動く原点中心の円（半径が可変）を表しており、右側には z がその円周上を動くときの z^4+z+1 の軌跡を表しているもので、 z が動く円の半径を変化させると z^4+z+1 の軌跡も変化するというものである（図8.3）。

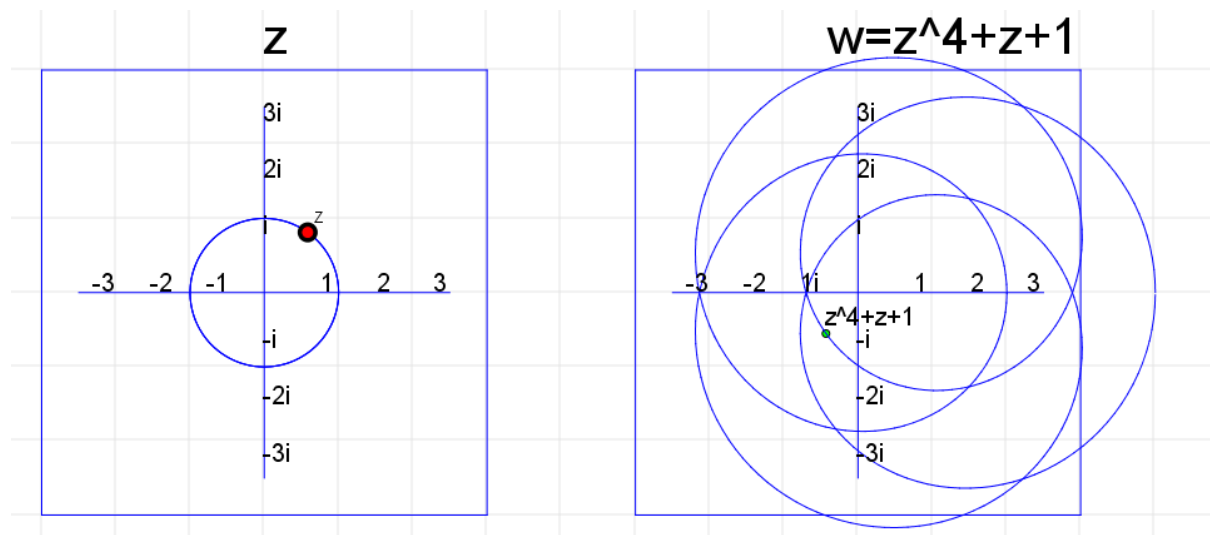


図 8.3: z が円周上を動くときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡を確認させる教材

また、この教材では、 z の動きを表す赤い点を動かすと、 z^4+z+1 の動きを表す緑色の点も対応して軌跡上を動く。 z が動く円の半径の大きさによって、 z^4+z+1 が原点のまわりを何周するのかを視覚的に理解できるようにしている。

