兵庫教育大学　研究紀要　第61巻　2022年９月　pp. 95－101

# 対数の導入授業における亜教授学的状況の実現

# Realizations of Adidactic Situations in the Introductory Lessons of Logarithms

濵　中　裕　明*　　勝　谷　紗　英**
HAMANAKA Hiroaki　KATSUTANI Sae

Brousseau は教授学的状況理論において数学の教授学習場面をモデル化し，数学知識を学習するとはどういう状況のことなのかを亜教授学的状況として明らかにしている．本稿では，そのような亜教授学的状況の実現を目指して，対数の導入に関する授業実践を行った．具体的には２のべき乗とその指数の対応表をミリューとする第１時，指数関数のグラフをミリューとする第２時の２時間の授業を実施した．その結果，部分的にではあるが，生徒たちがミリューとの相互作用を行い新たな知識を引き出すという亜教授学的状況が見られ，対数のよさを実感させつつ導入を行うことが出来た．また実践を通じて，生徒の亜教授学的状況を阻害せずに主体的な学習活動を促すための，生徒が自身で間違いに気が付けるような介入の方法について示唆が得られた．

キーワード：対数の導入，教授学的状況理論，亜教授学的状況
Key words：introduction of logarithm, theory of didactic situations, adidactic situation

## １．はじめに

Brousseau（1997）による教授学的状況理論は，数学知識を学習するとはどういう状況のことなのか，といった問いに対して，亜教授学的状況という概念によってひとつの解答を与えてくれる．亜教授学的状況とはどういうものなのかは第３章で概説するが，これは今日の初等・中等教育において求められる「アクティブ・ラーニング」にも近いものである．そこで本稿では，対数の導入授業において，亜教授学的状況の実現を目指した授業開発を行い，その実践において亜教授学的状況の実現の状況を分析・検証し，今後の授業開発への示唆を得ることを目的とする．そのためにまず，第２章では対数・対数関数の指導に関する先行研究を概観し，特に後藤（2014）による対数の導入授業の提案を基にして，第３章で述べる教授学的状況理論を援用し，新たな授業案を提案していく（第４章）．第５章では，第４章において開発した授業の実践結果を述べ，その分析・考察をまとめ今後の研究の課題と展望を述べる（第６章）．

## ２．対数・対数関数の指導に関する先行研究

対数の指導に関する先行研究は多々あるが，ここでは改善すべき方向性を得るために，対数の活用力および，対数のよさに関する指摘に焦点をあて，先行研究からの示唆を紹介する．

### ⑴　梅田・熊倉による活用力育成についての指摘

梅田・熊倉（2017）は日本の対数指導をフィンランドと比較し，フィンランドの教科書には「数学的な活用力」の育成を促進するような問題や題材が多く掲載されているのに対して，日本の対数指導では，「バクテリアの増殖」「放射性物質の崩壊」「音の強さの単位（デジベル）」「星の明るさ（等星）」や「地震の強さ（マグニチュード）」などの題材が学習指導要領解説の記述には例示されているにも拘わらず，教科書におけるそうした対数の活用を題材とした記述は十分とはいえず，「活用力の育成」を重視した指導は十分ではないと指摘している（梅田・熊倉，2017）．

### ⑵　後藤による対数のよさに関する先行研究

こうした対数指導では，対数のよさを実感することが困難となってしまい，対数概念の理解の定着にも問題が生じかねない．この点について，後藤（2012, 2013, 2014）は，対数がどのように生じ，どのように利用されてきたのかという歴史的展開や，これまでの日本における対数学習の変遷を基にして，そもそも対数のよさとは何かを明らかにしている．後藤（2014）は，整理した対数のよさを5点にまとめているが，そのひとつが「膨大な数どうしのかけ算を，各数の対数の和に変換して計算できる」ことである（p.21）．

### ⑶　後藤による対数のよさを実感させる授業案

そうした対数のよさをどのように生徒たちに実感させて指導していくかという点について後藤（2014）は，対数の導入時，とその後の積極的な対数の利用，という２点に分けて考察している．このうち，特に，対数の導入