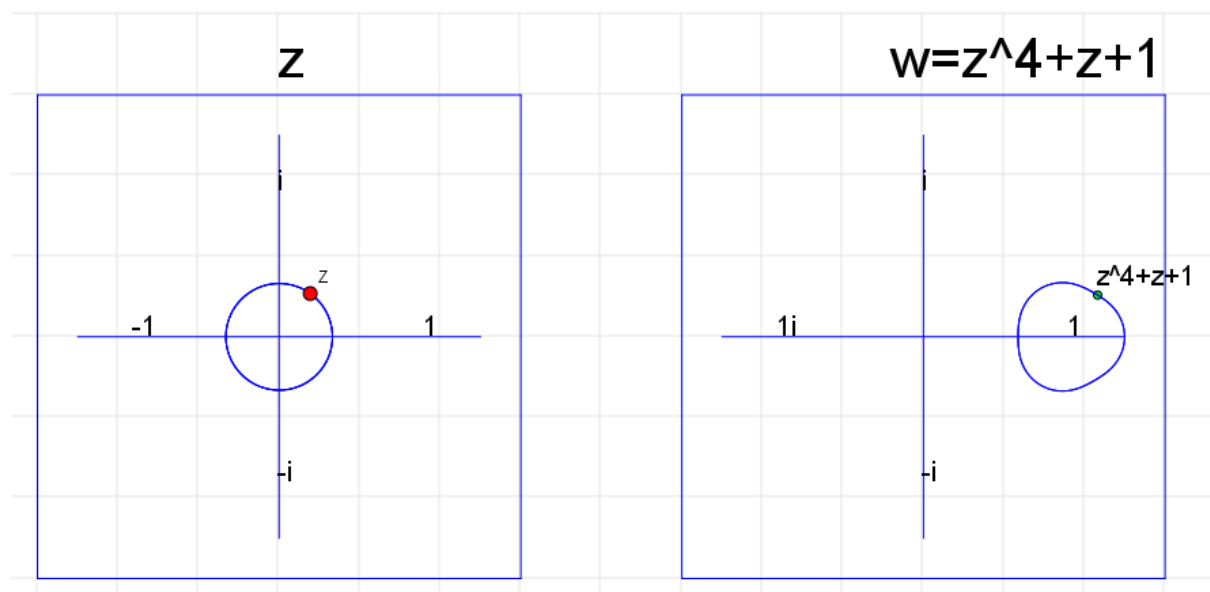


図 8.4: z が動く円周の半径が十分小さいとき、 $w = z^4 + z + 1$ の軌跡は原点のまわりを周らない

z が動く円の半径を少しずつ変化させて、実際に z^4+z+1 の軌跡が原点と重なる部分

があることを視覚的に確認することで、 $z^4 + z + 1 = 0$ に解があることを確かめられるようにしている（図 8.5）。

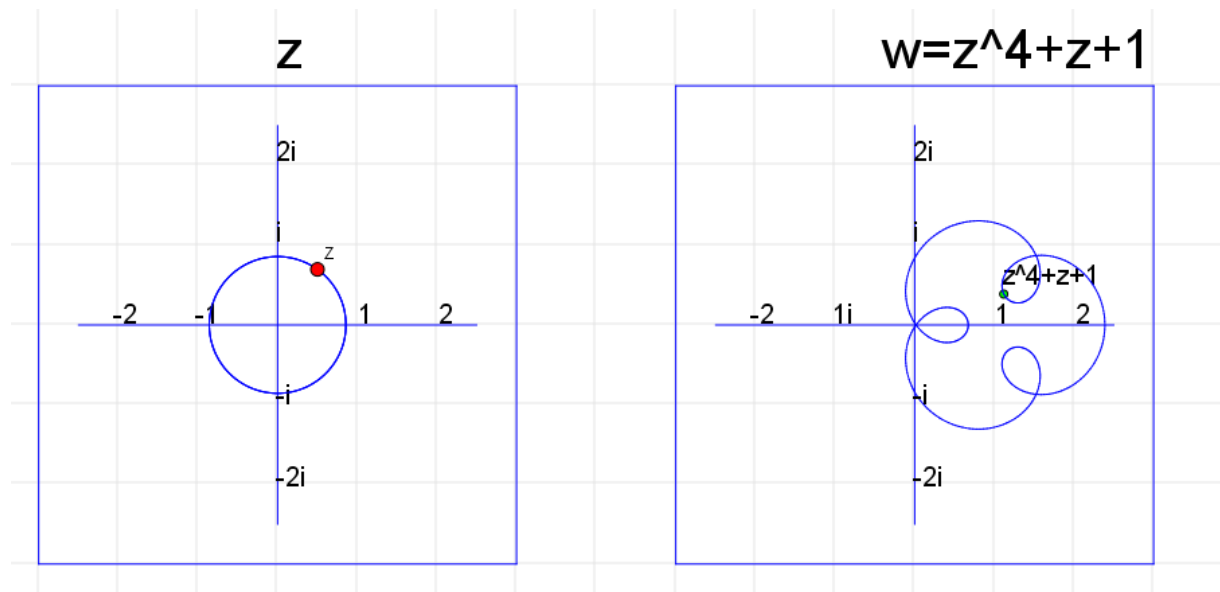


図 8.5: 半径を変化させると、 $w = z^4 + z + 1$ の軌跡が原点を通るようにできる

この手法を用いれば、代数方程式は複素数の範囲で解をもつことを示すことができることを確認する。そして、本時で取り組んだことは実数のみで考えると分からないが、複素数で考えると明らかになることがある1つの例であることを伝える。

目標 (b) を達成するための教材や学習活動

$w = z^4 + z + 1$ という写像は、円周でさえもどのように移されるのかを想像するのはかなり難しく、複雑な動きをする写像である。それにもかかわらず、学習活動②～④を通して、考えている円周の半径を変化させることにより、 $w = z^4 + z + 1$ によって原点に移る点が存在することを考察することができた。このような考察を行う際に重要な点は2つある。

1つ目は、主に学習活動②、学習活動③にあたる部分である、 z^4 と $z + 1$ の大きさに注目し、 $w = z^4 + z + 1$ によって円周がどのような曲線に移るのかを大まかにとらえたことである。高等学校数学科の幾何学に関する学習活動では、どのような図形を描くのかを具体的かつ正確に求めるようなものが多く、おおよその形をとらえていくという活動はあまりない。そのため、生徒は常に正確な図形を考えようとするが、今回の活動では、むしろ正確な形は重要ではなく、注意すべきポイントは別（原点のまわりを周っているかどうか）にあった。そのため、式の変形、代入などの操作による計算ではなく、複素関数としての動的な見方がクローズアップされ、それが問題の解決に寄与しているのである。

2つ目は、主に学習活動④にあたる部分である、半径3の円周と、半径 $\frac{1}{3}$ の円周の間の動きを想像した点である。2次元から2次元への動きを見るためには、複数の曲線を用いて自分の中で補っていく必要がある。今回は、学習活動②、学習活動③において、半径3の円周上を z が動くときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡と、半径 $\frac{1}{3}$ の円周上を z が動くときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡という2つの曲線を考えた。ここで考えた2つの曲線を用いて、一方は原点のまわりを周っており、もう一方は原点のまわりを周っていないことから、ある半

径の円周で、その円周上を z が動くときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡で原点を通るものがあることを考察していく。これは本稿で提案する複素関数の考え方を促す活動、つまり、2次元から2次元への写像である複素関数の移り方を、複数の曲線の移り先を考えたり、その間を補完して想像したりさせることによってとらえさせようとする活動そのものである。

8.4 授業実践により得られた成果と考察

以下に、上で述べた教材案を基にして、実際に高校生を対象として行った授業実践を示す。本実践は、令和2年4月3日（金）に、前節で教材化したものを高等学校3年生男子生徒2名を対象に、高等学校数学Ⅲの複素数平面の単元における発展的な学習という位置付けで行ったものである¹。この2名の生徒は、複素数平面の単元を一度学習してから3ヵ月程度過ぎており、複素数平面の基本的な内容の復習も丁寧に行う必要があると想定したうえで授業を実施した。

第1時の実践の様子・結果

学習活動①において、与えられた方程式 $x^4 + x + 1 = 0$ の解があるかを考える際に用いた教材（図8.1）を用いて、 x をいろいろと動かしたときに、 $x^4 + x + 1$ が0になりそうにないことを見せた後に、生徒に対して、「この動きから何が言えるだろうか」と発問したところ、「0にならないから解がない」という返答があった。このことから、方程式 $x^4 + x + 1 = 0$ を \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数 $f(x) = x^4 + x + 1$ という見方により、 $f(x) = 0$ となる x を見つけるという問題に置き換えるという理解が生徒にあったといえる。

さらに、「横の動きだから、ただ単に『解がない』だけか（もう少し精密な表現はないか）」と発問したところ、「実数解がない」という返答があった。このことから、生徒の中に実数のまわりに複素数があるという理解がうかがえる。

次に、『複素数の範囲で解があるか』と板書し、図8.2で示した教材を用いて生徒に考えさせたところ、「 $z^4 + z + 1$ が0になりそう」、「解がありそう」という解答があった。このことから、図8.2の教材が方程式 $z^4 + z + 1 = 0$ を \mathbb{C} から \mathbb{C} への関数 $f(z) = z^4 + z + 1$ として見ることを生徒に促し、 $f(z) = 0$ となる z を見つけることができれば、その z が $z^4 + z + 1 = 0$ の解であるという考えに導いていることが分かる。つまり、これまでの学習では扱われていない2次元から2次元への変換である複素関数の考え方の芽生えが見られる。また、学習時間①の活動を通して、『解があることを論理的に考えていく』という2時間の授業を通して考えさせたいことを生徒に対して明確に示すことができた。加えて、『そのために $z^4 + z + 1$ の位置について調べていく』という方針も確認することができたため、スムーズに複素数の加法、乗法の図形的な意味の確認に入ることができた。