＊兵庫教育大学大学院教育実践高度化専攻理数系教科マネジメントコース 教授
＊＊兵庫県立姫路飾西高等学校
令和4年4月28日受理

時の展開について後藤（2014）は,「とらえさせたい対数のよさと自然に結びつく問題を生徒が解決していく活動を通して，対数の存在や性質を生徒自身で発見できる学習を行うことが重要だと考える．特に，対数学習の導入において指数関数に従属せずに対数を定義する必要がある」と述べている（pp. 25-26）．そのうえで，対数学習の導入に位置づく学習として，等差数列と等比数列の表の仕組みを考える学習を提案している．具体的には次のような教材・授業案である．

①１時間経過する毎に２倍に増殖する細菌を考え,いまこの細菌が最初に１万個いると仮定する．
②12時間後の細菌の個数について考える．この時，経過時間（時間）と細菌の個数（万個）の表を黒板に書いていく．
③12時間後の細菌の個数である4096（万個）の2048倍の個数になるのは何時間後かを考える．
④上の③の答えが23時間後である理由を考える．
⑤時間と細菌の個数の関係を表す表の仕組みについて考える．

後藤（2014）は実際にこの授業実践を行い，その中で,「２つの等比数列の項の積が，等差数列の項の和に対応する」という表の仕組みを生徒が理解し，対数の考え方に価値を実感できる学習であったことを確認している．

しかし，一方で，これはあくまで対数そのものではなく，対数導入に向けた素地としての教材である．後藤（2014）では，今後の課題として，「明らかにした導入部分について，生徒が対数とは何かを考え，対数そのものを実感できるような学習展開を検討していくことである」という点を挙げ（p.32），この導入教材から実際に対数そのものである $log_a\ x$ を導入する展開につなげる研究の必要性を述べている．そこで，ここでは後藤（2014）の提案する細菌の増加に関する表を用いて，そこから具体的な対数を導入するまでの教材･授業案を構想したい．その際，次章で述べる教授学的状況理論を援用することとした．

## ３．教授学的状況理論の概要

教授学的状況理論（Theory of Didactic Situations, 以下TDS と呼ぶ）は，フランスを起源とする数学教授学の理論の一つであり，Brousseau（1997）によって構築された理論である．この理論は，そもそも生徒が数学知識を学習するとはどういう状況のことなのか，そのような状況において教師の役割とは何か，またどういった状況であれば学習が進んでいるといえるのかといった事柄を分析・説明するために，教授学習の場面をモデル化する．具体的には,「生徒をとりまき，また生徒が対峙する数学的知識に関わるもの」を指す「ミリュー（milieu）｣,「学習者｣,「教師」という三者の関係によって，教授学習の場面をモデル化する（宮川，2009；濵中・加藤，2014）．しばしば,学習者はミリューに働きかけることによって，ここからフィードバックを得る．実際，ミリューは矛盾や困難，不均衡を生成することがあるが，TDS では，主体である生徒はこうした不均衡を生成するミリューに適応しながら学習する，という「学習の前提」をおき，それこそが「学習」であるとするのである．しかしながら、学習者とミリューだけの学習場面では，生徒が十分な知識をそこから引き出すことは想定できないがゆえに，生徒とミリューが適切な相互作用を引き起こすように働きかけることを教師は求められる．そこで，生徒が適切にミリューに働きかけ、そこからのフィードバックをうけて適応がうまく進むように教師が介入し、その際，生徒にとっては、教師ではなく適応の対象であるミリューと対峙していると感じさせるような教授の状況を、「亜教授学的状況」とよぶのである．

また，教授学的状況理論で用いられる学習過程に関する概念に「委譲」と「制度化」があり，これらは授業設計において重要な概念となる．Brousseau(1997)は､｢「委譲」は、学習者に環境（ミリュー）との相互作用を起こさせるために、つまり亜教授学的状況を生じさせるために、ある問いや課題に対する“責任”を学習者に移す過程」であると述べている（訳は宮川（2009）による)。つまり委譲とは，学習者を何らかの文脈において学ぶべき知識に出合わせることで、課題と対峙する責任を生じさせるような過程であり､「制度化」は、その逆に「得られた数学の概念や定理、定義などを脱文脈化（decontextualisation）･脱人間化（depersonalization）し、より形式的な知識とする過程である」とされる。授業設計では，委譲を引き起こすような課題を設定したうえで，適切なタイミングで制度化を行い，その知識をもとに次の委譲のステップに移行することが重要となる．