学習活動②において、複素数の加法の図形的な意味を復習する場面で、実際にパワーポイント上で複素数を2点与えたのちに、「複素数の加法は複素数平面上でどのように考えたかな」と発問したところ、「平行四辺形の対角線を用いて考えた」と返答があり、「つまり何の考え方かな」と発問したところ、「ベクトルの考え方」という解答があった。このことから、ベクトルを用いた複素数の考え方は十分に身につけているといえるだろう。

¹新型コロナウイルス感染症の影響で、対象生徒を希望生徒2名に限定して授業実践することとなった。

次に、複素数の乗法の図形的な意味について、生徒は複素数の掛け算は偏角の和と絶対値の積で表されることは理解していた。そのことから2つの複素数 z_1 と z_2 の積で表される点 $z_1 z_2$ の位置を生徒に書かせたところ、正しい位置に描くことができていた。このことから、複素数の拡大と回転移動を用いて複素数の積の図形的な意味を考えることができているといえる。

学習活動③において、 z^2 の位置を考えさせる際に、 z^2 は z の偏角が2倍、絶対値は z の絶対値が2倍されることを生徒と確認したうえで、「 z^3 、 z^4 の偏角と絶対値がどのようになるか」と発問すると、「偏角は3倍、4倍になり、絶対値は3乗、4乗になる」と返答があった。このことから、学習活動②で確認したことを踏まえて、生徒はべき乗も複素数の積と同様に考えられるということを理解していることが確認できる。

学習活動④において、「 z が原点中心半径1の円周をすると、 z^4 はどのように動くか」と発問したところ、「半径1の円を4周する」とすぐに返答した生徒がいた。しかし、もう一人の生徒にも理解を確実にさせるため、詳しく動き方を調べてみようという文脈で、引き続き学習活動④の内容に沿って授業を進めた。

まず、1と i を4乗すると1になることを確認した後に、「(半径1の円周を手でなぞりながら) z が1から i を動くとき、 z^4 はどんな動きをしているだろうか」と発問したところ、同じ生徒から「半径1の円を1周すると思う」という返答があったが、もう1人の生徒はよく分からないという様子であった。そのため、半径1の円周上にある偏角が 45° の複素数を4乗するとどうなるかを考えさせたところ、『偏角が4倍より、偏角が 180° となるから -1 になる』という発言を引き出した。

その後、偏角 θ の一般の複素数を4乗すると、偏角は 4θ 、絶対値は1のままであることを確認した後に、「偏角 θ が 0° から 90° を動くとき、 4θ はどこからどこまで動くか」と発問したところ、「 0° から 360° 動く」と返答があった。さらに、「これはどんな動きをしているか」と発問したところ、「半径1の円を1周している」と解答した。このことから、 θ の動きと実際の複素数の動きの対応を理解していることがわかる。このことを踏まえて、 θ が残りの 90° から 180° 、 180° から 270° 、 270° から 360° も同様に考えさせて、それぞれ1周することから z が半径1の円周を1周するとき、 z^4 は半径1の円周を4周することの根拠を確認することができた。

学習活動⑤においては、 z が半径2の円周を1周するとき、 z^4 はどのように動くかを考える問題で、半径1の円と絶対値が違うことに注目させることで、学習活動④と同様に考えることで z^4 が半径16の円を4周するという解答を引き出すことができた。

第2時の実践の様子・結果

学習活動②について、 z が半径3の円周上を動くときの z^4 、 z 、1の動きは生徒の方からスムーズに引き出すことができた。このことから、前時で復習したことを用いて考えることができていることがわかる。