## ４．対数の導入授業の提案

後藤（2014）の提案する授業においては，生徒は細菌が増殖する際の時間と細菌の個数の関係の表をミリューとして参照し，そこからフィードバックを得て学習を進めていると考えられる．その点において，後藤の提案する表を用いた学習場面の再設計や分析に，教授学的状況理論の枠組みが援用可能であると考えた．

### ⑴　後藤の授業案からの改善・その後の展開

まず，後藤（2014）の提案している「指数関数に従属せずに対数を定義する」とはどういうことかを考察しよう．高校の教科書では多くの場合，はじめから指数関数のグラフを参照し，$M = a^p$のとき $p = log_aM$ とする，と定義される．つまり，このような定義を行う根拠は指数関数にある．もし指数関数の逆の対応（つまり逆関数）はどのような関数になるだろう，それはどのような性質

を持っているのだろう，という問いに生徒が数学的好奇心を掻き立てられ，これを委譲として学習が進むのならそれでいいであろう．しかし，多くの場合にそれは望めないのではないだろうか．そもそも，指数関数を実数上で定義される連続関数として導入するまでには多くの理論を重ねている[1]．いきなり指数関数を持ち出して，その逆対応として対数を導入するのではなく，後藤（2014）のいうように「とらえさせたい対数のよさと自然に結びつく問題を生徒が解決していく活動を通して」，対数の存在や性質に気づかせながら導入を行いたいのである．

そのように考えると，細菌の増殖に関する表（図１）を用いて，表の下の数に対応する上の数を求める，という活動はまさに生徒が具体的な数値やその間の関係に触れながら対数の概念や性質に気づくことができるという導入展開となっているだろう．しかしながら，後藤（2014）の授業提案の段階②では「12時間後の細菌の個数を考える」活動となっており，これはむしろ表の上から下への対応を考える活動となっている．これを下から上への対応をより意識する導入へ変更していきたい．そこで，ここでは「細菌は１時間ごとに２倍に増殖する」という同じ前提のもとで，代替の発問として「細菌の個数が１万倍以上になるのはいつか」という問いに変更する．この問いの解決では，具体的な作業としては上から下の計算を行いながら，下の段が１万倍を超えるのは上の段がいくつになったときかという視点が意識される．また後述するように，この問いの設定は実践を通して対数のよさを感じさせることにも貢献しているのである．

ところで，後藤（2014）の実践のアイデアは対数の真数が２のべき乗の場合のみを想定しており，その後，対数を導入するには，底を２に限定したとしても，任意の正数 $x$ に対する $\log_2 x$ を考える場面まで展開する必要がある．そのことを踏まえ，本稿では具体的な授業の提案として，２時間の授業によって構成される授業案を構想する．後藤のアイデアからの改善を第１時とし，真数が一般の正の数である対数を扱う場面は，第２時で扱う．ただし，２時間の授業全体を通して，同じ題材である細菌の増殖を扱うものとする．

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 | 16384 |

図１　経過時間と倍数

### ⑵　具体的な授業の提案とアプリオリ分析

本節では，前節の改善点を踏まえて，後藤（2014）の授業のアイデアをもとにした授業案を次に示していくとともに，アプリオリ分析として生徒の予想される反応も加えていく．

#### ①第１時：２のべき乗に対する対数

本時のねらいは，等差数列と等比数列の表において，かけ算やわり算がそれぞれ足し算や引き算に変換される仕組みがあることを理解させること，またそこから対数を考える意義や log を導入する意義を理解させることの２点である．

まず，「１時間ごとに２倍に増加する細菌を考える」という前提を示し，「課題１：細菌の個数が１万倍以上になるのはいつか」という問いを班に分かれて考えさせる．この課題に対して，生徒は等差数列と等比数列の表を作成して考えることや，不等式から$2^n$が10000を超えるような $n$ を探すことが考えられる．いずれにせよ，班活動の結果をいくつか参照しながら，ここでは図１のような数表を黒板に作成し，全体で共有する．そして，これがこの後の学習におけるミリューとなることを期待する．