次に、 $z^4 + z + 1$ の動きを考える場面で、「おおよその動きを考えよう」、「 z^4 、 z 、1の絶対値がそれぞれ81と3と1であるから絶対値が大きいものから考えてみよう。81は1や3と比べてとても大きいから、1や3は $z^4 + z + 1$ の動きにあまり影響を与えない」と助言をした。そのうえで、「 $z^4 + z + 1$ はどのような図形を描くかな」と発問したところ、「円みたいな形になる」と返答があった。さらに、「動きに注目してみるとどうか」と発問し

たところ、「4周する」と解答した。このことから、 $z^4 + z + 1$ の動きを大まかにとらえることの意味をされていると思われる。

学習活動③において、 z が半径 $\frac{1}{3}$ の円周上を動くときの z^4 , z , 1 の動きを確認させた後に、 $z^4 + z + 1$ の動きを考えさせた。その際に、「 $\frac{1}{81}$ は1や $\frac{1}{3}$ に比べて非常に小さいから、 z^4 は $z^4 + z + 1$ の動きに大きな影響を与えない」と助言をしたうえで、「 $z^4 + z + 1$ はどのような動きをするかな」と発問したところ、「1を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円周のような図形を1周する」という返答があった。このことから、やはり、生徒は、 z^4 , z , 1 の絶対値の大きさに注目しながら、絶対値が大きい複素数が $z^4 + z + 1$ の動きに大きな影響を与えているということを理解したうえでおおよその動きをイメージできているといえるだろう。

学習活動④において、学習活動②、学習活動③で考えたことから $z^4 + z + 1 = 0$ に解があるといえるかを考えさせた。最初に、「 $z^4 + z + 1 = 0$ が解をもつことの図形的な意味は何か」と発問し、「前時に z をいろいろと動かして考えたよね」と助言をすると、「 $z^4 + z + 1$ を原点に重ねることができる」という返答があった。動きを実際に見せて生徒の方に一度考えさせているので、スムーズに出てきたと思われる。

次に、「 z が半径 $\frac{1}{3}$ と半径3の円周をそれぞれ1周するときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡の違いは何か」と発問したところ、「一方は原点のまわりを大きく4周、もう一方は1のまわりを小さく1周している」という解答があった。第2時の学習活動③において、『小さく1のまわりを1周』と板書したため生徒の方からすぐに出てきたのだと思われる。その後、「解をもつということは原点に重ねることができるかどうかであるから、原点に注目して考えたいよね。それでは、小さく1のまわりを1周している図形は原点ではどうなっているか」と発問したところ、「原点を通らない」、「原点より右にある」という返答があった。

以上の点を踏まえて、 $z^4 + z + 1 = 0$ に解があるといえるかを考えさせたところ、2人の生徒両方とも、「どちらも原点を通っていないから解はない」と解答した。この解答を踏まえて、「半径を81より大きくすると $w = z^4 + z + 1$ の動きはどうなるか」、「半径を $\frac{1}{3}$ より小さくすると $w = z^4 + z + 1$ の動きはどうなるか」と発問したところ、「半径を大きくすると大きく4周する」、「半径を小さくすると1のまわりをさらに小さく1周する」と返答があった。そこでさらに、「半径を $\frac{1}{3}$ より大きくするとどうなるか」と発問したが、「半径を大きくしても原点は通りそうにない。原点には近づくが原点は通らない」という返答があった。このことから、 z が動く円周の半径が3より大きいとき、 $\frac{1}{3}$ より小さいときに $w = z^4 + z + 1$ がどのような形を描くかは想像できているが、その間は具体的な形が想像できないことから、原点の上を通るかどうかは自力では考察できない様子が見られる。

ここまで $z^4 + z + 1 = 0$ に解があるかを生徒に考えさせてきて、生徒の意見が出たところでロープと杭の話を生徒に対して行った。まず、「1本の杭をまたぐようにつけたロープを外すには、ロープは杭の上を通らなければならない。ここでの杭が今考えている原点で、ロープが $w = z^4 + z + 1$ の軌跡にあたる」という話をした。その後、「今の状況は、半径3の円周に対する軌跡は原点のまわりを周っている、つまりロープが杭のまわりを周っているといえる。一方、半径 $\frac{1}{3}$ の円周に対する軌跡は、1のまわりを小さく1周、つまりロープは杭から外れているといえる。ということは、円周の半径を動かすと、軌跡はどのように変化するか」と発問したところ、2人の生徒それぞれから、「どこかで原点を通る、絶対に原点を通るように変化する」という返答があった。このことから、杭とロープの話の踏まえて考えさせると、一方の軌跡が原点のまわりを周っており、他方の軌跡は原

点のまわりを周っていないという事実から、円周の半径を変化させると、どこかで原点を通らなければならないということを生徒は直観的に理解していると思われる。

今回の授業実践で、ロープと杭の話をする中で、複素数係数の方程式に解があるかどうかを考えるためには、軌跡が原点のまわりを周っているかどうかが重要であるということは生徒の方に伝わったと思われる。一方、動的な見方のよさは伝わったが、半径3と $\frac{1}{3}$ の間を想像して、自力解決をするところまでは引き出すことができなかった。これは、半径 $\frac{1}{3}$ の動きのときに、1のまわりがどうなっているかという部分に注目がいってしまったためではないかと考えられる。実際、半径 $\frac{1}{3}$ の円周上を z が動くときの $w = z^4 + z + 1$ の軌跡を考える際は w の軌跡の概形を考えることに焦点を当てていて、全体的な問題の文脈である原点との関係についての考察への焦点化が弱かった。結果として、半径 $\frac{1}{3}$ と3のときとを比較する際、概形の違いに焦点が当たり、原点との関係の相異、つまり回転数の違いに意識が向かなかったと思われる。この点は今後の実践での改善点となろう。

一方で、自力解決には到らなかったが、教師の支援を受けながら今回の4次方程式が解をもつこと理由は生徒が理解することができたと思われ、この教材の実践としての可能性には一定の手応えが感じられた。ただ、生徒がこれをどこまで原理的に理解、つまり同じ方法で他の4次方程式あるいは高次の方程式に対しても解があることを説明できると理解していたかについては今後の検証が必要である。

第9章 得られた成果と今後の課題

9.1 成果

本論文の第II部では、第I部の複素解析学の古典理論の研究を通して考えてきた複素関数の見方・考え方を、どのように教材化すれば高校生にもこれを理解させ、さらに意義を感じさせることが可能であるかを考えてきた。本稿では、複素関数の考え方を、2次元から2次元への変換を視覚的に捉えることと考えている。このことを念頭に置くと、現行の高等学校数学科において、複素数平面の学習は、複素数平面上の動的な見方が全く無い訳ではないが、点の移動としての扱いが中心であるため、複素関数 $w = f(z)$ 、つまり z -平面から w -平面への写像としての扱いはあまりなされていない。そこで、複素関数を高等学校数学科で取り扱うための教材や授業案を提示することはできないかと思い研究を進めてきた。その結果、以下のような成果を得ることができた。

- ・ 複素関数の見方・考え方を、複素関数を2次元から2次元への変換として扱い、その動きをとらえることとすれば、高等学校数学科でも複素関数の考え方を取り扱うことは可能である。そのために、具体的な幾つかの曲線の像を考え、その間をイメージさせる活動を提案した。
- ・ 複素関数論において重要な変換である Möbius 変換、Joukowski 変換という2種類の変換について、それらの性質、特に、複素数平面上の曲線族の像がもつ性質が2次元から2次元への変換として捉えさせるのに優れていることに注目し、現行の高等学校数学科の学習内容と対応させながら教材研究を行い、高校で扱う教材としての可能性を見出すことができた。
- ・ 複素関数としての動的な視点から取り扱うことで新たに解決可能となるような題材として、代数学の基本定理の位相幾何学的な証明を用いた教材の検討を行った。さらにこれを用いた授業案の作成、それを基にした授業実践とその分析を行い、高校生に複素関数の見方のよさを自然に実感させる教材とその授業案を提示することができた。

9.2 課題

本研究で行ってきた教科書分析や教材分析は、主として複素解析学の古典理論の研究を背景として経験してきたことを基にしている。そのため、数学教育学的な知見や研究枠組みを基にした裏付けはあまりなされていない。そこで、今後の課題としては以下のようなことが挙げられる。