表１：第１時の展開

| | |
|---|---|
| 【前　提】 | ある細菌は，１時間経過する毎に２倍に増殖する |
| 【課題１】 | 細菌の個数が１万倍以上に増殖するのはいつごろか |
| 【課題２】 | 細菌の個数が32×64倍になるのは何時間後か |
| 【課題３】 | ⑴　16×32倍になるのは何時間後か<br>⑵　$16^3$倍になるのは何時間後か |
| $\log_2 M$ の記法の導入とその性質の協定 | |
| 【課題４】 | 次の値を求めよ<br>⑴　$\log_2 2$　　⑵　$\log_2 8$<br>⑶　$\log_2 8^5$　　⑵　$\log_2 1$ |
| 【課題５】 | 次の値を求めよ<br>⑶　$\log_2(4096\times32)$　⑵　$\log_2(4096\div32)$ |

その後に「課題２：細菌の個数が32×64（倍）になるのは何時間後か」という問いを提示し，班で考えることを促す．この課題に対しては，後藤（2014）の実践で観察されているように，32×64を計算して，結果をひたすら２で割る生徒もいると考えられる．他にも，指数関数の考え方から，$2^5\times2^6=2^{11}$と答えを求める生徒もいるだろう．ただし，ここではミリューとして図１の表があるため，表を参照して計算結果を確認することも可能であり，また何らかの性質に気づけば，他の数値で計算し性質を確認することもできる．そこから，生徒が「下の段の掛け算が上の段の足し算になっている」という気づきに至ることを期待する．この授業では，細菌の増加という仮想的で非現実な題材を扱っており，現実への応用という文脈は乏しい．むしろ，「掛け算が足し算に対応す

る」というこの表のもつ数学的な不思議さを数学的文脈として与え，委譲の過程を促したい．また，表の下から上への対応の「$M$ 倍に増加する時間を考える」ことは，$M$ が２の何乗になっているかを考えることに等しいという理解，つまり対数の考え方を，指数関数を経由せずに強調していく．そしてクラス全体で答え合わせを行い，この気づきを共有する．

そして課題２で得られた気づきを基にして「課題３：16×32倍，$16^3$倍になるのは何時間後か」という問いを与える．ここでも主たるミリューである図１の表を参照したり，自分で実際に計算したりして，結果を出すであろう．こうした活動を通して，表の下の段から上の段への対応，つまり対数の考えが意識されることを期待している．この課題３を通して，「与えられた数 $M$ は２の何乗か」を考える対応には良い性質があることが顕在化してくることを期待する．このタイミングで委譲の過程から，制度化へと移る．つまり，「$2^n = M$ のとき $n = \log_2 M$ と表す」という log の定義を導入する．その後，課題３の解決から見出される性質を

$\log_2 MN = \log_2 M + \log_2 N$ ,$\log_2 M^p = p\log_2 M$

というように log の記号を用いて表現しなおして示す．そして，log という表記方法とその定義に慣れさせることを目的として，課題４・課題５（表１）を提示する．

**②第２時：一般の正数に対する対数**

第２時は，前時の「与えられた数 $M$ は２の何乗になっているか」という対数の理解と，すでに学習した指数関数の知識をもとにして，２のべき乗以外の正数 $M$ に対しても対数の考えを適用する文脈，つまり新たな委譲の過程を与えていく．

最初に，前時の振り返りを行い，$\log_2 M$ の意味と性質を確認する．そこでは $\log_2 M$ には便利な性質があったが，$M$ が２の自然数乗の数ばかりを扱っていたことをふまえ，「課題６：細菌の個数が３倍になるのはいつか」という問いかけを行う．１時間経つと２倍，２時間経つと４倍ということは，これまで表で確かめているため，その間のどこかであると生徒が考えることが予想されるが，表では解決できない．そこで，ここで初めて既習である $y=2^x$ のグラフを配布する（図２）．第２時では，このグラフが主たるミリューとなるのである．