- ・ 濱中・吉川 (2018) [55] は, APOS 理論という数学教育学の理論枠組みに基づいて, $w = \alpha z + \beta$ を変換として扱う教材やその学習プロセスについて提案している. このように本論文で教材としての可能性を指摘した Möbius 変換や Joukowski 変換についても, 具体的に授業として扱うためには, 数学教育学の知見から分析を行い, その学習過程までを含めて考察する必要がある.
- ・ 本研究で提示した代数学の基本定理の位相幾何学的な証明のアイデアを用いた授業実践では, 本稿における複素関数の見方である 2次元から 2次元の動きとして捉えることのよさを伝えることはできたが, 第 8.4 節で述べたように間の動きを生徒にイメージさせ, 自力解決を促すための手立てについて再度検討しなければならない. また, 本授業案は複素解析学や位相幾何学の知識や考え方に基づいて構成されているため, 数学教育的な知見や枠組みに基づいて本授業案と授業実践のさらなる考察を行う必要がある.

謝辞

主指導教員である兵庫教育大学の濱中裕明教授には，博士課程の3年間で大変お世話になりました．著者が岡山大学修士課程在籍時から取り組んでいた複素解析学の古典理論に関する研究に対して貴重なご助言をいただきました．また，高等学校数学科における複素関数の扱いについて研究を行う際に，基礎からご指導いただきました．心より感謝申し上げます．

副指導教員である岡山大学の岡崎正和教授，同じく副指導教員である中村登教授には岡山大学在籍時からご指導いただき大変お世話になりました．感謝いたします．

また，東京都市大学の出未光夫准教授，東京都立大学客員研究員の野井貴弘博士，九州大学修士課程の竹内達基君には複素解析学の古典理論の研究で大変お世話になりました．

最後に，博士課程での研究活動を温かく見守り，実験授業に協力してくださった学校法人関西学園関西高等学校の教職員の皆様とここまで支えてくれた両親に心より感謝申し上げます．

参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), 359–364.
- [2] L. V. Ahlfors and H. Grunsky, Über die Blochsche Konstante. *Math. Z.* **42** (1937), 671–673.
- [3] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.–B. Preuss. Akad. Wiss. **38** (1916), 940–955.
- [4] M. Bonk, On Bloch's constant. *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 889–894.
- [5] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.* **154** (1985), 137–152.
- [6] H. Chen and P. M. Gauthier, On Bloch's constant. *J. Anal. Math.* **69** (1996), 275–291.
- [7] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978.
- [8] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable. II*. Graduate Texts in Mathematics, 159. Springer-Verlag, New York, 1995.
Studies in Advances Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [9] P. L. Duren, *Univalent Functions*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 259. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [10] P. L. Duren, *Harmonic mappings in the plane*. Cambridge Tracts in Mathematics, 156. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [11] P. L. Duren and A. P. Schuster, *Bergman spaces*. Mathematical Surveys and Monographs, **100**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [12] C. H. Fitzgerald and Ch. Pommerenke, The de Branges theorem on univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **290** (1985), 683–690.
- [13] P. R. Garabedian and M. Schiffer, A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mech. Anal.* **4** (1955), 427–465.

- [14] S. Gong, The Bieberbach Conjecture. Translated from the 1989 Chinese original and revised by the author. With preface by Carl H. FitzGerald. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 12. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 1999.
- [15] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis Volume 3: Discrete Fourier analysis–Cauchy integrals–construction of conformal maps–univalent functions. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [16] M. Izuki and T. Koyama, An elementary proof of the Carathéodory kernel convergence theorem. *Azerb. J. Math.* **8** (2018), 69–85.
- [17] M. Izuki, T. Koyama, T. Noi and T. Takeuchi, A simple estimate of the Bloch constant. *Communications in Mathematical Analysis.* **21** (2018), 35–41.
- [18] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte Konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. (German) *Math. Ann.* **89** (1923), 103–121.
- [19] M. Ozawa, On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Kōdai Math. Sem. Rep.* **21** (1969), 97–128.
- [20] R. Pederson and M. Schiffer, A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.* **45** (1972), 161–193.
- [21] Ch. Pommerenke, Univalent Functions with a chapter on Quadraic Differentials by Gerd Jensen. *Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [22] S. Ponnusamy and H. Silverman, Complex variables with applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
- [23] W. Rudin, Real and Complex Analysis. Third Edition. McGraw–Hill Book Co., New York, 1987.
- [24] S. L. Segal, Nine Introductions in Complex Analysis. Revised Edition. North-Holland Mathematics Studies, 208. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2008.
- [25] C. Xiong, Lower bound of Bloch’s constant. *Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan.* **15** (1998), 174–179.
- [26] 相川弘明, 複素関数入門. 共立出版, 2016.
- [27] 新井朝雄, 複素解析とその応用. 共立出版, 2006.
- [28] L. V. アールフォルス 著, 笠原乾吉 訳, 複素解析. 現代数学社, 1982.
- [29] 大島利雄ほか 13 名, 数学 III. 数研出版, 2019.

- [30] 笠原乾吉, 複素解析 1 変数解析関数. 筑摩書房, 2016.
- [31] 片山孝次, 複素数の幾何学. 岩波書店, 1982.
- [32] 河添健, 微分積分学講義 I. 数学書房, 2009.
- [33] 河添健, 微分積分学講義 II. 数学書房, 2011.
- [34] 川中宣明ほか 13 名, 数学 II. 数研出版, 2018.
- [35] 黒田成俊, 関数解析. 共立出版, 1980.
- [36] 河野芳文, 複素数平面上の変換としての演算について. 広島大学附属中・高等学校研究紀要, 第 46 号, pp.39~48, 1999.
- [37] 小平邦彦, 複素解析. 岩波書店, 1991.
- [38] 小平邦彦, 解析入門. 岩波書店, 1991.
- [39] 小松勇作, 等角写像論 上巻. 共立出版, 1944.
- [40] 小松勇作, 函数論. 朝倉書店, 1960.
- [41] 佐藤宏樹, 複素解析学. 近代科学社, 1991.
- [42] 澤野嘉宏, 早わかりベクトル解析 3つの定理が織りなす華麗な世界. 共立出版, 2014.
- [43] 杉浦光夫, 解析入門 I. 東京大学出版会, 1980.
- [44] 杉浦光夫, 解析入門 II. 東京大学出版会, 1985.
- [45] E. M. スタイン, R. シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之 訳, 複素解析. 日本評論社, 2009.
- [46] 高橋陽一郎ほか 30 名, 詳説数学 II -改訂版-, 啓林館, 2018.
- [47] 高橋陽一郎ほか 30 名, 詳説数学 III -改訂版-, 啓林館, 2018.
- [48] 高橋礼司, 新版 複素解析. 東京大学出版会, 1990.
- [49] 田島一郎, 解析入門. 岩波書店, 1981.
- [50] R. V. チャーチル, J. W. ブラウン 著, 中野實 訳, 複素関数入門 原書第 4 版 新装版. 数学書房, 2007.
- [51] 辻正次, 複素函数論. 槇書店, 1968.
- [52] 遠木幸成, 函数論. 共立出版, 1956.
- [53] 野口潤次郎, 複素解析概論. 裳華房, 1993.
- [54] 能代清, 初等函数論. 培風館, 1954.

- [55] 瀧中裕明, 吉川明慶, 「複素数平面」の学習における「平面上の変換」の概念化についての考察—APOS 理論の視点から—. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 24 巻, 第 1 号, pp.37~45, 2018.
- [56] 林美樹廣, 長坂行雄, 複素関数概論. サイエンス社, 2003.
- [57] 藤家龍雄, 複素解析学. 朝倉書店, 1982.
- [58] 藤本坦孝, 複素解析. 岩波書店, 1996.
- [59] 堀内利郎, 下村勝孝, 複素解析の基礎 i のある微分積分学. 内田老鶴圃, 2001.
- [60] 俣野博, 河野俊丈ほか 31 名, 数学 II. 東京書籍, 2019.
- [61] 俣野博, 河野俊丈ほか 31 名, 数学 III. 東京書籍, 2019.
- [62] 前田周一郎, 函数解析. 森北出版, 1974.
- [63] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版, 2009.
- [64] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版, 2019.
- [65] 山口博史, 複素関数. 朝倉書店, 2004.
- [66] 吉田洋一, 函数論 第 2 版. 岩波書店, 1965.