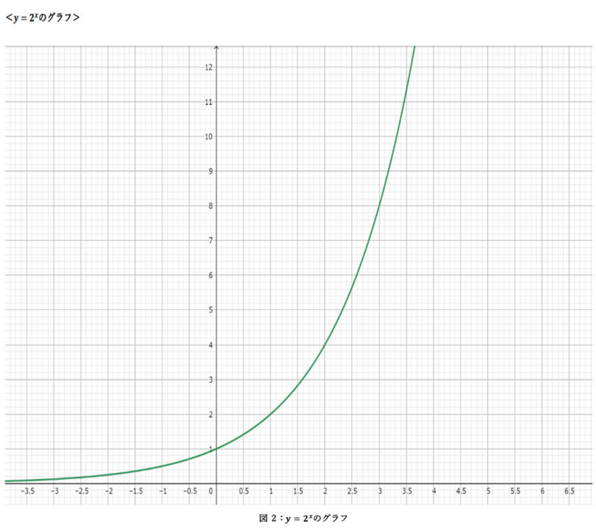

図２：$y=2^x$ のグラフ

このグラフは $x$ 軸が0.1刻みで読み取れるようになっており，このグラフから３倍になるのは，つまり $3=2^x$ となるのは，ほぼ1.6時間後であることが読み取れる．ここで前時の log の考えが自然に拡張され，$M$ が正の数であれば，$M=2^a$ となる実数 $a$ があることから，３倍になる時間を $\log_2 3$ と表すことが協定され

$$\log_2 3 \fallingdotseq 1.6$$

が確かめられる．

そしてここで「課題７：$\log_2 6$，$\log_2 9$，$\log_2 12$ の値はどれくらいか」という問いを提示する．6, 9, 12は先ほど考えた真数の３の倍数であるため，こうした値を考えるのは自然であろう．実際，ミリューであるグラフからこれらの数値を読み取ることができる．読みとった値は，

$\log_2 6 \fallingdotseq 2.6$，$\log_2 9 \fallingdotseq 3.2$，$\log_2 12 \fallingdotseq 3.6$

となるが，これらの値には規則性がある．実際，$\log_2 3$，$\log_2 6$，$\log_2 12$ の値は１ずつ増えており，$\log_2 9$ の値は $\log_2 3$ の２倍となっている．こうしたことに生徒が気づくことを期待するが，そうでない場合には「コンピュータで読み取った正確な値はこうなる」と言って小数点以下第４位くらいまでを示せば，小数部分が同じものが多いこと等から上の事実に気づくであろう．これがミリューからのフィードバックとなる．こうして，読み取った値に意外な規則性が発生することが，新たな数学的文脈を生み，本時における委譲の過程となる．そして「課題８：なぜこのような規則性があるのだろう」という問いに自然と進む．考えられる生徒の反応としては，$\log_2 2$ と $\log_2 3$ の値がわかっていることから，前時の log の性質を真数が２のべき乗でないときにも用いて課題８を解決しようとすることである．また，課題３において得られる対数の性質

$$\log_2 MN = \log_2 M + \log_2 N$$

を，細菌が８倍になるには，２倍になったあと４倍になればよいから，８倍になる時間は２倍になる時間と４倍になる時間を足した時間になるというように理解していれば，同様の考え方で $\log_2 6$ と $\log_2 12$ について考えることが考えられる．

こうした活動を通して，前時で得られた底が2の log の性質を，真数が2の自然数乗でない場合に一般化し，2度目の制度化を行う．またその性質を用いて，「課題9：

表２：第２時の展開

| |
|---|
| 【課題６】細菌の個数が３倍になるのはいつか |
| 正の数 $M$ に対して $\log_2 M$ が定まることの協定 |
| 【課題７】$\log_2 6$，$\log_2 9$，$\log_2 12$ の値はいくつか |
| 【課題８】課題７で見られた規則性はなぜか |
| 正の数 $M$ に対する $\log_2 M$ も前時と同様の性質をもつことの協定 |
| 【課題９】次の値を求めよ (3) $\log_2 10000$　(2) $\log_2 10^{10}$ |

$\log_2 10000$を求めよ」という問いを提示する．今回与えたミリューであるグラフから $\log_2 10$が読み取れるため，対数の性質が理解できれば，$\log_2 10000$を容易に求められる．この問いを通して，前時の導入部分では求められなかった，「細菌が10000倍になる時間」を対数の計算により容易に求められるようになるため，生徒が対数のよさを実感できることを期待する．

以上２時間の授業において，情報をクラスで共有する場面以外は，なるべく班別の学習活動とする．その方が生徒同士の発言が生じやすく，亜教授学的状況が実現しやすいと考えたためである．

## ５．対数の導入授業の実践結果の分析

前章で提案した授業の実践を，兵庫県の公立高校において，2020年10月29日第５校時，10月30日第２校時の２時間に渡り，第２学年の文系の生徒28名を対象に実施した．本章では，この実践について結果と分析を述べる．

授業者は第２著者であり，授業時間はそれぞれ50分である．また，授業は第１著者を含む複数の教員が参観し，班別の活動においては，多くの教員がその生徒の活動に介入している．分析対象となるのは，データとして収集したクラス全体の様子を写したビデオ記録，及び各班に１つずつ設置したボイスレコーダーの記録である．

実際に生じた実践の結果を参照するアポステリオリ分析では，授業で提示した課題に対する班での解決活動のプロトコルから，(1)アプリオリ分析と異なっていた事項，(2)亜教授学的状況の分析，(3)今後の改善に向けて示唆の得られた事項の3点について述べていく．

### (1)　アプリオリ分析と異なっていた事項

課題１「細菌の個数が１万倍以上に増殖するのは，いつごろか」に対してある班では，「$2^n$が10000超えればいい」ことに気づき，これを不等式$2^n$>10000に表したものの，具体的な $n$ の値について$2^n$を求めていくことに対しては，「数学的な解決の方法じゃないから，ちょっと嫌や．ごりおしで攻めとるから，ちょっと嫌」と難色を示していた．このように「数学的な解決の方法」を求めて具体的な２のべき乗の計算を嫌う傾向はアプリオリ分析では予測していなかった．一方で，ここで生徒が求める「数学的な解決の方法」こそ，第２時の最後に与えた対数を用いた方法であり，この最初の活動が対数のよさを感じさせる素地にもなっていたことがうかがわれる．

### (2)　亜教授学的状況の分析

32×64倍になる時間を求める課題２において，ある班は誤った考えに陥りながら，ミリューとなる表からフィードバックを受けつつ学習を進めていた．その班のプロトコルを次に示す：

Sh：さっきの使われへんのかなあ．さっき32時間後と64時間後が，ちゃう64ちゃう．32倍と64倍のときが５時間後と６時間後やから，なんか，かけるかなんかって．わからんけど．
（中略）
Na：２の30があの倍数になるんですかね…
参観者:２の30乗になるん？お,彼32×64計算しとんか？
Sh：え…2048…ってことは，10番目や．
参観者：あそこ（黒板）に表があるからな．10番目ちゃうんちゃん．
Sh：あ〜，11や．んな足しか．
Na：足すんやな．
Ta・Ur：うん？わからん．
参観者：なんで足すん？
Sh：2048時間…2048倍になるから，11になって，なぜこうなるかって感じやな．でも５と６が出とるから，最初かけてやろうとしたけど，で30時間後にしようと思ったけど，ちゃうかったから，足したときにちょうど同じやったから，…なんでそうなるんかわからん．
（教科書を開く）
Na：あ〜，これか．やから２の５乗と２の６乗は，その，指数の足すになるから．

はじめは「倍」の数である32×64が積になっているため，誤ったアナロジーから「時間」も積になると類推し，確信しかけていたが，助言を受けて，課題１で作成した表を参照し，自分たちの類推が誤っていることに気づいた．しかし自然な類推とは異なるフィードバックに対し，なぜ時間は足し算になるのか，という疑問が強く生じた．この不均衡に適応するべく，生徒たちは「時間」と「倍」の関係に考えをめぐらせ，教科書を参照し，指数法則によって説明ができることに気づいたのである．このように，誤った類推を行いながらも，ミリューと相互作用することで学習が進んでいる様子が見られた．つまり，この場面において，亜教授学的状況が生じていたことがうかがわれる．

また，課題４では細菌の問題から脱文脈し，log の計算ができることを目的としていた．次に示すのは，課題

４を解こうとしている Ku と，すでに解き終わった Ka のやりとりである：

Ku：($\log_2 2$を指しながら）これどうやって求めたん？
Ka：ん？ $\log_2 2$って，２が底やん．２は，これって何乗したん？２を．
Ku：０，１．
Ka：１，だから１，終わり．はい次．
（中略）
Ku：($\log_2 1$を指しながら）これってさあ，０を２乗したら１やからってこと？（言い間違えで「２を０乗したら１」といったつもりと思われる）
Ka：そう．１，２の何乗かっていったら，２の何乗，うん合っとる合っとる．
Ku：うん？２の０乗が１？
Ka：２の０乗が１やから，ここ１でいいねん．

高校の教科書には，

$$\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$$

といった式が提示されているが，こうした式の意味を自分たちで（指数関数の逆関数としての）対数の定義から考えたり確認したりすることは稀のように感じる．しかし，Ka や Ku の発言（プロトコル37，41，42）のように，生徒たちは「真数が底の何乗になっているか」という対数の定義を細菌の増殖という問題場面を通して理解し，その定義を場面から抽出して受け入れている．それゆえに $\log_a a = 1$，$\log_a 1 = 0$ といった式を無意味な公式として扱うのではなく，定義に基づいて考え，計算している様子が見受けられる．

さらに，課題７，８においては，指数関数のグラフをミリューとしつつ，$\log_2 3$，$\log_2 6$，$\log_2 9$，$\log_2 12$の値の正確な近似値（小数点以下第６位まで）を与え，これらの値の関係，つまり「真数を２倍したら対数は１増える」，「真数を２乗したら対数は２倍になる」という規則性やその理由について考察した．次に示すのは，ある班において前述の規則性を見つけるまでのプロトコルである：

参観者：なぜ３から６になったらプラス１で，６から12になったらプラス１になるんだろうね
Kr：あ！待って！
Sa：２倍ちゃん？
Kr：そう！２倍して，２倍して，ってことは９からやったら18のときにプラス１や．
（中略）
参観者：じゃあグラフで $\log_2 5$と $\log_2 10$も読み取ってみたら？せっかくグラフがあるんだし．
Kr：たしかに．$\log_2 5$は，ここ．2.3．
参観者：うん．$\log_2 10$は？
Ko：10のとき…3.3
Kr：2.3と3.3
Ko：１増えたで．
Kr：１増えたな．
Ma：おおほんまや．２倍やん．
Kr：じゃ２倍のときは１増える．
（中略）
Kr：あ～～！×２になるときは，３の２乗や．これ２倍やんか．２乗したら×２
Sa：じゃあ６の２乗…あ～やりにくいか．６の２乗36．（グラフを参照しようとする）

上記のように，はじめは参観者の発言を受けて，$\log_2 5$ と $\log_2 10$，などの値をミリューとなるグラフから読み取り，対数の性質についての自分の予想を確かめる活動を行っている．その過程で，生徒の中では予想が確信に変わっていったことが読み取れる．またその後，Ku が「真数を２乗したら２倍になる」ということに気づいた際には，Sa の発言に見られるように，他の値でも成り立つことをグラフで確認するというミリューへの働きかけを自ら行おうとしており，ミリューとの主体的な相互作用がうかがわれる．

### ⑶　今後の改善に向けて示唆の得られた事項

この授業では複数の教員が班活動を見守り，適宜助言していた．班別の学習活動においては，こうした机間巡視の際の発言が学習状況に大きな影響を及ぼす．最後にそうした机間巡視中の参観者の発言の影響について事例を挙げて考察する．

課題８では，$\log_2 3$，$\log_2 6$，$\log_2 9$，$\log_2 12$の値の関係について「どうして $\log_2 3$と $\log_2 6$と $\log_2 12$は１ずつ増えているのか」，「どうして $\log_2 9$は $\log_2 3$の２倍になっているのか」を考えたが，ある班では奇妙な考え方が共有されていた．それは，「真数が奇数だったらかける．偶数だったら足す」という考え方である．この生徒の考えをみた参観者の一人が，正解に近い発言を残していったが，生徒はその内容をうまく理解できず，結局自分たちのもとの考え方に沿って話を進めていった．このときの参観者の発言は，数学的に正しい内容ではあるが，生徒の思考と沿っていないため，学習者は誤った思考を修正できなかった．その後，この班に別の参観者が近づいてきて，以下のように対応した：

Si：３の〇乗かに関係しているものはかける〇，それ以外はプラス１．
参観者：それ以外とは？
Si：６は何乗でもない．９は３の２乗やから×２．12も何乗でもないから＋１．
参観者：何乗でもない時はやまほどあるよ？７とか８と

か.
班員：あぁ，そっか.

このように参観者は生徒の考えを直接否定せず，また，正しい結果を述べるのでもなく，生徒の考えの曖昧さが顕在化するように，生徒の考えを進めて見せているのである．この会話により生徒たちは自分たちの考え方に誤りがあることに気づき，正しい考えへと進めることが出来た．このように，生徒の主体的な学習活動を促すには，生徒の考えに接する際，その考えの良否の判断から入るのではなく，生徒の考え方に寄り添い，生徒が自身で間違いに気が付けるような発言を返すことが重要であることが示唆される.

## 6．まとめと今後の課題

本稿で提案した授業の特性としては次の３つが挙げられる．一点目は，後藤（2014）のアイデアに基づき，対数の定義が細菌の増加という文脈にそって示されることである．実践ではその結果として，公式化してしまいかねない $\log_2 1$といった値についても，生徒がみずから定義に基づいて考察している場面があった．二点目として，授業の開始時には具体的に２のべき乗を計算していくしかなかった細菌の増加時間の計算が，最後には学習した対数を用いる数学的処理によって簡明に求めることができるという対数のよさを実感させる展開となっていたことである．そして三点目として，図１の表および指数関数の図２のグラフをミリューとして位置づけ，班別の学習活動において亜教授学的状況の実現を図ったことである．その結果として，授業の一部において亜教授学的状況の実現がなされていたと考えられる.

しかしながら，こうした班別の学習活動はそこに加えられる指導者の介入に大きく左右される．特に，教師は，生徒の考察の良否の判定者ではなく，生徒の考察を聞き一緒に考える助言者としての立場で介入することの重要性が実践からはうかがわれた．今後とも他の指導内容においても，適切なミリューの設定および生徒の学習活動へのかかわり方を図り，生徒の能動的な学習を実現する授業を開発していきたい.

註：

1．実際，$2^{\sqrt{2}}$ のような数の厳密な定義には実数の完備性の議論が必要で高校の数学では説明を曖昧にせざるを得ない部分を含む.

付記：

本研究は，JSPS 科学研究費補助金（課題番号18K02527）の助成を受けています.

引用および参考文献

梅田英之，熊倉啓之（2017）.「高等学校数学科における「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の学習指導」.『静岡大学教育実践総合センター紀要』，No.26，pp.35-44.

後藤竜太（2012）.「対数教材の指導系統の改善に関する考察―対数のよさを実感する学習を志向して―」.『上越数学教育研究』，第27号，pp.151-158.

後藤竜太（2013）.「対数のよさを実感する対数学習に関する再考察―学習指導要領と教科書の変遷をもとに―」.『上越数学教育研究』，第28号，pp.119-130.

後藤隆太（2014）.「対数のよさを実感する対数学習の構築」.『上越数学教育研究』，第29号，pp.21-32.

濱中裕明，加藤久恵（2014）.「高校における構造思考の数学的活動に関する考察―教授学的状況理論の視点から―」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第20巻第１号，pp.133-141.

宮川健（2009）.「フランスを起源とする数学教授学の「学」として性格～わが国における「学」としての数学教育研究を目指して～」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，Vol.94, pp.37-68.

Brousseau (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.